КВАНТ
ЖУРНАЛ

1990

1 - 12

НОМЕР
1

Квант 1 1990

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 «Кванту» — двадцать лет
7 *П. Капица.* О сверхтекучести жидкого гелия II
15 *Л. Асламазов.* Снежные заносы
16 *Н. Васильев.* Метрические пространства
24 *А. Стасенко.* Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха
30 *Д. Фукс.* Лента Мёбиуса

Задачник «Кванта»

38 Задачи М1201 — М1205, Ф1208 — Ф1212
40 Решения задач М1176 — М1180, Ф1188 — Ф1192
47 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

49 Задачи
50 *А. Савин.* Камушки и шахматная доска

Школа в «Кванте»

54 *В. Дубровский.* Шесть доказательств теоремы о медианах

Лаборатория «Кванта»

57 *В. Драчев, А. Мазур.* Фотокамера «Рыбий глаз»

Математический кружок

59 *М. Башмаков.* О постулате Бертрана

Практикум абитуриента

63 *И. Слободецкий.* Электрические машины постоянного тока
68 **Варианты вступительных экзаменов**

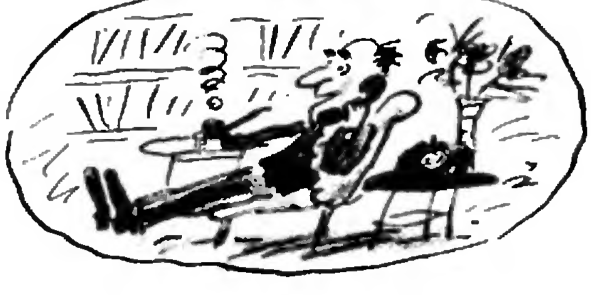
Информация

72 Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
74 Избранные задачи Ленинградской городской математической олимпиады 1989 года
75 Компьютерный турнир XXIII Всесоюзной олимпиады по математике
76 **Ответы, указания, решения**

Наша обложка

1 *Двести сорок первая 1-я страница.*
2 *Репродукция картины Макса Эрнста «Au premier mot limpide» (1923). Мы не беремся за точный перевод авторского названия, а от себя предлагаем такое: «Отображение двух метрических пространств» (см. статью Н. Васильева).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Солнце».*

© Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1990



Вот Квант, который построил Исаак,
А вот ученица,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

Вот автор статьи — знаменитый ученый,
Который писал ее так увлеченно
Для этой без меры серьезной девицы,
Которая изредка любит хвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А вот рецензент — давний член редсовета,
Который прочел сочинение это,
Представив себя симпатичной девицей,
Которая тщетно мурыжит страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.

А это редактор, статью эту правивший,
Лишь автора имя на месте оставивший,
Чтоб даже тупейшая в мире девица
Смогла хоть единожды в год похвалиться,
Что все понимает на целой странице
В Кванте, который построил Исаак.

А это художник в глубокой прострации
Пытается выдумать те иллюстрации,
Которые так очаруют девицу,
Что сходу она прочитает страницу
В Кванте, который построил Исаак.

Вот главный редактор — большой
академик,
Он правит (за это не требуя денег),
Чтоб делалось все только так и вот так,
Поскольку он есть этот самый Исаак,
Который по уши влюбился в девицу,
Которая пальчиком тычет в страницу,
Пытаясь понять то, о чем говорится
В Кванте, который построил Исаак.

Это стихотворение было опубликовано в спецвыпуске журнала «Квант», изданном в единственном экземпляре в 1983 году к 75-летию академика И. К. Кикоина. Автор стихотворения — член редакционной коллегии нашего журнала А. П. Савин.

«КВАНТУ» — ДВАДЦАТЬ ЛЕТ

Перед учеными всегда стоит очень важная задача — искать таланты и помогать их быстрому развитию. Первым «инструментом» такого поиска в области физико-математических наук стали школьные олимпиады. В 30-х годах их начали проводить некоторые институты в Москве, Ленинграде, Новосибирске, а в 60-х годах олимпиады приобрели всесоюзный масштаб.

Появились физико-математические школы-интернаты, вечерние и заочные школы. И наконец, новый этап — первый научный журнал для школьников. Идея его издания возникла в 60-х годах и принадлежала молодым ученым, имевшим большой опыт работы со школьниками. Это было время всплеска интереса к физике и математике, вызванного успехами в космосе, бурным развитием ядерной физики, физики твердого тела, ЭВМ.

Зачем создавался журнал? Об этом можно судить, прочитав письмо в ЦК КПСС шести академиков, выдающихся советских физиков и математиков, поддержавших идею молодых ученых. Письмо публикуется с сокращениями.

> *Известно, что наука успешно развивается только в том случае, когда научно-исследовательские институты пополняются хорошо отобранной талантливой молодежью. Чтобы этот отбор был наиболее успешным, нужно уже со школьной скамьи воспитывать у нее те основные черты, которые необходимы для активной научной работы. Этими чертами являются: творческое воображение, смелость и любовь к изысканиям. Развивать их в полной мере сейчас для нашей школы — непосильная задача. К тому же такого воспитания будет требовать только сравнительно небольшая часть наших школьников. Чтобы охватить по возможности все наши школы, надо создать специальный журнал. В отличие от существующих у нас хороших научно-популярных журналов для молодежи, таких как «Техника — молодежи», «Знание — сила», «Наука и жизнь», предлагаемый журнал должен ставить своей основной задачей развитие у школьников творческого интереса к науке и воспитание активного восприятия знаний и умения связывать теорию с практикой. Хотя такое воспитание и следовало бы производить по всем областям естественных наук, сейчас мы предлагаем начать с издания физико-математического журнала.*
>
> *Этот журнал должен быть предназначен для руководства и систематической помощи учащимся в самостоятельной работе по физике и математике. Он должен направлять внеклассную работу, проводимую в предметных кружках школ и домов пионеров, установить непосредственный контакт с учащимися...*
>
> *Для осуществления этой цели журнал должен будет публиковать обширный материал, накопленный в физико-математических школах и кружках при ведущих вузах страны, наиболее интересные и поучительные задачи физико-математических олимпиад, а также все лучшее, что появляется по этим вопросам в зарубежной печати. Журнал также предоставит возможность школьникам публиковать свои статьи, задачи и описания приборов, которые они сами строят...*
>
> *При журнале должна быть создана группа молодых ученых, могущих внимательно вести переписку как со школьниками, так и с их учителями и таким путем направлять и стимулировать со школьной скамьи самостоятельную работу учеников. Журнал мог бы иметь группу инспекторов-консультантов, которые могли бы ездить по школьным кружкам и направлять их работу. Журнал должен руководиться*

редакцией, состоящей в основном своем большинстве из ученых, а не из педагогов.

Во главе журнала должно стоять авторитетное лицо — академик. Желательно, чтобы Академия наук взяла шефство над этим журналом и чтобы он издавался в издательстве «Наука»...

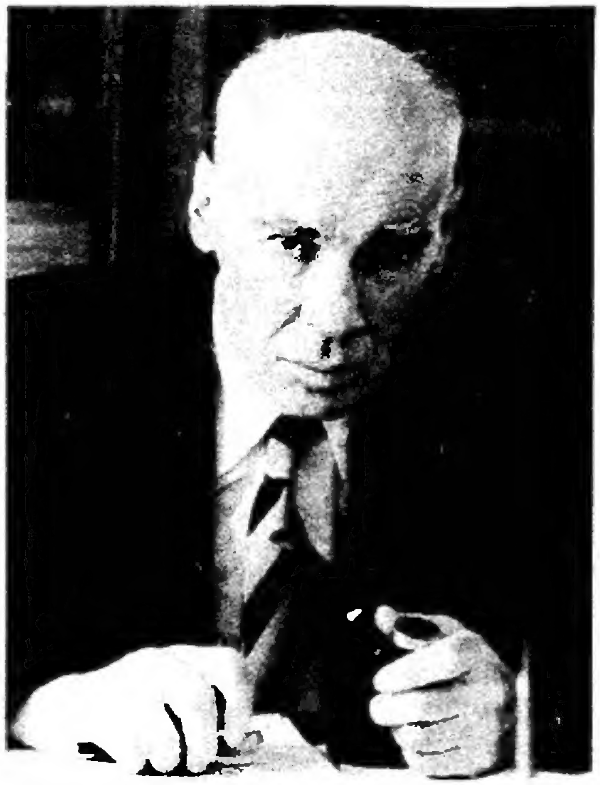
Академик П. Л. Капица
Академик И. К. Кикоин
Академик И. В. Обреимов

Академик М. А. Лаврентьев
Академик А. Н. Колмогоров
Академик П. С. Александров

Почему идея создания научного журнала для школьников нашла поддержку именно у этих ученых? Академики П. Л. Капица, И. К. Кикоин и И. В. Обреимов — физики, воспитанные в знаменитом Ленинградском физико-техническом институте под руководством академика А. Ф. Иоффе. Их учитель стремился вовлекать в науку молодых людей прямо со студенческой скамьи. Недаром его институт шутя называли «детским садом папы Иоффе». Об этой замечательной традиции рассказано в статье И. К. Кикоина «Как создавалась советская физика», опубликованной в 10—12 номерах нашего журнала в 1977 году. (Кстати, свои первые серьезные научные исследования Кикоин выполнил еще будучи студентом.) Подобная традиция сложилась и в Москве в научной школе выдающегося математика Н. Н. Лузина, знаменитой «Лузитании», из которой вышли академики П. С. Александров, А. Н. Колмогоров и М. А. Лаврентьев. Рассказ П. С. Александрова об этой школе помещен в «Кванте» № 10 за 1977 год.

Просьба ученых была удовлетворена — в августе 1969 года было принято решение о создании журнала «Квант». А в начале 1970 года к читателям пришел его первый номер. Главным редактором стал академик Исаак Константинович Кикоин, первым заместителем главного редактора — академик Андрей Николаевич Колмогоров. Оба они выполняли эти функции до последних дней жизни. Трудно переоценить их вклад в создание «Кванта», которому они уделяли огромное внимание — определяли структуру, подбирали редколлегию, искали авторов, внимательно читали статьи, нередко сами писали для журнала.

Почему журнал получил такое название? Идея о том, что электромагнитная энергия излучается и поглощается отдельными порциями — квантами, принадлежит знаменитому немецкому физику Максу Планку. Она проложила путь к созданию квантовой механики, новой области физики, революционно изменившей возможности этой науки. Создатели журнала надеялись, что «появление нового журнала тоже вызовет... заметный скачок вперед в деле приобщения школьников к современной науке»



И. К. Кикоин.

(именно так сказано в обращении к читателям, которым открывался первый номер «Кванта»). А в качестве эмблемы решено было использовать символ h, именуемый «постоянной Планка», которая неизменно присутствует во многих разделах квантовой физики.

Сразу же выяснилось, что писать статьи в наш журнал очень трудно — ведь они должны быть научно достоверными и одновременно доступными для школьников. Если автор статьи — ученый, он, как правило, недостаточно знаком со школьными программами и учебниками, если же он — педагог, то ему трудно представить себе передний край современной науки. Многие из наших авторов — активно действующие ученые, но статьи в «Кванте» обычно — это плод коллективного труда, в который вносят вклад члены редакционной коллегии и сотрудники редакции журнала.

Не сразу сложился современный облик журнала, хотя основные его разделы — общие статьи, «Задачник «Кванта», «Лаборатория «Кванта», «Практикум абитуриента», «Математический кружок», «Олимпиады», «Информация» — идут у нас с первых номеров.

Позднее появились рубрики «Школа в «Кванте», «Информатика и программирование», «Игры и головоломки», «Квант» улыбается» и некоторые другие. В прошлом году возникли еще два раздела — «Р — значит ракета» (рассказывающий о проблемах изучения и освоения космического пространства) и «Есть идея?!» (посвященный физике, математике и эвристике). Конечно, журнал — не учебник, читать его «от корки до корки» совсем не обязательно, а ко многим трудным статьям и задачам можно вернуться позднее.

Мы стремимся к тому, чтобы школьник, подписавшийся на «Квант», получил возможность не просто прочитать интересную статью, но и самостоятельно поработать над его страницами. Как было сказано в самом первом номере, «задачи надо решать, статьи читать с бумагой и карандашом в руках, описываемые опыты надо постараться самим воспроизвести». Поэтому с первых же номеров в «Кванте» публикуется много разнообразных задач. Это задачи в разделах «Квант» для младших школьников», «Избранные школьные задачи», «Практикум абитуриента», занимательные вопросы, задачи, опыты в «Калейдоскопе «Кванта», задачи вступительных экзаменов в вузы... Но особенно важным для нас является конкурсный раздел «Задачник «Кванта», позволяющий вести постоянную переписку с читателями, активно работающими с журналом. Те, кто успешно справляются с этими задачами, награждаются дипломами «Кванта», а победители конкурса приглашаются сразу на республиканские олимпиады. В прошлом году школьники из числа победителей этого конкурса приняли участие в советско-американских летних физико-математических школах, которые проходили в США и СССР. Аналогичные школы намечается провести и в этом году.

Двадцать лет в жизни человека срок немалый, и за это время многие наши читатели прочно вошли в науку, стали

А. Н. Колмогоров.

кандидатами и докторами наук. Вырос и авторитет журнала. Он получил высокую оценку экспертов «ЮНЕСКО» (Организации Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры). Статьи из «Кванта» публиковались во Франции, Японии, Греции, Болгарии, ГДР и других странах.

Регулярно встречаясь с нашими читателями, просматривая письма и ответы на анкеты, мы видим немало проблем, которые журналу придется решать. Многие просят чаще рассказывать об истории науки, помещать больше занимательных задач и других материалов для младших школьников.

Конечно, хотелось бы на страницах нашего журнала предоставить место и научной фантастике, хотелось бы возродить раздел «Рецензии, библиография», представляющий новые научно-популярные книжки по математике, физике, астрономии, космонавтике, кибернетике, возобновить публикации заметок под заголовками «Задачи для исследования», «Спрашивайте — отвечаем». Мы надеемся также чаще рассказывать о приложениях физики и математики, о смежных науках.

К сожалению, годы приносят и неизбежные утраты. Ушли из жизни академики — основатели журнала, один из наиболее активных сотрудников первого состава редакционной коллегии И. Ш. Слободецкий, заместитель главного редактора Л. Г. Асламазов, основатель «Лаборатории «Кванта» Г. И. Косоуров, активный участник «Задачника «Кванта» Б. Б. Буховцев, руководитель раздела «Искусство программирования» А. П. Ершов... Но многие из тех, кто начинал работать в «Кванте» с первого номера, продолжают успешно сотрудничать с журналом — академик АПН СССР В. А. Фабрикант, член-корреспондент АПН СССР В. Г. Болтянский, доктора физико-математических наук М. И. Башмаков, И. Ф. Гинзбург, Н. Х. Розов и Я. А. Смородинский, кандидаты физико-математических наук Н. Б. Васильев и А. П. Савин, В. А. Лешковцев. И мы обращаем к ним слова искренней благодарности.

Этот юбилейный номер в основном состоит из статей, которые уже были опубликованы в журнале. Конечно, нам хотелось бы вспомнить и другие удачные статьи прошлых лет, и мы предполагаем изредка к ним возвращаться.

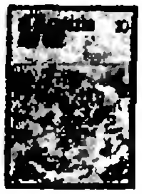
«Квант» — «Quantum»

В США вышел первый номер советско-американского журнала «Quantum» — англоязычной версии «Кванта». На фото (по часовой стрелке сверху): Ш. Глэшоу (США) и Ю. Осипьян (СССР) — главные редакторы. Б. Олдридж — исполнительный директор, Э. Лозанский — международный консультант журнала, Х. Андерсен — издатель (все — США).

Этот доклад был прочитан академиком Петром Леонидовичем Капицей на общем собрании Академии наук СССР в сентябре 1943 года, спустя 5 лет после открытия сверхтекучести жидкого гелия. В конце доклада ученый сказал о некоторых проблемах, стоящих перед экспериментаторами и теоретиками, изучающими это явление. Сейчас эти проблемы уже решены. Экспериментально подтверждено существование в сверхтекучем гелии температурных волн, подобных звуковым (второй звук); исследование критических скоростей течения сверхтекучего гелия привело к открытию удивительного явления — макроскопических квантовых вихрей. Некоторые численные данные, которые автор приводил в докладе, на сегодняшний день уточнены. Однако мы решили не вносить соответствующих изменений в оригинальный текст.

О СВЕРХТЕКУЧЕСТИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ II

Академик П. КАПИЦА



Изучение жидкого гелия и его свойств относится к области физики наиболее низких температур. Это одна из тех областей физики, где стремятся изучать явления природы в крайних условиях. Открытия новых интересных явлений мы можем скорее всего ожидать тогда, когда изучаем природу в крайних допустимых для нее условиях, как например, при исключительно сильных магнитных полях, высоких давлениях, высоких электрических напряжениях и т. д., а также в области глубокого холода, приближающегося к абсолютному нулю. Здесь мы тоже можем надеяться обнаружить новые явления, которые в обычных условиях либо ускользают от наблюдения, либо просто даже не происходят. В этом отношении область температур вблизи абсолютного нуля особенно интересна. Работы последнего десятилетия это подтвердили со всей очевидностью.

Что такое абсолютный нуль температурной шкалы? Последнее определение абсолютного нуля: —273,13 °С. Известно, что абсолютного нуля мы никогда не сможем достигнуть. Обычное, школьное, определение абсолютного нуля говорит, что это та температура, при которой прекращается тепловое движение материи. Но это определение неточно. С современной точки зрения, основывающейся на теории квантов, допускается существование движений при абсолютном нуле. Энергия этого движения ненулевая и определяется тем минимальным молекулярным движением, которое в данном веществе может существовать. Приведу простой пример. Если сильно нагревать вещество, то электроны атомов, которые движутся вокруг атомного ядра по определенным орбитам, будут под воздействием температурных движений отрываться, отлетать, наступит так называемая диссоциация. При охлаждении вещества движение атомов замедляется, электроны начинают опять обращаться по своим орбитам и до самого абсолютного нуля сохраняют свое движение. Но, кроме движения электронов по орбитам каждого атома в отдельности, еще есть целый ряд комбинированных движений в твердом теле, которые с современной точки зрения должны сохраняться до самых низких температур. Благодаря этому так называемому вырождению движения в этой области температур и могут появиться совершенно новые явления, которые мы не можем наблюдать при обычных температурах.

Одно из таких интересных явлений, которое уже приобрело широкую известность, открыто Камер-

---

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 10 за 1970 год.

линг-Оннесом — это явление сверхпроводимости. Оно заключается в том, что при очень низких температурах электрический ток получает возможность течь по некоторым проводникам без сопротивления, без образования тепла. Опыт показывает, что если в замкнутом сверхпроводнике индуктивным путем возбуждается ток, он течет, не выделяя тепла и не убывая, столько времени, сколько экспериментатору удавалось его наблюдать. Другим из таких явлений, которые можно обнаружить только при очень низких температурах, является найденная нами пять лет назад в жидком гелии сверхтекучесть.

Исследования этого и других явлений вблизи абсолютного нуля производятся посредством самого жидкого гелия как холодильного агента. Жидкий гелий — это единственное известное вещество, которое даже при самых низких температурах (вплоть до тысячных долей градуса от абсолютного нуля) при нормальном давлении остается жидким и не переходит в твердое состояние. Его можно превратить в твердое тело только при давлении начиная с 25 атм.

Сам по себе жидкий гелий представляет чрезвычайно интересный объект для изучения.

Гелий сжижается при температуре 4,8 K и образует легкую, раз в 7—8 легче воды, прозрачную жидкость. Из-за небольшой теплоемкости жидкий гелий во время опыта приходится держать за хорошей теплоизоляцией в вакуумном дьюаровском сосуде, еще окруженном другим таким же сосудом с жидким воздухом. Экспериментирование с жидким гелием представляет значительные технические трудности. Это объясняет то, что до сих пор только в нескольких лабораториях холода во всех странах жидкий гелий получается в достаточных количествах.

Если понижать температуру жидкого гелия от точки его сжижения (4,8 K), то, когда мы достигнем температуры 2,19 K, он претерпевает изменения, и принято говорить, что гелий I переходит в гелий II. Эту температуру называют λ-точкой. Находясь в своем первоначальном состоянии, жидкий гелий обычно непрерывно кипит благодаря малейшему доступу тепла, которого трудно избежать даже при наилучшей теплоизоляции. Ниже λ-точки гелий вдруг перестает кипеть, поверхность его становится гладкой; это связано с изменением ряда физических свойств жидкого гелия. Новое состояние жидкого гелия было впервые обнаружено Камерлинг-Оннесом, начало изучаться Кеезомом и оказалось чрезвычайно любопытным.

Кеезом нашел, что гелий II приобретает в этом состоянии большую теплопроводность. Теплопроводность его, изучаемая в капиллярах, оказалась во много раз больше, например, чем у меди или серебра — наиболее теплопроводных металлов. Поэтому Кеезом и назвал жидкий гелий II сверхтеплопроводным веществом. Я повторил опыт Кеезома в несколько измененных условиях и в результате получил еще бóльшую теплопроводность.

Попытка осветить экспериментальные данные на основании современных взглядов на теплопроводность вскрыла глубокое противоречие между теорией и опытом. Я не буду вдаваться в подробное описание довольно сложных теоретических воззрений на теплопроводность... Физическую картину теплопроводности мы можем представить себе так: повышение температуры какого-либо тела в какой-либо точке увеличивает среднюю скорость колебательного движения молекул вещества; при этом тотчас начинается процесс выравнивания — более «горячие», т. е. более возбужденные, молекулы воздействуют на соседние. Процесс последовательного выравнивания скоростей будет распространяться все дальше и дальше от нагреваемого места, т. е. будет иметь место процесс распространения тепла, который мы и называем теплопроводностью. Более подробный анализ, произведенный на основании этих воззрений на теплопроводность, показывает, что для каждого тела в природе есть предельное количество тепла в единицу времени, которое можно через него провести. Оказалось, что такую большую теплопроводность, которая экспериментально была обнаружена в наших последних опытах в жидком гелии II, с помощью этих воззрений объяснить нельзя. Выход из этого противоречия мы можем искать, либо отказавшись от основных взглядов на механизм теплопроводности, которые прочно установились в науке, либо надо признать, что явление теплопроводности в гелии II обязано своим происхождением какому-либо иному механизму.

Как известно, тепло может передаваться не только посредством описанного механизма, как оно распространяется в твердых телах и, как предполагалось, в жидком гелии в узких капиллярах. Тепло может еще передаваться в жидких и газообразных телах посредством так называемых конвекционных потоков. Например, конвекционные потоки в воздухе хорошо известны каждому, вы их неоднократно ощущали, когда держали руку над теплым радиатором. Та же рука совсем не чувствует тепла, если ее держать на этом же расстоянии от радиатора, но внизу, так как здесь нет восходящих потоков нагретого воздуха, которые конвекционным путем уносят тепло вверх. Если интенсивную передачу тепла в жидком гелии нельзя объяснить с точки зрения обычного механизма теплопроводности, то мне думалось, что, может быть, здесь имеет место как раз именно конвекционная передача тепла. Для этого нужно предположить, что в жидком гелии II чрезвычайно легко возникают потоки жидкости, которым и обязана чрезвычайно большая способность гелия II переносить тепло. Подсчеты показали, что такая интенсивность, с которой в жидком гелии передавалось тепло, могла быть осуществлена только такими конвекционными потоками, которые должны течь в этой жидкости с необычайной легкостью. Поэтому по аналогии со сверхпроводимостью я предположил, что гелий II при сверхнизких температурах представляет собой жидкость чрезвычайно текучую, т. е. такую жидкость, которая не имеет вязкости. Оставалось проверить это опытом.

Наблюдать небольшую вязкость, да еще при низкой температуре, оказалось нелегкой экспериментальной задачей. Надо было найти специальный метод для ее измерения. Когда был найден и разработан необходимый метод, то само наблюдение не заняло много времени и показало, что вязкость жидкого гелия действительно исчезающе мала. Жидкий гелий оказался свыше чем в миллиард раз более текучей жидкостью, чем вода. Такую текучую среду очень трудно себе представить, а между тем приведенное число означает предел не вязкости, а только чувствительности наших измерений. Более чувствительного метода мы пока не имеем. Поэтому я предположил, что есть все основания считать, что жидкий гелий не имеет вязкости; я назвал его сверхтекучим. Сначала это встретило большие возражения. Искали в моих опытах экспериментальные ошибки в методике, в измерениях и прочее. Открытие сверхтекучести в жидком гелии, таким образом, всесторонне обсуждалось, и теперь можно, я думаю, считать признанным существование сверхтекучего состояния в гелии II.

Когда это явление было впервые сформулировано, нам казалось, что сверхтекучесть гелия II вполне достаточна, чтобы объяснить большую теплопроводность, наблюдавшуюся в жидком гелии, в соответствии с той картиной существования конвекционных потоков, которую я вам только что набросал. Но дело оказалось гораздо интереснее и сложнее, чем мы думали вначале.

Рассказ о том, как развивались наши взгляды на этот вопрос дальше, представляет некоторые трудности. Я попытаюсь рассказать, с какими противоречиями мы сталкивались, как менялись наши взгляды и как постепенно складывались у нас представления, которые выглядели бы ни с чем не сообразной фантастикой, если бы их изложить вне связи с реальными опытами.

Если стоять на точке зрения наших обычных механических представлений, вполне исчерпывающе описывающих поведение обычных веществ при обычных условиях, то оказывается, что сверхтекучий гелий не может переносить тепло столь интенсивно, как того требуют результаты измерения конвекционных потоков. Мы упираемся в трудность найти механизм, который мог бы вызвать необходимое быстрое течение гелия при конвекции. В обычном механизме переноса тепла конвекцией мы обязаны движением среды тому, что более нагретая жидкость или газ становятся несколько менее плотными, почему стремятся кверху, как бы всплывая в более плотной среде, а более холодные, *более плотные*, стремятся вниз, «тонут». Происходит перемешивание, причем очевидно, что причина, вызывающая движение, это — сила тяжести. Но подсчет показывает, что этой силы в гелии II недостаточно, чтобы вызвать такую большую теплопроводность, которая наблюдалась на опыте. Это делало явление опять непонятным. Надо было искать для его объяснения какие-то другие, новые механизмы. Рядом опытов, наконец, удалось натолкнуться на совсем новый механизм движения гелия II.

Оказалось, что под влиянием разности температур в жидком гелии II возникают очень сильные потоки, несколько напоминающие конвекционные. Под действием разности температур жидкость приходит в движение, но это движение совершенно особого рода, специфичное для жидкого гелия II, не известное ни в какой другой жидкости и ни в каких других условиях.

Прежде чем пытаться объяснить сущность этого движения, познакомимся с его особенностями. Посмотрим, как оно выглядит на эксперименте. Я не буду детально описывать технических подробностей этого эксперимента. Основные его особенности вы можете себе представить из схемы, изображенной на рисунке 1.

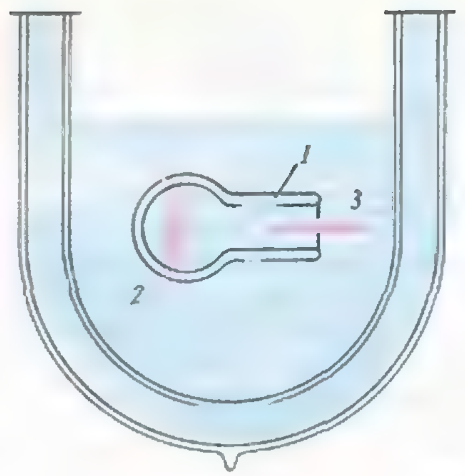


Рис. 1.

В сверхтекучий гелий II погружена колбочка *1*. В широкой части этой колбочки помещена нагревательная спираль *2*, а колбочка открыта с одной стороны *3*. Когда к нагревателю *2* подается ток, около горлышка *3* колбочки обнаруживается непрерывный поток вытекающего из нее гелия. Поток этот может быть обнаружен и даже измерен с помощью легкого крылышка, если его подвесить у горлышка. Поток на него давит и отклоняет его.

Некоторое более эффектное и поучительное видоизменение этого опыта для целей демонстрации было снято на кинопленку (один из кадров которой приводится на рисунке 2). Схема заснятого в действии прибора изображена на рисунке 3. Стеклянный «паучок» состоит из «бульбочки» *2*, снабженной несколькими выводными трубочками, отогнутыми в одну сторону. Таким образом, вся эта конструкция повторяет известное «сегнерово колесо» (только по *внешности*, конечно; *рассмотрев* его, легко убедиться, что у «паучка» нет сквозного протока для жидкости). Бульбочка поставлена на ось из острия иголки *1*. Весь «паучок» погружен в жидкий гелий. Гелий, находящийся в бульбочке, может быть нагрет с помощью пучка света через линзу *3*. Этот пучок света, падающий на зачерненную часть внутрь бульбочки, играет роль нагревателя, которым в предыдущем опыте была

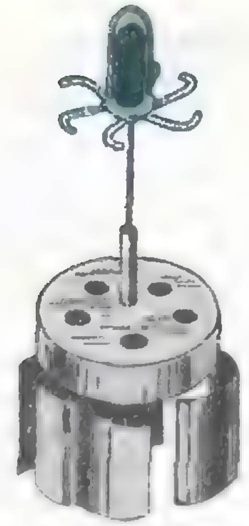


Рис. 2.

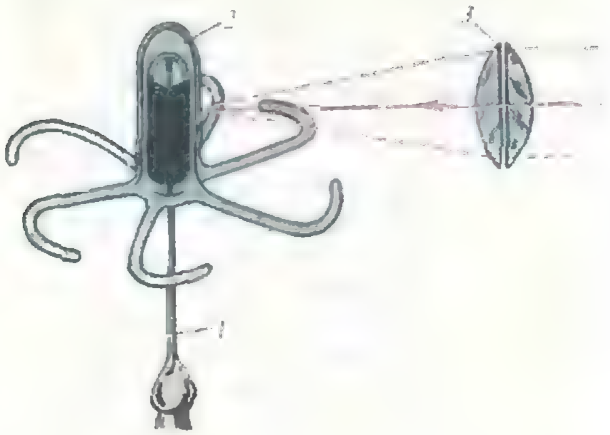


Рис. 3.

спираль. Из трубочек — «ножек паучка»,— так же как из шейки колбочки в предшествующем опыте, при нагревании среднего сосуда происходит непрерывное вытекание струи. Под давлением вытекающих струй вращается весь «паучок».

Съемка этого опыта трудна. Жидкий гелий совершенно прозрачен, и коэффициент преломления в нем луча света таков, что его очень трудно рассмотреть через стекло. Нелегко также проводить эксперимент в условиях общей яркой освещенности, которая необходима для съемки. Поэтому понадобилось значительное искусство кинооператоров московской кинохроники, чтобы эту съемку произвести.

Взглянем снова на рисунок 1. Теперь я обращу ваше внимание на самый большой парадокс этого опыта. Если мы обнаруживаем все время вытекающую из колбочки жидкость и при этом в колбочке не образуется пустоты, это значит, что жидкость должна все время натекать внутрь колбочки. Как же жидкость попадает в колбочку? Не может же она вытекать, не попадая туда. Стенки у колбочки двойные, простенки между ними эвакуированы, и очевидно, что жидкость не может проходить через них. Посредством крылышка, располагавшегося в самых разнообразных положениях у горлышка, никак не удавалось обнаружить существования обратного потока. Поэтому первоначально мы решили, что должен существовать поток вдоль очень тонкого слоя у самых стенок (тогда он не мог бы быть обнаружен крылышком). Но при дальнейших опытах эта гипотеза оказалась недостаточной. Я стал менять условия опыта: вместо колбочки с широким горлом я применял очень узкие щели. Идея этих опытов состояла в том, чтобы по возможности занять все сечение щели обратным пристенным потоком и таким образом попытаться изменить характер наблюдаемых явлений. Щель в этих опытах изготовлялась очень точно из тщательно (оптически) отполированных поверхностей и имела ширину до 0,14 мкм, то есть порядка десятитысячных миллиметра. Но изменений в характере явлений не было обнаружено.

Таким образом, явление становилось все загадочнее.

Перед тем как рассказать, как оно теперь объясняется, я хочу упомянуть еще о некоторых опытах.

Прежде всего позвольте остановиться на понятии обратимости тепловых явлений. Это понятие впервые установлено еще более ста лет назад Карно; оно дает чрезвычайно важную связь между возможностями перехода работы в тепло и обратно. Обратимыми явлениями в термодинамике считаются такие теоретические процессы, когда тепло превращается в работу и обратно — работа

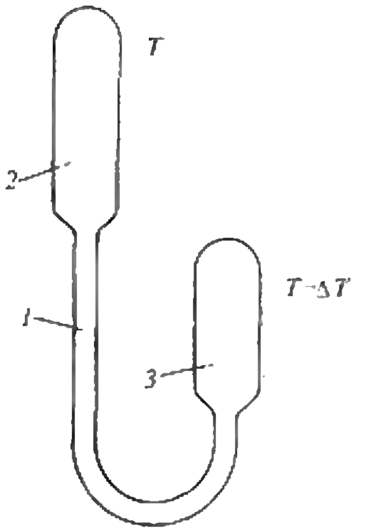


Рис. 4.

в тепло, причем при этом не происходит рассеяния тепла. Полностью обратимых процессов вообще в природе не существует, но к ним можно подходить очень близко. Переход тепла в движение гелия, которое мы наблюдаем, например, в нашем «паучке», надо было в первую очередь изучить и с этой точки зрения. Если разность температур между гелием в колбочке и наружным гелием вызывает движение гелия и если это явление обратимо, то теоретически должно существовать и обратное явление: при вынужденном движении гелия должна появиться и разность температур. Если эти явления обратимы, то они должны быть связаны между собой определенными количественными соотношениями.

В опыте со щелями удалось показать, что при передаче давления, заставляющего перетекать через щель жидкий гелий, действительно возникает разность температур. Удалось количественно измерить все необходимые величины и показать, что все эти явления в жидком гелии II действительно протекают термодинамически обратимо. Если при этом помнить, что гелий II сверхтекуч и что поэтому при его течении нет потерь на трение, то нетрудно видеть, что механизм температурного течения гелия работает с хорошим коэффициентом полезного действия. Таким образом, например, наш вертящийся «паучок» на рисунках 2 и 3 представляет собой машину с хорошим коэффициентом полезного действия. Конечно, никакого практического применения такой механизм иметь не может, и трудно ждать, чтобы когда-нибудь он его получил.

Но тут следует отметить, что это удивительное термодинамическое свойство гелия II, открывающее совсем новый путь к переводу тепла обратным путем непосредственно в механическую работу, не имеет ничего похожего в известных нам до сих пор явлениях природы.

Обратимость термомеханических, точнее термодинамических, явлений в жидком гелии представляется нам чрезвычайно важным обстоятельством и для дальнейшего изучения явлений при низких температурах. Предположим, что у нас есть капилляр *1* (рис. 4) с двумя сосудами на разных уровнях. Между концами его мы создаем разность давлений. Это мы можем сделать, поместив сосудик *2* на конце капилляра выше сосудика *3* на другом его конце. Тогда в результате особых свойств гелия и обратимости процесса у нас на концах капилляра в сосудах *2* и *3* возникает разность температур ΔT. В низком резервуаре *3* гелий II станет более холодным.

Таким образом, у нас есть метод понижения температуры гелия II, который состоит в том, чтобы заставить гелий II течь под давлением. Конечно, рисунок 4 является только схематической иллюстрацией этого принципа, на самом деле опыт, разумеется, сложнее.

Но поскольку это явление остается обратимым до самых низких температур, возникает возможность сделать очень интересные практические выводы. Если проталкивать гелий насосиком или каким-либо другим путем через тонкие капиллярные щели в некоторый объем, то температура в этом объеме ощутительно понизится. Повторяя эту операцию несколько раз, мы получаем метод для понижения температуры сколь угодно низко, и, таким образом, для нас откроется путь приближения к абсолютному нулю сколь угодно близко.

Этот метод имеет важное значение для экспериментатора, поскольку до сих пор не существовало еще метода, даже теоретического, для приближения к абсолютному нулю сколь угодно близко.

Накануне войны мы начали в наших работах развивать этот метод и сделали несколько успешных опытов в этом направлении. Мне удалось этим методом получить понижение температуры на 0,4°. Конечно, получение температур в непосредственной близости к абсолютному нулю новым методом является технически нелегкой задачей, и сразу на его удачу рассчитывать трудно. Тут много технических трудностей, и успех во многом зависит от искусства и изобретательности экспериментатора. Но все эти возможные затруднения не будут означать, что существуют какие-то принципиальные запреты для приближения к абсолютному нулю.

Но перейдем теперь к теоретическому объяснению механизма явления вытекания жидкого гелия из сосудика при его нагревании (см. рис. 1). Как я уже говорил, первоначально я объяснял явление заполнения сосудика гелием течением гелия в обратном направлении в тонком слое. Я предполагал также, что энергетическое состояние гелия II в этом тонком слое отличается от энергетического состояния свободного гелия II и таким образом можно было объяснить кажущуюся большую теплопроводность гелия. Также можно было примерно подсчитать возможную толщину этого слоя так, чтобы скорость течения гелия в нем не принимала чрезмерно большое значение. Далее, как говорилось, я пытался в своих опытах обнаружить толщину этого слоя экспериментально. Для этого я заставлял течь гелий в очень тонком слое. Постепенно я дошел до толщины слоя гелия в 0,00014 мм, но опыт показал, что характер всех явлений при этом сохранился. Таким образом, объяснение пришлось пересмотреть, и это привело к совершенно новым воззрениям на природу гидродинамических явлений в гелии II. Первые наброски этих идей были высказаны Тиссой, но научная разработка их, подведение под них теоретического обоснования и создание гидродинамической теории явления принадлежат нашему ученому Л. Ландау.

Постараюсь дать самую общую картину этих взглядов. Согласно этой теории тот противоток, который я пытался объяснить течением гелия в одном энергетическом состоянии по стенке другого внутри бульбочки, заменяется противотоком гелия, происходящим в самом себе.

Объяснение этого явления, данное Л. Д. Ландау, заключается в следующем.

Жидкий гелий представляет собой как бы смесь двух жидкостей. Эти две компоненты жидкого гелия находятся в двух различных квантовых состояниях. Благодаря этому он показал, что могут существовать одновременно встречные течения одной и той же жидкости, которые мы и наблюдаем в горлышке сосудика на рисунке 1.

Если бы это теоретическое положение не было так полно подкреплено экспериментальными доказательствами, оно звучало бы как идея, которую очень трудно признать разумной.

Теория Ландау хорошо описывает физическую сущность тех двух состояний, в которых гелий может одновременно существовать при температурах ниже λ-точки. Как я уже говорил, если гелий после сжижения продолжать охлаждать, то он будет находиться в состоянии обычной жидкости вплоть до 2,19 К, т. е. λ-точки. Тогда, согласно теории Ландау, в этой жидкости появляется в качестве как бы примеси гелий в новом состоянии. Это новое состояние характеризуется тем, что в нем отсутствует вязкость. Этот гелий представляет собой жидкий гелий II в том состоянии, в каком он был бы весь при абсолютном нуле. Но при всякой другой температуре одновременно с этим состоянием существует как бы смешанный с ним гелий и в нормальном состоянии. По мере понижения температуры концентрация гелия II начинает преобладать. Только при абсолютном нуле весь гелий, согласно теории, должен перейти в сверхтекучее состояние. Эта картина достаточна для описания наблюдавшихся нами явлений. Например, явление, наблюдаемое в опыте с перетеканием гелия из колбочки, изображенной на рисунке 1, объясняется следующим образом. Поскольку гелий в сверхтекучем состоянии не испытывает трения ни о стенки, ни о гелий, находящийся в нормальном состоянии, поток, текущий по капилляру, не создает реакции трения и может как бы незаметно наполнять сосудик *). Наоборот, гелий в нормальном состоянии течет из сосудика с трением, и поток его является обычным потоком жидкости, давно изученным гидродинамикой. Этот нормальный поток и улавливается крылышком, поставленным перед горлышком трубочки на рисунке 1, в то время как идущий ему навстречу поток гелия в сверхтекучем состоянии обычными методами не удается обнаружить.

На основании этой же картины можно объяснить и большую теплопроводность гелия II. Как видно, в сосуд попадает гелий в сверхтекучем состоянии, а возвращается гелий в нормальном состоянии. Чтобы перевести гелий из одного состояния в другое, нужно затратить заметное количество тепла. Такой процесс своеобразной конвекции и создает впечатление большой теплопроводности гелия II.

Все эти явления, для объяснения которых требуется представить себе сложные взаимодействия между двумя различными состояниями одной и той же жидкости в одном и том же объеме, с трудом укладываются в наши привычные рамки даже физического мышления. Чтобы попытаться несколько облегчить хотя бы поверхностное восприятие этой сложной картины механизма теплопроводности гелия II, я позволю себе прибегнуть к аналогии с теми встречными потоками одетых и неодетых людей, которые циркулируют по проходу в раздевалке театра. Одетые будут представлять собой нормальные атомы гелия, получившие около нагревателя («в раздевалке») нужную им энергию, а неодетые — это сверхтекучие атомы гелия. К сожалению, аналогия более чем неполная, так как атомы гелия в сверхтекучем состоянии проходят мимо своих собратьев в нормальном состоянии без всякого взаимодействия, тогда как не получившие пальто никак не могут продвигаться через толпу без сильного трения.

На основании этой картины можно объяснить, почему при протекании гелия II через узкое отверстие или щель появляется разность температур. Так как гелий в сверхтекучем состоянии протекает легче, без трения, через малое отверстие, чем гелий в состоянии нормальном, то получается как бы своеобразная фильтрация. После протекания увеличивается концентрация сверхтекучего гелия, а это соответствует такой концентрации его, которая предполагает более низкую температуру.

Между теорией, развитой Л. Ландау, и экспериментом в основных вопросах существует не только качественное, но и количественное совпадение. Но есть еще и явления, которые не охватываются теорией. Выяснение их — дело будущего. Теория указывает на некоторые явления, такие как наличие сосуществования двух скоростей звука, которые еще не удалось наблюдать в жидком гелии. Теория не учитывает еще критических скоростей, которые в действительности наблюдаются. Но мне кажется, что в основных своих пунктах теория очень близко подошла к существу объяснения этого изумительного явления и представляет исключительно ценный вклад в изучение этого явления. Работа над дальнейшим разъяснением этих явлений представляет большой интерес.

---

*) Поток сверхтекучей жидкости идеально обтекает помещенные в него тела, так что давления перед телом и за ним одинаковы. Благодаря этому крылышко не могло уловить поток сверхтекучего гелия II в опыте, показанном на рисунке 1. (*Примеч. ред.*)

Снежные заносы

Доктор физико-математических наук Л. АСЛАМАЗОВ

Участки железных или шоссейных дорог, проходящие в ложбинах, заносятся снегом, даже если нет снегопада. Почему это происходит? На первый взгляд ответ ясен: снег переносит ветер. Однако чтобы детально разобраться в механизме этого процесса, потребовалось целое исследование.

В 1936 году английский физик Бэнгольд изучал перенос песка ветром в аэродинамической трубе.

Оказалось, что если скорость ветра меньше некоторой скорости v_1, то песок не движется. При скорости ветра, большей чем v_1, но меньшей некоторой другой скорости v_2, песок также может оставаться в покое. Но если при этом в неподвижную массу песка откуда-нибудь падает песчинка, от ее удара подскакивает вверх несколько других песчинок. Эти песчинки увлекаются ветром, падают, приводят в движение другие песчинки, и в результате песок переносится по ветру. При скорости ветра, большей чем v_2, песчинки поднимаются вверх, образуя песчано-воздушный поток довольно значительной, но уменьшающейся кверху плотности. О траекториях песчинок дает представление рисунок 1.

Теперь можно объяснить, почему снег в ветреную погоду заполняет выемки. В месте углубления поток расширяется (это сразу становится видным по картине линий тока на рисунке 2), и поэтому скорость его падает. В результате равновесие между увлекаемыми вверх и падающими вниз частицами нарушается: в углубление падает больше частиц, чем из него поднимается, и углубление постепенно заполняется снегом.

Аналогичные процессы происходят и в том случае, когда снег, переносимый ветром, встречает на своем пути какое-нибудь препятствие, например дерево. Перед стволом дерева с той его стороны, откуда дует ветер, возникает восходящее движение воздуха. Оно приводит к тому, что с наветренной стороны ствола и с боков на поверхности снега образуется глубокая выемка. Перед этой выемкой и немного позади ствола, где скорость ветра меньше, образуется, наоборот, возвышение.

Рис. 1.

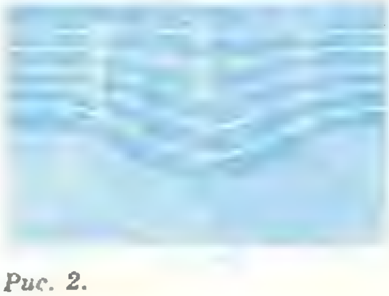


Рис. 2.

Описанное явление используют для защиты участков дорог, проходящих в ложбинах, от заноса. На определенном расстоянии перед выемкой или ложбиной с той стороны, откуда дует ветер, устанавливают забор из дощатых щитов. За щитами образуется спокойная зона с равномерным слабым ветром, в которой полностью отлагается весь увлекаемый ветром снег.

Так же объясняется и движение песчаных дюн. Ветер достаточной силы, набегающий на песчаную дюну, поднимает песок с наветренной стороны. На подветренной стороне, где скорость ветра меньше, песок падает вниз. В результате с течением времени дюны постепенно перемещаются в направлении ветра — «кочуют».

Эта статья была опубликована в «Кванте» № [illegible] за 1971 год.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Кандидат физико-математических наук
Н. ВАСИЛЬЕВ

В этой статье рассказывается о понятии расстояния, которое часто используется в современной математике и как основа для построения общих теорий, и для решения конкретных задач.

В железнодоржном справочнике указано, что расстояние от Новосибирска до Душанбе равно 3895 км; если измерить расстояние между этими городами по карте (или заглянуть в справочник авиационных кассиров), то получится другое число: 2100 км. В этом, конечно, нет ничего удивительного: поезда не могут ездить почти напрямик, как летают самолеты, поэтому железнодорожники и летчики оценивают расстояния по-разному.

Жители большого города вообще редко измеряют расстояния внутри города в километрах. Скажем, если москвича спросить: «А далеко ли от университета на Ленинских горах до Бескудникова?»*) — он, скорее всего, ответит: «Часа полтора»,— и это будет более полезный ответ, чем «28 километров». Например, от того же университета до станции метро «Щелковская» расстояние в километрах больше, а «расстояние в минутах» меньше: туда можно доехать (с пересадкой) на метро не больше чем за час.

«Расстояния», о которых мы сейчас говорили, и обычное расстояние между двумя точками на плоскости или в пространстве обладают некоторыми общими свойствами. Таких основных свойств немного, но уже достаточно для того, чтобы, приняв их за аксиомы, построить содержательную и полезную теорию. Здесь мы ограничимся обсуждением некоторых первоначальных понятий и отдельных примеров.

Аксиомы и первые примеры

Пусть нам дано некоторое множество X. Мы говорим, что на нем *определено расстояние*, если каждым двум элементам a и b множества X сопоставлено некоторое неотрицательное число $\rho(a, b)$ — «расстояние от a до b»,— причем выполняются следующие три условия (см. рис. 1, *а, б, в*):

1°. $\rho(a, b)=0$ тогда и только тогда, когда $a=b$.

2°. $\rho(a, b)=\rho(b, a)$ для любых двух элементов a и b из X («аксиома симметрии»).

3°. $\rho(a, c)\leqslant\rho(a, b)+\rho(b, c)$ для любых трех элементов a, b и c из X («аксиома треугольника»).

Множество с определенным на нем расстоянием («метрикой») называется *метрическим пространством* *). Сами элементы x при этом называются обычно *точками* метрического пространства. На рисунке 2, *а* изображено метрическое пространство из 5 точек; а на рисунке 2, *б* не выполнена «аксиома треугольника» (проверьте!).

Приведем еще несколько примеров метрических пространств.

Пример 1. X — числовая прямая, т. е. множество R всех вещественных чисел. Расстояние ρ определяется по формуле

$$\rho(x, y)=|x-y|. \qquad (1)$$

---

*) Район на севере Москвы.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 10 за 1970 год.

*) Корень «метр» встречается во многих русских словах и происходит от слова metron — метр, размер.

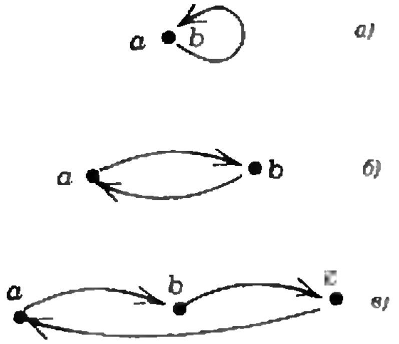


Рис. 1.

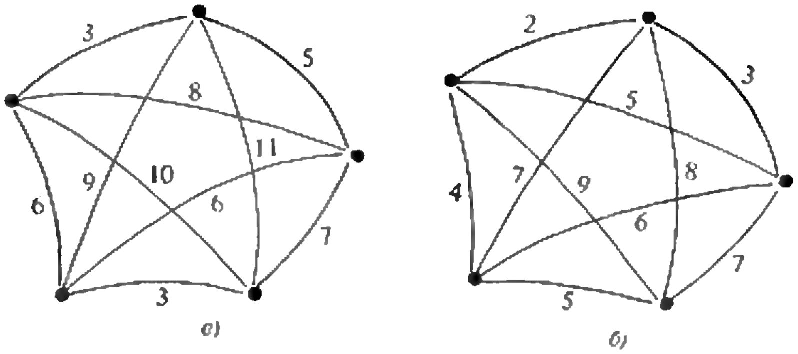


Рис. 2.

Напомним, что $|a-b|=a-b$, если $a\geqslant b$ и $b-a$, если $b\geqslant a$, так что во всех случаях $\rho(a, b)$ равно длине отрезка числовой оси с концами a и b.

Проверьте, что ρ удовлетворяет всем трем требованиям 1°—3°.

В частности, неравенство 3° принимает вид

$$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|. \qquad (2)$$

(Оно обращается в равенство, если b лежит между a и c)

Пример 2 («Метрика Хэмминга»). X — множество слов из какого-то одинакового числа букв. Расстояние ρ между словами a и b — число букв, в которых они отличаются (если их написать одно под другим). Например, ρ(самолет, бегемот)$=6$; ρ(адсорбция, абсорбция)$=1$, ρ(абсорбция, аберрация)$=3$. Похожие расстояния между словами используются в молекулярной биологии. Макромолекулы ДНК и РНК задаются словами из четырех типов химических «букв» — нуклеотидов (а белков — из двадцати «букв» — аминокислот). Сравнивая похожие фрагменты этих «слов», биологи определяют скорость и пути эволюции. При этом используется не только простейшая «метрика Хэмминга», но и более сложные формулы для расстояния, позволяющие учитывать возможность выпадения или вставки отдельных букв, а также степени сходства отдельных букв.

Пример 3, о котором мы уже немного говорили выше. Предположим, что у нас есть план Москвы, на котором перечислены все остановки городского транспорта и для каждого промежутка между остановками указано, за сколько минут проходит этот промежуток автобус (соответственно трамвай, метро, троллейбус). С помощью такого плана для любых двух остановок a и b можно найти величину $t(a, b)$ — минимальное время, необходимое для того, чтобы попасть из a в b (не будем в нашей «модели» учитывать время, затраченное на пересадку с одного вида транспорта на другой и на ожидание). Проверим, выполняются ли для функции t свойства 1°—3°; другими словами, будет ли множество всех остановок X с расстоянием t метрическим пространством. Свойство 1°, как всегда, очевидно; 3° тоже не вызывает сомнений: ясно, что можно ехать из a в c через b, поэтому минимальное время $t(a, c)$ заведомо не больше $t(a, b)+t(b, c)$. А вот свойство 2°, особенно теперь, когда в Москве стало много улиц с односторонним движением, может, конечно, нарушаться.

Проверьте, что для функции

$$t'(a, b)=\frac{t(a, b)+t(b, a)}{2}$$

выполнены уже все свойства 1°—3°.

Пример 4. Пусть X — множество натуральных чисел, p — фиксированное простое число. Положим для любых $a>b$ из X

$$\rho(a, b)=p^{-n}, \qquad (3)$$

где $n\geqslant 0$ — наибольшая степень p, на которую делится разность $a-b$. Это так называемая *p-адическая* метрика, находящая интересные применения в теории чисел; два числа в ней близки, если их разность делится на высокую степень числа p.

Метрики на плоскости

Занявшись несколько экзотическими примерами, мы оставили в стороне самый естественный.

Пример 5. X — множество всех точек плоскости, ρ — обычное расстояние, с которым мы имеем дело в школьной геометрии, т. е. $\rho(A, B)$ — длина отрезка, соединяющего две точки A и B. Свойства 1° и 2° здесь и во всех следующих примерах совершенно очевидны, и мы не будем больше о них говорить. А свойство 3° — не что иное, как утверждение «в треугольнике каждая сторона не больше суммы двух других». При обычном построении курса геометрии это утверждение является несложной теоремой.

Вы, вероятно, знаете, что на плоскости с прямоугольной системой координат Oxy расстояние $\rho(M_1, M_2)$ между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ выражается такой формулой (см. рис. 3):

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \tag{4}$$

Таким образом, то же самое метрическое пространство можно описать без всяких ссылок на геометрию следующим образом: X — множество всех пар (x, y) действительных чисел*), расстояние между парами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) задается формулой (4). Но при этом, чтобы проверить свойство 3°, нужно доказать такое неравенство:

$$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} \leqslant \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2} + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$$

Попробуйте сделать это!

В принципе, все геометрические теоремы можно было бы доказывать на числовой плоскости чисто алгебраически и таким образом построить курс геометрии; но, как видите, доказательства теорем на этом пути не всегда становятся проще — вместо «неравенства треугольника» пришлось бы доказывать довольно хитрое алгебраическое неравенство.

Мы уже говорили о том, что на одном и том же множестве можно по-разному определять расстояния. Вот два примера метрик на числовой плоскости R^2, отличных от (4).

Пример 5′.

$$\rho'(M_1, M_2) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|, \tag{5}$$

т. е. $\rho'(M_1, M_2)$ равно сумме длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy.

Такую метрику можно назвать «метрикой прямоугольного города»: если все улицы на плане города параллельны осям Ox и Oy, то кратчайший путь по улицам от одной точки (x_1, y_1) к другой (x_2, y_2) задается формулой (5).

Пример 5″.

$$\rho''(M_1, M_2) = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\} \tag{6}$$

(запись $\max\{a, b\}$ обозначает наибольшее из чисел a, b), т. е. $\rho''(M_1, M_2)$ равно наибольшей из длин проекций отрезка M_1M_2 на оси Ox и Oy.

Неравенство треугольника в двух последних примерах легко доказывается с помощью неравенства (2). Скажем, для ρ'':

$$|x_1-x_3| \leqslant |x_1-x_2| + |x_2-x_3| \leqslant \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + \max\{|x_2-x_3|, |y_2-y_3|\},$$

$$\text{и}\quad |y_1-y_3| \leqslant |y_1-y_2| + |y_2-y_3| \leqslant \max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|\} + \max\{|x_2-x_3|, |y_2-y_3|\},$$

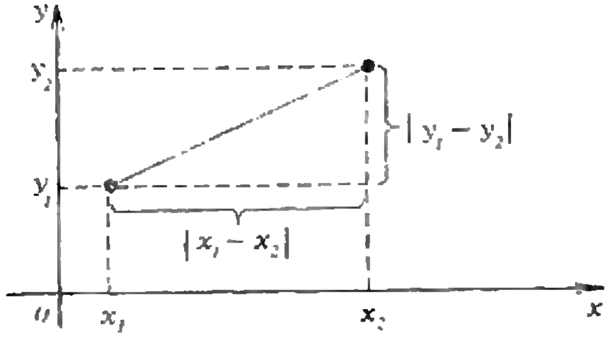


Рис. 3.

---

*) Это множество имеет специальное обозначение R^2 и называется числовой плоскостью.

поэтому наибольшее из двух чисел $|x_2-x_3|$, $|y_1-y_3|$ не превосходит $\rho''(x_1, x_2)+\rho''(x_2, x_3)$.

Точно так же на множестве R^3 всех наборов (x, y, z) из трех вещественных чисел расстояние между точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) можно задать любой из формул

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$
$$|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|,$$

или

$$\max\{|x_1-x_2|, |y_1-y_2|, |z_1-z_2|\}.$$

В первом случае мы получаем обычное трехмерное пространство, которое изучает школьная стереометрия и которое является удобной абстракцией реального пространства, в котором мы живем. Все аналогичные m-мерные пространства также полезны — с их помощью удобно строить теорию функций от m переменных, причем иногда удобнее пользоваться одной формулой для расстояния, иногда — другой.

Расстояния между функциями

Расстояние удобно определяется не только для чисел или точек плоскости и пространства, но и для многих других математических объектов. Вот пример из геометрии. Расстояние между двумя *выпуклыми многоугольниками* M_1 и M_2 на плоскости можно определить так: для каждой вершины многоугольников M_1 и M_2 находим расстояние*) до ближайшей к ней вершины другого многоугольника, и из всех этих чисел берем наибольшее (таким образом, на расстоянии, не большем r, от данного многоугольника M_0 находятся многоугольники M, у которых все вершины лежат в кружках радиуса r с центрами в вершинах M_0, причем в каждом кружке лежит хотя бы одна вершина M); проверьте, что множество выпуклых многоугольников с таким расстоянием — метрическое пространство. Число таких примеров легко можно было бы увеличить.

Но наиболее важные применения, которым теория метрических пространств обязана своим возникновением и развитием, связаны не с геометрией, а с анализом и теорией функций.

Очень часто, чтобы исследовать данные функции или просто вычислять их значения, удобно приближенно заменить их другими, более простыми функциями, скажем, многочленами. Вы, вероятно, слышали, что при x, близком к нулю, $\sin x$ приближенно равен x (здесь $\sin x$ означает синус числа x, т. е. синус угла в x радианов). Еще более точная формула: $\sin x \approx x-\frac{x^3}{6}$. Пусть, например, x изменяется на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$. Как оценить, насколько хорошо функция $f_1(x)=x-\frac{x^3}{6}$ приближает функцию $f_2(x)=\sin x$, как велико «расстояние» между этими функциями?

Одно из естественных расстояний такое: найдем при каждом x разность $f_1(x)-f_2(x)$, возьмем то $x=x_0$, где эта разность наибольшая (по мо-

---

*) Имеется в виду обычное расстояние (4).

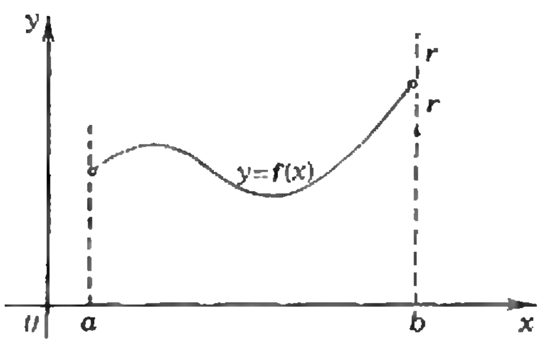


Рис. 4.

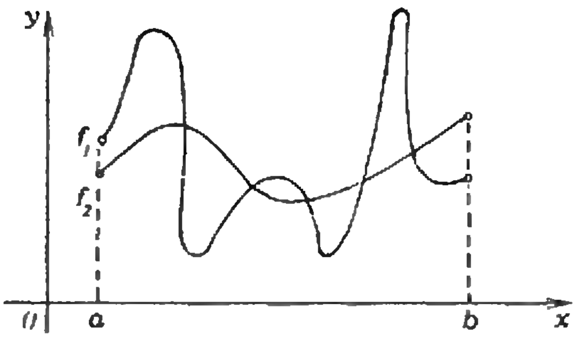


Рис. 5.

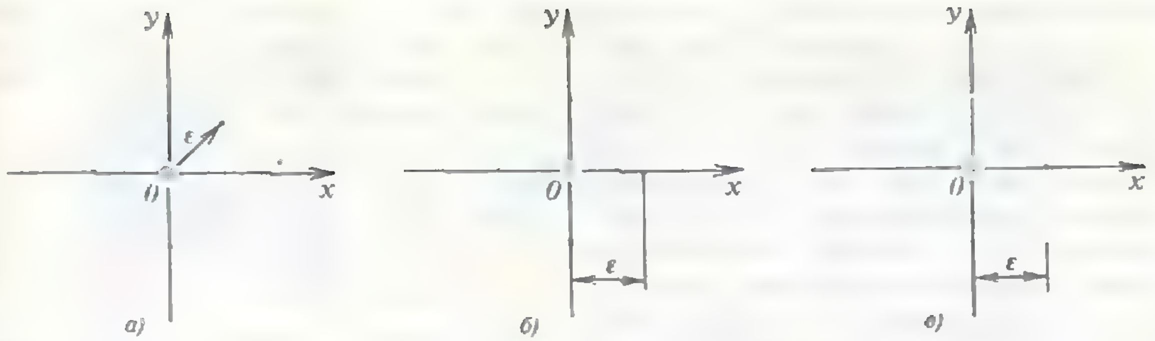


Рис. 6.

дулю), и положим $\rho(f_1, f_2)=|f_1(x_0)-f_2(x_0)|$.

Для наших конкретных функций $\rho(f_1, f_2)=\left|\sin\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^3}{384}\right)\right|\approx 0{,}0025.$

(Можно доказать, что максимум достигается в точке $x=\frac{\pi}{4}$.)

Точно так же в общем случае примем за расстояние между функциями f_1, f_2, определенными на отрезке $[a, b]$, величину

$$\rho(f_1, f_2)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f_1(x)-f_2(x)|. \qquad (7)$$

Проверьте, что аксиомы 1°—3° здесь выполнены! При этом на расстоянии, не большем r, от данной функции находятся такие функции, графики которых лежат в полоске ширины $2r$ вокруг графика функции f (рис. 4).

Очень часто применяются и такие расстояния:

$$\rho(f_1, f_2)=s(f_1, f_2), \qquad (8)$$

где s — величина площади, заключенной между графиками f_1 и f_2 (рис. 5), и особенно такое:

$$\rho(f_1, f_2)=\sqrt{S(f_1, f_2)}, \qquad (9)$$

где $S(f_1, f_2)$ — величина площади, заключенной между графиком функции $y=(f_1(x)-f_2(x))^2$ и осью Ox.

Расстояние (7) мало, когда значения функций f_1 и f_2 близки для всех значений аргумента, а расстояния (8) и (9) показывают, насколько функции f_1 и f_2 близки «в среднем» (на небольших отрезках они могут значительно отличаться друг от друга). Пусть, например, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — потенциалы двух определенных точек электрической цепи в момент времени t; тогда мощность, выделяющаяся на участке цепи между этими точками за промежуток времени $a\leqslant t\leqslant b$, пропорциональна $S(f_1, f_2)$ (если сопротивление постоянно, мощность пропорциональна $(f_1(t)-f_2(t))^2$). А если нам важно, чтобы напряжение $f_1(t)-f_2(t)$ все время не превышало какой-то величины V, то мы должны оценивать расстояние по формуле (7): нужно, чтобы *величина* $\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|f_1(t)-f_2(t)|$ не превосходила V.

Заметим, что мы здесь не даем точных формулировок, что значит «площадь между двумя графиками», и не обсуждаем, для каких функций можно ввести расстояние (7)—(9). Всем этим тонкостям уделяется много места в учебниках математического анализа и функционального анализа.

Несколько определений из анализа

Приведем несколько понятий из *математического анализа*, которые можно определить в любом метрическом пространстве X.

Определение 1. Пусть ε — положительное число. *Шаром* радиуса ε с центром в точке C из X называется множество точек M, для которых $\rho(M, C)\leqslant\varepsilon$. Это множество называют также *ε-окрестностью* точки C.

На рисунке 6, *а*, *б*, *в* показаны ε-окрестности точки O (0, 0) для расстояний (4), (5), (6) на плоскости (для других точек C они получаются параллельным переносом, переводящим центр O в C).

Определение 2. Точка A называется *пределом последовательности* $M_1, M_2, M_3, \ldots$, если для любого положительного числа ε существует такой номер n (зависящий от ε), что все члены последовательности, начиная с x_n, содержатся в ε-окрестности точки A. (Здесь $M_1, M_2, M_3, \ldots$ и A — точки метрического пространства X.)

Подчеркнем, что это определение годится для любого метрического пространства, т. е. мы сразу дали определение предела и для чисел на прямой, и для точек на плоскости, и для функций, определенных на отрезке.

Например, можно доказать, что функция $f(x) = \sin x$, $a \leqslant x \leqslant b$, является пределом последовательности функций $f_1, f_2, f_3, \ldots$, где

$$f_n(x) = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2n-1)},$$

независимо от того, каким расстоянием пользоваться: (7), (8) или (9) и какие числа взять в роли a и b.

Определение 3. Пусть X и Y — два метрических пространства, F — отображение множества X в Y; x_0 — точка в X. Тогда F называется *непрерывным* в точке x_0, если для любого положительного числа ε найдется такое δ (зависящее от ε), что все точки из δ-окрестности x_0 отображаются в ε-окрестность точки $y_0 = F(x_0)$.

Например, любая «школьная» функция представляет собой отображение своей области определения E в числовую прямую, непрерывное в каждой точке E. Вот пример непрерывного отображения множества выпуклых многоугольников (мы говорили о том, как превратить его в метрическое пространство) в числовую прямую: каждому многоугольнику ставится в соответствие его площадь.

Следующие определения помогают построить естественное пополнение любого метрического пространства — подобно тому, как множество рациональных чисел (или конечных десятичных дробей) пополняется до множества R всех вещественных чисел.

Определение 4. Последовательность $M_1, M_2, \ldots$ точек X называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что $\rho(M_k, M_l) < \varepsilon$ для всех $k \geqslant l \geqslant n$. Пространство X называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Определение 5. Две последовательности $M'_1, M'_2, \ldots$ и $M''_1, M''_2, \ldots$ называются *эквивалентными*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что $\rho(M'_k, M''_l) < \varepsilon$ для всех $k \geqslant l \geqslant n$.

Оказывается, приняв за точки *классы эквивалентных последовательностей*, можно получить новое пространство, содержащее X, но уже обязательно полное. Интересно, что пополнение пространства каких-то простых функций (скажем, многочленов) по метрикам (7), (8) и (9) приводит к разным по запасу «функций» полным пространствам.

Не менее любопытное пополнение получается и для p-адической метрики (пример 4): оно состоит из «чисел», записываемых в p-ичной системе «бесконечными влево» строчками цифр *).

Теория метрических пространств, возникшая в начале XX века в работах Фреше и Хаусдорфа, излагается сейчас в первых главах учебников с такими, приблизительно, названиями, как «Элементы функционального анализа», «Введение в теорию множеств и функций», «Основы современного анализа». Разумеется, большая часть этой теории, связанная с понятием предела, содержательна только для пространств с бесконечным числом точек.

Но общее понятие «расстояния» полезно и для некоторых задач про конечные множества и графы. В частности, «расстояние между словами», о котором мы говорили в примере 2, оказалось очень удобным инструментом в бурно развивающихся сейчас областях науки: теории кодов, исправляющих ошибки, и молекулярной биологии. Однако это уже — темы для отдельного разговора.

---

*) См. статьи «О четырех решениях уравнения $x^2 = x$», «Квант» № 11 за 1989 год, «2-адические числа», «Квант» № 2 за 1979 и книгу 4 в списке «Литература».

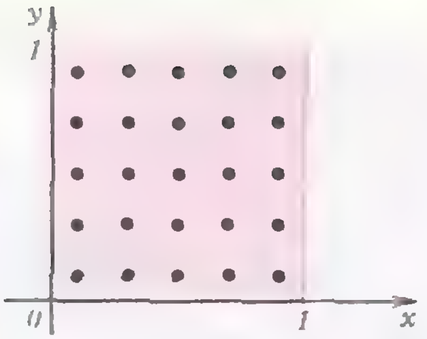


Рис. 7.

Задачи

1. *Докажите* для четырех точек A, B, C, D метрического пространства неравенство $\rho(A, C)+\rho(B, D) \leqslant \rho(A, B)+\rho(B, C)+\rho(C, D)+\rho(D, A)$.

2. Докажите, что для любых n точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 3)$ $\rho(A_1, A_2)+\rho(A_2, A_3)+\ldots+\rho(A_{n-1}, A_n) \geqslant \rho(A_1, A_n)$.

3. Доктор Шарадек, знающий хорошо стратегию, интересовался последней войной и в 1940 году познакомился с картой французского театра военных действий. Отсюда, вероятно, и возникла следующая задача. Расстояние (по воздуху, как и все расстояния в этой задаче) из Шалона до Витри равно 30 км, из Витри до Шомона 80 км, из Шомона до Сэн-Кантэна 236 км, из Сэн-Кантэна до Ремса 86 км, из Ремса до Шалона 40 км. Вычислите в этом замкнутом многоугольнике расстояние от Ремса до Шомона. Без карты это умеет делать только доктор Шарадек *).

4. Множество E точек метрического пространства X называется *ε-сетью*, если ε-окрестности точек множества E (все вместе) целиком покрывают множество X; другими словами, если для каждой точки x из X найдется хотя бы одна точка множества E, отстоящая от x не более чем на ε. (Здесь ε — некоторое положительное число.)

Например, множество черных точек на рисунке 7 является ε-сетью для квадрата $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ на плоскости Oxy с расстоянием (6) при $\varepsilon > 1/10$. Для каких ε это же множество является ε-сетью в смысле расстояний (4) и (5) на том же квадрате?

5. Пусть $N(\varepsilon)$ — наименьшее число точек в ε-сети пространства X, $M(\varepsilon)$ — наибольшее число точек в X, расстояние между любыми двумя из которых не меньше ε.

Докажите, что $M(2\varepsilon) \leqslant N(\varepsilon) \leqslant M(\varepsilon)$.

6. Пусть C — множество функций, определенных на отрезке $[0; 1]$ и принимающих значения на том же отрезке, графики которых — ломаные линии. Будем определять расстояние в C по формуле (7).

Докажите, что можно выбрать бесконечное количество функций из C, все попарные расстояния между которыми равны единице. Вывести отсюда, что при $\varepsilon < 1/2$ в C нельзя выбрать конечную ε-сеть.

7. Может ли в некотором метрическом пространстве быть так, что 3-окрестность точки A целиком содержится в 2-окрестности другой точки B и не заполняет ее целиком? Каков будет ответ, если заменить 3 и 2 другими числами?

8. Докажите, что среди n-значных чисел из двух цифр 1 и 2 нельзя выбрать более чем $\frac{2^n}{n+1}$ чисел так, чтобы любые два из них отличались друг от друга по крайней мере в трех разрядах.

9. *Постройте* пример последовательности функций, определенных на отрезке $[0; 1]$, которая стремится к пределу f_0, если пользоваться расстоянием (8), и не имеет f_0 пределом, если пользоваться расстоянием (7).

10. Пусть ρ_1 и ρ_2 — два расстояния на некотором множестве X, которые обладают тем свойством, что $\rho_1(A, B) \leqslant k\rho_2(A, B)$ для любых двух точек A и B, где k — некоторое положительное число (одно и то же для всех A и B).

Докажите, что если P является пределом последовательности $M_1, M_2, M_3, \ldots$ в смысле расстояния ρ_2, то P будет пределом этой последовательности в смысле расстояния ρ_1. Пользуясь этим, *докажите*, что на плоскости утверждение «пределом последовательности $M_1, M_2, M_3, \ldots$ является точка P» имеет один и тот же смысл, независимо от того, каким из расстояний (4), (5), (6) мы пользуемся.

11. а) Придумайте расстояние ρ на множестве всех прямых на плоскости, для которого выполнялось бы следующее условие: если последовательности точек $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и $B_1, B_2, B_3, \ldots$ имеют пределами две различные точки A и B, то последовательность прямых $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$ имеет (в смысле расстояния ρ) пределом прямую AB.

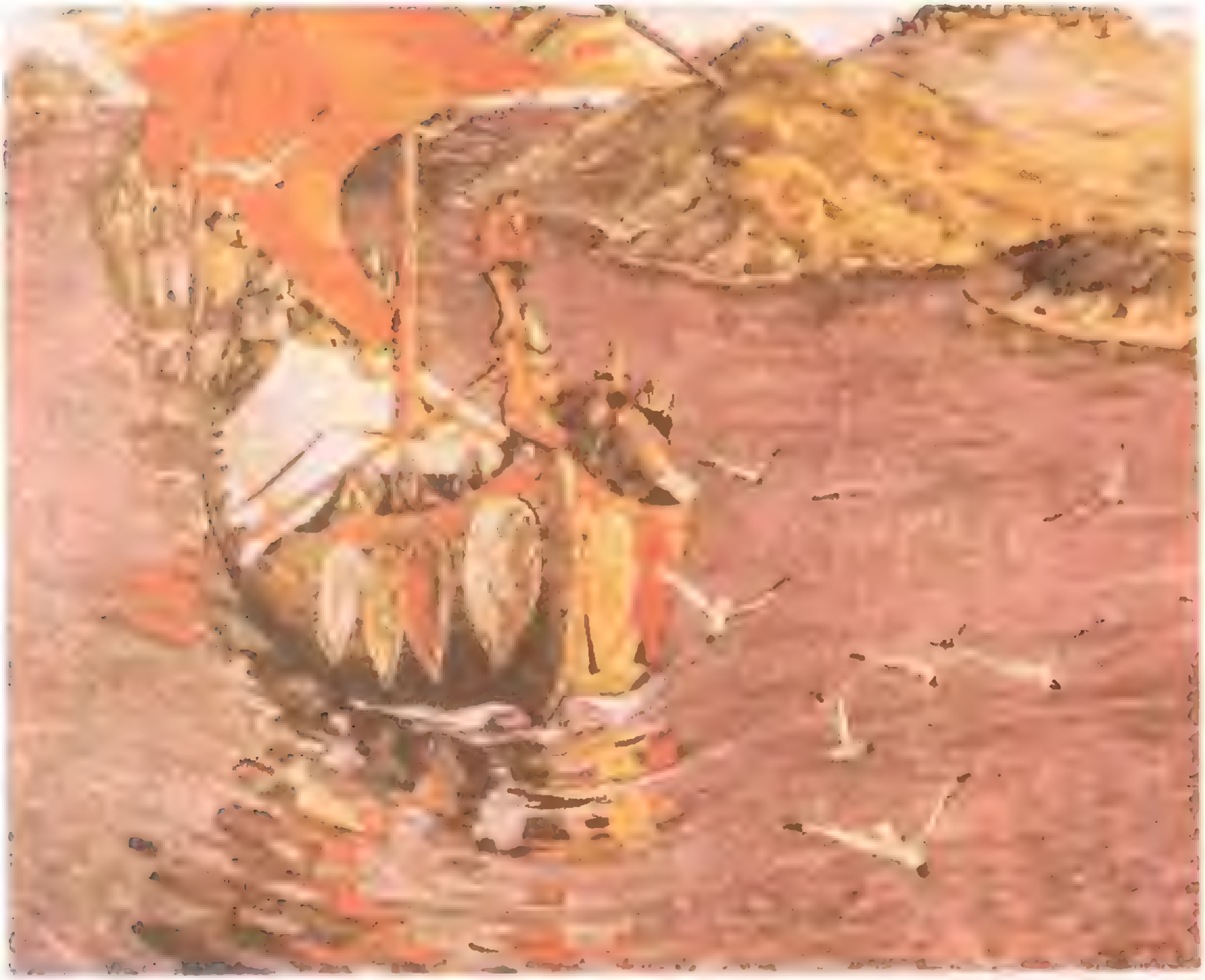
б) Докажите, что подобное расстояние ρ *нельзя задать так*, чтобы расстояние между любыми двумя пересекающимися прямыми зависело только от угла между ними.

Литература

1. П. С. Александров. Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука, 1977.— 368 с.
2. Ф. Хаусдорф. Теория множеств.— ОНТИ, 1934.
3. Ю. А. Шрейдер. Что такое расстояние.— М.: Физматгиз, 1963.
4. З. А. Боревич, И. Р. Шафаревич. Введение в теорию чисел.— М.: Наука, 1987.

---

*) Г. Штейнгауз. Сто задач.— М.: Наука, 1976, задача № 100 (в задаче речь идет о первой мировой войне).



ВОЛНЫ НА ВОДЕ И «ЗАМОРСКИЕ ГОСТИ» Н. РЕРИХА

Доктор технических наук
А. СТАСЕНКО

«Глубока, по-весеннему студена подернутая рябью синь реки. Весело плывут по ней нарядные расписные ладьи с пестрыми парусами. Лихо поднялись их носовые части, завершающиеся головами драконов. Их яркая раскраска горит на солнце... Далек и опасен путь варягов» (из книги В. П. Князевой «Н. Рерих» (М.: Искусство, 1968)).

Речь идет о картине прекрасного русского художника Николая Рериха «Заморские гости» (1901).

Используем это яркое поэтическое полотно для размышлений на некоторые физические темы: о законе сохранения энергии, теории размерностей физических величин и о статистиче-

---

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 9 за 1972 год.

ской обработке результатов эксперимента. А при чем тут картина? Просто, чтоб было веселее.

В самом деле, разве не интересно попытаться определить, глядя на эту картину, с какой скоростью плывут заморские гости? Пусть относительно *текущей воды*, а не относительно берегов. А что в картине может нам дать необходимую информацию? Прежде всего — носовая волна, образующаяся с обоих бортов у форштевня, завершающегося драконом. Далее, круговые волны, которые бегут по поверхности воды от корабля; качественно они похожи на окружности с общим центром, *лежащим где-то* в плоскости ватерлинии (рис. 1). Добавим к этому постановку реи и паруса относительно осевой плоскости корабля. Может быть, вы найдете и еще что-нибудь, дающее сведения о направлении или модуле скорости корабля, ветра, реки. Мы же ограничимся здесь рассмотрением двух *явлений, тесно* связанных с волнами на воде. Итак,

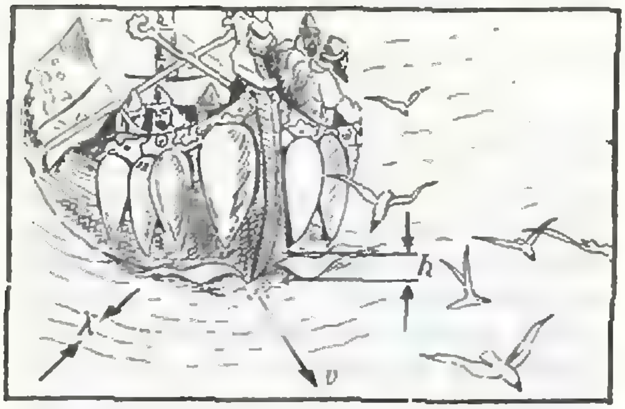


Рис. 1.

Носовая волна

Почему она образуется? Пусть вода симметрично набегает на клин (нос корабля) с вертикальными гранями и углом при вершине 2α (рис. 2) со скоростью v (очевидно, это и есть скорость корабля относительно воды). У самого носика клина мы можем разложить вектор v на две компоненты: параллельную одной из граней (одному из бортов корабля) $v_\parallel$ и перпендикулярную ей $v_\perp$. Таким образом, *вода относительно рассматриваемого борта участвует в двух движениях*: скользит вдоль борта со скоростью $v_\parallel = v\cos\alpha$ и «налетает» на него перпендикулярно со скоростью $v_\perp = v\sin\alpha$.

Во втором движении она разделяется на слои: нижние слои «ныряют» под днище корабля (рис. 3), верхний же слой поднимается вертикально, *и мы можем легко оценить, на какую* высоту. Действительно, каждая частица воды из этого верхнего слоя, обладая энергией $mv_\perp^2/2$, *резко изменив* направление движения, может забраться вверх на такую высоту h, где ее потенциальная энергия mgh будет не больше кинетической энергии

$$mgh \leqslant m\frac{v_\perp^2}{2}.$$

Отсюда

$$h \leqslant \frac{v_\perp^2}{2g}.$$

Таким образом, закон сохранения энергии и принцип суперпозиции движений позволяют нам сделать оценку для скорости корабля: $v_\perp^2 \geqslant 2gh$, сле-

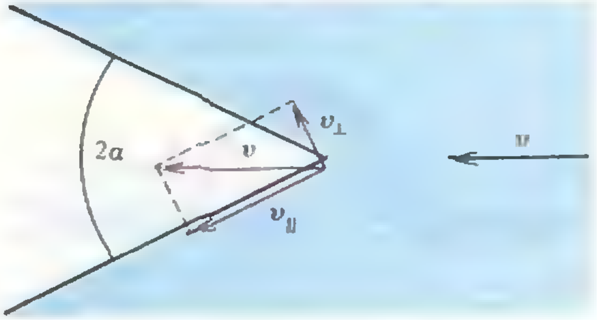


Рис. 2.

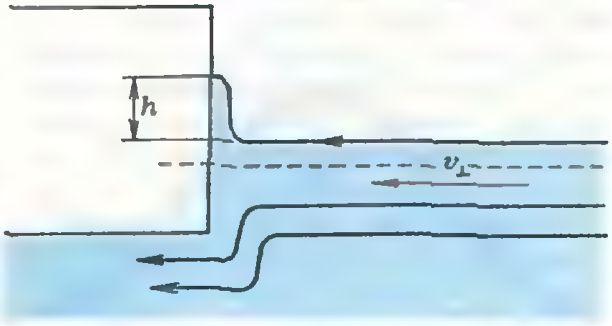


Рис. 3.

довательно,

$$v^2 \geqslant \frac{2gh}{\sin^2\alpha}. \qquad (1)$$

Нам нужно лишь измерить угол α и высоту носовой волны h. Соответствующий расчет будет проведен ниже, а сейчас рассмотрим второй источник информации о движении корабля, которым мы располагаем.

Поверхностные волны

Поверхностные волны — довольно сложный объект исследования, но мы можем многое узнать о них, исходя из очень простых соображений размерности тех физических величин, которые описывают это явление. Для этого нужно прежде всего ясно представить себе причины явления. Волна — это распространяющееся колебание. А почему поверхность воды, выведенная чем-то из положения равновесия, может колебаться? Всякое колебание является результатом «игры» двух факторов: силы, *возвращающей в положение равновесия*, и инерции, заставляющей проскакивать это положение равновесия.

Если на поверхности жидкости образуется «горб», то вернуть частицы жидкости в положение равновесия может, например, сила тяжести F_g (см. рис. 4а), пропорциональная ускорению земного тяготения g. Падая вниз, по инерции «горб» провалится ниже положения равновесия; по соседству с ним будет вытеснен другой «горб» и т. д., в результате чего побежит волна, характеризуемая некоторой скоростью u и длиной λ (расстояние между «горбами»). В рассматриваемом нами случае мерой инертности колеблющейся воды является ее плотность.

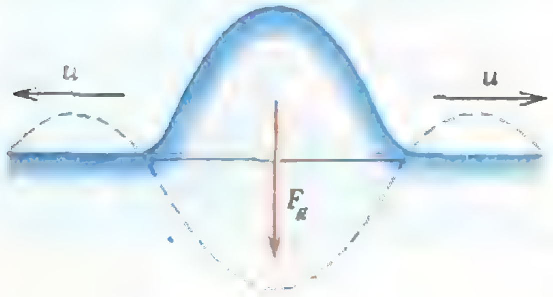


Рис. 4а.

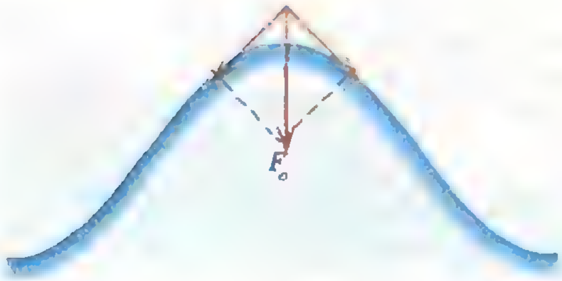


Рис. 4б.

Итак, движение волны по поверхности жидкости описывается следующими величинами (*будем сразу писать их размерности*):

$$u\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right],\ \lambda[\text{м}],\ g\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right],\ \rho\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\right].$$

Как их связать друг с другом? Например, как найти зависимость интересующей нас скорости волны u от других величин λ, g, ρ? Здесь-то нам и придут на помощь уже выписанные размерности.

Мы видим, что размерность u содержит в знаменателе *секунду*. Из трех других величин размерность времени входит только в g (там в знаменателе стоит с^2). Отсюда немедленно пишем $u \sim \sqrt{g}$, и, очевидно, g больше трогать нельзя: мы получили от него требуемую *секунду* в знаменателе размерности u. Но вместе с этим $\sqrt{g}$ дал нам в числителе $\sqrt{\text{м}}$, а нам нужен в числителе *метр* без всякого корня. Значит, мы можем $\sqrt{g}$ домножить на $\sqrt{\lambda}$, и тогда все будет в порядке: величина $\sqrt{g\lambda}$ имеет нужную нам размерность [м/с].

Итак,

$$u\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] \sim \sqrt{g\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]\cdot\lambda[\text{м}]}.$$

Заметим, что мы получили только пропорциональность, а не равенство, так как перед $\sqrt{g\lambda}$ может стоять любой множитель k, не имеющий размерности, т. е. $u = k\sqrt{g\lambda}$. Может быть, $k = {}^1/_2$, а может быть, $k = 10$. Здесь наша теория бессильна, но она нам позволила выяснить главное — физи-

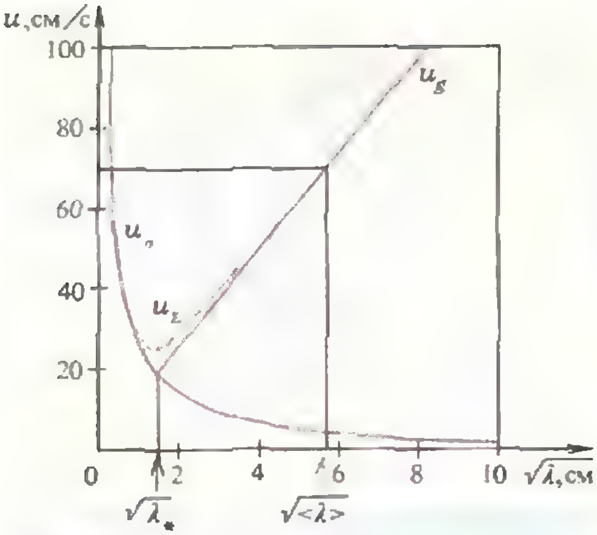


Рис. 5.

ку явления. Точное решение задачи дает значение $k=1/\sqrt{2\pi}$, т. е.

$$u=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \qquad (2)$$

А где же здесь ρ[кг/м^3]? Его нет, ибо нам *просто некуда деть* килограммы, входящие в размерность ρ, их не с чем сократить, чтобы в конечном результате величина u измерялась только в м/с. Это физически понятно: ведь и сила тяжести, ускоряющая «горб» вниз, и масса «горба», определяющая его инерционность, пропорциональны ρ — вот плотность и выпала из формулы (2). (Аналогичная ситуация имеет место в случае математического маятника, период которого $T=2\pi\sqrt{l/g}$ по той же самой причине не зависит от массы, подвешенной на нити длиной l.)

Но если *волны становятся* очень мелкими, «рябью» (ниже мы оценим, что значит очень мелкими), и сила тяжести, действующая на «горб», мала, то вернуть «горб» в положение равновесия стремится другая сила — сила поверхностного натяжения, связанная с коэффициентом поверхностного натяжения σ [Н/м]. Это похоже на то, как если бы мы натянутую горизонтально резиновую пленку приподняли пальцем кверху: тогда из-за натяжения пленки на палец вниз стала бы действовать сила $F_\sigma\sim\sigma$ (рис. 4 б). В этом случае распространение волн будет зависеть от величин σ[Н/м], λ[м], u_σ[м/с], ρ[кг/м^3]. (Мы обозначили скорость волн, связанных с поверхностным натяжением, через u_σ, чтобы отличить ее от u из формулы (2).)

Теперь у нас достаточно опыта, чтобы, пользуясь размерностями, получить выражение для скорости волн (вспомним, что 1Н=1кг·м/с^2):

$$u_\sigma\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right]\sim\sqrt{\frac{\sigma[\text{кг/с}^2]}{\rho[\text{кг/м}^3]\cdot\lambda[\text{м}]}}.$$

Если мы хотим знак пропорциональности заменить на *знак равенства*, нужно учесть недостающий безразмерный множитель. Согласно точной теории он равен $\sqrt{2\pi}$. Итак,

$$u_\sigma=\sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}. \qquad (3)$$

Разве не удивительно, что мы почти «бесплатно», не зная никаких теорий, получили основное: характер зависимости между величинами! Здесь *уместно вспомнить*, что по мнению знаменитого итальянского физика Энрико Ферми «в физике... нет места для путаных мыслей... действительно понимающие природу *того или* иного явления должны получать основные законы из соображений размерности» *).

Для «студеной» воды

$\sigma\approx 8\cdot 10^{-2}$ Н/м,
$\rho=1$ г/см$^3=10^3$ кг/м^3.

Учитывая это, мы построили график зависимости скорости поверхностных волн, определяемой выражениями (2) и (3), от величины $\sqrt{\lambda}$ (рис. 5; и из формулы (2) мы обозначили u_g). Видно, что обе кривые пересекаются при $\lambda=\lambda_*\approx 2$ см. Таким образом, при очень малых *длинах волн* ($\lambda\ll\lambda_*$) их скорость определяется поверхностным натяжением, при больших ($\lambda\gg\gg\lambda_*$) — ускорением земного тяготения. В промежуточной области ($\lambda\approx\approx\lambda_*$) скорость поверхностных волн определяется обоими факторами (силой земного тяготения и поверхно-

---

*) Понтекорво Б. *Энрико Ферми.* М.: Знание, 1971, с. 27.

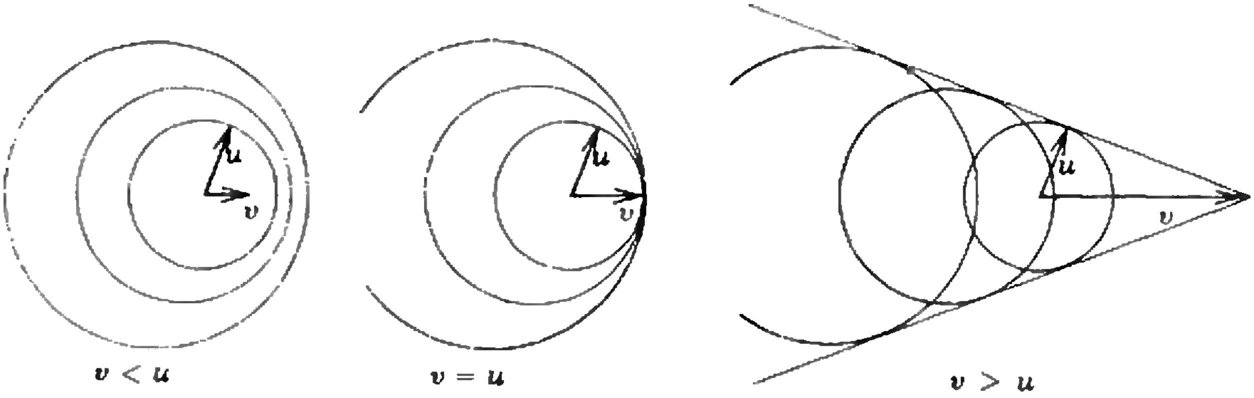


Рис. 6.

стным натяжением). Выражение для скорости волны становится сложнее ($u_\Sigma = \sqrt{u_g^2 + u_\sigma^2}$). Зависимость u_Σ от $\sqrt{\lambda}$ показана на рисунке 5 пунктирной линией.

В физике часто бывает так, что гораздо проще исследовать некоторые предельные случаи (у нас это $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$), а «промежуточная область» требует больших усилий. К счастью, для нас эта область несущественна, потому что, взглянув на картину Рериха, мы можем сказать достоверно, что круговые волны имеют длину, явно бо́льшую λ_*, и, следовательно, их скорость описывается выражением (2). Чтобы найти ее, надо только «измерить» λ. Вычисления мы проведем ниже, а пока что сделаем еще один шаг.

Вспомним, что когда жук-водомер быстро бежит по воде или пуля летит в воздухе быстрее звука, всегда образуются характерные «усы», которые тем теснее прижимаются к движущемуся телу, чем больше его скорость v по сравнению со скоростью u распространения возмущений, вызываемых телом. На рисунке 6 приведены три характерных случая: если $v < u$, волны обгоняют тело и лишь теснее сжимаются в направлении движения; если $v = u$, то гребни волн в одной точке (в направлении движения) наползают друг на друга; если $v > u$, то тело обгоняет волны и образуются «усы».

Взглянув на картину Рериха, мы видим, что на ней изображен первый случай; более того, поскольку не заметно даже намека на сжатие волн в направлении движения корабля, мы должны заключить, что его скорость намного меньше, чем скорость движения волн:

$$v \ll u. \tag{4}$$

Таким образом, с точки зрения поверхностных круговых волн корабль просто «топчется на месте».

А теперь приступим к вычислениям. Для этого нам нужно «измерить» высоту носовой волны h, угол 2α и длину поверхностной волны λ.

Измерения

Мы могли бы постараться измерить нужные нам величины по картине поточнее, с учетом перспективы, проекций, ракурсов и т. д. Но, во-первых, это довольно сложно и утомительно; во-вторых, мы оказались бы при этом в смешном положении: действитель-

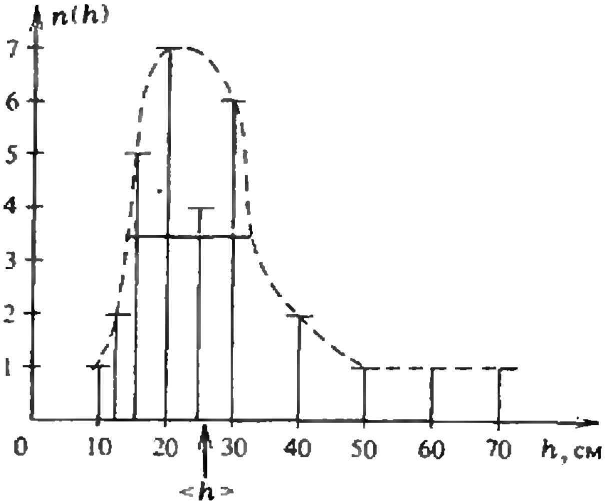


Рис. 7.

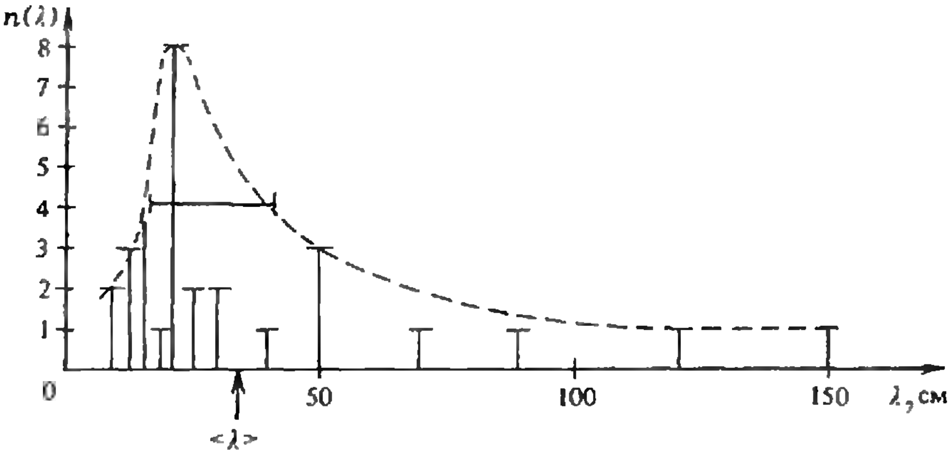


Рис. 8.

но, нелепо подходить к сказочному вымыслу художника как к экспериментально полученной фотографии. К тому же мы не знаем, какой высоты был, например, нос у изображенного корабля, какого размера нарисованные щиты. Есть, правда, на картине один характерный размер, который, по-видимому, мало изменился со времен варягов,— размер головы.

Прежде чем читать дальше, попробуйте сами, пользуясь хотя бы этим «эталоном», оценить h и λ. Это будет ваше личное «измерение». Нельзя, однако, забывать, что картина воспринимается каждым зрителем очень индивидуально. Покажите эту картину всем ребятам вашего класса и спросите каждого, что он думает о значениях h, λ, α (хорошо, если спрашиваемый при этом не слышал ответов других товарищей; тогда «показания» всех учеников будут похожи на независимые показания прибора). Полученные ответы запишите, затем постройте график, где по горизонтальной оси отложите значения h, а по вертикальной — число человек n, назвавших это значение h.

Автор проделал это со своими товарищами (всего было опрошено 30 человек) и получил графики, приведенные на рисунках 7 и 8. Интересно, что большинство опрошенных назвали значения h и λ, кратные 5 см, некоторые — кратные 2—2,5 см, но не менее (никто не назвал, например, $h=27,1357891439$ см). Это похоже на то, как если бы измеряли расстояния линейкой с минимальной ценой деления 2—2,5 см.

При помощи этих графиков мы можем найти средние значения $\langle h\rangle$ и $\langle\lambda\rangle$ и считать их достаточно объективными.

Процедура определения средних обычна. Каждое значение h_i нужно умножить на число людей n_i, назвавших его, взять сумму по всем i и разделить на полное число опрошенных. В результате получим

$$\langle h\rangle=\frac{\sum\limits_{i=1}^{30} h_i n_i}{\sum\limits_{i=1}^{30} n_i}=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} h_i n_i=$$
$$=\frac{1}{30}(1\cdot 10+2\cdot 12+5\cdot 15+7\cdot 20+$$
$$+4\cdot 25+6\cdot 30+2\cdot 40+1\cdot 50+$$
$$+1\cdot 60+1\cdot 70)\ \text{см}\approx 26\ \text{см}=0{,}26\ \text{м}. \qquad (5)$$

Аналогично

$$\langle\lambda\rangle=\frac{1}{30}(2\cdot 10+3\cdot 12+4\cdot 15+$$
$$+1\cdot 18+8\cdot 20+2\cdot 25+2\cdot 30+$$
$$+1\cdot 40+3\cdot 50+1\cdot 70+1\cdot 90+$$
$$+1\cdot 120+1\cdot 150)\ \text{см}\approx 34\ \text{см}=$$
$$=0{,}34\ \text{м}. \qquad (6)$$

Эти средние значения отмечены на рисунках 7 и 8 красными стрелками.

Точность наших «измерений»-опросов можно грубо оценить шириной плавной пунктирной кривой, взятой на половине ее высоты (красные линии на рисунках 7 и 8). (Для физических экспериментов разработана, конечно, целая теория ошибок, в общем очень похожая на то, что мы сделали.)

(Окончание см. на с. 62)

ЛЕНТА МЁБИУСА

Вариации на старую тему

Доктор физико-математических наук
Д. ФУКС

Эта статья возвращает нас к замечательной представительнице односторонних поверхностей — ленте Мёбиуса. Получается она из перекрученной на 180° длинной узкой бумажной полоски, склеенной в кольцо. Здесь обсуждается вопрос, какая именно полоска подойдет для изготовления модели ленты Мёбиуса.

Я не буду предлагать вам водить по ленте Мёбиуса пальцем или разрезать ее по средней линии. Речь пойдет о вещах, менее известных. Начну с вопроса:

1. Какой формы бумажную полоску следует взять, чтобы склеить ленту Мёбиуса?

Ожидаемый ответ: полоска должна быть узкой и длинной, с возможно большим отношением длины к ширине. Скажем, из квадратного листа ленты Мёбиуса не сделаешь.

Это верно, но с одной оговоркой, которую легко недооценить: ограничения на размер имеют значение лишь в том случае, когда бумагу запрещается мять. Если же мять бумагу не запрещается, то ленту Мёбиуса можно склеить не только из квадрата, но из прямоугольника любых размеров — склеиваемые стороны могут быть даже во сколько угодно раз длиннее несклеиваемых.

Сделать это можно так (рис. 1). Сложим прямоугольный лист в гармошку, перегнув его четное число раз. Затем из этой гармошки, как из толстой бумажной полоски, склеим ленту Мёбиуса, вставляя соответствующие части гармошки друг в друга. Из рисунка 1 видно, что лист бумаги, из которого склеена лента Мёбиуса, оказался смятым.

Предположим теперь, что бумажную полоску можно изгибать, но не мять. Примем ширину полоски за единицу. Ясно, что чем длиннее полоска, тем легче склеить из нее ленту Мёбиуса. Таким образом, *существует такое число λ, что из полоски длины больше λ ленту Мёбиуса склеить можно, а из полоски длины меньше λ — нельзя* (что будет для полоски, длина которой в точности равна λ, нас не интересует). Очень хотелось бы найти это λ.

Удивительно, но *решение этой задачи до сих пор неизвестно.*

Здесь я докажу для λ неравенства

$$1{,}57\ldots \approx \frac{\pi}{2} \leqslant \lambda \leqslant \sqrt{3} \approx 1{,}73\ldots$$

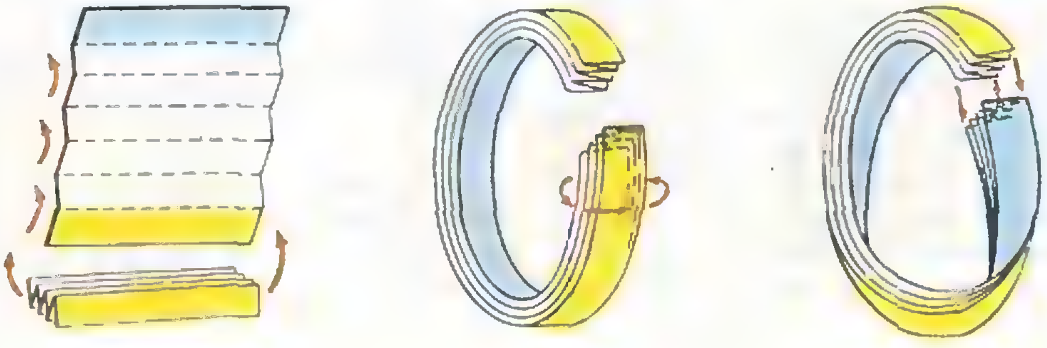


Рис. 1.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 1 за 1979 год.

(при этом наличием склеиваемых участков полоски мы пренебрегаем: предполагается, что края полоски склеиваются встык) и постараюсь объяснить, почему не удается вычислить λ точнее.

2. Несмятый лист бумаги — «развертывающаяся поверхность»

Раз требование *не мять бумагу* так важно, посмотрим, каков его математический смысл.

Легко понять, что запрещение мять бумагу значительно ограничивает возможность манипулировать бумажным листом. Например, лист бумаги, не помяв, можно свернуть в трубку или сложить без складки пополам, но нельзя сложить вчетверо. Из листа бумаги, не смяв его, можно сделать конус («фунтик»), но нельзя сделать сферу или даже ее кусочек: прижмите лист бумаги к глобусу, и обязательно появятся складки. Как видно, листу бумаги можно придать далеко не всякую форму.

Поверхности, которые можно сделать из листа бумаги, изгибая, но не сминая его, математики называют *развертывающимися*. Конечно, в математике развертывающиеся поверхности определяются не так: в математическом языке отсутствуют слова «бумага», «сминать», «сделать». Существует целая теория развертывающихся поверхностей, среди достижений которой — удовлетворительный ответ на вопрос, какими они могут быть: математики называют это «классификацией» (ответ принадлежит Леонарду Эйлеру). Я не собираюсь здесь излагать общую теорию развертывающихся поверхностей: всякая общая теория скучновата *). Я приведу только некоторые свойства развертывающихся поверхностей, нужные для дальнейшего. Наше наглядное определение не позволяет их доказать, так что придется рассматривать эти свойства как экспериментальные факты (возьмите лист бумаги и убедитесь в их справедливости).

1. *Через каждую точку A развертывающейся поверхности, не лежащую на ее границе, проходит лежащий на поверхности отрезок, не кончающийся в A.* Иначе говоря, в каждой точке к развертывающейся поверхности (изогнутому, но не смятому листу бумаги) можно приложить спицу так, чтобы она прилегала к поверхности на некотором протяжении по обе стороны от взятой точки. Такой отрезок называется *образующей* поверхности (условимся, что это название относится только к отрезкам максимальной длины, целиком лежащим на поверхности, т. е. к отрезкам, не содержащимся в больших отрезках с этим свойством).

2. *Если через точку A, не лежащую на границе поверхности, проходят две различные образующие, причем A не является концом ни одной из них, то достаточно маленький кусок поверхности, окружающий A, является плоским.* В таком случае точку A мы будем называть *плоской*.

3. *Если точка A, не лежащая на границе поверхности, является концом какой-нибудь образующей, скажем, a, то окрестность точки A устроена так. Через точку A проходит един-*

---

*) За 10 лет, прошедших со времени первого опубликования этой статьи, автор изменил свое мнение и изложил эту теорию в увлекательной, по его мнению, форме: см. «Квант», 1988, № 9.

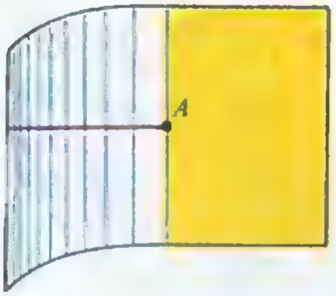


Рис. 2.

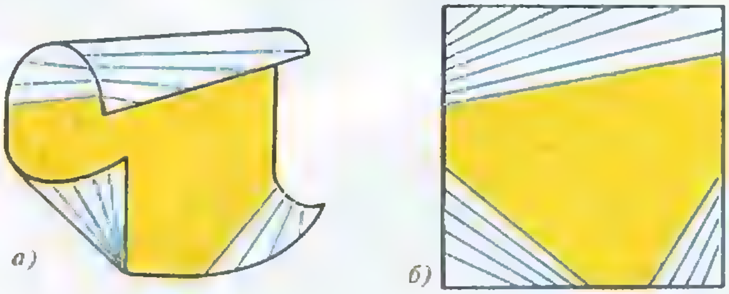


Рис. 3.

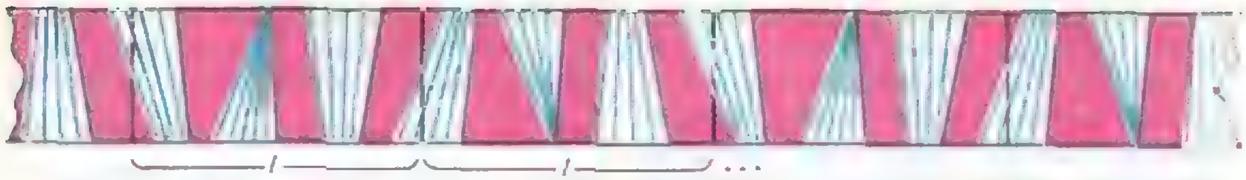


Рис. 4.

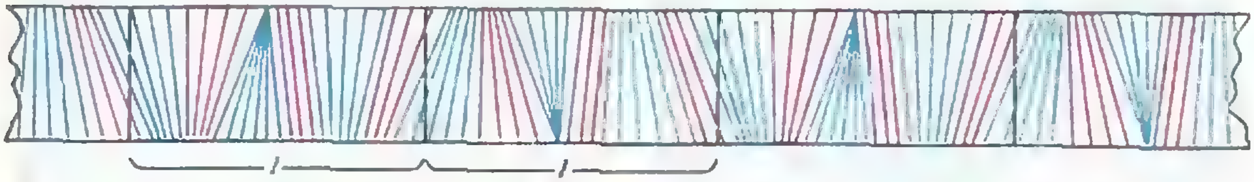


Рис. 5.

ственная не кончающаяся в ней образующая, скажем, b (рис. 2). Образующая разделяет поверхность на две части. С той стороны от образующей b, с которой находится образующая a, к образующей b прилегает плоский кусок, с другой стороны от b, сколь угодно близко от точки A, имеются не плоские точки. Точку A в этой ситуации мы будем называть *полуплоской*.

Подчеркнем, что если точка поверхности не является ни граничной, ни плоской, то через нее проходит единственная не кончающаяся в ней образующая, причем концы этой образующей лежат на границе поверхности.

Примеры. Лист бумаги, свернутый в трубочку или в фунтик, плоских (и полуплоских) точек не имеет. У трубочки образующие составляют семейство параллельных отрезков, у фунтика — семейство отрезков, веером расходящихся из одной точки. Возможны более сложные расположения образующих. Например, образующие и плоские точки развертывающейся поверхности, изображенной на рисунке 3, *а*, показаны на рисунке 3, *б* (на нем поверхность *развернута* в плоский лист бумаги): тонкие синие линии — образующие, а закрашенные области состоят из плоских точек.

Точки, лежащие на границе области плоских точек, являются либо граничными для всей поверхности, либо полуплоскими. Если поверхность сделана из бумажного многоугольника (скажем, из прямоугольника), то плоские точки составляют один или несколько плоских многоугольников, причем у каждого из этих многоугольников вершины лежат на границе поверхности, а стороны либо лежат на границе, либо состоят из полуплоских точек (см. еще раз рисунок 3, *б*).

Упражнение 1. Развертывающаяся поверхность сделана из а) квадратного листа со стороной 1; б) круга диаметром 1. Докажите, что хотя бы одна из ее образующих имеет длину не меньше а) 1; б) $\sqrt{3}/2$.

Вернемся к нашему основному сюжету: вычислению λ — *нижней грани* длин бумажных полосок ширины 1, из которых можно склеить несмятую ленту Мёбиуса.

3. Теорема 1: $\lambda \geqslant \frac{\pi}{2}$

Доказательство: Пусть лента Мёбиуса сделана из бумажной полоски длины l. Намотаем на нее длинную бумажную ленту. Эта лента (толщиной бумаги пренебрегаем) будет составлена из прямоугольников одинаковой длины, каждый из которых принимает форму нашей ленты Мёбиуса. Отметим на длинной ленте прямолинейные образующие и плоские точки (как на рисунке 3, *б*). Получится что-то вроде рисунка 4. Картина периодична: все повторяется с периодом, равным $2l$. Можно сказать больше: при сдвиге влево или вправо на l картинка меняется, но строго определенным образом; именно, она переворачивается (т. е. зеркально отражается в средней линии полоски). Области плоских точек представляют собой четырехугольники (которые могут выродиться в треугольники), ограниченные двумя отрезками противоположных краев ленты и двумя отрезками, проходящими по ленте. Части ленты, не попавшие в эти области, вымощены образующими, концы которых лежат на краях ленты. (Все это следует из свойств 1—3 развертывающихся поверхностей, приведенных в п. 2.) Плоские участки также можно вымостить образующими, так что вся лента будет покрыта непрерывным семейством образующих (рис. 5). Образующие в одинаковых четырехугольниках можно выбирать одинаковым образом, так что описанная выше периодичность сохранится.

Возьмем любую образующую из нашего семейства, скажем, AB. Если симметрично отразить ее в средней линии полоски и затем перенести в любую сторону (скажем, вправо) на l, то получится отрезок CD, который тоже является образующей из нашего семейства (рис. 6). Заметим (это важно), что $AC+BD=2l$. При наматывании нашей длинной ленты на ленту Мёбиуса образующие AB и CD займут одинаковое положение, причем точка A совместится с D, а точка B — с C; другими словами, отрезки AB и CD составят в пространстве угол в 180°. Между AB и CD располагается непрерывное семейство образующих. При движении от AB к CD величина угла, который эти образующие составляют в пространстве с AB, непрерывно изменяется от 0° до 180°. (Напомним, что величина угла между отрезками KL и MP в пространстве определяется как KLQ, где Q — такая точка, что отрезки LQ и MP равны по длине, параллельны и направлены в одну сторону.)

Возьмем любое n и найдем между AB и CD такие образующие $A_1B_1, \ldots, A_{n-1}B_{n-1}$, что величина угла между AB и A_kB_k равна $k\frac{180^\circ}{n}$ (точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$ в этом порядке лежат между A и C, а точки $B_1, \ldots, B_{n-1}$ в этом порядке лежат между B и D; см. рис. 7). Длина каждой из образующих больше или равна 1, а величина угла между пространственными положениями двух соседних образующих не меньше $\frac{180^\circ}{n}$. Покажем, что каждая из сумм AA_1+BB_1, $A_1A_2+B_1B_2$, ..., $A_{n-1}C+B_{n-1}D$ не меньше длины a_{2n} стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиусом 1. Это видно из рисунка 8. На этом рисунке отрезки A_kE и $A_{k+1}B_{k+1}$ равны по длине, параллельны и направлены в одну сторону, $A_kF=A_kH=1$ и $EG \parallel EB_k$ (рисунок 8 сделан в предположении, что $A_{k+1}B_{k+1}<A_kB_k$; изменения, необходимые в случаях $A_{k+1}B_{k+1}=A_kB_k$ и $A_{k+1}B_{k+1}>A_kB_k$, очевидны). Мы видим, что $A_kA_{k+1}+B_kB_{k+1}=EB_{k+1}+B_kB_{k+1}\geqslant EB_k\geqslant FG\geqslant FH\geqslant a_{2n}$ (здесь A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}, EB_{k+1} — длины изображенных на рисунке 8 криволинейных отрезков; эти длины совпадают с длинами отрезков A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}

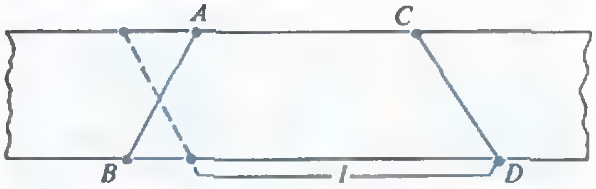


Рис. 6.

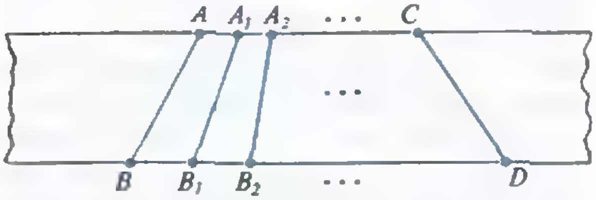


Рис. 7.

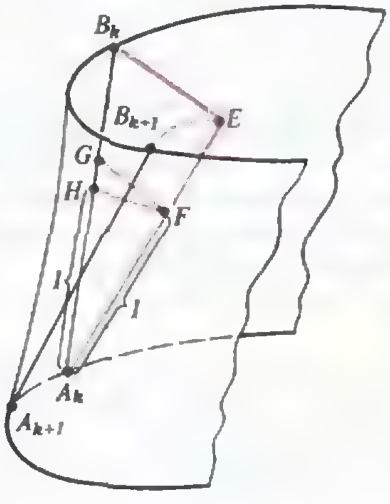


Рис. 8.

рисунка 7; предпоследнее неравенство следует из того, что $FHG > 90°$, а последнее — из того, что $FA_kH \geqslant \frac{180°}{n}$).

Итак, $2l = AC + BD = (AA_1 + BB_1) + (A_1A_2 + B_1B_2) + \ldots + (A_{n-1}C + B_{n-1}D) \geqslant na_{2n}$, т. е. $2l$ при любом n не меньше половины периметра правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиусом 1. Значит, $2l$ не меньше половины длины самой этой окружности, т. е. π, и $l \geqslant \pi/2$. Теорема доказана.

4. Теорема 2: $\lambda \leqslant \sqrt{3}$

Эта теорема проще предыдущей: для ее доказательства достаточно объяснить, как склеить ленту Мёбиуса из полоски, длина которой больше $\sqrt{3}$. Предположим сначала, что ее длина в точности равна $\sqrt{3}$. Тогда на этой полоске можно расположить два правильных треугольника (рис. 9). Перегнем полоску по боковым сторонам этих треугольников, чередуя направления сгиба (рис. 10; возьмите ножницы и бумагу и проделайте это). Края AB и CD полоски совместятся, причем точка A совместится с точкой D, а точка B — с точкой C. Получится лента Мёбиуса.

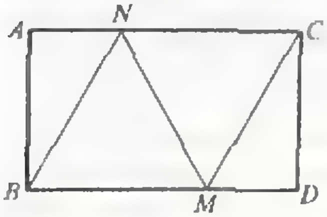


Рис. 9.

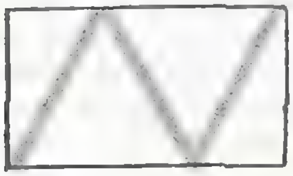


Рис. 10.

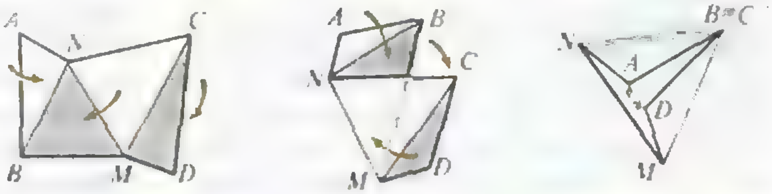


Рис. 11.

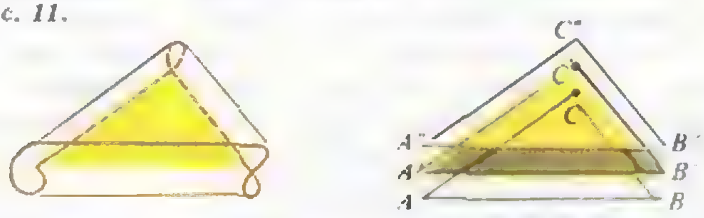


Рис. 12.

При этом построении было нарушено главное правило — не мять бумагу. Но легко понять, что если длина полоски хоть немного больше $\sqrt{3}$, то излом по образующей можно заменить изгибанием, производимым на узком участке (рис. 11). Короче говоря, излом вдоль прямолинейного отрезка нам не страшен; его можно заменить близким к нему изгибанием. (Непоправимое сминание бумаги происходит, когда две линии перегиба пересекаются, то есть когда лист складывается наподобие носового платка — все это известно нам из повседневного опыта.)

Как выглядит получившаяся лента Мёбиуса, показано на рисунке 12. Ее устройство можно представить себе так: три одинаковых правильных треугольника ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ лежат параллельно друг другу, соответствующие вершины над соответствующими вершинами; стороны AB и $A'B'$, $B'C'$ и $B''C''$, $C''A''$ и CA соединены перемычками. Линия склейки проходит по медиане одного из треугольников.

Упражнение 2. Нарисуйте для ленты Мёбиуса, построенной в доказательстве теоремы 2, схему прямолинейных образующих и плоских точек (подобно рисунку 4).

5. Почему не удается найти λ точнее?

Пока задача не решена, трудно сказать, почему она не решена. Все же иногда в разных нерешенных задачах удается проследить общие трудности, отметить, так сказать, на математической карте труднопроходимые места, что позволяет подчас предсказать успех или неудачу при решении той или иной задачи.

В предыдущем параграфе мы доказали, что λ есть одна из точек отрезка $[\pi/2; \sqrt{3}]$. Какая же? Может быть, на этот счет можно высказать хотя бы правдоподобную гипотезу?

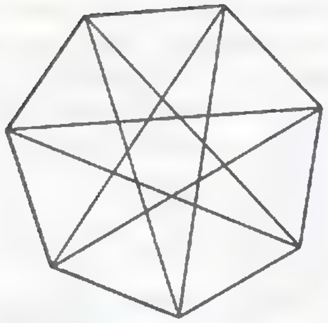


Рис. 13.

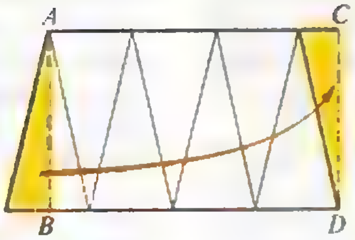


Рис. 14.

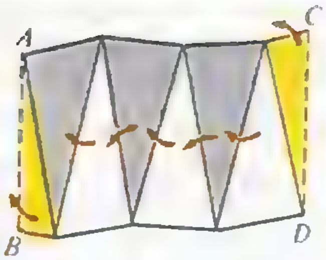


Рис. 15.

Я думаю, что $\lambda=\sqrt{3}$, и меня не удивляет, что доказать этого не удается.

Дело вот в чем. Доказательство теоремы 1 оставляет неиспользованным одно важное свойство нашей ленты Мёбиуса — отсутствие у нее *самопересечений*. Самопересекающуюся ленту нельзя сделать из бумаги, но представить себе ее можно: подобно самопересекающейся линии на плоскости она «проходит сквозь себя», причем можно разделить ее на части, каждая из которых самопересечений не имеет.

Допустим, что, говоря о бумажных лентах Мёбиуса, мы с самого начала разрешили им иметь самопересечения. *Тогда λ преобретает новый смысл* — новое значение λ будет меньше прежнего или равно ему. При этом *теорема 1 останется верной, и в ее доказательстве не придется менять ни одного слова*: отсутствие самопересечений в этом доказательстве нигде не используется. Что же касается теоремы 2, то, если разрешены самопересечения, ее можно значительно улучшить. Именно:

Теорема 3. *Ленту Мёбиуса с самопересечениями можно склеить из полоски любой длины, большей $\pi/2$.*

Делается это так. Возьмем *достаточно большое нечетное n и построим* правильный n-угольник, вписанный в окружность диаметром 1. Рассмотрим, далее, n содержащих центр окружности треугольников, каждый из которых ограничен стороной и двумя диагоналями n-угольника (рис. 13; здесь $n=7$). Эти треугольники покрывают наш n-угольник, некоторые его места — по нескольку раз. Приложим теперь эти n треугольников друг к другу так, как показано на рисунке 14, после чего отрежем по длинной медиане половину самого левого треугольника *и приложим ее к самому* правому треугольнику (рис. 14). Получится прямоугольная полоска с отношением длины к ширине, бо́льшим $\pi/2$ и стремящимся к $\pi/2$ при n, стремящемся к ∞ (ширина полоски стремится к 1, а длина — к $\pi/2$). Если последовательно перегнуть эту полоску по всем проведенным на ней линиям, чередуя направления сгиба (рис. 15), то треугольники расположатся, как на рисунке 13 (возьмите еще раз ножницы и бумагу и проделайте это). Отрезки AB и CD при этом почти совместятся — между ними окажется только несколько слоев сложенной бумаги. При этом «почти совмещении» точка A совместится с D, а точка B — с C, так что если бы мы смогли «пропустить ленту сквозь себя» и склеить AB с CD, то получилась бы лента Мёбиуса. Если ленту взять чуть более длинной, можно избежать складок, подобно тому, как мы это сделали в доказательстве теоремы 2. Что получится, я попробовал изобразить на рисунке 16.

Упражнение 3. Нарисуйте для ленты Мёбиуса, изображенной на рисунке 16, диаграмму плоских точек и прямолинейных образующих.

Таким образом, если бы мы захотели (для лент без самопересечений) доказать, что $\lambda\geqslant\mu$, где $\mu>\sqrt{3}$, нам пришлось бы в доказательстве обязательно учитывать отсутствие самопересечений. Наличие или отсутствие самопересечений у той или иной фигуры в трехмерном пространстве — это задача «трехмерной геометрии расположения». Весь опыт математики показывает, что задачи о расположении в трехмерном пространстве очень трудны. Ведь эта геометрия включает в себя, скажем, *теорию узлов и зацеплений*, известную своей неприступностью («Квант», 1975, № 7, с. 6); в ней возможны такие феномены, как *«рогатая сфера Александера»* («Квант», 1977, № 7, с. 22); простейшие ее вопросы, например, можно ли через маленькую дырку вывернуть наизнанку *тор*, — ставят в тупик нашу интуицию. И вот что удивительно. Казалось бы, в пространствах размерности больше трех проблемы расположения должны стоять еще более остро. Но нет; с ростом размерности эти трудности сглаживаются. Впрочем, «сглаживание» начинается с размерности 5; четырехмерное пространство в известном смысле не проще трехмерного. К сожалению, здесь я не могу аргументировать только что сказанное, так что прошу поверить мне на слово.

Но вернемся к ленте Мёбиуса. Теорема 1, как мы видели, в действительности относится к самопересекающимся лентам. Маловероятно, чтобы условие отсутствия самопересечений не воздействовало на λ; однако учесть это воздействие не удается, поскольку математика не обладает достаточными техническими средствами для изучения самопересечений в трехмерном пространстве. Напротив, вполне вероятно, что теорема 2 **неулучшаема**. Ведь улучшить ее — значит придумать новую **конструкцию** ленты. Опыт показывает, что оптимальные конструкции бывают простыми и гармоничными, каковой и является конструкция из доказательства теоремы 2. Естественно предположить, что если бы лучшая конструкция существовала, она была бы найдена — за столько лет!

Вот почему можно ожидать, что $\lambda=\sqrt{3}$.

6. Заключение: об одной аналогичной задаче

Склеим из бумажной полоски не ленту Мёбиуса, а цилиндр (размеры полоски — любые). Можно ли, не сминая бумаги, вывернуть цилиндр наизнанку? Если цилиндр широк и низок, то, конечно, можно, а если он *узок и высок* — то нельзя. Обозначим через σ такое число, что если отношение длины полоски к ширине больше σ, то цилиндр вывернуть можно, а если меньше — то нельзя. Доказательство трех следующих теорем (более трудных, чем теоремы 1, 2, 3) я оставляю вам в качестве задач:

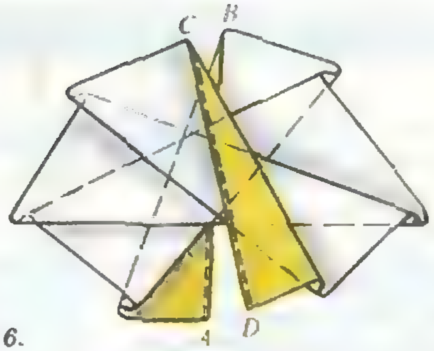


Рис. 16.

Теорема 1′. $\sigma\geqslant\pi$.

Теорема 2′. $\sigma\leqslant\pi+2$.

Теорема 3′. *Предположим, что в процессе выворачивания допускаются самопересечения. Тогда любой цилиндр, сделанный из полоски, у которой отношение длины к ширине больше π, можно вывернуть наизнанку (не сминая бумаги).*

Больше ничего об этом не известно.

* * *

В заключение я хочу сказать, что мысль написать эту статью возникла у меня при чтении статьи Б. Гальперина и К. Уивера в журнале «Transactions of the American Mathematical Society» (1977, т. 230), из которой я узнал о современном положении дел с обсуждавшимися проблемами.

Задачник „Кванта“

Задачи

М1201—М1205, Ф1208—Ф1212

М1201. В парламент Анчурии нужно избрать по одному депутату от каждого из 999 округов с одинаковым числом избирателей. В Анчурии создано три партии A, B, C, выдвигающие своих кандидатов. Партию A поддерживает всего 15 % избирателей, B — 30 %, C — 55 %. Если на первом туре выборов в округе ни один из кандидатов не набирает 50 % голосов, то во второй тур проходят двое, набравшие наибольшее число голосов. Во втором туре партии A и B договорились поддерживать друг друга, а сторонники C голосуют за кандидата партии A. Какое наибольшее и какое наименьшее число кандидатов от каждой из партий может попасть в парламент?

Н. Васильев

М1202. Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK, BL, DM, DN из вершин B и D. Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.

Д. Нямсурен (Монголия)

М1203. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 км на а) 31 квадрат; б)* 30 квадратов так, чтобы один из них имел сторону не более 1 м?

С. Елисеев

М1204*. На плоскости заданы точки A, B, C — центры трех кругов. Каждый круг равномерно раздувается (радиус увеличивается с одинаковой для всех кругов скоростью). Как только два круга касаются друг друга, они «лопаются» — их радиусы уменьшаются до 0 — и начинают расти снова. Верно ли, что если расстояния AB, BC, CA — целые числа, то этот процесс будет периодическим?

Изучите, как может развиваться этот процесс, если треугольник ABC а) равносторонний; б) равнобедренный; в)* прямоугольный со сторонами 3, 4, 5. Начальное состояние может быть произвольным (не только «нулевым»).

М. Хованов

М1205. Мальчик и девочка играют в такую игру: мальчик рисует на плоскости не налегающие друг на друга многоугольники, а девочка их раскрашивает. Если два многоугольника имеют общий отрезок стороны, то она должна раскрашиваться в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит девочке, чтобы следовать этим правилам, если мальчик рисует только

а) равносторонние треугольники;

б) равнобедренные прямоугольные треугольники;

в) одинаковые квадраты?

Г. Кондаков

Ф1208*. Многие из вас, по-видимому, замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше.

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать сразу в республиканских турах Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 марта 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1201» или «Ф1208». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма про-

сим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи М1201—М1204 предлагались в этом году на Весеннем турнире городов.

Задачи Ф1208 — Ф1212 в разные годы уже были опубликованы в нашем журнале.

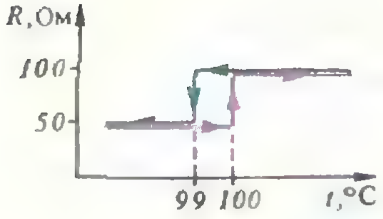


Рис. 1.

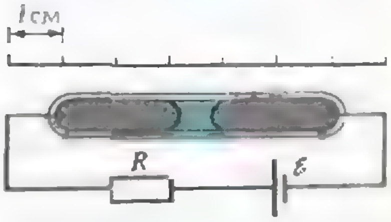


Рис. 2.

Но как только вы убираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.

Ф1209. Груз висит на упругой нити. Если к грузу прикладывать силу, медленно нарастающую от нулевого значения, то нить оборвется, когда величина силы достигнет значения F_1. При какой минимальной величине силы оборвется нить, если прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения и в дальнейшем остается неизменной?

Г. Баронов

Ф1210. Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1=100$ °C мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1=50$ Ом до величины $R_2=100$ Ом; при охлаждении обратный скачок происходил при температуре $t_2=99$ °C (рис. 1).

Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1=60$ В, при котором его температура оказалась равной $t_3=80$ °C.

Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2=80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное значение тока. Температура воздуха в лаборатории постоянная и равна $t_0=20$ °C. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $c=3$ Дж/К.

А. Буздин

Ф1211. В запаянной капиллярной трубке находятся два столбика ртути, разделенные капелькой водного раствора электролита HgI_2. Внутренний диаметр трубки $d=0,3$ мм. Трубка подключена последовательно с резистором с сопротивлением $R=390$ кОм к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В (рис. 2). Через какое время капелька сместится на одно деление шкалы (см. рисунок)?

Е. Юносов, Н. Яминский

Ф1212. Коэффициент преломления атмосферы планеты X уменьшается с высотой h над ее поверхностью по закону $n=n_0-\alpha h$. Радиус планеты R. Найти, на какой высоте h_0 над поверхностью планеты находится оптический канал, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.

Н. Седов

Решения задач

М1176 — М1180, Ф1188 — Ф1192

М1176. *Два квадрата AKBM и CNDL расположены на плоскости так, что ABCD — выпуклый четырехугольник, причем точки K и L лежат внутри этого четырехугольника. Докажите, что площадь этого четырехугольника равна* $(MN^2-KL^2)/4$.

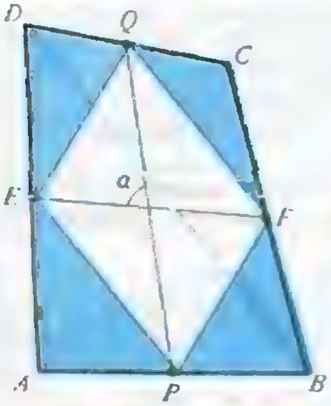


Рис. 1.

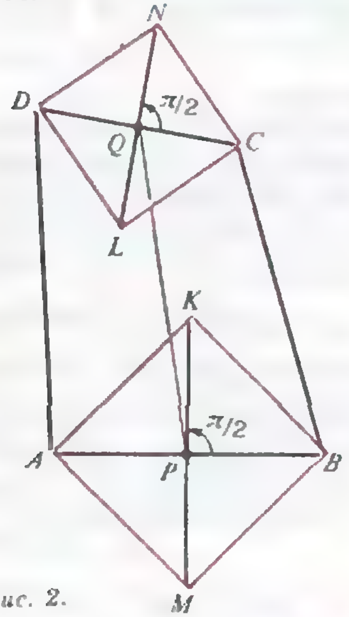


Рис. 2.

Обозначим через PQ и EF средние линии четырехугольника $ABCD$, как показано на рисунке 1; тогда его площадь S вдвое больше площади $PEQF$ (общая площадь синих треугольников равна $S/2: S_{PAE}+S_{QCE}=S_{BAD}/4+S_{BCD}/4=S/4=S_{PBF}+S_{QDE}$).
Таким образом,

$$S=2S_{PEQF}=PQ\cdot EF\cdot \sin\alpha, \qquad (1)$$

где α — угол между прямыми PQ и EF.

С другой стороны,

$$\frac{1}{4}(MN^2-KL^2)=\frac{1}{4}(\overline{MN}+\overline{KL})\cdot(\overline{MN}-\overline{KL})=\overline{PQ}\cdot\bar{v}, \qquad (2)$$

где $\bar{v}=(\overline{MK}+\overline{LN})/2$, поскольку

$$\overline{MN}+\overline{KL}=(\overline{MP}+\overline{PQ}+\overline{QN})+(\overline{KP}+\overline{PQ}+\overline{QL})=2\overline{PQ}, \qquad (3)$$

$$(\overline{KP}=-\overline{MP},\ \overline{QL}=-\overline{QN}),$$

а

$$\overline{MN}-\overline{KL}=(\overline{MK}+\overline{KN})-(\overline{KN}+\overline{NL})=\overline{MK}+\overline{LN}.$$

Докажем, что правые части формул (1) и (2) равны. Векторы $\overline{MK}$ и $\overline{LN}$ получаются из $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ соответственно поворотом на $\pi/2$ в одном и том же направлении (на рисунке 2 — против часовой стрелки). Поэтому их полусумма $\bar{v}$ получается тем же поворотом из $(\overline{AB}+\overline{DC})/2$. Но полусумма векторов, соединяющих концы двух отрезков, равна вектору, соединяющему середины этих отрезков,— мы уже доказали это для отрезков MK и NL (см. (3)), т. е. $(\overline{AB}+\overline{DC})/2=\overline{EF}$. Итак, вектор $\bar{v}$ равен вектору $\overline{EF}$, повернутому на $\pi/2$. Следовательно, угол между векторами $\overline{PQ}$ и $\bar{v}$ равен $\pi/2\pm\alpha$ (напомним, что α — это угол между *прямыми* PQ и EF). Но по условию угол KPQ, то есть угол между векторами $\overline{PQ}$ и $\overline{MK}$, и угол PQL — между $\overline{PQ}$ и $\overline{LN}$ — острые, поэтому $\overline{PQ}\cdot\bar{v}=(\overline{PQ}\cdot\overline{MK}+\overline{PQ}\cdot\overline{LN})/2>0$, а значит, угол между $\overline{PQ}$ и $\bar{v}$ острый и равен $\pi/2-\alpha$. Теперь мы получаем, что $\overline{PQ}\cdot\bar{v}=PQ\cdot|\bar{v}|\cdot\cos(\pi/2-\alpha)=PQ\times EF\cdot\sin\alpha=S$, что и требовалось.

Попутно предлагаем доказать, что сумма MN^2+KL^2 равна сумме квадратов диагоналей AC^2+BD^2 данного четырехугольника или удвоенной сумме квадратов средних линий $2(PQ^2+EF^2)$.

Н. Васильев, В. Дубровский

М1177. *Докажите, что для положительных чисел* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, *не превосходящих 1, выполнено не-*

Воспользуемся известным неравенством Бернулли —

$$(1+x)^\alpha\geqslant 1+\alpha x \text{ при } \alpha>1,\ x>-1.$$

(Для его доказательства достаточно заметить, что функ-

равенство

$$(1+x_1)^{1/x_2}(1+x_2)^{1/x_3}\times$$
$$\times(1+x_3)^{1/x_4}\ldots(1+x_n)^{1/x_1}\geqslant$$
$$\geqslant 2^n.$$

ция $f(x)=(1+x)^\alpha-1-\alpha x$ имеет в точке $x=0$ минимум, так как $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha<0$ при $-1<x<0$ и $f'(x)>0$ при $x>0$, причем $f(0)=0$.) В силу этого неравенства и неравенства о средних

$$(1+x_1)^{1/x_2}(1+x_2)^{1/x_3}\ldots(1+x_n)^{1/x_1}\geqslant$$
$$\geqslant\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)\left(1+\frac{x_2}{x_3}\right)\ldots\left(1+\frac{x_n}{x_1}\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\cdot 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}\cdot\ldots\cdot 2\sqrt{\frac{x_n}{x_1}}=2^n.$$

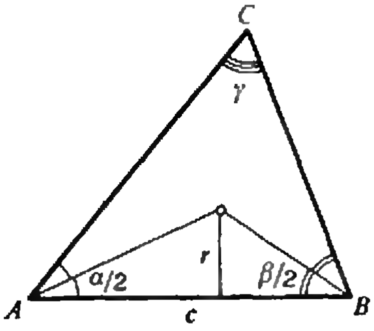
Можно провести и доказательство по идукции.

К. Кохась, М. Телевка

M1178. *а) Докажите, что для нетупоугольного треугольника ABC со сторонами a, b, c, радиусом вписанной окружности r и описанной R выполнено неравенство*

$$2(R+r)\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

б) При каком условии это неравенство обращается в равенство?



а) Обозначим углы треугольника через α, β, γ (см. рисунок). По теореме синусов $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$, а, как видно из рисунка,

$$c=r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)=r\,\frac{\sin(\alpha+\beta)/2}{\sin\alpha/2\sin\beta/2},$$

откуда

$$r=\frac{2R\sin\gamma\sin\alpha/2\sin\beta/2}{\cos\gamma/2}=4R\sin\alpha/2\sin\beta/2\sin\gamma/2.$$

Следовательно,

$$R+r=R(1+4\sin\alpha/2\sin\beta/2\sin\gamma/2)=$$
$$=R\left(1+2\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$
$$=R(1-2\sin^2\gamma/2+\cos\alpha+\cos\beta)=R(\cos\alpha+\cos\beta+$$
$$+\cos\gamma),$$

а доказываемое неравенство с учетом теоремы синусов принимает вид

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)\leqslant 0.$$

Преобразуем левую часть:

$$2\cos\alpha\cos\beta+2\cos\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos 2\alpha+\cos 2\beta+$$
$$+2\cos^2\gamma-1=\cos(\alpha-\beta)-1+\cos(\alpha+\beta)+$$
$$+2\cos\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+$$
$$+2\cos^2\gamma=\cos(\alpha-\beta)-1-\cos\gamma(1-2\cos\alpha-2\cos\beta+$$
$$+2\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\alpha+\beta))=(\cos(\alpha-\beta)-1)-$$
$$-\cos\gamma(1-2\cos\alpha-2\cos\beta+4\cos\alpha\cos\beta)=$$
$$=(\cos(\alpha-\beta)-1)-\cos\gamma(1-2\cos\alpha)(1-2\cos\beta).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что либо оба угла α и β не меньше 60°, либо оба они не больше 60°, тогда $(1-2\cos\alpha)(1-2\cos\beta)\geqslant 0$. Кроме того, очевидно, $\cos(\alpha-\beta)-1\leqslant 0$, $\cos\gamma\geqslant 0$ (треугольник не тупоугольный). Следовательно, полученное выражение неположительно.

б) Ответ: равенство достигается только для равностороннего или равнобедренного прямоугольного треугольника. Действительно, из проведенных выше выкладок следует, что для достижения равенства необходимо и достаточно, чтобы $\cos(\alpha-\beta)=1$, то есть $\alpha=\beta$, и либо $\cos\gamma=0$, то есть $\gamma=90°$, либо $\cos\alpha=\cos\beta=1/2$, т. е. $\alpha=\beta=60°$.

Э. Готман

М1179. *Найдите a_{1000}, если $a_1=0$ и при $n=1, 2, 3, \ldots$*

а) $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}(a_n+1)$;

б) $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}\times$ $\times(a_n+1)$;

в) $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n-4)(n+5)}\times$ $\times(a_n+1)$.

Ответ: а) 999/2, б) 999 · 2001/10010, в) 16650/167.

Докажем по индукции, что общие члены рассматриваемых последовательностей выражаются через номер n следующими формулами:

$$\text{а) } a_n=\frac{n-1}{2};\quad \text{б) } a_n=\frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)};\quad \text{в) } a_n=\frac{n(n-1)}{10(n+2)}.$$

При $n=1$ все формулы дают $a_n=0$. Проверим их справедливость для a_{n+1}, считая их верными для a_n.

Случай а): $a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{n-1}{2}+1\right)=\dfrac{n}{2}=\dfrac{(n+1)-1}{2}$.

Случай б): $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}\times$

$$\times\frac{2n^2-n-1+10n+10}{10(n+1)}=\frac{n\cdot(n+3)(2n+3)}{10(n+2)(n+3)}=\frac{n(2n+3)}{10(n+2)}.$$

Случай в): $a_{n+1}=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}\times$

$$\times\frac{n^2+9n+20}{10(n+2)}=\frac{n(n+1)}{10(n+3)}.$$

Осталось подставить $n=1000$ в формулы для a_n.

Б. Вертгейм

М1180*. *На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B, на другой — C и D. Отрезок AC проходит через общую точку сфер. Отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую AC равны.*

Пусть E и F — общие точки сфер, лежащие соответственно на AC и BD, O_1 и O_2 — центры сфер, G — точка, симметричная F относительно прямой O_1O_2. Очевидно, G — также общая точка сфер, причем BG и DG — диаметры сфер (рис. 1).

Будем обозначать через X' проекцию произвольной точки X на AC. Тогда ясно, что O_1' — это середина хорды AE сферы O_1, O_2' — середина хорды EC сферы O_2. В то же время O_1' — середина отрезка $B'G'$, так как O_1 — середина BG, а O_2' — середина отрезка $G'D'$. От-

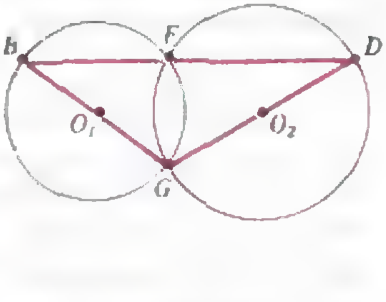


Рис. 1.

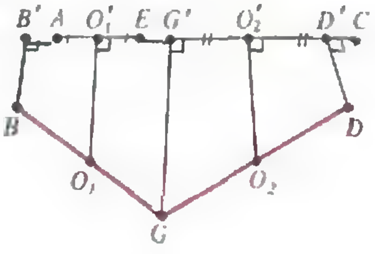
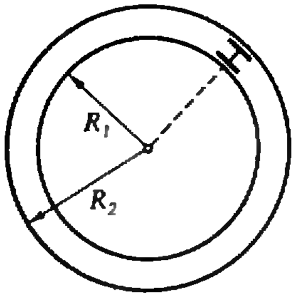


Рис. 2.

сюда следует (см. рис. 2), что $AB'=G'E$, а $G'E=D'C$, то есть $AB'=D'C$.

И. Шарыгин

Ф1188. *Между двумя высокими гладкими кольцевыми стенками находится колесная пара (см. рисунок) — два тяжелых диска массой M каждый, насаженных жестко на легкую ось длиной L ($L \approx R_2 - R_1$). Прилагая к оси горизонтально направленную силу, мы заставляем колесную пару двигаться по кругу без перекосов (так, что ось все время направлена по радиусу). Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы пройти весь круг? Коэффициент трения колес о землю k; колеса считать узкими.*



Ясно, что в заданной ситуации невозможно добиться того, чтобы оба колеса двигались без проскальзывания. Поэтому искомая работа равна работе сил трения, взятой со знаком минус.

При медленном движении колесной пары мощность силы трения для каждого колеса равна $-F_{тр}|v_н| = -kMg|v-\omega r|$, где $v_н$ — скорость нижней точки колеса относительно земли, r — радиус колеса, v — скорость центра колеса, ω — угловая скорость вращения колеса вокруг своей оси. Мощность сил трения, действующих на оба колеса, равна $-kMg(|v_1-\omega r| + |v_2-\omega r|)$, где v_1 и v_2 — скорости центров первого и второго колес. При фиксированных v_1 и v_2 величина в скобках минимальна при $v_1 \leqslant \omega r \leqslant v_2$, что соответствует случаю, когда колеса проскальзывают в противоположных направлениях. В этом случае суммарная мощность сил трения —

$$P_{тр} = -kMg(v_2-v_1),$$

а работа сил трения при прохождении полного круга —

$$A_{тр} = -kMg \cdot 2\pi(R_2-R_1).$$

Отсюда искомая работа —

$$A = -A_{тр} = kMg \cdot 2\pi(R_2-R_1) = 2\pi kMgL.$$

М. Цыпин

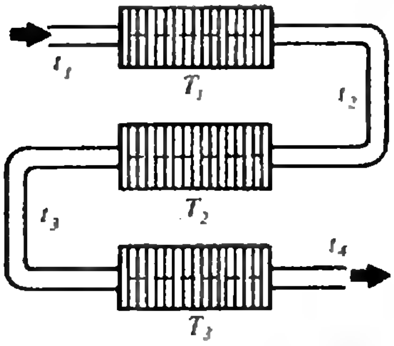
Ф1189. *В большой комнате зимой поддерживается постоянная температура $T_к = +15$ °C при помощи трех радиаторов центрального отопления, соединенных последовательно, по которым прокачивается горячая вода. При этом температура первого радиатора $T_1 = +75$ °C, а последнего (третьего) — $T_3 = +30$ °C. Чему равна температура второго радиатора? Считайте, что теплообмен — как между радиатором и комнатой, так*

Обозначим температуру воды на входе и выходе радиаторов так, как изображено на рисунке. Температура воды на входе каждого радиатора однозначно определяет температуру самого радиатора и температуру воды на его выходе. Условием равновесия является равенство потоков тепла «вода — радиатор» и «радиатор — комната».

Будем отсчитывать все температуры от комнатной, т. е. от $T_к$. Предположим, что мы изменили все температуры в a раз. Тогда во столько же раз изменятся оба потока тепла для каждого радиатора, и равновесие не нарушится. Это означает, что для всех трех радиаторов одинаковы отношения температуры на входе к температуре радиатора:

$$\frac{t_1-T_к}{T_1-T_к} = \frac{t_2-T_к}{T_2-T_к} = \frac{t_3-T_к}{T_3-T_к},$$

и между горячей водой и радиатором — пропорционален соответствующей разности температур.



и температуры на входе к температуре на выходе:

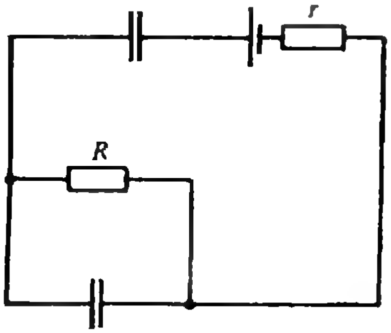
$$\frac{t_1-T_\text{к}}{t_2-T_\text{к}}=\frac{t_2-T_\text{к}}{t_3-T_\text{к}}=\frac{t_3-T_\text{к}}{t_4-T_\text{к}}.$$

Отсюда получаем

$$(T_1-T_\text{к})(T_3-T_\text{к})=(T_2-T_\text{к})^2,$$
$$T_2=45\ ^\circ\text{C}.$$

А. Андрианов

Ф1190. *К батарее с внутренним сопротивлением $r=1$ Ом подключены последовательно два одинаковых конденсатора. Параллельно одному из них присоединяют резистор сопротивлением $R=1000$ Ом, при этом в схеме выделяется некоторое количество теплоты. Какая часть этого тепла выделится на внутреннем сопротивлении батареи?*



Ток через резистор R складывается из тока разрядки «нижнего» конденсатора и тока зарядки «верхнего» (см. рисунок). Значит, ток, текущий через резистор r, в любой момент времени меньше тока, текущего через резистор R. Максимальное напряжение на большом резисторе не превышает напряжения батареи U, и напряжение на малом резисторе заведомо меньше величины $0{,}001\,U$, поэтому мы им пренебрежем и будем считать, что сумма напряжений на конденсаторах в точности равна напряжению батареи U.

Тогда решение задачи становится совсем простым: при подключении внешнего резистора изменения напряжения на конденсаторах одинаковы по абсолютной величине, только у «нижнего» конденсатора это изменение отрицательное, а у «верхнего» — положительное. Конденсаторы имеют одинаковые емкости (случай различных емкостей предоставляем вам разобрать самостоятельно), следовательно, и изменения зарядов конденсаторов также одинаковы по абсолютной величине. Это означает, что в любой момент времени ток через резистор R ровно в два раза больше тока через резистор r, а отношение соответствующих тепловых мощностей равно 4000 : 1.

Итак, на внутреннем сопротивлении батареи (на резисторе r) выделится примерно 1/4000 часть общего количества теплоты.

А. Зильберман

Ф1191. *Тонкостенная проводящая сфера радиусом R подключена к источнику тонкими проводами (рис. 1), присоединенными в точках A и B ($AO\perp OB$, O — центр сферы). Ток через источник равен I_0. В каком направлении движут-*

Сначала рассмотрим совсем простое подключение сферы к источнику — полюсами (рис. 2). Ясно, что на экваторе между отметками, находящимися на малом расстоянии Δl друг от друга, будет течь ток

$$i=\frac{I_0}{2\pi R}\Delta l.$$

Теперь подключим к сфере два источника (рис. 3) — один между полюсами, а другой между противо-

ся заряды в точке $C(OC\perp OA,\ OC\perp OB)$? Сделаем на сфере около точки C две отметки, так, чтобы расстояние между ними составляло $R/1000$, а соединяющий их отрезок оказался перпендикулярным направлению движения зарядов. Какая часть общего тока протекает по сфере между этими отметками?

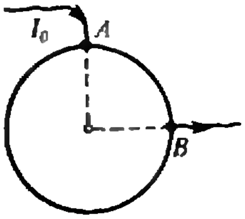


Рис. 1.

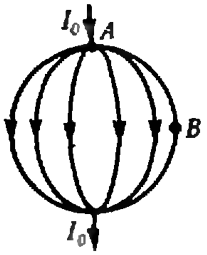


Рис. 2.

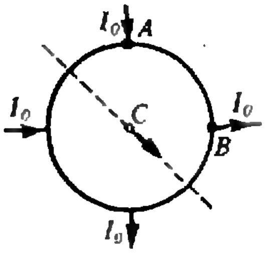


Рис. 3.

положными точками экватора. Тогда ток в точке C будет равен геометрической сумме двух взаимно перпендикулярных токов. Но этот ток ровно в два раза больше искомого.

Окончательно получим, что между заданными отметками на сфере протекает ток

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{I_0}{2\pi R}\,\frac{R}{1000}=\frac{\sqrt{2}}{4000\pi}I_0\sim 0{,}0001I_0$$

в направлении под углом 45° к экватору.

Л. Маркович

Ф1192. *На торце цилиндрического соленоида лежит тонкий лист картона, на нем — маленькое сверхпроводящее кольцо из тонкой проволоки, диаметр которой d_1 существенно меньше диаметра кольца D. При подключении соленоида к источнику последовательно с конденсатором (см. рисунок) кольцо подпрыгивает при $U>U_0$. Каким должно быть напряжение источника в аналогичном опыте с кольцом такого же диаметра, но сделанным из проволоки толщиной d_2? Индуктивность такого кольца с достаточной для практики точностью можно оценивать по формуле $L=kD\ln(1{,}4D/d)$. Сопротивление соленоида считать малым.*

Пренебрегая активным сопротивлением соленоида, запишем закон Ома для замкнутой цепи соленоида:

$$U-L_c\frac{\Delta I_c}{\Delta t}=\frac{q}{C},$$

где L_c — индуктивность соленоида, I_c — ток через соленоид, q — заряд на конденсаторе. Используя выражение $I_c=\Delta q/\Delta t$, получим уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{L_cC}=\frac{U}{L_c}.$$

Введем обозначения: $1/(L_cC)=\omega_0^2$, $q-UC=q^*$. Тогда уравнение, описывающее зависимость заряда q^* от времени, будет иметь вид

$$\frac{d^2q^*}{dt^2}+\omega_0^2q^*=0.$$

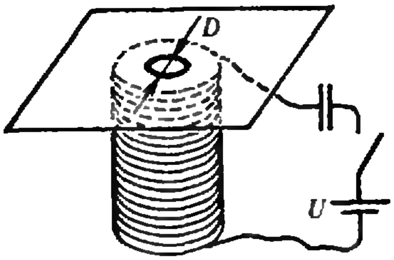
Это уравнение описывает гармонические колебания заряда q^*, который с точностью до константы UC равен заряду на конденсаторе. Решение этого уравнения ищем в виде

$$q^*(t)=A\sin\omega_0t+B\cos\omega_0t,$$

где A и B — константы, которые определяются из начальных условий. В момент замыкания ключа цепи соленоида

$$q^*(0)=q(0)-UC=-UC,$$

$$\frac{\Delta q^*}{\Delta t}=\frac{\Delta q}{\Delta t}=0,$$



откуда находим

$$A=0,\ B=-UC.$$

Следовательно,

$$q^*(t)=-UC\cos\omega_0 t,\qquad q(t)=UC(1-\cos\omega_0 t).$$

В дальнейшем нас будет интересовать ток соленоида:

$$I_с(t)=\frac{\Delta q(t)}{\Delta t}=UC\omega_0\sin\omega_0 t.$$

Запишем теперь закон Ома для сверхпроводящего кольца:

$$-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}-L_к\frac{\Delta I_к}{\Delta t}=0,$$

где Φ — внешний поток вектора магнитной индукции, пронизывающий кольцо, $I_к$ — ток в кольце, а $L_к$ — индуктивность кольца. Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi+L_к I_к=\text{const},$$

но в начальный момент времени эта константа равна нулю, поэтому

$$I_к=-\frac{\Phi}{L_к}.$$

Поток Φ пропорционален индукции соленоида, которая, в свою очередь, пропорциональна $I_с$ и площади кольца:

$$\Phi\sim I_с D^2\sim UD^2.$$

С учетом этого соотношения получим

$$I_к\sim\frac{D^2U}{L_к}.$$

Максимальная сила Ампера F, действующая в вертикальном направлении на кольцо, пропорциональна длине кольца, току в кольце и току в соленоиде:

$$F\sim DI_кI_с\sim\frac{D^3U^2}{L_к}.$$

Кольцо будет подпрыгивать, если сила F будет больше силы тяжести кольца, пропорциональной Dd^2. В предельном случае

$$\frac{D^3U^2}{L_к}\sim Dd^2\rightarrow U\sim\frac{L_к^{1/2}d}{D}.$$

Для первого случая

$$U_0\sim(\ln(1{,}4D/d_1))^{1/2}d_1,$$

для второго —

$$U_0'\sim(\ln(1{,}4D/d_2))^{1/2}d_2.$$

Следовательно,

$$U_0'=U_0\left(\frac{\ln(1{,}4D/d_2)}{\ln(1{,}4D/d_1)}\right)^{1/2}\frac{d_2}{d_1}.$$

Напряжение на источнике должно быть больше U_0'.

В. Можаев

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1156 — М1170, Ф1163 — Ф1177, справились с задачами М1156, М1158, М1159, М1166, М1169. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Ю. Абаянцев (Ленинград) 65; *А. Акимов* (Евпатория) 57, 60, 61, 65, 67, 68, 70; *А. Акопян* (Ереван) 57, 62, 64, 67, 68; *А. Алексеев* (Донецк) 57, 60, 62, 64, 65, 67, 70; *Д. Алешин* (Киев) 57, 60, 62; *Р. Алиев* (Джамелабад) 60; *Д. Андриенко* (Киев) 57, 60; *И. Аржанцев* (Киев) 57; *А. Ахмедов* (Баку) 57, 61, 64, 65, 67; *Г. Баженова* (Омск) 57; *Е. Бакенов* (Караганда) 57; *В. Бакулин* (Новосибирск) 57; *В. Барановский* (Омск) 57, 60—65, 67; *А. Блинова* (Ленинград) 57, 60; *В. Бодунов* (Кемерово) 60; *Д. Болдырев* (Черкесск) 60; *А. Бородин* (Донецк) 57, 60—62, 65, 67; И. Брагина (Челябинск) 67; *В. Бразилер* (Киев) 60; *Н. Бродский* (Челябинск) 57, 60; *Ц. Васильев* (София, НРБ) 62; *Б. Великович* (Москва) 60; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 57, 60; *О. Вовк* (Киев) 62; *К. Волченко* (Донецк) 57, 60—62, 64—66, 70; *Р. Гандлина* (Бобруйск) 62; *М. Гельбанд* (Одесса) 60; *Е. Гендин* (Киев) 57; *И. Герман* (Ленинград) 57, 60, 62, 65, 67, 68; *А. Гирич* (Киев) 57, 60; *А. Глебов* (Новосибирск) 67; *П. Гольдберг* (Севастополь) 60; *Э. Горянский* (Берегово Закарпатской обл.) 60; *М. Гришин* (Минск) 57, 60; *С. Гудилин* (Челябинск) 67; *И. Гуревич* (Пермь) 60; *А. Гурман* (Одесса) 57, 60—62, 64, 68; *С. Дашян* (Ереван) 57, 60, 67, 68; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 57, 60, 67; *А. Днестранский* (Рязань) 60; *С. Дориченко* (Берегово Закарпатской обл.) 57, 60, 67; *М. Дружинин* (Москва) 68; *В. Дубровнер* (Киев) 62; *Ю. Ерошенко* (п. Приютово БашАССР) 57, 60, 61, 67; *А. Зайцев* (Калинин) 60; *Н. Зарубин* (Харьков) 57, 60, 61, 64, 65; *О. Златковский* (Харьков) 57; *О. Иванова* (Протвино) 67; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 57, 67, 68, 70; *С. Иноземцев* (Омск) 64, 65, 67; *Д. Кабыш* (Москва) 57, 60, 62, 64; *Т. Калита* (Киев) 60, 64; *К. Кацман* (Киев) 60; *А. Кецле* (Караганда) 62; *С. Кимбар* (д. Дягильно БССР) 57, 65, 67; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 67; *С. Ковaценко* (Винница) 57, 60, 62, 64, 65, 67, 68; *А. Козачко* (Винница) 57, 60, 63—65, 67, 68, 70; *Д. Козлов* (Ленинград) 57, 61—64; *И. Колков* (Ленинград) 62; *А. Копылов* (п. Черноголовка Московской обл.) 60, 67; *Д. Королев* (Ленинград) 67, 68, 70; *А. Крапивин* (Харьков) 62; *А. Кудрявцева* (Киев) 60, 65, 67; *А. Кудымов* (Ленинград) 57, 60; *М. Лоенко* (Павлодар) 60, 62; *Я. Лотоцкий* (Тернополь) 57; *В. Малиновский* (Набережные Челны) 57; *К. Малков* (Саратов) 62; *С. Маркевич* (Минск) 57; *М. Марченко* (Гайворон) 57, 60, 62—65, 67, 68, 70; *Н. Мацко* (Киев) 67; *К. Мишачев* (Липецк) 57, 60—65, 67, 70; *А. Мишин* (Рыбница) 60; *Э. Молдавская* (Киев) 63; *А. Морозова* (Одесса) 60, 62, 64, 68; *М. Мукин* (Тамбов) 57, 60, 63, 67; *Р. Мучник* (Винница) 57, 60, 62, 64, 65, 67, 68, 70; *Т. Надева* (Пловдив, НРБ) 57; *А. Насыров* (Обнинск) 61, 64, 67, 70; *А. Наумович* (Минск) 60, 62—65; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 57, 60—62, 64, 67, 70; *Н. Немировская* (Киев) 57, 64; *А. Ненашев* (Хабаровск) 67, 70; *Н. Никончук* (Брест) 60, 62; *И. Новак* (Житомир) 62; *А. Олжабаев* (Караганда) 57; *Г. Ониани* (Кутаиси) 60; *П. Оруджев* (Баку) 57, 62; *В. Острик* (Мариуполь) 57, 60, 62, 64, 67, 70; *Т. Панов* (Киев) 57, 60, 62; *Л. Перельман* (Ленинград) 61, 62, 64, 67, 70; *Б. Петренко* (Днепропетровск) 61; *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) 62; *Э. Пикялите* (Вильнюс) 57, 60; *А. Пилипенко* (Киев) 57, 60; *В. Плескунин* (Москва) 60; *Ф. Попеленский* (Москва) 57, 60, 67; *Д. Поперечный* (Хабаровск) 57, 60; *Л. Порохня* (Павлодар) 64, 67, 70; *С. Потехин* (Саратов) 60, 61; *В. Рейцман* (Москва) 60; *Р. Ролинский* (Киев) 60; *Д. Рубанович* (Одесса) 60; *А. Рябов* (Мурманск) 62; *К. Саввиди* (Ереван) 57, 60; *А. Савченко* (с. Мошны Черкасской обл.) 57, 60; *И. Селищев* (п. Манченки Харьковской обл.) 57, 60, 62—64, 67, 68; *А. Скопенков* (Москва) 57, 60—64, 67, 70; *А. Скороход* (Киев) 57, 60, 62; *В. Слюсарчук* (Ровно) 62, 64, 67; *М. Срянн* (Лабинск) 60; *И. Сперанский* (Донецк) 57; *В. Стакаускас* (с. Боке ЛитССР) 57, 62—64, 67, 68; *С. Тайманов* (Раменское) 60, 65, 67; *А. Тилипман* (Одинцово) 57; *А. Тимофеев* (Павлодар) 60, 62; *С. Тихонов* (Воронеж) 57, 60, 62, 64, 67, 68, 70; *С. Трифонов* (Киев) 67; *Д. Угай* (п. им. Морозова Ленинградской обл.) 67; *А. Уханов* (Евпатория) 57, 60; *В. Файнберг* (Черновцы) 61, 62; *В. Фейнберг* (Черновцы) 57, 60; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 57, 60, 61, 64, 67; *Л. Харченко* (Киев) 62; *М. Хасин* (Донецк) 57, 60, 62; *Г. Хачатрян* (с. Бердик Арм. ССР) 57; *А. Хисамиев* (Алма-Ата) 57; *Ю. Хорошилов* (Челябинск) 60; *М. Худойназаров* (к-з Абад Хорезмской обл.) 62; *А. Чуприна* (Рязань) 60; *Г. Шаповалов* (Киев) 57, 60; *А. Шиндлер* (Феодосия) 67; *А. Шнайдман* (Киев) 60; *К. Щербакян* (Арзамас) 64; *А. Эгамов* (Гороховец) 57, 60, 61, 63, 64; *О. Южаков* (п. Юргамыш Курганской обл.) 67; *О. Яцун* (Киев) 57.

Физика

Ю. Абаянцев (Ленинград) 68, 69; *М. Авербух* (Львов) 74; *Д. Андриенко* (Киев) 67; *С. Антипин* (Северодвинск) 63, 64, 67—71, 74, 76; *Т. Бакеев* (Алма-Ата) 63, 65, 67—70, 74; *В. Бакулин* (Новосибирск) 67, 69, 74; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 64—72, 74, 77; *Р. Баскаков* (Красноярск) 64—67, 69, 70, 74—77; *И. Башук* (Великие Мосты) 63—68, 70, 72, 74—77; *М. Беднюк* (Аша) 69, 70; *М. Белоус* (Люберцы) 70; *Л. Беркович* (Киев) 65; *С. Бобровник* (Черновцы) 63—66; *Е. Боков* (Кирово-Чепецк) 75; *Р. Бучко* (Черновцы) 64—67, 69, 70; *Г. Важенин* (Свердловск) 64, 65, 68—70, 72, 74, 76, 77; *М. Васильев* (Саратов) 74; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 64, 65, 67—70, 74; *А. Викол* (Нерюнгри) 69—71; *А. Власов* (Ленинград) 69; *Г. Выгон* (Москва)

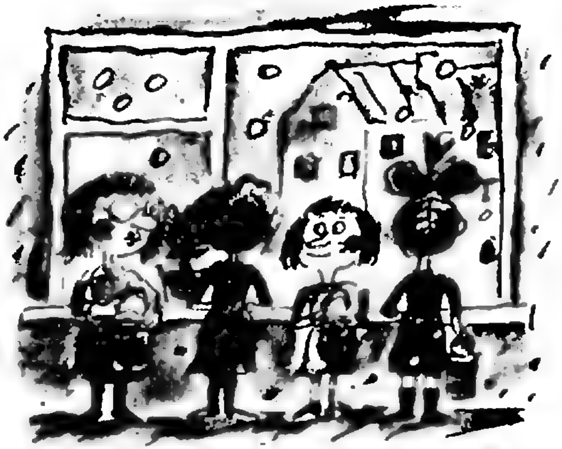
63—67, 69, 70, 74—76; *В. Высоцкий* (Киев) 63—67, 74—77; *К. Галичский* (Северодвинск) 63, 64, 67—70, 74, 76, 77; *А. Гвозденко* (Нежин) 63, 69, 70; *Е. Гендин* (Киев) 64—67, 69, 70; *Ф. Гнускин* (Вольск) 69; *В. Головко* (Старый Оскол) 63, 64, 67; *А. Гринчук* (д. Мохро Брестской обл.) 65, 68—72, 74; *Д. Грязных* (Челябинск) 64, 66—70, 72, 74—77; *В. Губин* (Ташкент) 65, 67, 69, 70, 76; *С. Гудилин* (Челябинск) 64, 74; *О. Гусар* (Канев) 64, 69—71; *А. Гусев* (Липецк) 70; *Ю. Гуц* (Ровно) 63, 67, 69, 70, 74, 76; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 65, 69, 70; *С. Демба* (Старый Оскол) 63, 64, 67, 74; *Н. Демчук* (Здолбунов) 64, 66, 69, 70, 74; *О. Дзюбенко* (Киев) 70; *Р. Димитров* (Варна, НРБ) 64, 74, 76; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 69, 70, 72, 74, 76; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 64, 65, 67, 69, 70, 72—74; *О. Дробенко* (Киев) 67; *М. Дружинин* (Москва) 63, 64, 66—70, 75, 76; *М. Дьяк* (Владимир) 68, 69; *Ю. Ерошенко* (п. Приютово БашкАССР) 64, 67, 69, 70; *А. Жук* (Ровно) 63—70, 72, 74—76; *В. Жуликов* (ст. Рязанская Краснодарского кр.) 69; *А. Зборовский* (Столин) 74; *М. Зеленфройд* (Бобруйск) 69, 70, 74, 76, 77; *О. Златковский* (Харьков) 69, 70; *В. Иванов* (Тула) 64—67; *Д. Иванов* (Смоленск) 70; *А. Ионес* (Ленинград) 68—70, 74; *М. Калиновский* (п. Трудовое Приморского кр.) 68—70, 74, 75; *Т. Калита* (Киев) 70, 74; *К. Калюжный* (Одесса) 70; *Г. Каминский* (Киев) 69; *Ал. Карпенко* (Брест) 63—65, 67, 69, 70, 74—76; *Ан. Карпенко* (Брест) 63—65, 67, 69, 70, 74, 75; *Е. Кац* (Гулистан) 64; *И. Кацман* (Киев) 67; *С. Кельман* (Алма-Ата) 63, 64, 67, 69, 70, 74; *Т. Кислощаева* (Канев) 69—71; *К. Кладько* (Харьков) 67—71, 74—76; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 64, 65, 69, 70, 74—76; *С. Клоков* (Киев) 69; *М. Ковалев* (Губкин) 64, 76; *В. Ковальский* (Киев) 64, 65, 67; *Е. Козленко* (Саратов) 70, 71; *А. Коломиец* (Северодвинск) 70; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 64, 66—70, 72—74, 76, 77; *Д. Комисаренко* (Винница) 69, 70; *Е. Коновалов* (Киев) 68—70; *И. Коновалов* (Киев) 74, 76; *А. Короновский* (Саратов) 70; *М. Корпусов* (Москва) 75, 76; *С. Котковский* (Черновцы) 70; *Ю. Кревич* (с. Княжполь Львовской обл.) 69; *В. Кузьменко* (Ивано-Франковск) 74, 76, 77; *А. Кульбачевский* (п. Ханкала Ч.-И. АССР) 69, 70; *В. Кутузов* (Рига) 69, 70, 74—76; *В. Кухтиков* (Таллинн) 74; *Д. Лабутин* (Иваново) 66, 67; *А. Лапенко* (Южноукраинск Николаевской обл.) 63, 64, 69, 70, 74, 77; *К. Латышев* (Москва) 63; *М. Левитин* (Тюмень) 69; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 65, 67, 69, 70, 73—77; *А. Литвак* (Киев) 67; *Н. Маллабаев* (Ташкент) 69, 71; *Ю. Маравин* (Евпатория) 70; *С. Маркевич* (Минск) 65; *Д. Массино* (Ташкент) 64, 67—70, 74; *Ю. Матюнин* (Вольск) 64—67, 69—72, 74—77; *Н. Мацко* (Киев) 63, 66, 67, 69, 70, 72, 74, 75, 77; *Д. Медведев* (Алма-Ата) 68—70; *В. Мейтус* (Киев) 63, 64, 67; *Р. Мизюк* (Ровно) 63—70, 74, 76, 77; *С. Миликисьянц* (Фергана) 63—65, 67, 69, 70, 74, 76; *О. Мирошниченко* (Луцк) 64, 66, 74; *А. Михович* (Могилев) 67, 74; *Е. Мищенко* (Черновцы) 64—67, 69—72; *А. Мороз* (Харьков) 74, 77; *Т. Муханова* (Калининград Московской обл.) 69, 70; *В. Мытько* (Ленинград) 63—65, 67, 69, 70, 74—77; *Р. Невзоров* (Мытищи) 67; *Н. Немировская* (Киев) 67, 70, 74; *С. Никитин* (п/о Кузьмолово Ленинградской обл.) 74; *А. Николаев* (Киев) 69, 70; *А. Новиков* (Киев) 67; *Ц. Нямхуу* (Улан-Батор, МНР) 65, 67; *Д. Омецинский* (Киев) 64, 66—72; *В. Онищук* (Минск) 68, 69; *Г. Орепер* (Киев) 67; *А. Орловский* (Киев) 64—67, 69, 70, 72, 74—77; *Д. Офенгенден* (Донецк) 74, 75; *А. Паукште* (Вильнюс) 68, 69; *А. Пензин* (Куйбышев) 64, 67; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 67; *Т. Петрова* (Новосибирск) 70; *И. Пилюгин* (Алма-Ата) 63, 64, 67—70, 74, 76; *С. Подпрятов* (Киев) 69, 70, 75; *В. Полищук* (Канев) 64, 66, 69—71; *С. Польшин* (Харьков) 63—65, 67—75; *Ф. Попеленский* (Москва) 74; *Н. Потапов* (Брест) 65; *С. Поторочин* (Ижевск) 63, 69, 72, 74, 76, 77; *Е. Призант* (Одесса) 64, 67—70, 73, 74, 76; *В. Пузанов* (Донецк) 69, 70, 74; *А. Раевский* (Москва) 69; *В. Раймундас* (Друскининкай) 63, 67; *А. Распереза* (Брест) 63—67, 69, 70, 74—77; *У. Рахимов* (Шават) 65, 70; *Х. Рахимов* (Шават) 65, 74; *А. Ружук* (Винница) 65; *А. Рыбалочка* (Киев) 65, 67; *Н. Рябова* (Харьков) 64, 65, 67, 69, 70, 72—75; *Н. Савельев* (Кузнецовск) 65; *А. Савин* (Горловка) 64, 65, 69, 70, 76; *А. Савченко* (с. Мошны Черкасской обл.) 64, 68—70, 74, 76; *А. Самусенко* (Семипалатинск) 64, 68, 69, 71; *А. Самченко* (Запорожье) 75; *У. Санаев* (Ургенчский р-н Хорезмской обл.) 69; *А. Светашов* (с. Сергеевка Воронежской обл.) 67; *В. Силаев* (Брест) 63, 64, 67, 69, 70; *А. Скабелин* (Барановичи) 63—65, 67—70, 74, 76; *А. Смирнов* (Тихвин) 65; *В. Солдатов* (п. Краснореченск Приморского кр.) 68, 70, 74; *Ю. Спектор* (Киев) 64, 69, 70; *М. Субботин* (Старый Оскол) 68—70; *И. Сысоев* (Семипалатинск) 64, 65, 69, 71; *С. Тайманов* (Раменское) 63, 67, 69; *В. Тамощюнас* (Вильнюс) 64—67, 69, 70, 72—75, 77; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 74; *М. Титов* (Киев) 70, 74, 76; *С. Тихонов* (Воронеж) 63—67, 73, 76, 77; *Р. Тодоров* (Варна, НРБ) 70; *А. Тутов* (Рига) 69, 70, 74; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 63, 65—67, 69, 70, 72—75; *И. Фельдман* (Киев) 65, 67; *А. Филатов* (Кузнецовск) 65; *Л. Френклах* (Воронеж) 64, 65, 69, 76, 77; *А. Фридлянд* (Саратов) 63, 67, 69, 70, 72, 74, 76, 77; *Г. Хачатрян* (с. Бердик АрмССР) 64, 67; *В. Хаямина* (пгт Южный Аламышик Андижанской обл.) 69, 70; *А. Холод* (Бердянск) 64, 66, 67; *А. Христиченко* (Краматорск) 64—67, 70; *Е. Чашечкина* (п. Черноголовка Московской обл.) 64, 65, 67—70, 72, 74—77; *Л. Чернышев* (Москва) 69, 70, 76; *А. Черняк* (Винница) 70; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 63, 65—67; *Е. Шагаров* (Грозный) 64, 65, 67; *А. Шагинян* (Ростов) 68; *Г. Шаповалов* (Киев) 64, 68—70, 74; *В. Шарый* (пгт Ноябрьск Тюменской обл.) 63, 64; *А. Шведов* (Чарджоу) 68, 69; *С. Шинкевич* (Березники) 64—67, 69, 70, 73—77; *А. Шитов* (пгт Научный Крымской обл.) 63, 65, 67, 74, 76, 77; *А. Шнайдман* (Киев) 65; *А. Шпагин* (Мариуполь) 69, 70; *И. Шуляк* (Киев) 64, 65, 68—72, 74, 76, 77; *К. Шурунов* (Куйбышев) 64, 67—70; *М. Энтин* (Тула) 63—70, 72, 74, 75, 77; *А. Эрден-Груз* (Москва) 67; *И. Ягольницер* (Черновцы) 64, 67.

„Квант" для младших школьников

Задачи

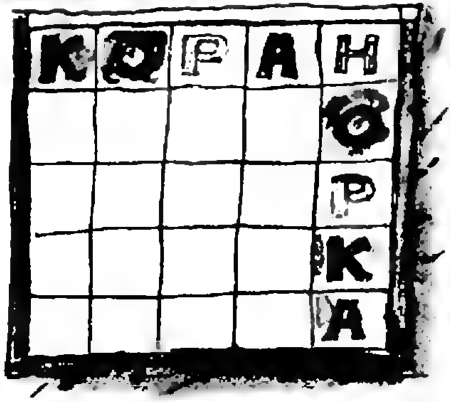
1. Если человек, стоявший в очереди перед вами, был выше человека, стоявшего после того человека, который стоял перед вами, то был ли человек, стоявший перед вами, выше вас?

2. У окна стоят четыре девочки (см. рисунок). Каких девочек достаточно попросить повернуться, чтобы выяснить, истинно ли такое утверждение: «Если девочка без очков, то у нее в волосах бантик»?



3. Найдите два натуральных числа, разность и частное которых — одно и то же целое число.

4. Заполните пустые клетки квадрата буквами К, О, Р, А и Н так, чтобы в каждом горизонтальном и вертикальном ряду, а также по диагоналям все буквы были различны.



К	О	Р	А	Н
				О
				Р
				К
				А

5. Сколько оборотов в сутки делает биссектриса между часовой и минутной стрелками?

Задачи, присылаемые в редакцию, мы часто «переодеваем»: меняем фабулу, уточняем, обобщаем. В этом юбилейном номере мы «переодели» пять задач, опубликованных в 1980 году.

КАМУШКИ И ШАХМАТНАЯ ДОСКА

(воспоминания о летних каникулах)

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Жарким июльским днем мы с Колей отправились на пляж. Вдоволь накупавшись, мы улеглись на песке загорать. Рядом с нами двое мужчин играли в шахматы. Естественно, мы тотчас начали обсуждать позицию на доске и подсказывать: я — одному, а Коля — другому. Но игроки были невозмутимы и на наши подсказки совершенно не реагировали. Отчаявшись превратить эту партию в шедевр шахматного искусства, мы стали думать, чем же нам заняться.

«А не сыграть ли нам в камушки?» — спросил у меня Коля. «Это что — подбрасывать и ловить?» «Да нет! — ответил он,— гораздо интереснее! Для начала сыграем в такую игру.

Имеется кучка камней. Мы по очереди берем по одному, по два или по три камня. Выигрывает тот, кто берет последний камень».

Я решил играть так, чтобы у меня всегда было четное число камней,— и проиграл. Во второй партии я стал брать камни так, чтобы у меня все время было нечетное число камней,— и снова проиграл. Проигрывать в третий раз мне очень не хотелось, и я решил попытаться понять смысл игры.

И в первый раз, и во второй раз получилось так, что перед моим последним ходом в кучке оказывалось

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 1 за 1982 год.

4 камня. Если я брал только один камень, Коля забирал остальные три. Если же я брал два или три камня, он забирал оставшиеся два или единственный последний камень.

Как же мне сделать, чтобы вновь не оказаться перед четырьмя камнями? Оставлять ему 5, 6 или 7 камней нельзя: взяв 1, 2 или 3 камня, он вновь оставит мне 4 камня. А если я оставлю ему 8 камней? Тогда уже он будет вынужден оставить мне 5, 6 или 7 камней, а я заставлю его делать ход в ситуации, когда в кучке лежит 4 камня. И тут меня осенило! Если игрок получает на своем ходе кучку камней, количество которых делится на 4, то после любого его хода количество оставшихся камней уже не сможет делиться на 4, а его партнер вновь сможет сделать ход, приводящий к кучке, количество камней в которой вновь делится на 4, и так далее, пока не исчерпаются все камни. Все ясно!

Пересчитав камни в кучке (их оказалось 25), я поднял голову, чтобы сказать Коле, что беру один камень, но... он уже махал мне рукой с середины реки.

Когда мы, накупавшись, вернулись на старое место, я, как бы нехотя, спросил: «Сыграем еще партию в камни? Начинать должен вроде бы я?» «Что ж,— ответил Коля,— давай; только сейчас будем играть по новым правилам:

Из кучки камней снова берем по одному, по два или по три камня. Проигрывает тот, кто берет последний камень. Ну, начинай!»

Я задумался, а через минуту, еще раз пересчитав камни в кучке — их как было, так и осталось 25, поднял руки вверх. «Сдаюсь, проиграл!» «Почему?» — удивился Коля. В ответ я разложил камни так, как показано на рисунке 1,— шесть кучек по 4 камня и еще один камень.

«В первой игре я выигрывал, беря первым ходом один камень,— сказал я,— а потом — столько камней, чтобы в сумме с камнями, взятыми перед этим тобой, получилось четыре камня. А теперь, сколько бы камней я ни взял, ты, беря всякий раз столько камней, чтобы в сумме со взятыми перед этим мной камнями получалось четыре камня, оставишь мне последний камень».

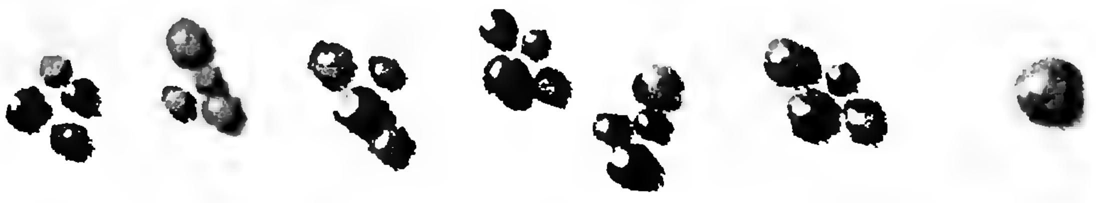
«Молодец,— похвалил меня Коля.— Ты нашел выигрышную стратегию для второго игрока. Что же мы будем делать дальше?»

Тут мы заметили, что наши соседи-шахматисты ушли купаться. «Эх, жаль, не попросили у них шахматы поиграть, пока они купаются!» — сказал я, глядя на пустую шахматную доску. Фигуры наши соседи убрали в сумку. На песке валялась лишь одна забытая пешка. А мне хотелось после всех моих неудач взять реванш у Коли.

«Знаешь что,— сказал Коля, придвигая шахматную доску и устанавливая эту единственную пешку в угол доски,— давай сыграем в игру, автором которой является известный советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР*) И. М. Гельфанд. Играют в нее так: *сначала пешка стоит в одном из углов доски, а затем мы ее по очереди будем передвигать на одну из соседних клеток, причем назад ходить нельзя,*— и он, поставив пешку на одно из центральных полей, показал, на какие поля ее можно передви-

---

*) Ныне академик.



нуть (на рисунке 2 эти ходы указаны стрелками).— *Выигрывает тот, кто поставит пешку в противоположный угол доски»*.

Я тотчас согласился — ведь в шахматы я играю куда лучше Коли, и здесь не какие-то там камушки, а настоящая шахматная доска, настоящая пешка, которая, правда, ходит почти как король.

Первую партию я проиграл и решил во второй не торопиться, а хорошенько обдумывать позицию. Однако тут вернулись наши соседи, и нам пришлось, извинившись, вернуть им доску с пешкой. «Не расстраивайся,— сказал мне Коля,— в эту игру можно играть и при помощи камушков».

Я тут же расчертил на песке квадрат, провел линии, делящие его на 64 квадратика, а на угловое поле поставил камушек.

«Можно, конечно, и так,— сказал Коля,— но я имел в виду совсем другое».

Он сложил две кучки камней, по 7 камней в каждой. *«Будем по очереди брать камни: либо один камень из первой кучки, либо один камень из второй кучки, либо два камня — по одному из каждой кучки; а можно не брать камни, а переложить один камень из одной кучки в другую. Выигрывает тот, кто забирает последний камень»*.

«Не хочу я играть в твои дурацкие камни,— возмутился я,— давай играть в игру Гельфанда! Ты что — боишься?» «А это и есть та же самая игра Гельфанда,— ответил Коля,— Вот смотри!» И он нарисовал на песке около начерченного мной квадрата цифры от 0 до 7 сначала вдоль одной стороны, а потом вдоль другой стороны, как на рисунке 3.

«Посмотри, что происходит. Пусть фишка стоит на поле, скажем, (5; 6), то есть на пересечении вертикали, помеченной цифрой 5, и горизонтали, помеченной цифрой 6 (см. рис. 3). Положим в сторонке две кучки камней: в первой 5 камней, а во второй 6. В какие клетки я имею право передвинуть фишку? В клетки (6; 5), (5; 5), (4; 5), (4; 6) и (4; 7). Как из наших двух кучек, содержащих 5 и 6 камней, получить кучки, соответствующие новым положениям фишки? Очень просто! Чтобы получить положение (6; 5), нужно один камень переложить из второй кучки в первую; положение (5; 5) получается, если взять из второй кучки один камень; (4; 5) — если взять по камню из обеих кучек; (4; 6) — если взять один камень из первой кучки; наконец, положение (4; 7) получается, если один камень переложить из первой кучки во вторую. Поскольку начальное поле занумеровано цифрами (7; 7), вначале в каждой кучке должно быть по 7 камней. Конечное же поле занумеровано цифрами (0; 0) — в кучках не остается ни одного камня».

«А мне игра на шахматной доске нравится гораздо больше,— сказал я.— Вот смотри: клетка (0; 0) — проигрышная в том смысле, что если ход мой, а фишка уже стоит в этой клетке, то я проиграл. А соседние с ней клетки (0; 1), (1; 1) и (1; 0) — выигрышные. Тогда клетки (0; 2) и (2; 0) — проигрышные, так как с них можно пойти лишь на выигрышные клетки (на рисунке 4 проигрышные клетки помечены буквой П, а выигрышные — знаком +). Продолжая эти рассуждения, я смогу для каждой клетки определить, выигрышная она или проигрышная,— сказал я, заканчивая разметку полей квадрата (в результате получился рисунок 4).— Теперь я могу с тобой сыграть и в «каменный» вариант игры Гельфанда: буду передвигать фишку по доске и соответственным образом брать или перекладывать камни». «А я могу сформулировать совсем простое правило,— сказал Коля.— Посмотри, проигрышные клетки — это те, у которых обе «координаты» четные; у выигрышных же клеток хотя бы одна «координата» нечетна. Таким образом, в «каменной» игре Гельфанда стратегия у начинающего игрока очень простая: он должен брать камни так, чтобы в обеих кучках было четное число

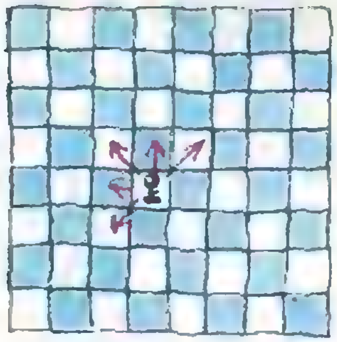


Рис 2.

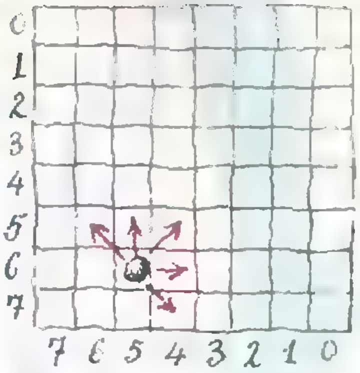


Рис 3

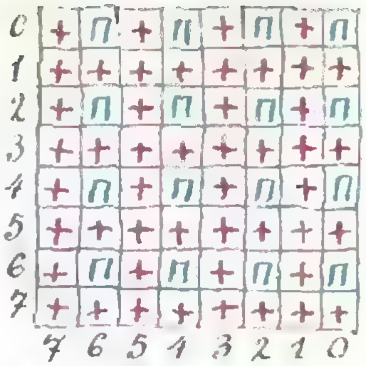


Рис 4.

	7	6	5	4	3	2	1	0
0	+	П	+	П	+	П	+	П
1	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	П	+	П	+	П	+	П
3	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	П	+	П	+	П	+	П
5	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	П	+	П	+	П	+	П
7	+	+	+	+	+	+	+	+

камней, причем если в каждой кучке нечетное число камней, то это можно сделать двумя способами: либо взяв по одному камню из каждой кучки, либо переложив камень из одной кучки в другую». «А вот этого делать как раз не следует,— сказал я,— так мы и будем перекладывать камни по очереди из одной кучки в другую до бесконечности. В этом случае нужно брать два камня, тогда общее количество камней в кучках все время будет уменьшаться и начинающий сможет торжествовать победу, если, конечно, он сделает правильный первый ход — на поле (6, 6) — и дальше будет придерживаться нашей стратегии».

Таким образом, мы полностью разобрались в «игре Гельфанда», а раз так, то играть в нее стало неинтересно. Другое дело — шахматы! Там сыграны, наверно, уже миллионы партий, а выигрышной стратегии пока так и не нашли. Зато в игре с камушками можно придумывать все новые и новые правила игры, а найти стратегию, приносящую выигрыш, не менее, если не более, интересно, чем найти решение замысловатого шахматного этюда.

Попробуйте найти, кто и как выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер — в следующих играх:

1. Имеется две кучки по 10 камней. Двое по очереди берут камни из какой-нибудь кучки (не обязательно всякий раз из одной и той же). Выигрывает тот, кто заберет последние камни.

2. Условия те же, что и в предыдущей игре, но игрокам запрещается брать такое количество камней, при котором в кучках в результате остается одинаковое количество камней.

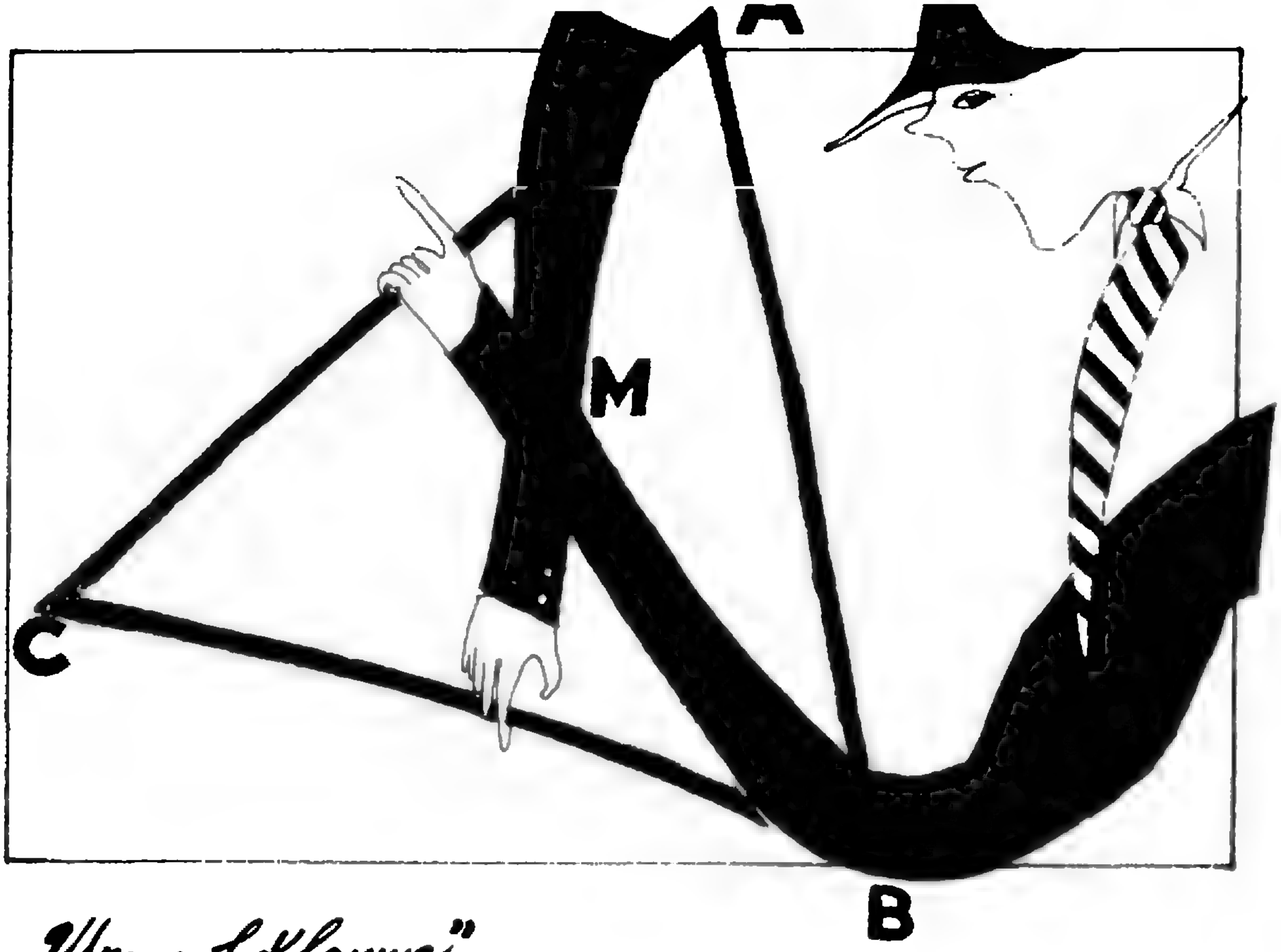
3. На столе лежат две кучки по 9 конфет. Каждый из двух играющих должен сначала переложить одну конфету из одной кучки в другую, а потом съесть две конфеты из одной кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать своего очередного хода.

4. На столе лежат две кучки очищенных орехов, в одной — 7, а в другой — 6 орехов. Двое играющих ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий съедает орехи в одной из кучек, а другую делит на две части (любые). Если он не сможет разделить эту кучку на две части из-за того, что в ней один орех, то он его съедает и выигрывает.

Дорогие подписчики!

Мы выражаем сожаление по поводу того, что в прошлом году не все номера «Кванта» доходили до вас вовремя, а некоторые не дошли вовсе.
Сбои происходили по независящим от нас причинам и вопреки нашим усилиям.
Надеемся, что в нынешнем году таких срывов не будет.

Редакция



Школа в „Кванте"

Шесть доказательств теоремы о медианах

Кандидат физико-математических наук
В. ДУБРОВСКИЙ

Кашу маслом не испортишь

Давно замечено, что познакомиться с разными решениями одной задачи бывает полезнее, чем с однотипными решениями разных задач. Одной из теорем, допускающих, как и многие другие классические теоремы элементарной геометрии, несколько поучительных доказательств, является

Теорема о медианах треугольника. *Медианы* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *треугольника ABC пересекаются в некоторой точке M, причем каждая из них делится этой точкой в отношении* 2:1, *считая от вершины:*

$$AM:MA_1=BM:MB_1=CM:MC_1=2. \quad (1)$$

Во всех приводимых далее доказательствах, кроме шестого, мы устанавливаем только, что *медиана* BB_1 *проходит через точку M, которая делит медиану* AA_1 *в отношении* 2:1. Если в соответствующем рассуждении заменить отрезок BB_1 на отрезок CC_1, то мы получим, что и CC_1 проходит через M. Этим будет доказано, что все три медианы пересекаются в некоторой точке M, причем $AM:MA_1=2$. Поскольку все медианы равноправны, можно заменить AA_1 на BB_1 или CC_1; отсюда вытекает (1).

Первое доказательство (8 класс). Пусть K — середина отрез-

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 4 за 1978 год.

ка AM, B' — точка пересечения прямой BM со стороной AC. Нам достаточно доказать, что $AB'=B'C$. Через точки K и A_1 параллельно прямой BM проведем отрезки KL и A_1N (рис. 1). Поскольку $AK=KM=MA_1$ и $CA_1=A_1B$, по теореме Фалеса получаем $AL=LB'=B'N=NC$. Отсюда $AB'=B'C$.

Второе доказательство (8 класс). Рассмотрим гомотетию с центром M и коэффициентом $-1/2$. Точка A переходит при этой гомотетии в A_1. Пусть B переходит в B' (рис. 2). Тогда $\overline{A_1B'}=-\frac{1}{2}\overline{AB}$. С другой стороны, средняя линия A_1B_1 получается из стороны BA при гомотетии с центром C и коэффициентом $1/2$; таким образом, $\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\overline{BA}=-\frac{1}{2}\overline{AB}$. Итак, $\overline{A_1B'}=\overline{A_1B_1}$, следовательно, $B'=B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, причем центр гомотетии лежит в точке M. По определению гомотетии, точки B, M и $B'=B_1$ лежат на одной прямой.

Третье доказательство (9 класс). Рассмотрим треугольники MAC и MA_1C (рис. 3). Их высоты, опущенные из вершины C, совпадают, а длины противолежащих этой вершине сторон относятся как 2:1, поэтому $S_{AMC}=2S_{A_1MC}$, где S обозначает площадь. Аналогично, $S_{AMB}=2S_{A_1MB}$. Но $S_{A_1MC}=S_{A_1MB}$. Следовательно, $S_{AMC}=S_{AMB}=S_{BMC}$. Таким образом, треугольники MAB, MBC и MCA равновелики. Пусть B' — точка пересечения прямых BM и AC. Докажем, что $AB'=B'C$. С одной стороны, $\frac{AB'}{B'C}=\frac{S_{AB'M}}{S_{CB'M}}$. С другой стороны, $\frac{AB'}{B'C}=\frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}$. Итак, $\frac{AB'}{B'C}=\frac{S_{AB'M}}{S_{CB'B}}=\frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}$. Пользуясь теоремой $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{c-a}{d-b}=\frac{a}{b}$, отсюда получаем

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{S_{AB'B}-S_{AB'M}}{S_{CB'B}-S_{CB'M}}=\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=1.$$

Значит, $AB'=B'C$.

Четвертое доказательство (9 класс). Из рисунка 4

$$\overline{BM}=\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AM}=\overline{BC}+\overline{CA}+\frac{2}{3}\overline{AA_1}=\overline{BC}+\overline{CA}+\frac{2}{3}(\overline{AC}+\overline{CA_1})=\overline{BC}+\overline{CA}+\frac{2}{3}(\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{CB})=\overline{BC}+\overline{CA}+\frac{2}{3}\overline{AC}+\frac{1}{3}\overline{CB}=\overline{BC}-\frac{1}{3}\overline{BC}+\overline{CA}-\frac{2}{3}\overline{CA}=\frac{2}{3}\overline{BC}+\frac{1}{3}\overline{CA}=\frac{2}{3}(\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CA})=\frac{2}{3}(\overline{BC}+\overline{CB_1})=\frac{2}{3}\overline{BB_1}.$$

Следовательно, точка M лежит на медиане BB_1.

Пятое доказательство (9 класс). Опять рассмотрим точку B' пересечения прямых BM и AC (рис. 3). Применяя теорему синусов сначала к треугольникам $AB'B$ и $CB'B$, а затем — к треугольникам ABM и A_1BM и учитывая, что $\sin\angle AB'B=\sin\angle CB'B$, $\sin\angle AMB=\sin\angle A_1MB$, $BC=2A_1B$ и $MA=$

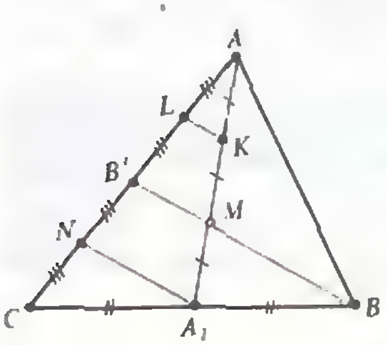


Рис. 1.

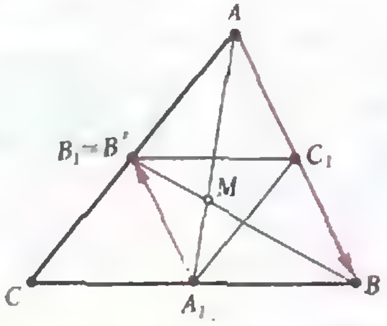


Рис. 2.

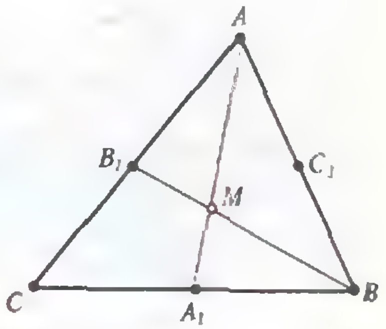


Рис. 3.

$=2MA_1$, получим

$$\frac{AB'}{B'C}=\frac{AB\sin\angle ABM}{\sin\angle AB'B}:\frac{BC\sin\angle A_1BM}{\sin\angle CB'B}=$$

$$=\frac{MA\sin\angle AMB}{2MA_1\sin\angle A_1MB}=1.$$

Значит, $AB'=B'C$.

Шестое доказательство (10 класс). Проведем через точки A и B плоскость α, не содержащую C, и построим в этой плоскости правильный треугольник ABC' (рис. 5). Из общих свойств параллельной проекции следует, что параллельная проекция вдоль прямой CC' переводит $\triangle ABC$ в $\triangle ABC'$, причем медианы треугольника ABC проектируются в медианы треугольника ABC'. Но в правильном треугольнике медианы являются и биссектрисами, а следовательно, пересекаются в одной точке. Легко доказать также (докажите!), что для треугольника ABC' справедливы равенства (1).

Отсюда вытекает, что наша теорема верна и для $\triangle ABC$.

Упомянем еще одно, быть может, самое простое и естественное доказательство теоремы о медианах: если поместить в вершины треугольника равные массы и поочередно группировать их парами, мы получим, что центр всех трех масс лежит на каждой из медиан. Центр системы равных масс, помещенных в некоторые точки, называется центроидом этого набора точек, поэтому и точку пересечения медиан треугольника часто называют его центроидом. Подробнее о применениях и обосновании метода центров масс можно прочитать в недавно вышедшей книге М. Б. Балка и В. Г. Болтянского «Геометрия масс» (М.: Наука, 1988).

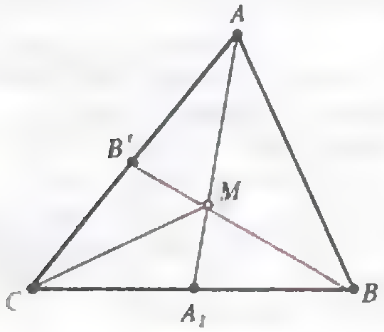


Рис. 4.

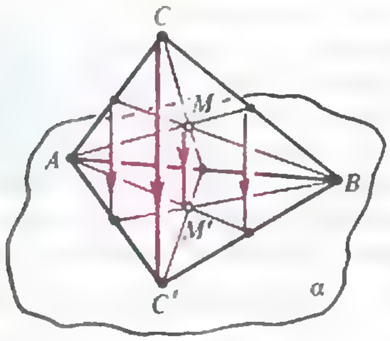


Рис. 5.

Задачи

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Вывести отсюда теорему о медианах.

2. Дан треугольник ABC. Укажите все такие точки P, что $S_{PAB}=S_{PBC}=S_{PCA}$.

3. Каждая из вершин пятиугольника соединена с серединой противоположной стороны. Докажите, что если четыре из полученных прямых пересекаются в одной точке, то и пятая прямая проходит через эту точку.

4. Через каждое из ребер трехгранного угла и биссектрису противоположного плоского угла проведена плоскость. Докажите, что три полученные плоскости имеют общую прямую.

5. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Известно, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P, причем

$$\frac{AP}{PA_1}=\frac{BP}{PB_1}=\frac{CP}{PC_1}.$$

Докажите, что P — центроид треугольника ABC.

6. Докажите, что семь отрезков: отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, и отрезки, соединяющие середины противоположных ребер,— пересекаются в одной точке. В каких отношениях эти отрезки делятся их общей точкой?

7. Докажите, что точка M, рассматриваемая в статье, а) является единственной точкой треугольника, для которой $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$; б) имеет координаты (относительно произвольных осей), равные средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника. Выведите отсюда теорему о медианах.

8. Докажите, что центроид треугольника является единственной точкой, в которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника достигает своего минимального значения.

Лаборатория „Кванта"

Группой учащихся ФМШ № 165 г. Новосибирска был сконструирован прибор для получения фотографий, имеющий угол обзора близкий к 180°. Об этом приборе они рассказали на научной конференции учащихся физико-математических школ-интернатов, которая проходила в марте 1974 года в г. Тбилиси, а затем написали статью в «Квант». Ее мы и предлагаем вашему вниманию.

Фотокамера «Рыбий глаз»

В. ДРАЧЕВ, А. МАЗУР

Представим себе пловца, который без маски нырнул под воду. Какая картина откроется ему, если он будет смотреть вверх через спокойную поверхность водоема?

При условии, что водоем сравнительно небольшой, пловец увидит следующее. На темном потолке (поверхность воды) — яркое круглое окно, в которое «зажато» все небо от горизонта до горизонта. Все предметы, окружающие водоем, стоят по краям этого окна, устремленные своими «верхушками» к его центру. Более того, можно будет увидеть даже часть прибрежного дна.

Все это можно легко объяснить на основе явления полного внутреннего отражения света. Известно, что при переходе света из *оптически более плотной* в оптически менее плотную среду существует предельный угол падения (угол α_0 на рисунке 1), начиная с которого свет не будет выходить из первой среды во вторую. Говорят, что в этом случае свет испытывает полное внутреннее отражение. Например, для перехода вода — воздух $\alpha_0=49^\circ$.

А теперь представим себе, что все *лучи идут в обратном* порядке, т. е.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 11 за 1974 год.

из воздуха в воду. Тогда, если поле обзора в воде заключено в конусе с углом раствора около 98° (т. е. два предельных угла α_0), то угол обзора в воздухе будет 180°. Поле обзора становится гораздо шире.

Именно так видят, например, рыбы (рис. 2). Правда, предметы, размещенные по краям воздушной полусферы, оказываются сильно искаженными и, конечно, смещенными из своего положения.

Рыба может также видеть предметы, находящиеся в воде и не попадающие, казалось бы, в поле зрения рыбы (например, маленькая рыбка на рисунке 2). Все дело в том, что при полном внутреннем отражении поверхность воды становится хорошим зеркалом, так как резко увеличивается коэффициент отражения света. Для углов падения, близких к нулю, коэффициент отражения у воды примерно 2 %, а для углов, бо́льших предельного, он почти 100 %. На рисунке показано, что зеркальное отражение рыбки видно под меньшим углом зрения, чем сама рыбка. Конечно, изображение будет хорошим, если поверхность водоема гладкая.

Для моделирования этого явления мы сделали фотокамеру, которая называется «Рыбий глаз». Камера (рис. 3) состоит из жестяной круглой коробки (диаметром 18 см, высотой 4 см) — корпуса *6* с крышкой *1*, оргстекла *4*, фольги с дырочкой — диафрагмы *3*, кружочка обыкновенного плоского стекла *2*[*] и фотопластинки *5*.

Преломление света происходит на верхней поверхности оргстекла, т. е. оргстекло здесь играет ту же роль, что и вода в описанных выше экспериментах.

Стекло, которое является прозрачной крышкой, закрывающей сверху диафрагму, представляет собой тонкую плоскопараллельную пластинку, поэтому оно никаких существенных дополнительных эффектов не дает.

Коробка обязательно должна быть заполнена жидкостью с показателем преломления примерно таким же, как у оргстекла (мы использовали смесь воды и глицерина), иначе свет по выходе из оргстекла примет направление, параллельное исходному, и ожидаемого изображения на фотопластинке не получится. (Аналогично: не увидит вышеописанной картины пловец, нырнувший в маске.)

При расчете диафрагмы надо учитывать следующий фактор. Изображение на фотопластинке получается с помощью дырочной камеры, поэтому диаметр отверстия должен быть малым по сравнению с расстоянием до фотопластинки. Но с уменьшением диаметра диафрагмы все заметнее проявляет себя дифракция света. Это приводит к ухудшению качества изображения. Теоретический расчет дает, что оптимальное значение диаметра отверстия должно быть порядка $d=\sqrt{\lambda h}$, где λ — длина волны света, h — расстояние от отверстия до фотопластинки. У нас лучшие по качеству снимки получались в солнечный день при диаметре диафрагмы 0,3 мм; чувствительность фотопластинки была 180 ед.

---

[*] Тонкое стекло можно резать ножницами, если погрузить и то и другое в воду.

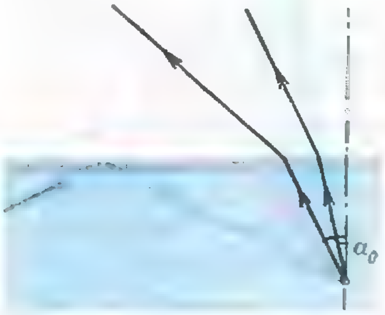


Рис. 1.

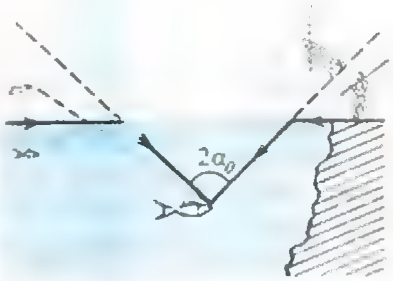


Рис. 2.

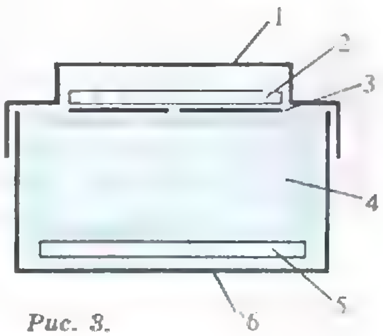
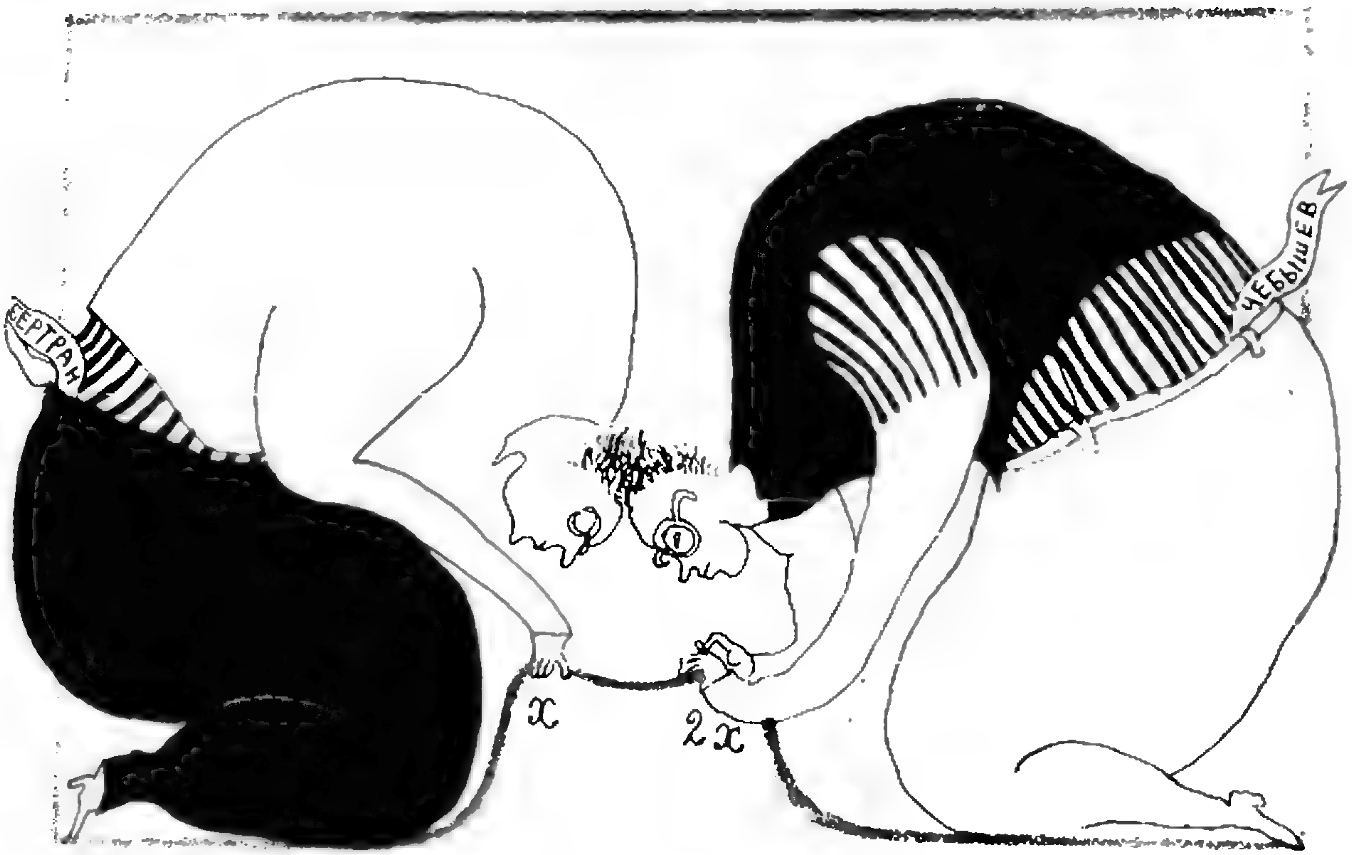


Рис. 3.



Математический кружок

О постулате Бертрана

Доктор физико-математических наук
М. БАШМАКОВ

Среди 69 работ Пафнутия Львовича Чебышева две работы сыграли особенно важную роль в развитии теории чисел. Эти работы: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «О простых числах», написанные им в молодые годы, посвящены труднейшему в теории чисел вопросу о распределении простых чисел.

Во второй из них указаны неравенства, позволяющие достаточно точно оценить количество простых чисел в данном отрезке натурального ряда и, в частности, доказан такой факт: между x и $2x$ (где $x > 1$) всегда есть хотя бы одно простое число. Это утверждение высказал известный французский математик Бертран, который проверил его в пределах имевшихся таблиц простых чисел, но доказать не сумел и принял в качестве постулата.

Мы проследим основные идеи Чебышева, приведшие его к этим оценкам, а затем предложим ряд задач, решение которых позволит читателям (достаточно хорошо знакомым со свойствами логарифмов) восстановить чебышевское доказательство постулата Бертрана и получить неравенство для количества простых чисел, не превосходящих заданной величины.

Читатель может удивиться, какое отношение имеют логарифмы к простым числам? В том-то и состоит заслуга Чебышева, что он указал, как

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 5 за 1971 год.

можно использовать обычные функции анализа — корни, логарифмы — при изучении задач о целых числах. Если мы хотим обнаружить, есть ли хотя бы одно простое число на отрезке от n до $2n$, то можно поступить следующим образом:

1) придумать какую-нибудь функцию $y=f(x)$ действительного аргумента x, которая не меняла бы своего значения, пока x пробегает отрезок между соседними простыми числами, и принимала бы большее значение при переходе через простое число;

2) доказать неравенства относительно функции f, которые помогли бы достаточно точно оценить скорость ее роста.

Для так подобранной функции разность $f(2n)-f(n)$ будет положительным числом в том и только том случае, если функция f возросла при переходе от n к $2n$, т. е. если между n и $2n$ имеется хотя бы одно простое число.

Первому условию удовлетворить легко. Можно рассмотреть такую функцию: обозначим через $\pi(x)$ число простых чисел, не превосходящих x.

Например, $\pi(1)=0$ (единица не считается простым числом), $\pi(3)=2$, $\pi(9)=4$, $\pi(9{,}5)=4$, $\pi(10{,}9)=4$, $\pi(11)=5$ и т. д.

Конечно, если бы мы могли доказать, что

$$\pi(2x)-\pi(x)>0,$$

мы доказали бы и постулат Бертрана, так как

$$\pi(2x)-\pi(x)$$

как раз и обозначает число простых чисел, заключенных между x и $2x$. Однако дать точные оценки для $\pi(x)$ нелегко, и Чебышев для решения этой задачи предложил рассмотреть функцию, которая при переходе через простое число возрастала бы не на единицу, как $\pi(x)$, а более ощутимо. Он исследовал функцию

$$\theta(x)=\log 2+\log 3+\log 5+\ldots=\sum_{p\leqslant x}\log p$$

($\theta(x)=0$ при $x<2$) — сумму логарифмов всех простых чисел, не превосходящих x (или, что то же самое, логарифм произведения простых чисел, не превосходящих x[*]). Тогда, как это очевидно из предыдущего, постулат Бертрана эквивалентен следующему неравенству:

$$\theta(2x)-\theta(x)>0. \qquad (1)$$

Для оценки функции $\theta(x)$ и доказательства (1) Чебышев использовал вспомогательную функцию $T(x)$:

$$T(x)=\log 2+\log 3+\ldots=\sum_{n\leqslant x}\log n.$$

Функция $T(x)$ есть логарифм произведения всех целых чисел, не превосходящих x. Чебышев показал, что функции $\theta(x)$ и $T(x)$ связаны между собой следующим замечательным тождеством:

$$\begin{aligned}T(x)={}&\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\theta(\sqrt[3]{x})+\ldots\\&+\theta\left(\frac{x}{2}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right)+\ldots\\&+\theta\left(\frac{x}{3}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{3}}\right)+\ldots\\&+\theta\left(\frac{x}{4}\right)+\theta\left(\sqrt{\frac{x}{4}}\right)+\theta\left(\sqrt[3]{\frac{x}{4}}\right)+\ldots\\&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{aligned} \qquad (2)$$

где суммирование обрывается тогда, когда аргумент $\sqrt[k]{x/m}$ становится меньше двух, а значение $\theta(\sqrt[k]{x/m})$ становится нулем. Функция T известна со времен Эйлера и еще задолго до Чебышева были доказаны неравенства, позволяющие довольно точно оценить порядок роста T.

Из этих неравенств Чебышев получает неравенства для $\theta(x)$ вида

$$Ax+v_1(x)<\theta(x)<\frac{6}{5}Ax+v_2(x), \qquad (3)$$

где A — некоторая постоянная, а дополнительные члены $v_1(x)$ и $v_2(x)$ при больших x значительно меньше x. Этого уже достаточно, чтобы при x, больших некоторого x_0, доказать неравенство $\theta(2x)-\theta(x)>0$ (у Чебышева $x_0=160$). Для x, меньших x_0, справедливость постулата Бертрана устанавливается прямой проверкой.

---

[*] Здесь и всюду ниже логарифмы берутся по основанию e — это так называемые натуральные логарифмы.

Дальнейшее развитие чебышевских идей привело к такому результату: для $x \geqslant 48$ $\theta\left(\frac{9}{8}x\right)-\theta(x)>0$, т. е. начиная с указанного места, между x и $\frac{9}{8}x$ всегда есть хотя бы одно простое число.

Вы можете более детально проследить за ходом рассуждений Чебышева, решая следующие ниже задачи 1—5.

Для того чтобы $T(x)$ выразить через $\theta(x)$, удобно ввести еще одну вспомогательную функцию. Пусть p^{a_p} — наивысшая степень p, не превосходящая x. Определим функцию ψ так:

$$\psi(x)=a_2\log 2+a_3\log 3+a_5\log 5+\ldots=$$
$$=\sum_{p\leqslant x} a_p\log p.$$

Ясно, что $\psi(x)$ есть логарифм наименьшего общего кратного для всех целых чисел, не превосходящих x. T легко выражается через ψ.

Задача 1. Докажите, что

$$T(x)=\psi(x)+\psi\left(\frac{x}{2}\right)+\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\ldots$$

Теперь надо связать функции ψ и θ.

Задача 2. Докажите, что

$$\psi(x)=\theta(x)+\theta(\sqrt{x})+\theta(\sqrt[3]{x})+\theta(\sqrt[4]{x})+\ldots$$

Решив задачи 1 и 2, вы установите тождество (2). Оценим теперь $T(x)$.

Задача 3. Докажите, что существует такое вещественное число e, что при всех натуральных n

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<n\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(где $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$).

Для решения этой задачи полезно показать, что каждое из чисел

$$a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

меньше каждого из чисел

$$b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1};$$

отсюда следует, что существует такое число e, которое больше всех a_n и меньше всех b_n. Это и есть то число, которое мы ищем (о некоторых его свойствах рассказывалось на последней странице нашего журнала № 1, 1971).

Решив эту задачу, вы получите такие неравенства для $T(x)$:

$$(x-1)\log(x-1)<T(x)<(x+1)\log x-x. \qquad (4)$$

Сам Чебышев пользовался более точными неравенствами.

Из оценки для $T(x)$ Чебышев получает оценки для $\psi(x)$, а затем и для $\theta(x)$.

Чтобы выразить ψ через T, Чебышев замечает следующее. Рассмотрим сумму

$$S=T(x)-T\left(\frac{x}{2}\right)-T\left(\frac{x}{3}\right)-T\left(\frac{x}{5}\right)+T\left(\frac{x}{30}\right).$$

Воспользуемся результатом задачи 1 и приведем эту сумму к такому виду:

$$S=A_1\psi(x)+A_2\psi\left(\frac{x}{2}\right)+A_3\psi\left(\frac{x}{3}\right)+\ldots$$

Задача 4. Проверьте, что коэффициенты $A_1, A_2, A_3, \ldots$ меняются с периодом 30 и что для первых тридцати значений n коэффициенты A_n составляют следующую последовательность: 1, 0, 0, 0, 0, —1, 1, 0, 0, —1, 1, —1, 1, 0, —1, 0, 1, —1, 1, —1, 0, 0, 1, —1, 0, 0, 0, 0, 1, —1.

Отсюда видно, что сумма S записывается знакопеременным рядом $S=\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)+\psi\left(\frac{x}{7}\right)-\psi\left(\frac{x}{10}\right)+\psi\left(\frac{x}{11}\right)-\ldots$

Так как ψ неубывающая функция,

$$S=\psi(x)-\left(\psi\left(\frac{x}{6}\right)-\psi\left(\frac{x}{7}\right)\right)-$$
$$-\left(\psi\left(\frac{x}{10}\right)-\psi\left(\frac{x}{11}\right)\right)\ldots\leqslant\psi(x). \qquad (5)$$

Аналогично

$$S=\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right)+\left(\psi\left(\frac{x}{7}\right)-\right.$$
$$\left.-\psi\left(\frac{x}{10}\right)\right)+\ldots\geqslant\psi(x)-\psi\left(\frac{x}{6}\right). \qquad (6)$$

Из (2) сразу получается неравенство для ψ, которое оценивает ее снизу, так как мы знаем неравенства для T и получили оценку для ψ через S, т. е. комбинацию значений T. Эта оценка будет иметь такой вид: $\psi(x)\geqslant A_1(x)+\omega_1(x)$, где ω_1 растет медленнее, чем x, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\omega_1(x)}{x}=0.$

Для получения оценки сверху надо освободиться еще от $\psi\left(\frac{x}{6}\right)$. Применяя неравенство (6) к $\frac{x}{6}, \frac{x}{6^2}, \frac{x}{6^3}$ и т. д. и складывая их, найдем неравенство для $\psi(x)$ типа $\psi(x)\leqslant A_2x+w_2(x)$, где w_2 растет медленнее, чем x.

Задача 5. Докажите, что

$$\psi(x)-2\psi(\sqrt{x})\leqslant\theta(x)\leqslant\psi(x)-\psi(\sqrt{x}).$$

Отсюда уже получаются нужные оценки (3).

Из результатов Чебышева не только вытекала справедливость постулата Бертрана, но, что еще более важно, из них получались неравенства, позволяющие хорошо оценить функцию $\pi(x)$:

$$c_1\frac{x}{\log x}<\pi(x)<c_2\frac{x}{\log x},$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные*). Вы сможете доказать такие неравенства, решив следующую задачу.

Задача 6. Докажите, что

$$\frac{\psi(x)}{\log x} < \pi(x) < \frac{\psi(x)+\theta(x)}{\log x}.$$

Несколько иные доказательства постулата Бертрана и неравенств для $\pi(x)$ можно прочесть в книгах [2] и [3]. В них вместо $n!$ оценивается $C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ (см. решение задачи M23, «Квант» № 2, 1971, с. 27).

---

*) Логарифм здесь можно брать по любому основанию a, большему единицы; от a зависят только значения постоянных c_1 и c_2, поскольку $\log_b x$ получается из $\log_a x$ умножением на постоянное число $\log_a b$. Более естественно использовать натуральный логарифм, потому что именно функция $x/\log_e x$ эквивалентна $\pi(x)$ при больших x, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log_e x} = 1$. Это было доказано уже значительно позже, а из работы самого Чебышева следовало только, что отношение $\pi(x)$ к $x/\log_e x$ заключено между 0,921 и 1,106 и что если предел при $x\to\infty$ существует, то он равен единице.

Литература

1. Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел.— Изд-во АН СССР, 1947.

2. Э. Трост. Простые числа.— М.: Физматгиз, 1959.

3. И. М. Яглом, А. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении.— М.: Гостехиздат, 1954, раздел II, п. 14.

Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха

(Начало см. на с. 24)

А как быть с углом α? Все опрошенные сошлись на том, что он лежит где-то в пределах $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$ (корабль на картине довольно тупоносый). Таким образом,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ < \sin\alpha < \sin 90^\circ = 1. \qquad (7)$$

Теперь у нас есть все, чтобы сделать оценки скорости корабля и поверхностных волн.

Результаты

Подставляя значения h, λ и $\sin\alpha$ из (5), (6), (7) в формулы (1) и (2), получим

$$v \geqslant \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}8\ \text{м/с}^2\cdot 0{,}26\ \text{м}}{1\div\sqrt{2}/2}} \approx \sqrt{5{,}1\div 7{,}25\ \text{м}^2/\text{с}^2} \approx 2{,}25\div 2{,}7\ \text{м/с}, \qquad (8)$$

$$u = \sqrt{\frac{9{,}8\ \text{м/с}^2\cdot\ 0{,}34\ \text{м}}{2\pi}} \approx 0{,}7\ \text{м/с}. \qquad (9)$$

Теперь мы с удивлением замечаем, что соотношения (8) и (9) несовместимы с неравенством (4). Действительно, судя по высоте носовой волны, корабль плывет со скоростью v не меньшей, чем 2,25 м/с, а если ориентироваться на круговые поверхностные волны, которые на картине почти концентричны, скорость корабля должна быть намного меньше скорости этих волн $u = 0{,}7$ м/с, которая и без того меньше v.

При известной внимательности вы найдете много подобных физических неточностей и в других произведениях искусства (по-видимому, это связано с тем, что у него свои задачи и законы). Тогда вы сможете не только полюбоваться ими и получить эстетическое удовольствие, но и поговорить с младшим братом о законах физики, используя очень привлекательные иллюстрации.

Практикум абитуриента

Электрические машины постоянного тока

Кандидат физико-математических наук
И. СЛОБОДЕЦКИЙ

В этой статье мы не будем подробно обсуждать устройство различных электрических машин. Мы рассмотрим работу электромотора и динамо-машины (динамо-машина — старое название индукционного генератора электрического тока), используя *два основных* закона — закон Ома и закон сохранения энергии.

Статья состоит в основном из вопросов и ответов. Работая над статьей, прежде чем прочитать ответ, попробуйте ответить на вопрос самостоятельно. Даже если вам это не удастся, размышление над вопросом принесет несомненную пользу, благодаря чему лучше запомнится правильный ответ.

Электромоторы

Во всех электромоторах (или, по-другому, электродвигателях) обязательно есть одни и те же основные части. Это, прежде всего, индуктор и якорь. Индуктор является источником магнитного поля. Когда по обмотке якоря пропускается электрический ток, якорь, находящийся в магнитном поле, приходит во вращение. Таким образом происходит преобразование электрической энергии в механическую. Если, например, вал мотора соединить со станком, станок можно привести в движение.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 5 за 1974 год под псевдонимом И. А. Зайцев.

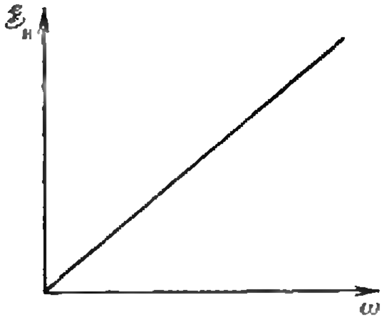


Рис. 1.

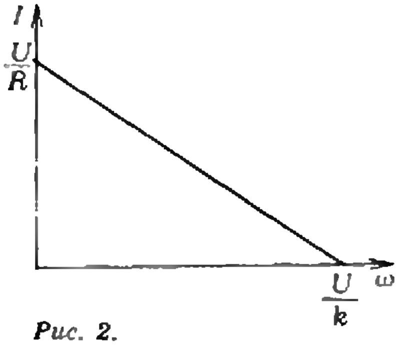


Рис. 2.

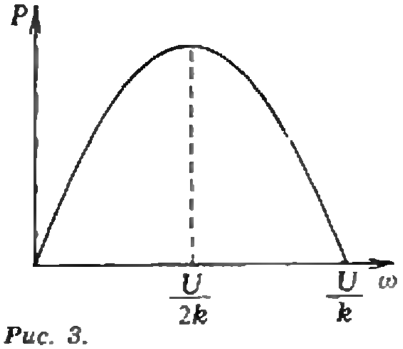


Рис. 3.

Вопрос. *Рассмотрим мотор постоянного тока с независимым возбуждением (в нем индуктором является или постоянный магнит, или электромагнит, обмотка которого питается независимо от обмотки якоря). Как записывается закон Ома для цепи якоря такого мотора, подключенного к источнику постоянного тока?*

Ответ. В электрической цепи якоря имеются две электродвижущие силы — напряжение источника тока U и ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\text{и}}$, возникающая в обмотке якоря при его вращении в магнитном поле индуктора. Причем ЭДС индукции, согласно правилу Ленца, противоположна по знаку напряжению источника тока. Поэтому закон Ома запишется так:

$$U-\mathscr{E}_{\text{и}}=IR, \qquad \text{(I)}$$

где I — ток в цепи, а R — общее сопротивление обмотки якоря и подводящих проводов.

Вопрос. *Как записывается закон сохранения энергии для такой цепи?*

Ответ. Энергия $W_{\text{п}}=UIt$, потребляемая от источника, тратится на джоулево тепло, которое выделяется на сопротивлении R, и на совершение полезной работы A. Поэтому, согласно закону сохранения энергии,

$$UIt=I^2Rt+A,$$

или для мощностей

$$UI=I^2R+P. \qquad \text{(II)}$$

Из равенств (I) и (II) можно получить много важных следствий.

Вопрос. *Чему равна полезная мощность P?*

Ответ. Умножив обе части равенства (I) на ток I, получим

$$UI-\mathscr{E}_{\text{и}}I=I^2R,$$

или

$$UI=I^2R+\mathscr{E}_{\text{и}}I.$$

Сравнивая полученное равенство с равенством (II), можно сразу же заметить, что

$$P=\mathscr{E}_{\text{и}}I,$$

т. е. полезная мощность мотора равна произведению ЭДС индукции на ток.

При неизменных U и R величина тока зависит от ЭДС индукции:

$$I=\frac{U-\mathscr{E}_{\text{и}}}{R}.$$

Из закона электромагнитной индукции следует, что ЭДС индукции, возникающая в обмотке якоря, пропорциональна скорости изменения магнитного потока $\Delta\Phi/\Delta t$ через эту обмотку:

$$\mathscr{E}_{\text{и}}\sim\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

В свою очередь, скорость изменения магнитного потока пропорциональна угловой скорости вращения якоря ω. Таким образом,

$$\mathscr{E}_{\text{и}}\sim\omega,$$

$$\mathscr{E}_{\text{и}}=k\omega,$$

где k — коэффициент пропорциональности. График зависимости $\mathscr{E}_{\text{и}}$ от ω показан на рисунке 1.

Теперь посмотрим, как зависят от ω ток в цепи якоря и полезная мощность двигателя. Из закона Ома

$$I=\frac{U-\mathscr{E}_{\text{и}}}{R}=\frac{U-k\omega}{R}$$

а из закона сохранения энергии

$$P=UI-I^2R=\mathscr{E}_{\text{и}}I=\frac{kU\omega-(k\omega)^2}{R}.$$

Графики зависимости I и P от ω приведены на рисунках 2 и 3.

Итак, каждому значению угловой скорости ω соответствуют определенные значения ЭДС индукции $\mathscr{E}_\text{и}$ и тока I. Причем при увеличении ω величина $\mathscr{E}_\text{и}$ увеличивается, а величина I уменьшается. При этом полезная мощность, развиваемая мотором, оказывается одинаковой при двух разных значениях скорости вращения якоря.

Вопрос. *В свою очередь, угловая скорость вращения якоря зависит от нагрузки двигателя. Как?*

Ответ. Электрические силы, действующие на якорь в магнитном поле индуктора, пропорциональны току, идущему по обмотке. Пропорциональны току и моменты этих сил, т. е.

$$M_\text{э} = k_1 I,$$

где коэффициент пропорциональности k_1 зависит от конструкции двигателя. Так как

$$I = \frac{U - k\omega}{R},$$

то

$$M_\text{э} = k_1 \frac{U - k\omega}{R},$$

т. е. суммарный момент электрических сил, действующих на якорь, линейно зависит от угловой скорости вращения якоря. При малой угловой скорости вращения якоря момент сил большой, при увеличении угловой скорости он уменьшается и становится равным нулю при

$$\omega = \frac{U}{k}.$$

С другой стороны, на вал двигателя действует момент механических сил, так называемый момент нагрузки M. Например, если двигатель равномерно поднимает на веревке груз, то момент нагрузки равен произведению силы натяжения веревки, которая равна весу груза, на радиус вала. В установившемся режиме якорь мотора, очевидно, вращается с такой скоростью ω, при которой момент электрических сил, действующих на якорь, равен моменту нагрузки. Действительно, пусть, например, скорость вращения якоря меньше ω. В этом случае момент электрических сил больше момента нагрузки, так что угловая скорость вращения якоря будет увеличиваться. Если угловая скорость вращения якоря больше ω, то момент электрических сил меньше момента нагрузки. Это будет приводить к уменьшению скорости вращения якоря до ω.

Таким образом, устанавливается такая угловая скорость вращения якоря, при которой

$$M_\text{э} = M,$$

или

$$k_1 \frac{U - k\omega}{R} = M,$$

откуда

$$\omega = \frac{k_1 U - MR}{k_1 k},$$

т. е. угловая скорость вращения якоря линейно зависит от момента нагрузки.

Итак, нагрузка определяет ток в обмотке якоря и угловую скорость его вращения.

Рассмотрим такую задачу.

Задача 1. *Электродвигатель присоединен к источнику постоянного напряжения. При числе оборотов $n_1 = 1000$ об/мин ток в цепи якоря равен $I_1 = 10$ А, а при числе оборотов $n_2 = 900$ об/мин он равен $I_2 = 15$ А. Найти число оборотов двигателя на холостом ходу (без нагрузки).*

Так как $I = (U - k\omega)/R$, а $\omega = 2\pi n$, то

$$I_1 = \frac{U - 2\pi k n_1}{R}$$

и

$$I_2 = \frac{U - 2\pi k n_2}{R}.$$

В режиме холостого хода $I_3 = 0$, поэтому

$$U - 2\pi k n_3 = 0.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$n_3 = \frac{I_2 n_1 - I_1 n_2}{I_2 - I_1} =$$

$$= \frac{15 \cdot 1000 - 10 \cdot 900}{5} \frac{\text{об}}{\text{мин}} = 1200\ \text{об/мин}.$$

тимость электрических машин

машины постоянного тока обра- . Если на клеммы машины по- постоянное напряжение, то якорь вращаться, совершая механиче- работу, т. е. получим электро- . С другой стороны, если вра- якорь с помощью другой маши- то электрическая машина будет ботать как динамо-машина, вырабатывающая ток.

Вопрос. *Предположим, одна и та же машина вращается с одинаковой скоростью, работая один раз в качестве динамо-машины, а другой раз — в качестве мотора. Что можно сказать об ЭДС индукции, возникающей в якоре в обоих случаях?*

Ответ. Так как ЭДС индукции зависит только от конструкции якоря и угловой скорости вращения якоря, то ЭДС индукции в обоих случаях будет одна и та же.

Вопрос. *А если угловые скорости вращения динамо-машины и мотора разные?*

Ответ. В этом случае отношение электродвижущих сил индукции будет равно отношению угловых скоростей вращения якоря.

Вопрос. *Мы уже говорили о законе Ома и о законе сохранения энергии для мотора и записали соответствующие равенства (I) и (II). Как будут выглядеть аналогичные равенства для динамо-машины?*

Ответ. Пусть сопротивление цепи динамо-машины равно R. Тогда, согласно закону Ома,

$$\mathscr{E}_д = I_д R,$$

где $\mathscr{E}_д$ — ЭДС индукции динамо-машины и $I_д$ — ток. Далее, если пренебречь потерями энергии (например, на трение), то можно записать закон сохранения энергии так:

$$P_м = \mathscr{E}_д I_д.$$

Здесь $P_м$ — механическая мощность, затрачиваемая на вращение якоря, $\mathscr{E}_д I_д$ — электрическая мощность, развиваемая динамо-машиной.

Решим теперь несколько задач.

Задача 2. *Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением, включенный в цепь батареи с напряжением $U = 24$ В, при полном сопротивлении цепи $R = 20$ Ом делает $n_1 = 600$ об/мин при токе в цепи $I = 0{,}2$ А. Какую ЭДС разовьет тот же мотор, работая в качестве динамо-машины, при $n_2 = 1400$ об/мин?*

ЭДС, развиваемая динамо-машиной, равна

$$\mathscr{E}_д = \frac{n_2}{n_1}\mathscr{E}_и,$$

где $\mathscr{E}_и$ — ЭДС индукции, возникающая в обмотке якоря мотора при скорости вращения $n_1 \neq 600$ об/мин. Ее можно найти из закона Ома:

$$\mathscr{E}_и = U - IR.$$

Поэтому

$$\mathscr{E}_д = \frac{n_2}{n_1}(U - IR) =$$

$$= \frac{1400}{600}(24 - 0{,}2 \cdot 20)\ \text{В} \approx 46{,}7\ \text{В}.$$

Задача 3. *Груз массой m подвешен на нити, намотанной на ось якоря динамо-машины с независимым возбуждением. Нить сматывается с оси так, что груз опускается с постоянной скоростью v_1. Динамо-машина замкнута на сопротивление R. С какой скоростью v_2 будет подниматься вверх тот же груз, если динамо-машину включить как электромотор в цепь постоянного тока с напряжением U и с тем же сопротивлением цепи R?*

Мощность мотора, поднимающего груз массой m со скоростью v_2, равна mgv_2. Из закона Ома и закона сохранения энергии следует, что

$$U - \mathscr{E}_и = IR \qquad (1)$$

и

$$UI = I^2R + mgv_2, \qquad (2)$$

где I — ток и $\mathscr{E}_и$ — ЭДС индукции в обмотке якоря. Эта ЭДС связана с ЭДС индукции динамо-машины соотношением

$$\frac{\mathscr{E}_и}{\mathscr{E}_д} = \frac{v_2}{v_1}. \qquad (3)$$

Запишем теперь закон Ома и закон сохранения энергии для динамо-машины:

$$\mathscr{E}_д = I_д R$$

и

$$\mathscr{E}_д I_д = mgv_1.$$

Отсюда

$$\mathscr{E}_д = \sqrt{mgv_1R},$$

и из соотношения (3)

$$\mathscr{E}_м = \frac{v_2}{v_1}\mathscr{E}_д = \frac{v_2}{v_1}\sqrt{mgv_1R}.$$

Подставив полученное выражение для $\mathscr{E}_м$ в уравнение (1) и решая затем уравнения (1) и (2) совместно, найдем

$$v_2 = \frac{\sqrt{mgv_1R}U - mgv_1R}{mgR} = U\sqrt{\frac{v_1}{mgR}} - v_1.$$

Задача 4. *Электромотор постоянного тока с независимым возбуждением (с постоянным магнитом) поднимает груз со скоростью v_1 при помощи нити, наматывающейся на ось мотора. В отсутствие груза невесомая нить поднимается со скоростью v_0. С какой скоростью v_2 будет опускаться тот же груз, если в цепи якоря произойдет замыкание, в результате которого обмотка якоря окажется замкнутой накоротко? Трением в подшипниках пренебречь.*

После того как обмотка окажется замкнутой накоротко, мотор превратится в динамо-машину, причем ток I в якоре динамо-машины будет таким же, каким он был, когда машина работала как электромотор. Действительно, в обоих случаях один и тот же груз движется (поднимается или опускается) равномерно. Поэтому момент сил, действующих на якорь со стороны магнитного поля индуктора и пропорциональный величине тока, равен моменту силы тяжести груза. При подъеме невесомой нити (в режиме холостого хода) момент нагрузки равен нулю, следовательно, и ток $I_0 = 0$. Запишем закон Ома для всех трех случаев:

при подъеме груза с помощью мотора

$$U - \mathscr{E}_м = IR,$$

где U — напряжение на клеммах мотора;

при опускании груза, когда мотор работает как динамо-машина,

$$\mathscr{E}_д = IR;$$

когда мотор работает на холостом ходу,

$$U - \mathscr{E}'_м = 0.$$

Для трех ЭДС $\mathscr{E}_м$, $\mathscr{E}'_м$ и $\mathscr{E}_д$ можно записать следующие соотношения:

$$\mathscr{E}_м = \frac{v_1}{v_2}\mathscr{E}_д$$

и

$$\mathscr{E}'_м = U = \frac{v_0}{v_2}\mathscr{E}_д.$$

Окончательно находим

$$v_2 = v_0 - v_1.$$

Упражнения

1. Электромотор без нагрузки делает $n_1 = 1000$ об/мин, а с некоторой нагрузкой — $n_2 = 700$ об/мин. Какой будет частота вращения, если момент нагрузки увеличится на 20 %?

2. Электродвигатель присоединили к источнику напряжения $U = 500$ В. Зная, что при токе $I_1 = 10$А двигатель развивает мощность $P_1 = 4$ кВт, найти его мощность при токе $I_2 = 20$А (ток меняется вследствие изменения нагрузки).

3. Угловая скорость вращения якоря динамо-машины с постоянным магнитом увеличилось на 10 %. На сколько процентов увеличилась при этом полезная мощность динамо-машины?

4. Сопротивление обмотки якоря мотора равно R_1, а обмотки индуктора — R_2. Если обмотки якоря и индуктора соединены последовательно и подключены к одному источнику тока, говорят о моторе с последовательным возбуждением, или о сериесном двигателе. Если же обмотки соединены параллельно, говорят о моторе с параллельным возбуждением, или о шунтовом двигателе. В каком случае максимальная полезная мощность будет больше? Каковы при этом коэффициенты полезного действия шунтового и сериесного двигателей? Напряжение на клеммах мотора равно U.

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\log_3(1+x)>(1-\log_x(1-x))\cdot\log_3 x.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x=\frac{8}{\sin 2x}.$$

3. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является хордой окружности, центр которой лежит внутри треугольника ABC. Прямые, проходящие через точку B, касаются окружности в точках D и E. Найдите площадь треугольника DBE, если $AB=BC=2$, $\angle ABC=2\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$, а радиус окружности равен 1.

4. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых таковы, что система неравенств

$$\begin{cases}x^2+(3-a^2-b^2)x-3(a^2+b^2)<0,\\ 2x^2+(2a+2b-25)x-25(a+b)>0\end{cases}$$

не имеет решений. Найдите площадь фигуры Ф.

5. Сфера радиуса 13 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и AA_1B_1B куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера радиуса 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и касается первой сферы. На ребре BC взята точка F, на продолжении ребра DC за точку C — точка E так, что $CE=CD$. Плоскость C_1EF пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 2,6 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найдите отношение $BF:FC$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos 2x}=1+2\sin x.$$

2. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке D так, что $AD=\frac{1}{3}AB$. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC=1$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}1+\log_3(x+y)\cdot\log_2 3=2\log_4 7-\log_2 x,\\ \log_2(xy+1)=2\log_4 y+\log_{\frac{1}{8}}(x-2y)^3.\end{cases}$$

4. Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E, на основании ABC — точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1=1$, $FD=\frac{3}{4}$, $EF=\frac{1}{2\sqrt{3}}$?

5. Найдите все значения a, при которых уравнения

$$22x^4+33x^3-16ax^2-3x+2=0$$

и

$$11x^4+33x^3+21x^2-2ax-2=0$$

имеют общие корни. Найдите эти корни.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Через неподвижный блок перекинута легкая веревка, к концу которой прикреплен груз массой $m=9$ кг (рис. 1). Для поднятия груза с поверхности земли на высоту $H_1=4$ м за время $t=6$ с надо тянуть веревку с постоянной силой F. На какую величину потребуется увеличить силу, чтобы поднять груз с поверхности земли за то же время на высоту $H_2=6$ м? Массой блока и трением в его оси пренебречь.

2. КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермы *1—2*, изохоры *2—3* и адиабаты *3—1* (рис. 2), равен η, разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT. Найдите работу, совершенную ν молями одноатомного идеального газа в изотермическом процессе.

3. Два закрепленных одинаковых тонких металлических кольца расположены соосно на некотором расстоянии друг от друга (рис. 3). Кольца заряжены равными по модулю, но противоположными по знаку зарядами. Для пролета вдоль прямой, проходящей через центры колец перпендикулярно их плоскостям, заряженная частица на большом удалении от колец должна обладать некоторой минимальной скоростью v_0. Найдите отношение максимальной скорости частицы к минимальной при пролете колец, если при неизменном знаке зарядов колец их абсолютная величина будет уменьшена в n раз, а скорость частицы на бесконечности останется равной v_0.

4. Термоядерная реакция ${}^2_1\mathrm{H}+{}^3_2\mathrm{He}\to{}^4_2\mathrm{He}+{}^1_1p$ идет с выделением энергии $E_1=18{,}4$ МэВ (кинетическая энергия образовавшихся частиц на величину E_1 больше кинетической энергии исходных). Какая энергия выделяется в реакции ${}^3_2\mathrm{He}+{}^3_2\mathrm{He}\to{}^4_2\mathrm{He}+2\,{}^1_1p$, если дефект масс ядра ${}^3_2\mathrm{He}$ на $\Delta m=0{,}006$ а. е. м. больше, чем у ядра ${}^2_1\mathrm{H}$? Одной атомной единице массы (а. е. м.) соответствует энергия 931,5 МэВ.

Вариант 2

1. Мяч брошен под углом $\alpha_1=30^\circ$ к горизонту (рис. 4), и за время полета горизонтальная составляющая его скорости уменьшилась на 12 %. Когда мяч бросили с той же начальной скоростью под углом α_2 к горизонту, горизонтальная составляющая его скорости за время

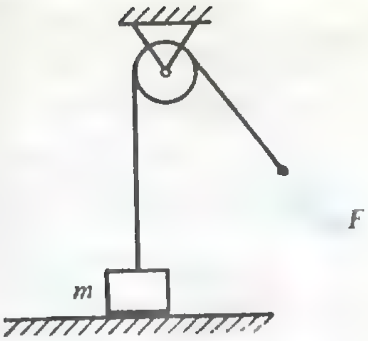


Рис. 1.

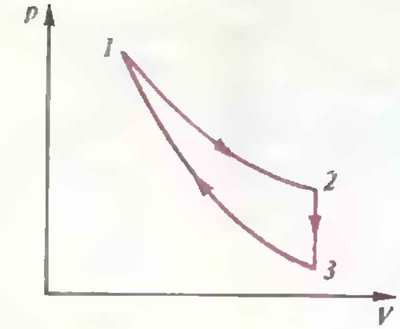


Рис. 2.

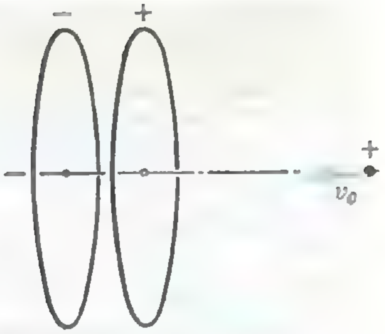


Рис. 3.

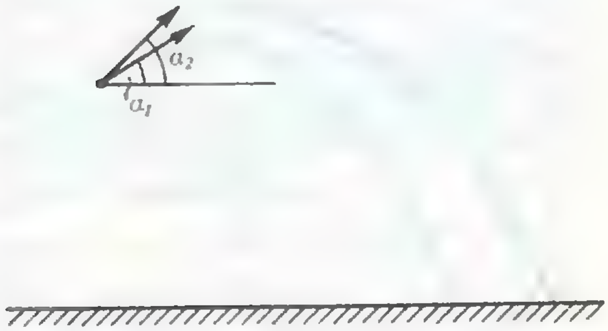


Рис. 4.

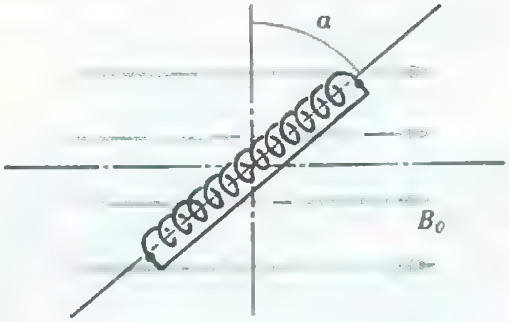


Рис. 5.

полета уменьшилась на 20 % и мяч пролетел вдоль поверхности расстояние на 10 % большее, чем в первом случае. Под каким углом брошен мяч во втором случае? Считать, что сила сопротивления движению мяча пропорциональна его скорости.

2. В калориметр, содержащий $m_1=2$ кг льда при температуре $t_1=-5$ °С, добавили $m_2=200$ г воды при температуре $t_2=+5$ °С. Сколько льда будет в калориметре после установления равновесия? Удельная теплоемкость льда $c_1=2,1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), воды $c_2=4,2\times10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3,34\cdot10^5$ Дж/кг.

3. Обмотку короткозамкнутой катушки (рис. 5), находящейся во внешнем однородном магнитном поле с неизвестной индукцией B_0, охлаждением переводят в сверхпроводящее состояние. Затем величину индукции внешнего поля, не изменяя направления, уменьшают в 3 раза. После этого оказалось, что для удержания катушки при заданном угле α необходимо приложить момент сил M. Определите начальное значение индукции B_0 внешнего поля. Объем катушки V. Считать, что собственное поле катушки однородно, сосредоточено внутри ее объема, а величина индукции этого поля равна произведению магнитной постоянной μ_0 на число витков катушки и на величину тока в ней, деленному на длину катушки.

4. Две тонкие положительные линзы с одинаковыми фокусными расстояниями F расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Расстояние между линзами $L=4F$. Эта система дает изображение точечного источника света, находящегося на главной оптической оси на расстоянии $a=2F$ от передней линзы. На сколько и в какую сторону сместится изображение источника, если переднюю линзу (ближнюю к источнику) сместить перпендикулярно главной оптической оси на $l=1$ см?

Публикацию подготовили
С. Резниченко, В. Чивилёв

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Постройте график функции

$$y=\frac{(3x+1)|x-1|+3x^2-2x-1}{|x|+2x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1-\sqrt{3}\sin x}+\sqrt{10}\cos x=0.$$

3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a точка M — середина ребра BC, точка N — середина ребра $C'D'$, точка P — середина ребра AA'. Найдите периметр треугольника MNP. Какая из двух частей, на которые разбивается куб плоскостью MNP имеет больший объем?

4. Если при расширении центральной усадьбы колхоза число одноэтажных домов увели-

чить в 28 раз и число двухэтажных домов — в 10 раз, то общее число домов станет больше 84. Если же число одноэтажных домов увеличить в 14 раз, а двухэтажных — в 20 раз, то общее число домов будет меньше 90. Сколько одноэтажных домов на центральной усадьбе, если одноэтажных домов меньше, чем двухэтажных?

5. Решите уравнение

$$\sqrt{a^2-x^2}+x-1=0.$$

Вариант 2

1. При $a=2$ решите систему

$$\begin{cases} x-y=a+1, \\ 2xy+2y=-a^2-4. \end{cases}$$

Имеет ли эта система решение при других значениях a?

2. Решите относительно x уравнение

$$\frac{a-3\sin x}{a\cos x-3}=\frac{a-3\cos x}{a\sin x-3}$$

и определите число его корней на $[40\pi;\ 49\pi]$.

3. Что такое правильная пирамида? Докажите, что в правильной треугольной пирамиде двугранные углы при боковых ребрах равны.

4. Для размещения комплекта журнала достаточно купить 13 стандартных полок. Однако в продаже оказались полки, на которых умещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, поэтому пришлось купить 27 полок и в результате осталось свободное место для 3 журналов. Сколько журналов в комплекте?

5. Дано неравенство

$$\sqrt{1-(x+2a)^2}\geqslant\frac{4}{3}x.$$

При $a=0$ решите его и убедитесь, что множество его решений есть отрезок. При каких значениях a множество решений данного неравенства есть отрезок длины $\frac{9}{5}$?

Физика

Задачи устного экзамена

1. На концах нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены два груза массой $m=300$ г каждый. Какой добавочный грузик надо положить на один из грузов, чтобы каждый из них прошел за время $t=0,5$ с путь $l=50$ см? Изменится ли время прохождения этого пути, если добавочный грузик положить на другой груз? Найдите давление на ось блока. Массой блока и нити пренебречь, считать $g=10$ м/с^2.

2. Тело массой $m=5$ кг падает с некоторой высоты, имея начальную скорость, равную $v_0=2$ м/с и направленную вертикально вниз. Вычислите работу против сил сопротивления, совершенную в течение $t=10$ с, если известно, что в конце этого промежутка времени тело имело скорость $v=50$ м/с. Силу сопротивления считать постоянной.

3. Резиновую камеру накачали на берегу до нормального давления ($p_0=10^5$ Па). На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воздуха на берегу $t_1=27$ °С, температура воды $t_2=4$ °С, плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3. Определите массу воздуха в камере, если ее начальный объем $V_1=2$ л, молярная масса воздуха $M=29\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8,31$ Дж/(моль·К).

4. В цилиндрическом сосуде под легким подвижным поршнем находится $m=3$ кг воды при $t_0=20$ °С. При нагревании воде сообщают количество теплоты $Q=1017$ кДж. Сколько пара при этом образуется? На какую высоту поднимется поршень? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, площадь сечения поршня $S=3$ дм^2, удельная теплоемкость воды $c=4,19$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r=2,26\cdot10^6$ Дж/кг, молярная масса воды $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8,31$ Дж/(моль·К). Тепловым расширением воды пренебречь.

5. Парафиновая пластинка заполняет все пространство между обкладками плоского конденсатора. Диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon=2,0$. Емкость конденсатора с парафином $C=4,0$ мкФ, его заряд $q=0,2$ мКл. Какую работу надо совершить, чтобы вытащить пластинку из конденсатора?

6. Две одинаковые лампочки мощностью $P_1=50$ Вт каждая, рассчитанные на напряжение $U=10$ В, соединены параллельно и присоединены к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r=0,5$ Ом. Одна из лампочек перегорела, и ее заменили другой, рассчитанной на то же напряжение, но с мощностью $P_2=25$ Вт. Во сколько раз изменится при этом КПД аккумулятора?

7. Силовые линии однородных электростатического и магнитного полей взаимно перпендикулярны. Напряженность электростатического поля $E=1$ кВ/м, индукция магнитного поля $B=1$ мТл. Какими должны быть направление и модуль скорости электрона, чтобы его движение в этих полях было прямолинейным?

8. Линза дает увеличение $\Gamma=3,0$ предмета, находящегося на расстоянии $d=40$ см от нее. Найдите фокусное расстояние линзы. Покажите ход лучей.

9. На металлическую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda=4,13\cdot10^{-7}$ м. Поток фотоэлектронов, вырываемых этим светом с поверхности металла, полностью задерживается разностью потенциалов $U=1$ В. Определите работу выхода электронов из металла и длину волны света, соответствующую красной границе фотоэффекта. Постоянная Планка $h=6,62\cdot10^{-34}$ Дж·с, заряд электрона $e=1,6\cdot10^{-19}$ Кл, масса электрона $m=9\cdot10^{-31}$ кг, скорость света $c=3\times10^8$ м/с. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если длина волны падающего света равна $\lambda_1=7\cdot10^{-7}$ м?

10. В результате термоядерной реакции $^2_1\mathrm{H}+{}^3_1\mathrm{H}\to{}^4_2\mathrm{He}+{}^1_0n$ выделяется энергия. Какую часть выделившейся энергии уносит нейтрон? Кинетическую энергию ядер дейтерия и трития не учитывать. Различием масс нейтрона и протона пренебречь.

Публикацию подготовили
Г. Ефашкин, В. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, а из B в A выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 часа велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины AB, а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Найдите скорость каждого и расстояние AB, если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

2. Решите неравенство

$$\log_{3-x}x^2<2.$$

3. Решите уравнение

$$5\sin^2x+8\cos x+1=|\cos x|+\cos^2x.$$

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y=\frac{x}{x-x^2-1} \text{ на отрезке } [-2, 2].$$

5. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$ с углом $A=60°$. Боковые грани наклонены к основанию пирамиды под углом α. Найдите угол наклона ребра SA к плоскости основания.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите объем шара, вписанного в усеченный конус, образующая которого равна 10 и составляет угол в 45° с плоскостью основания.

2. Решите уравнение

$$\sin x+\cos x=1+\sin 2x.$$

3. Решите уравнение

$$2^{4x+2}\cdot4^{-x^2}-5\cdot2^{-x^2+2x}+1=0.$$

4. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{x-1}(x^2-9)}.$$

5. Найдите промежутки возрастания функции

$$y=5x^3-3|x|.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. По склону горы, имеющей длину $l=50$ м и высоту $h=10$ м, на веревке спускают без начальной скорости санки массой $m=60$ кг. Найдите силу натяжения веревки, если санки у основания горы имеют скорость $v=5$ м/с, а сила трения между санками и поверхностью горы составляет 10 % веса санок. Веревка натянута вдоль склона горы.

2. С каким ускорением и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный маятник за время $t=2$ мин 30 с совершил $n=100$ колебаний?

3. Открытую пробирку с воздухом при давлении p_1 медленно нагрели до температуры T_1, затем герметически закрыли и охладили до температуры $t_2=10$ °С. Давление при этом упало до $p_2=0{,}7\,p_1$. До какой температуры T_1 была нагрета пробирка? Тепловым расширением пробирки пренебречь.

4. В однородном электрическом поле с напряженностью $E=1$ МВ/м висит на нити шарик массой $m=2$ г, несущий заряд $q=10$ нКл. Найдите силу натяжения нити, если вектор напряженности составляет угол $\alpha=30°$ с вертикалью.

5. На сколько равных частей надо разделить проводник, имеющий сопротивление $R=49$ Ом, чтобы сопротивление его частей, соединенных параллельно, было $r=1$ Ом?

6. К элементу с ЭДС $\mathscr{E}=1{,}5$ В присоединили резистор с сопротивлением $R=0{,}1$ Ом, при этом амперметр показал ток $I_1=0{,}5$ А. Когда к первому элементу последовательно с ним присоединили второй элемент с той же ЭДС, амперметр показал ток $I_2=0{,}4$ А. Определите внутренние сопротивления первого и второго элементов.

7. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов U, влетел в однородное магнитное поле с индукцией B и начал двигаться по окружности. Найдите радиус этой окружности.

8. В жидкости с показателем преломления $n=1{,}8$ находится точечный источник света. На каком максимальном расстоянии от источника надо поместить диск диаметром $d=2$ см, чтобы свет не вышел из жидкости в воздух? Плоскость диска параллельна поверхности жидкости.

9. Предмет находится на расстоянии $a=0{,}1$ м от переднего фокуса собирающей линзы, а экран, на котором получается четкое изображение предмета,— на расстоянии $b=0{,}4$ м от заднего фокуса линзы. Найдите фокусное расстояние линзы и увеличение предмета.

10. Определите работу выхода электрона с поверхности фотокатода и красную границу фотоэффекта, если при облучении фотоэлемента светом с частотой $\nu=1{,}6\cdot10^{15}$ Гц фототок прекращается при запирающем напряжении $U=4{,}1$ В. Постоянная Планка $h=6{,}62\times10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m=9{,}1\times10^{-31}$ кг, заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовили
О. Овчинников, М. Чернецов

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся восьмых классов*) общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих увлекательных вещах, связанных со школьным курсом математики, научить решать интересные разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо выполнить контрольную работу, помещенную ниже. Преимуществами пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все задачи. Решения задач надо выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не сворачивайте ее в трубку. На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по образцу, приведенному внизу страницы.

В тетрадь надо вложить два листа бумаги размером 6×14 см с четко написанным почтовым адресом (включая индекс), фамилией и именем ученика, а также конверт с написанным на нем Вашим адресом.

Задачи в работе должны идти в том же порядке, что и у нас: сначала условие, потом — решение.

Срок отправки работы — не позднее 15 марта 1990 года (по почтовому штемпелю).

Если Вы выдержите конкурс, то, начиная с сентября 1990 года, будете получать наши задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений, с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Вступительную работу надо выслать по адресу: 119823 Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием, или по адресу соответствующего филиала. Если Вы живете в зоне действия одного из наших филиалов, но пришлете работу в Москву, то Ваша работа будет нами туда переслана.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Магнитогорск, Орел, Павлодар, Петрозаводск, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном дворце пионеров и школьников.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: 198097 Ленинград, ул. Трефолева, 32, С-З ЗМШ, на прием.*)

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик».

Область	Московская
Фамилия, имя ученика	Иванов Петр
Год рождения	1976
Класс и школа	8 класс «Б» школа № 2
Ф. И. О. учителя математики	Орлов Борис Петрович
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	123456, Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1

1	2а	2б	3	4а	4б	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Всего

---

*) По новой нумерации: обучение начинается с 1-го класса и продолжается 11 лет.

*) Северо-западная ЗМШ проводит прием (по той же работе) также и десятиклассников — на двухгодичный поток.

Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1990 года на два потока: для тех, кто с сентября 1990 года начнет учиться в 9 классе, и для тех, кто начнет учиться в 10 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться в 1990/91 учебном году.

Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» ВЗМШ может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявление следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ 1990 г.

1. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через час. Прибыв в пункты B и A соответственно, велосипедисты сразу же повернули назад и встретились вновь. Через сколько времени после первой встречи это произошло?

2. Дана квадратная таблица размером 4×4 клетки. Можно ли пометить некоторые клетки крестиками так, чтобы в каждом столбце, в каждой строке и на каждой большой диагонали стояло: а) по два крестика; б) по три крестика?

3. Натуральное число, делящееся на 37, должно иметь в десятичной записи 3980 цифр, причем первые 1990 цифр должны быть одинаковы и последние 1990 цифр должны быть одинаковы. Какими могут быть эти цифры?

4. а) Докажите, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров вписанной в него и описанной около него окружностей.

б) Высота h прямоугольного треугольника делит его на два меньших треугольника. Во все три треугольника вписаны окружности. Найдите сумму радиусов этих окружностей.

5. Два пешехода вышли навстречу друг другу одновременно из пунктов A и B. Через два часа они встретились и продолжили путь в том же направлении, причем первый пришел в B через 3 часа после того, как второй пришел в A. Сколько времени шел каждый?

6. В точках A и B посреди океана находятся два корабля. Расстояние AB равно 50 км. Корабли одновременно начинают двигаться прямолинейно в неизвестных направлениях с постоянными скоростями 15 км/ч и 20 км/ч, пока не встречаются в точке C. Каково наибольшее возможное время их движения до встречи?

7. В квадрате $ABCD$ со стороной a расположена четверть окружности с центром A. Отрезок MN касается этой кривой (точки M и N лежат на сторонах BC и CD соответственно). Докажите, что $MC+CN>a$.

8. Среди всех дробей $\frac{p}{q}$ таких, что

$$\frac{1}{1990}<\frac{p}{q}<\frac{1}{1989},$$

найдите дробь с наименьшим возможным знаменателем q (p и q — натуральные числа).

9. В городе Буле некоторые жители — лжецы, и они всегда лгут, а все остальные всегда говорят правду. Однажды в одной комнате находилось несколько жителей этого города, и трое из них сказали следующее:

— Нас тут не больше трех человек. Все мы — лжецы.

— Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.

— Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы.

Определите, сколько в комнате человек и сколько среди них лжецов.

10. Найдите числа x, y из уравнения

$$2x^4+2y^4=4xy-1.$$

11. Найдите все такие пары натуральных чисел $(a;b)$, что число $3a+2$ делится на $b+1$, а число $3b+2$ делится на $a+1$.

12. Начнем строить последовательность цифр 1, 2, 5, 3, ... следующим образом. Первая цифра равна 1, далее — если написано сколько-то первых членов последовательности, то очередной член вычисляется так: к сумме всех уже написанных цифр прибавляется последняя из написанных цифр и берется последняя цифра полученной таким образом суммы — она и есть очередной член последовательности. (Проверьте, что написанные нами цифры получены по этому правилу.) Какая цифра будет стоять на 1990-м месте?

13. Для каждого четырехзначного числа составляется дробь: отношение суммы цифр числа к самому числу. Для какого четырехзначного числа эта дробь наибольшая?

Избранные задачи Ленинградской городской математической олимпиады 1989 года

В скобках указано, в каком классе предлагалась задача.

1 (5, 7). Найдите два шестизначных числа таких, что если первое приписать слева ко второму, то полученное двенадцатизначное число будет делиться на произведение двух исходных шестизначных чисел.

2 (5). Двое играют в игру: каждый из них своим ходом ставит крестик или нолик (по своему усмотрению) на любое свободное поле доски 10×10. Выигрывает тот, после чьего хода на доске появляются три стоящих подряд по линии одинаковых знака. Кто выигрывает при правильной игре? (А может быть, это ничейная игра?)

3 (6). Найдите все возможные тройки чисел A, B и C такие, что

$$\begin{cases} A^2+2B^2-2BC=100, \\ 2AB-C^2=100. \end{cases}$$

4 (6). Найдите наименьшее натуральное число, большее 1, которое по крайней мере в 600 раз больше каждого своего простого делителя.

5 (7). За круглым столом сидят $2N$ человек: N физиков и N химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Известно, что количество химиков-лжецов равно количеству физиков-лжецов. На вопрос: кто ваш сосед справа? — все сидящие за столом ответили: «химик». Докажите, что N — четно.

6 (7). Двое играют в следующую игру: на центральном узле клетчатого квадрата 10×10 стоит фишка. За один ход каждый из игроков имеет право переставить ее на любой другой узел квадрата, но при этом длина его хода (т. е. расстояние, на которое он передвинул фишку) должна быть больше, чем длина предыдущего хода, сделанного его партнером. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто из партнеров выигрывает при правильной игре?

7 (7). Существует ли набор из ста различных натуральных чисел, произведение любых пяти из которых делится на их сумму?

8 (8). A — натуральное число, большее 1, а B — натуральный делитель числа A^2+1. Докажите, что если $B-A>0$, то $B-A>\sqrt{A}$.

9 (8). Докажите, что у системы

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ 1/x+1/y+1/z=0, \end{cases}$$

нет решений в вещественных числах.

10 (8). По окончании шахматного турнира, проходившего в k кругов, оказалось, что количества очков, набранные участниками, образуют геометрическую прогрессию с натуральным знаменателем, большим 1. Сколько могло быть участников, если а) $k=1989$, б) $k=1988$?

11 (9). Замкнутая 5-звенная ломаная образует равноугольную звезду (см. рис.). Чему равен периметр $ABCDE$, если периметр звезды равен 1?

12 (9). Можно ли расставить в клетках таблицы 10×10 числа −1, 0, 1 так, чтобы все 20 сумм чисел в строках и столбцах были различны?

13 (10). В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник, и все плоские углы при вершине пирамиды равны. Докажите, что некоторые две боковые грани пирамиды равны.

14 (10). Дана операция $*$, сопоставляющая двум целым числам целое число. Известно, что каждое целое число равно $X*Y$ при некоторых целых X и Y. Докажите, что такая операция не может одновременно обладать свойствами $A*B=-B*A$ и $A*(B*C)=(A*B)*C$.

15 (8, 10). Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle BMC=90^\circ+\angle BAC/2$ и прямая AM содержит центр окружности, описанной около треугольника BMC. Докажите, что M — центр вписанной окружности треугольника ABC.

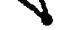
16 (8, 10). Дан конечный набор различных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: все их простые делители не превосходят данного числа N. Докажите, что сумма величин, обратных к этим числам, не превосходит N.

17 (8). k — натуральное число, большее 1. Докажите, что в клетках таблицы размером $k\times k$ нельзя расставить числа 1, 2, 3, ..., k так, чтобы все суммы чисел в строках и столбцах таблицы являлись степенями двойки.

18 (8, 9). На полях доски 10×10 стоит 91 белая шашка. Маляр берет одну из них, перекрашивает ее в черный цвет и ставит на любое свободное поле доски. Затем он опять берет одну из белых шашек, перекрашивает ее в черный цвет и ставит на любое свободное поле, и т. д. до тех пор, пока все шашки не станут черными. Докажите, что в какой-то момент на некоторых двух соседних (по стороне) клетках будут стоять шашки разных цветов.

19 (8, 10). Какую максимальную площадь может иметь четырехугольник, длины сторон которого равны 1, 4, 7, 8?

20 (8). Двое играют в следующую игру. На доске написано число 2. Каждый из игроков



своим ходом заменяет число n, написанное на доске, на число $n+d$, где d — произвольный делитель числа n, меньший его. Проигрывает тот, кто напишет на доске число, большее а) 19 891 989, б)* 19 891 990. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

21 (8). В квадратном зале с зеркальными стенами стоит профессор Смит. Профессор Джонс хочет расставить в зале несколько студентов так, чтобы со своего места Смит не мог увидеть собственного отражения. Удастся ли профессору Джонсу это сделать?

22 (9). Все возможные последовательности из семи цифр (начиная с 0 000 000 и кончая 9 999 999) выписаны одна за другой в некотором порядке. Докажите, что получившееся 70 000 000-значное число делится на 239.

23 (9). Пусть x, y, z — вещественные числа из отрезка [0; 1]. Докажите, что

$$2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x)\leqslant 3.$$

24 (10). Сколько решений в действительных числах имеет уравнение

$$\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x))))=x/3?$$

25 (10). Микрокалькулятор «ФН-89» выполняет только две операции: $x\to 2x-1$ и $x\to 2x$. В микрокалькулятор введено некоторое натуральное число. Докажите, что, нажимая кнопки, из него можно получить число, являющееся точной пятой степенью.

Задачи предложили: А. Бураго (20), С. Генкин (2, 4, 14), А. Голованов (3), М. Гусаров (1, 13), В. Козырев (2), А. Меркурьев (22), Ф. Назаров (6, 17, 25), Н. Нецветаев (11), Д. Фомин (5, 7, 8, 10, 12, 16, 18, 19, 21, 23, 24), С. Фомин (9), И. Шарыгин (15). Еще пять задач этой олимпиады составляют «Задачник «Кванта» по математике № 11, 1989 (М1191—М1195).

Компьютерный турнир XXIII Всесоюзной олимпиады по математике

В 1989 году на Всесоюзной математической олимпиаде жюри впервые решило провести компьютерный турнир. Это решение зрело давно; уже несколько лет для участников олимпиады проводились компьютерные игры, и жюри имело возможность убедиться воочию, как велика тяга ребят к компьютеру. Конечно пока еще рано говорить о включении компьютерного турнира в официальный зачет олимпиады, однако в перспективе Всесоюзная математическая олимпиада может получить свой практический тур. Это было бы очень желательно, так как математику опасно отрывать от живительных истоков ее приложений,— разорвав связывающую их нить, мы рискуем обескровить обе стороны.

Задачи компьютерного турнира

1. С парой чисел (a, b) разрешается проделать следующее преобразование: к одному из этих чисел прибавить другое и превратить имеющуюся пару либо в пару $(a+b, b)$, либо в пару $(a, a+b)$. Написать и запрограммировать алгоритм, вычисляющий наименьшее число таких преобразований, необходимых для превращения пары (1, 1) в пару, содержащую число N $(1\leqslant N\leqslant 2000)$.

В. Рождественский

2. Последовательность $\{a_n\}$ задана своим первым членом $a_1=1/e$ и рекуррентным соотношением $a_n=1-na_{n-1}$. Вычислить число a_n для $n\leqslant 50$ с точностью до четырех знаков после запятой. Считать известным, что

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots$$

Е. Тыртышников

3. Последовательность $\{x_n\}$ называется периодической, если для некоторых натуральных чисел M и T равенство $x_n=x_{n+T}$ имеет место для любых $n>M$. Наименьшие числа M и T с этим свойством называются *длиной нерегулярной части* и *длиной периода* соответственно.

Известно, что для некоторой ограниченной функции натурального аргумента $f(x)$ для всех $i\geqslant 1$ справедливо равенство $x_{i+1}=f(x_i)$, так что последовательность $\{x_n\}$ периодическая.

а) Указать алгоритм, который по заданной такой последовательности определяет M и T, используя число сравнений, линейное по максимуму этих двух чисел;

б) Запрограммировать этот алгоритм вычисления длины периода и длины нерегулярной части последовательности $\{x_n\}$ по заданному ее первому члену x_1 для функции $f(x)$, значение которой в точке x является остатком от деления на 10^6 числа $g(x)$, определенного формулой

$$g(x)=\begin{cases} x/3 & \text{при } x=3k\\ 2(x-1)/3 & \text{при } x=3k+1\\ 13(x-2)/3 & \text{при } x=3k+2.\end{cases}$$

Ю. Нестеренко, А. Слинько

При проверке заданий жюри столкнулось с рядом трудностей, которые, по-видимому, являются типичными для всех компьютерных соревнований. Вот лишь некоторые из них: отсутствие возможности проверки правильности программ и корректности алгоритмов в связи с ограниченностью времени и количества членов жюри; разнотипность используемой вычислительной техники и языков программирования; невозможность учета временных характеристик программ в связи с указанной разнотипностью.

После написания программы и объявления своей готовности ученику предлагалось просчитать три тестовых примера по каждой задаче. За правильный ответ по каждому тесту давался один балл. Всего каждый участник мог набрать девять баллов. Их и набрали, заняв тем самым первое место в турнире, Б. Дубров (Минск, с. ш. № 107), М. Хосидовский (Ташкент, с. ш. № 110) и А. Шумакович (Ленинград, с. ш. № 239).

По общему мнению компьютерный турнир удался и его следует проводить и впредь. Надо, однако, заметить, что не всякий город сейчас сможет, как Рига, предложить участникам более ста персональных компьютеров, ведь участвовать в турнире изъявили желание 116 школьников.

Этот турнир не смог бы также состояться без героических усилий его организаторов и, в первую очередь, председателя жюри олимпиады заместителя директора Вычислительного центра Латвийского университета им. П. Стучки профессора Р.-М. В. Фрейвалда и ответственной за компьютерный турнир Л. А. Андерсоне. Спонсором турнира выступила фирма ИНМАК, действующая в составе комплексного кооператива ИНТЕР.

А. Слинько

Ответы, указания, решения

[illegible]ктрические машины постоянного тока

1. $n_3=n_1-1{,}2(n_1-n_2)=640$ об/мин.

2. $P_2=P_1\dfrac{I_2^2}{I_1^2}-\dfrac{UI_2(I_2-I_1)}{I_1}=6$ кВт.

3. Полезная мощность увеличилась на 21 %.

4. $P_{c\,\max}=\dfrac{U^2}{4(R_1+R_2)}<P_{ш\,\max}=\dfrac{U^2}{4R_1}$;

$\eta_с=\dfrac{1}{2}$; $\eta_ш=\dfrac{1}{2}\;\dfrac{1}{1+2R_1/R_2}$.

[illegible]ковский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $\left(0;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. $\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{3}{7}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

3. $\dfrac{8}{9\sqrt{5}}$.

4. $\dfrac{25}{2}\arccos\dfrac{3}{5}-6$. Указание. Множество решений первого неравенства — интервал $(-3;\ a^2+b^2)$ — должен целиком содержаться в отрезке с концами — $(a+b)$ и $25/2$.

Поэтому

$$\begin{cases}a+b\geqslant 3,\\ a^2+b^2\leqslant\dfrac{25}{2}.\end{cases}$$

Фигура Ф изображена на рисунке 1. Для вычисления ее площади следует из площади сектора $OAmB$ вычесть площадь треугольника AOB.

5. 183:40. Решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, по которым плоскость C_1EF пересекает первую (радиуса $R_1=13$) и вторую (радиуса $R_2=5$) сферы соответственно (рис. 2), h_1 и h_2 — расстояния от центров O_1 и O_2 этих сфер до плоскости C_1EF. Тогда $h_i=\sqrt{R_i^2-r_i^2}$, $i=1,2$. Из условия следует, что $r_1:r_2=R_1:R_2=13:5$, поэтому $h_1:h_2=13:5$, т. е. $h_1\neq h_2$, и, значит, линия центров сфер O_1O_2 не параллельна плоскости C_1EF. Пусть P — точка пересечения прямой O_1O_2 с плоскостью C_1EF. Тогда $PO_1:PO_2=h_1:h_2$. Отсюда следует, что точка P совпадает либо с точкой P_1 касания сфер, либо с точкой P_2 пересечения прямых O_1O_2 и AD. Второй случай невозможен, поскольку плоскость, проходящая через точки C_1, E и P_2, не пересекает, очевидно, ребро BC. Следовательно, плоскость C_1EF пересекает отрезок O_1O_2 в точке P_1 касания данных сфер.

Рассмотрим сечение куба плоскостью AB_1C_1D (рис. 3). Пусть M_1, T, M_2 — ортогональные проекции точек O_1, P_1, O_2 на отрезок AD. Тогда сторона AD куба равна $AM_1+M_1M_2+M_2D=R_1+M_1M_2+R_2=18+M_1M_2$. Найдем M_1M_2. Так как $O_1M_1=R_1\sqrt{2}$, $O_2M_2=R_2\sqrt{2}$, $O_1O_2=R_1+R_2$, то $M_1M_2=\sqrt{O_1O_2^2-(O_1M_1-O_2M_2)^2}=\sqrt{(R_1+R_2)^2-2(R_1-R_2)^2}=14$. Поскольку $FC=\dfrac{1}{2}HD$, а искомое отношение $\dfrac{BF}{FC}=\dfrac{BC-FC}{FC}=\dfrac{BC}{FC}-1=\dfrac{2AD}{HD}-1$, остается найти HD. Из подобия прямоугольных треугольников O_1LO_2 и P_1NO_2 (см. рис. 3), следует, что $P_1N=\dfrac{O_1L\cdot P_1O_2}{O_1O_2}=\dfrac{\sqrt{2}(R_1-R_2)R_2}{R_1+R_2}$, и

поэтому $P_1T=P_1N+NT=P_1N+O_2M_2=$

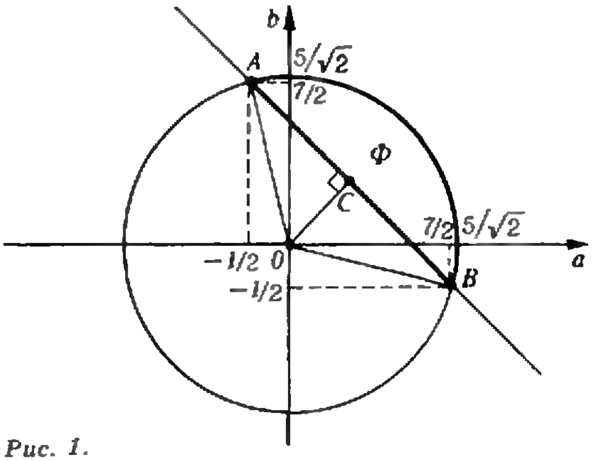


Рис. 1.

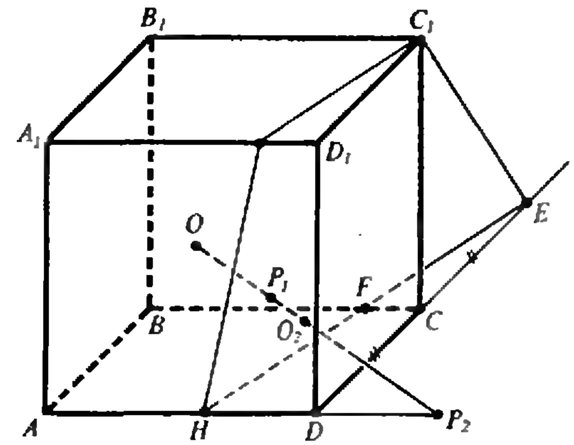


Рис. 2.

$=\dfrac{2\sqrt{2}R_1R_2}{R_1+R_2}=\dfrac{65\sqrt{2}}{9}$. Теперь заметим, что $TM_2:M_1T=NO_2:LN=P_1O_2:P_1O_1=R_2:R_1$. Кроме того, $TM_2+M_1T=M_1M_2$ и потому $TM_2=\dfrac{R_2}{R_2+R_1}\times\times M_1M_2=\dfrac{35}{9}$. Пусть $x=HD$. Из подобия прямоугольных треугольников HC_1D и HP_1T получаем $\dfrac{HT}{HD}=\dfrac{P_1T}{C_1D}$, или $\dfrac{HD-TM_2-M_2D}{HD}=\dfrac{P_1T}{C_1D}$ и, наконец, $\dfrac{x-\frac{80}{9}}{x}=\dfrac{65}{288}$, откуда $x=\dfrac{80\cdot 32}{223}$. Следовательно, $BF:FC=\dfrac{2AD}{x}-1=183:40$.

Вариант 2

1. $\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$.

2. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

3. $\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}};\ \sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)$. Указание. Данная система равносильна такой

$$\begin{cases}2(x+y)=\dfrac{7}{x},\\ \dfrac{y}{x-2y}=xy+1,\ x>0,\ y>0,\ x>2y.\end{cases}$$

Выразив y через x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение

$$6x^4-43x^2+70=0.$$

4. $\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$. Решение. Рассмотрим сечение KB_1BL призмы плоскостью, определяемой параллельными прямыми EB_1 и FD (рис. 4). Пусть $\alpha=\angle KB_1E=\angle DFB$. Тогда $BL=EB_1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$, $BF=FD\cdot\cos\alpha=\dfrac{3}{4}\cos\alpha$, $LF=BL-BF=\dfrac{1}{4}\cos\alpha$, $KE=EB_1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha$, $KL=2BD=2FD\cdot\sin\alpha=\dfrac{3}{2}\sin\alpha$, $EL=KL-KE=\dfrac{1}{2}\sin\alpha$, и так как $EL^2+LF^2=EF^2=\dfrac{1}{12}$, то $\dfrac{1}{4}\sin^2\alpha+\dfrac{1}{16}\cos^2\alpha=\dfrac{1}{12}$, откуда $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$. Объем призмы равен $V=KL\cdot S_{A_1B_1C_1}=KL\times\times\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где сторона a — сторона треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $KL=\dfrac{1}{2}$, объем будет наибольшим при наибольшем возможном значении a, т. е. в том случае, когда $KB_1\perp A_1C_1$. При этом $a^2_{\max}=\dfrac{32}{27}$ и, следовательно, наибольший возможный объем призмы $ABCA_1B_1C_1$, удовлетворяющей условию задачи, равен $V_{\max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}$.

5. При $a=\dfrac{3}{16}$, $x=-\dfrac{1}{2}$; при $a=\dfrac{297}{128}$, $x=-\dfrac{1}{4}$; при $a=\dfrac{3}{2}$, $x_{1,2}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{11}}$, $x_3=-2$.

Решение. Пусть a — искомое значение. Сложив данные уравнения и сократив на $x\neq 0$, получим уравнение

$$33x^3+66x^2+(21-16a)x-(2a+3)=0. \quad (1)$$

Затем вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2, получим уравнение

$$-33x^3-(16a+42)x^2+(4a-3)x+6=0. \quad (2)$$

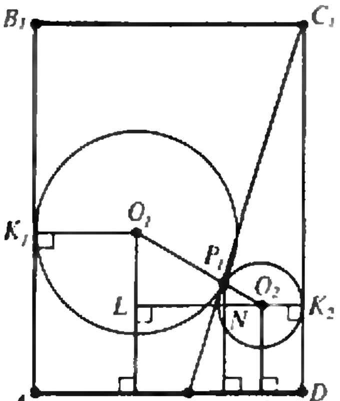


Рис. 3.

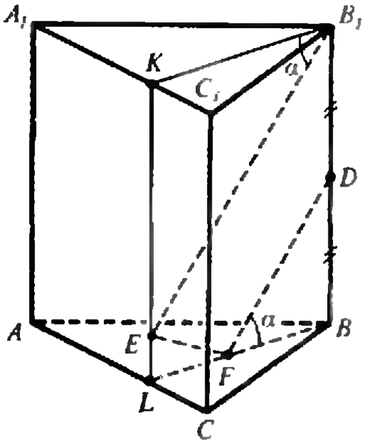


Рис. 4.

После сложения (1) и (2), приходим к уравнению

$$(24-16a)x^2+(18-12a)x+(3-2a)=0$$

или

$$(3-2a)(8x^2+6x+1)=0.$$

Итак, если a — искомое значение, то либо $a=\frac{3}{2}$, либо общие корни двух данных уравнений являются корнями квадратного уравнения $8x^2+6x+1=0$, т. е. какими-то из чисел $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{4}$.

Подставляя каждое из чисел x_1 и x_2 в оба данные уравнения, получаем два искомых значения a, соответственно $a_1=\frac{3}{16}$ и $a_2=\frac{297}{128}$.

Подставив $a=\frac{3}{2}$ в данные уравнения, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}22x^4+33x^3-24x^2-3x+2=0,\\ 11x^4+33x^3+21x^2-3x-2=0.\end{cases}$$

Вычтя из первого уравнения второе, получим биквадратное уравнение $11x^4-45x^2+4=0$, решая которое, находим для x четыре возможные значения: -2, 2, $-\frac{1}{\sqrt{11}}$, $\frac{1}{\sqrt{11}}$.

Проверка показывает, что значение $x=2$ является посторонним, а остальные три значения удовлетворяют условию.

Физика

Вариант 1

1. $\Delta F=2m(H_2-H_1)/t^2=1$ Н.

2. $A_{12}=3\nu R\Delta T/(2(1-\eta))$. **Указание.** Газ получает тепло только на участке *1—2*, а совершает работу на участках *1—2* и *3—1*, так что $\eta=(A_{12}+A_{31})/Q_{12}$. При этом $Q_{12}=A_{12}$, а $A_{31}=-3/2\nu R\Delta T$.

3. $v_{\max}/v_{\min}=\sqrt{(n+1)/(n-1)}$. **Указание.** Справа от колец на их общей оси имеется точка, в которой потенциал поля, созданного зарядами колец, максимален. Пусть он равен φ. Тогда слева от колец в соответствующей симметричной точке потенциал поля будет равен $-\varphi$. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2}=q\varphi,$$

$$\frac{mv_0^2}{2}=q\frac{\varphi}{n}+\frac{mv_{\min}^2}{2},$$

$$\frac{mv_0^2}{2}=q\left(-\frac{\varphi}{n}\right)+\frac{mv_{\max}^2}{2},$$

где q — заряд частицы. Отсюда и находим искомое отношение скоростей.

4. $E_2=E_1-\Delta mc^2=12{,}8$ МэВ.

Вариант 2

1. $\alpha_2=\arccos 0{,}57=55°$. **Указание.** Горизонтальная координата x мяча и изменение Δv_x горизонтальной составляющей его скорости связаны соотношением $-kx=m\Delta v_x$. Здесь k — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью мяча, m — его масса.

2. $m_1'=m_1+\frac{-c_1m_1t_1-c_2m_2t_2}{\lambda}=2{,}05$ кг. **Указание.** В состоянии равновесия температура смеси равна 0 °C.

3. $B_0=3\sqrt{\mu_0M/(V\sin 2\alpha)}$. **Указание.** После охлаждения обмотки и уменьшения внешнего поля в катушке возникает ток $I=(2/3B_0\sin\alpha)\times\times l/(\mu_0N)$, где l — длина катушки, N — число ее витков. Со стороны внешнего поля на катушку действует момент сил $M=(1/3B_0\cos\alpha)ISN$.

4. Изображение источника сместится в противоположном направлении (относительно смещения линзы) на $x=2l=2$ см.

[illegible]ковский институт [illegible]тронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. **Указание.** При построении графика воспользуйтесь тем, что функция задается следующими соотношениями

$$y=\begin{cases}2x-2 & \text{при } x\geqslant 1,\\ 0 & \text{при } x<1,\ x\neq -1.\end{cases}$$

2. $\frac{4\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. **Указание.** Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}1-\sqrt{3}\sin x=10\cos^2 x,\\ \cos x\leqslant 0.\end{cases}$$

3. $3\sqrt{6}/2$, плоскость делит объем куба пополам.

4. Одноэтажных домов 2, двухэтажных 3. **Указание.** Если x и y числа одноэтажных и двухэтажных домов соответственно, то, по условию,

$$\begin{cases}28x+10y>84,\\ 14x+20y<90,\\ x<y.\end{cases}$$

Из этой системы получаем, исключив y, $x\geqslant 2$, а $y\leqslant 3$.

5. $\left\{\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2};\ \frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}\right\}$ при $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$,

$\frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}$ при $a>1$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}2x^2-2x+1-a<0,\\ x\leqslant 1.\end{cases}$$

Вариант 2

1. При $a=2$, $x=1$, $y=-2$. При других a решений нет.

2. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$ при $a\neq\pm 3/\sqrt{2}$;

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi(2n+1),\ n\in Z \text{ при } a=\frac{3}{\sqrt{2}};$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n \text{ при } a=-\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Указание. После несложных преобразований уравнение приводится к виду

$$3a(\sin^2 x-\cos^2 x)+(a^2+9)(\cos x-\sin x)=0,$$

откуда либо $\sin x=\cos x$, либо

$$3a(\sin x+\cos x)=a^2+9. \qquad (*)$$

Уравнение (*) не имеет корней ни при каких a, так как

$$\left|\frac{a^2+9}{3a}\right|=\left|\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right|\geqslant 2>\sqrt{2},$$

и

$$|\sin x+\cos x|\leqslant\sqrt{2}.$$

Необходимо учесть также условия $a\cos x\neq 3$, $a\sin x\neq 3$.

3. **Указание.** Боковые грани правильной треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники. Плоскость, проходящая через сторону основания и перпендикулярная боковому ребру пересекает плоскости боковых граней по высотам этих треугольников.

4. 186. **Указание.** Пусть x — число журналов в комплекте, y — число журналов, помещающихся на полке. Из условия следует, что

$$\begin{cases}13y\leqslant x<14y,\\ x=27(y-7)-3,\end{cases} \text{откуда}$$

$$\frac{192}{4}\leqslant y<\frac{192}{13}, \text{ т. е. } y=14.$$

5. При $a=0$, $[-1;\ 3/5]$; $a=7/40$.

Указание. Обозначив $b=2a$, $t=x+b$, приведем неравенство к виду

$$\sqrt{1-t^2}\geqslant\frac{4}{3}(t-b). \qquad (*)$$

Для решения неравенства (*) удобно воспользоваться графиками. На плоскости yOt. Уравнение $y=\sqrt{1-t^2}$ задает на плоскости полуокружность, построенную на отрезке $[-1;\ 1]\ Ot$ как на диаметре. Уравнение $y=\frac{4}{3}(t-b)$ есть уравнение прямой. Для решения задачи следует изучить различные взаимные расположения (в зависимости от b) прямой и полуокружности.

Физика

1. $M=4lm/(gt^2-2l)=0{,}4$ кг; время не изменится; $F=2m(g+2l/t^2)=8{,}4$ Н.
2. $A=m(v-v_0)(v_0+gt-v)/2=6240$ Дж.
3. $h=p_0(2T_2-T_1)/(\rho gT_1)=8{,}5$ м;
$m=p_0V_1M/(RT_1)=2{,}3$ г.
4. $m_п=(Q-cm(t_к-t_0))/r=5$ г;
$h=m_пRT_к/(p_0SM)=28$ м (здесь $t_к(T_к)$ — температура кипения воды).
5. $A=(e-1)q^2/(2C)=5$ мДж.
6. КПД аккумулятора увеличится примерно в 1,4 раза.
7. Скорость электрона равна $v=E/B=10^6$ м/с и направлена перпендикулярно векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$.
8. $F=\Gamma d/(\Gamma+1)=30$ см или $F=\Gamma d/(\Gamma-1)=60$ см.
9. $A=hc/\lambda-eU=3{,}2\cdot10^{-19}$ Дж; $\lambda_{max}=hc/A=6{,}2\cdot10^{-7}$ м; при длине волны λ_1 фотоэффекта не будет.
10. $E_n/E=4/5$.

[redacted]ковский государственный гогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 6 км/ч, 9 км/ч, 12 км/ч, 42 км. **Указание.** Необходимо рассмотреть 2 случая и убедиться, что встреча велосипедиста с верховым произошла ближе к B, чем к A.
2. $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 1{,}5)$.
3. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.
4. $y_{min}=y(1)=-1,\ y_{max}=y(-1)=\frac{1}{3}$.
5. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. **Указание.** Докажите, что $ABCD$ — ромб.

Вариант 2

1. $\frac{125\pi\sqrt{2}}{3}$.
2. $\frac{\pi(4n-1)}{4},\ \frac{\pi(4n+1)}{2},\ 2\pi n,\ n\in Z$.
3. $0;\ 2;\ 1\pm\sqrt{3}$.
4. $[\sqrt{10};\ \infty)$.
5. $(-\infty;\ 0),\ (\frac{1}{\sqrt{5}};\ \infty)$.

Физика

1. $F_н=mg\left(\frac{h}{l}-\frac{v^2}{2gl}-0{,}1\right)=45$ Н.
2. Кабина лифта должна двигаться вниз с ускорением $a=g(1-T_0^2n^2/t^2)=5{,}5$ м/с^2.
3. $T_1=T_2/0{,}7=404$ К.
4. $F_н=\sqrt{m^2g^2-2mgqE\cos\alpha+q^2E^2}=1{,}2\times10^{-2}$ Н, если напряженность электрического поля «смотрит» вверх, и $F_н=\sqrt{m^2g^2+2mgqE\cos\alpha+q^2E^2}=2{,}9\cdot10^{-2}$ Н, если напряженность «смотрит» вниз.
5. $n=\sqrt{R/r}=7$.
6. $r_1=\mathscr{E}/I_1-R=2{,}9$ Ом;
$r_2=2\mathscr{E}/I_2-\mathscr{E}/I_1=4{,}5$ Ом.
7. $R=\sqrt{2mU/q}/B$.
8. $l_{max}=d\sqrt{n^2-1}/2=1{,}5$ см.
9. $F=\sqrt{ab}=0{,}2$ м; $\Gamma=(b+\sqrt{ab})/(a+\sqrt{ab})=2$.
10. $A=h\nu-eU=4\cdot10^{-19}$ Дж; $\lambda_{max}=ch/A=5\cdot10^{-7}$ м.

[redacted]пьютерный турнир II Всесоюзной олимпиады по математике

1. Пусть $(N,\ M)$ — пара чисел, получившаяся из пары (1,1) с помощью разрешенных преобразований. Мы можем восстановить всю ее предысторию, так как пара $(a,\ b)$, где $a\geqslant b$, может быть получена только из пары $(a-b,\ b)$. Совершая обратный процесс, мы рано или поздно получим пару (1, 1) и можем подсчитать необходимое число преобразований. Пара (N, M) может быть получена из пары (1, 1) только лишь в том случае, когда N и M взаимно просты. В противном случае, совершая обратный процесс, мы остановимся на паре $(L, 0)$ где $L>1$. Пары (N, i) и $(N, N-i)$ дают после обратного преобразования одну и ту же пару $(N-i, i)$.

После этих замечаний ясно, как осуществлять перебор: надо для каждой пары (N, i), где $1\leqslant i<[N/2]$, совершить все обратные преобразования и сравнивать числа этих преобразований в случае, когда процесс заканчивается на паре (1, 1).

Более быстрый алгоритм дает применение обратных преобразований вида $(a, b) \to (a - qb, b)$, где $a \geqslant b$ и $q = [a/b]$.

2. Число a_1 нельзя представить в ЭВМ точно, вместо него будет записано число $A_1 = a_1 + \varepsilon$. Даже если считать, что при дальнейших вычислениях ошибки округления отсутствуют, то, вычисляя последовательно A_2, A_3, ..., получим $A_n = a_n + \varepsilon_n$, где $|\varepsilon_n| = |\varepsilon| \cdot n!$ (начальная ошибка увеличивается в $n!$ раз). Все это подтверждается при счете на ЭВМ — при таком способе вычислений даже с использованием двойной точности число A_{25} получается отрицательным! В то же время по индукции легко показать, что

$$a_n = n!\left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \dots\right),$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \dots$$

и $0 < a_n < 1/(n+1)$. Поэтому в этой задаче лучше использовать обратный счет по формуле $a_{n-1} = (1 - a_n)/n$, взяв в качестве приближения для достаточно далекого числа a_m число 0, тогда начальная ошибка будет уменьшаться и в конце концов станет несущественной. Расчеты показывают, что число a_{m-20} будет найдено с шестью верными знаками после запятой.

3. Будем сравнивать числа пар (x_n, x_{2n}) вплоть до их совпадения. Пусть n_0 — первое число, для которого $x_{n_0} = x_{2n_0}$. Тогда n_0 есть наименьшее число, большее M и кратное T, и поэтому $M < n_0 \leqslant M + T$. Далее рассматриваем пары (x_{n_0}, x_{n_0+i}) до совпадения в них чисел. Наименьшее i такое, что $x_{n_0} = x_{n_0+i}$, есть период T. На нахождение его требуется T сравнений. Далее сравниваем пары (x_j, x_{j+T}). Если j — наименьшее число, при котором происходит совпадение, то $M = j - 1$. Здесь надо M сравнений. Таким образом, общее число сравнений не превосходит $2(M + T)$.

Поправка

В «Кванте» № 11 за 1989 год на с. 34 в рисунке к задаче 4 допущена ошибка. Головоломка должна выглядеть так: $\text{П}^{\text{О}} = \sqrt{\text{ДУ}} - \text{МА} - \text{Й} = \text{Т} < \text{Е}$.
Редакция приносит свои извинения читателям.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
В. А. Лешковцев, С. П. Новиков,
Т. С. Петрова, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, Б. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. И. Буздин, А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
Н. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,
Л. А. Тишков, П. И. Черкуский, В. В. Юдин

Фото представил В. И. Плюснин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Н. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-61

Сдано в набор 18.10.89. Подписано к печати 5.12.89
Т-17331. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,64
Тираж 190 000 экз. Заказ 2436. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

10 ХОДОВ

Юбилей в этом номере отмечает не только «Квант», но и его «шахматная страничка». Впервые она появилась в № 1 за 1980 год, и вот незаметно прошли десять лет.

Юбилей мы отметим серией задач 10-ходовок!

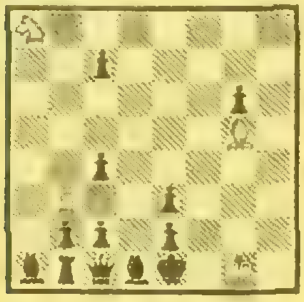
Начнем с позиций с классическим заданием.

Х. Эберт, 1980 г. Белые: Крс7, Кс8, п. а2; черные: Кра8. Мат в 10 ходов.

Решение несложно: 1. Крb6! Крb8 2. Ке7 Кра8 3. а3! Крb8 4. а4 Кра8 5. а5 Крb8 6. а6 Кра8 7. Kd5! Крb8 8. а7+Крс8 9. Крс6 Крd8 10. а8Ф×. Но нет ли у белых других путей к цели? Нельзя ли переставить ходы коня, короля и пешки, ведь дуали обесценивают композицию? Для ответа на этот вопрос автор задачи, известный проблемист Х. Эберт привлек компьютер «Мефисто», и после долгого анализа тот полностью подтвердил корректность задачи.

Х. Эберт, 1975 г. Белые: Крс8, Лg5, Сh1; черные: Крh2, п. п. h3, h5. Мат в 10 ходов.

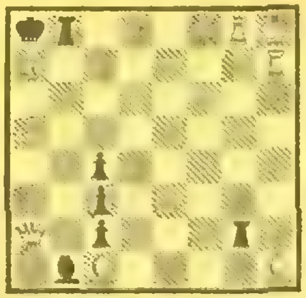
1. Са8! h4 2. Крb7! Крh1 3. Крс6 Крh2 4. Крd5 Крh1 5. Крс4 Крh2 6. Крf3 Крh1 7. Крf2+ Крh2 8. Лd5! Крh1 9. Лd1+ Крh2 10. Лh1×. Эффектная миниатюра. Однозначность решения в данном случае не вызывает сомнения, и в помощи ЭВМ нет необходимости.



Т. Горгиев, 1967 г.
Мат в 10 ходов.

Как только ферзь выйдет на d2 или это поле займет пешка (после взятия ладьи), слон объявит мат по диагонали е1 — h4. Но, вынуждая черные пешки двигаться вперед, слон должен следить и за возможностью неприятельского короля выскочить на d2, тогда мат объявляется по диагонали а5 — е1. Итак: 1. Kb6! cb6 2. Лd3! cd 3. Сс7 g5 4. Cd6 b5 5. Сс7 b4 6. Cd6 g4 7. Се7 g3 8. Cd6 b3 9. Сс7 и мат следующим ходом с а5 или g3.

Теперь перейдем к области неортодоксальных задач.



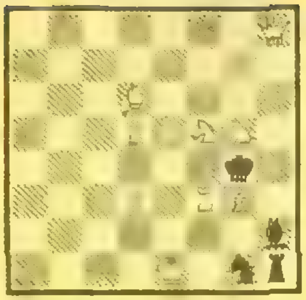
А. Хачатуров, 1985 г.
Обратный мат в 10 ходов.

Цель белых — прижать своей ладьей g8 неприятельскую ладью b8 и вынудить ту объявить мат — Л:с8×. Это достигается весьма тонкими маневрами ферзя. Алгоритм его действий таков. При противостоянии ладей на крайней горизонтали в четыре клетки белый ферзь должен находиться на а3, при «зазоре» в три клетки — на а4, в две — на а5, в одну — на а6. При соприкосновении ладей ферзь занимает поле а1. Формула ясна, и вот самый длинный вариант: 1. Фа3!! Лс8 2. Фа4! Лd8 3. Фа5! Ле8 4. Фа6 Лf8 5. Фа1! Ле8 6. Лf8 Ld8 7. Ле8 Лс8 8. Лd8 Лb8 9. Лс8 Са2 10. Ф:а2 Л:с8×.

А теперь — позиции с совершенно необычным заданием.

З. Маслар, 1982 г. Белые: Кра4, п. g4; черные: Крh1, п. g5. Кооперативный пат в 10 ходов.

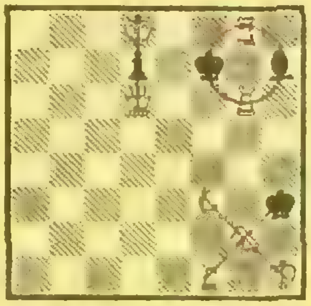
Вот как черные, начиная, запатовывают себя кратчайшим путем: 1. Крg2 Крb5 2. Крf3 Крс6 3. Кре4 Крd7 4. Крd5 Кре7 5. Крс6 Крf6 6. Крd7 Кр:g5 7. Кре8 Крf6 8. Крf8 g5 9. Крg8 g6 10. Крh8 Крf7 пат.



Ф. Абдурахманов, 1982 г.
Серийный кооперативный мат в 10 ходов.

В серийной задаче белые могут ходить только в том случае, если ставят мат. Кажется, что игра здесь заканчивается мгновенно, ведь грозит Фh8 — h4×. Но начинают черные, и этот мат, как говорят композиторы, иллюзорный — слон и конь черных неподвижны, поскольку в серийной задаче белый король не может попадать под шах. Черным придется потрудиться, прежде чем они соорудят для себя матовую клетку. 1. Кр:g5 2. Крg4 3. Кр:f3 4. Крg4 5. Кр:f5 6. Крg4 7. Кр:g3 8. Крg4 9. С:е5 10. Сh2. Все готово — 10...Фh5×.

В заключение — диаграмма, которую наш постоянный автор, гроссмейстер по композиции Э. Погосянц придумал специально по случаю юбилея.



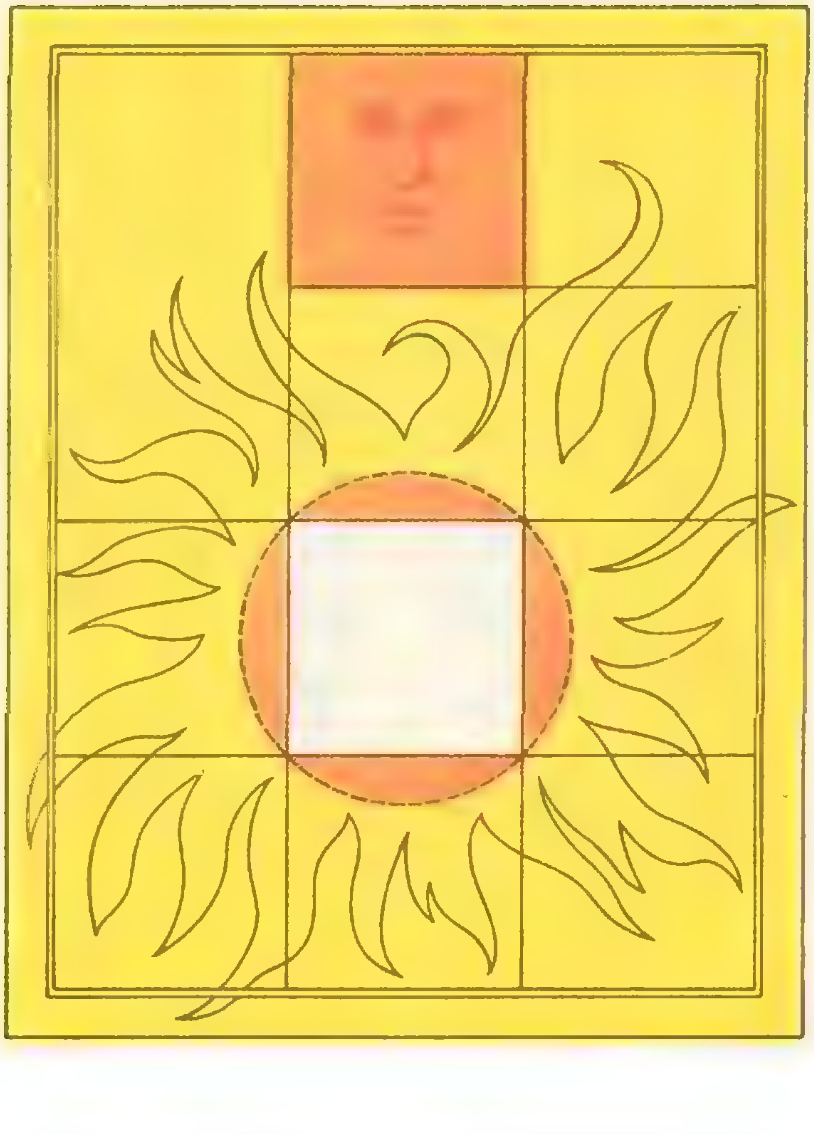
Э. Погосянц, 1980—1990 г.
Задача «10». Мат в 1 ход.
Задача «Х». Мат в 2 хода.

На одной диаграмме юбилейная дата запечатлена сразу двумя задачами, на верхней — арабскими цифрами, на нижней — римскими.

В задаче «10» хитрость в том, что сейчас ход черных — 0...С:g8 1. Фf6×, 0...С:g6 1. Ф:g6×. Задача «Х» решается изящно: 1. Сh5! Крg3 2. Лf3×.

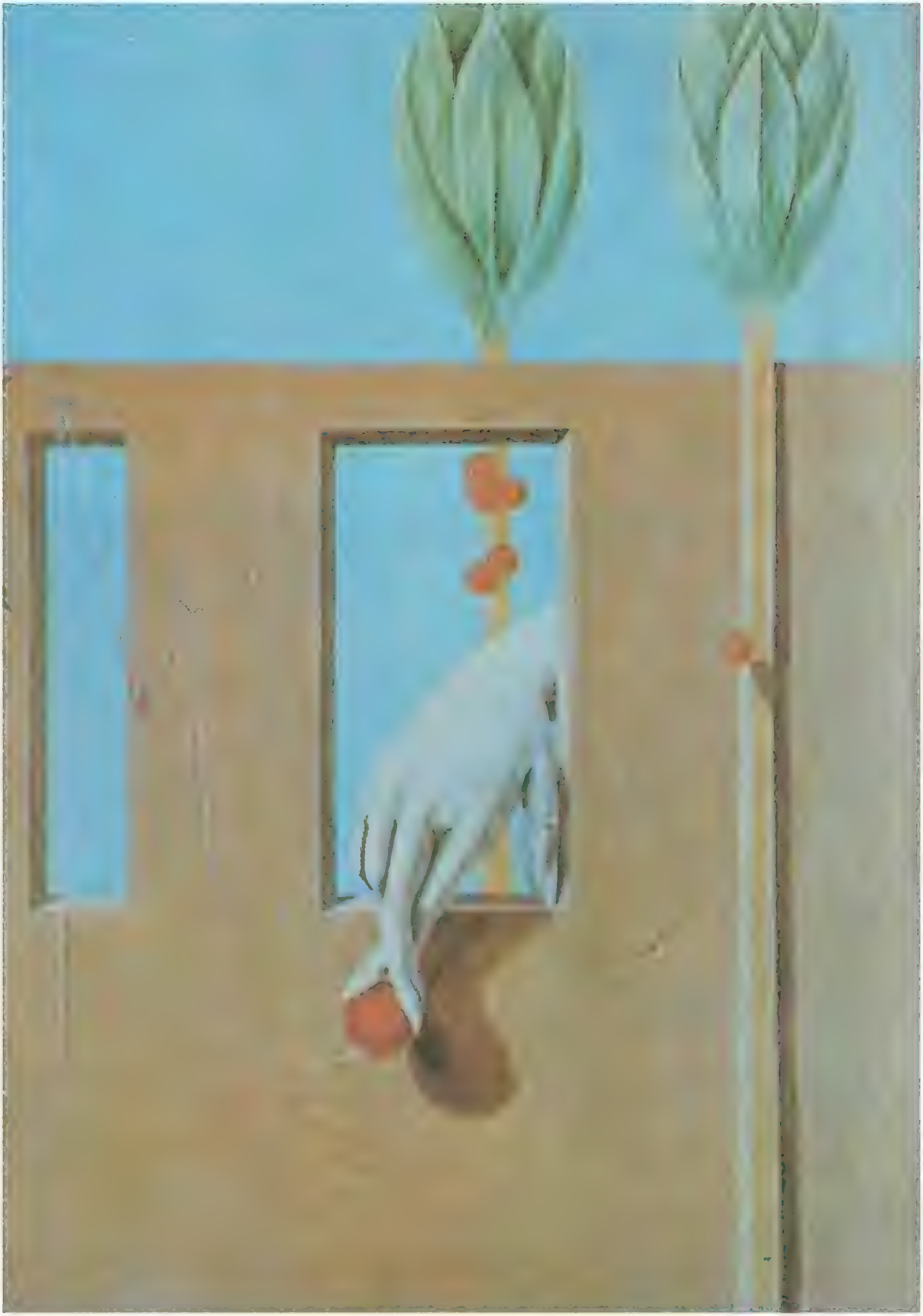
Е. Я. Гик

45 коп.
Индекс 70465



Разрезав эту картинку по линиям на квадратики, вы получите любопытную головоломку. Она сродни игре «15»: двигая квадратики, нужно переместить изображение лица на свободное место. Не спешите на нас обижаться за такую детскую задачу. Она отнюдь не так уж проста. Для ее решения необходимо поменять местами квадратик с лицом и квадратик, расположенный под ним. Но в любой книжке, где хоть что-то говорится об игре «15», вы прочтете, что поменять местами ровно две фишки в ней невозможно. А вот головоломка «солнце» разрешима. В чем же ее секрет? Ответ — в следующем номере журнала.

Д. К.



НОМЕР
2

Квант

2 1990

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва, «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

В номере:

2 Памяти А. Д. Сахарова
4 *Р. Винокур.* Кинематика баскетбольного броска
10 *А. Тоом.* Дама с Собачкой
18 *М. Беркинблит, Е. Глаголева.* Математика в живых организмах
27 *Я. Смородинский.* Размышления о массе

Задачник «Кванта»

31 Задачи М1206—М1210, Ф1213—Ф1217
33 Решения задач М1181—М1185, Ф1193—Ф1197

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Фантастика

44 *С. Сайкс.* Цифертон

Игры и головоломки

50 Небольшой переполох в аптеке

«Квант» для младших школьников

51 Задачи
52 *А. Штейнберг.* Еще раз о законе Паскаля

Школа в «Кванте»
Математика 9—11:

55 Уравнения, которые удается решить
57 Задачи в стиле Заочной школы

Лаборатория «Кванта»

59 *М. Цыпин.* Опыты с высокочастотным генератором

Практикум абитуриента

62 *А. Черноуцан.* Системы отсчета в задачах механики

67 **Варианты вступительных экзаменов**

Информация

71 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
72 Прием на экспериментальное отделение ВЗМШ «Языки и литература»

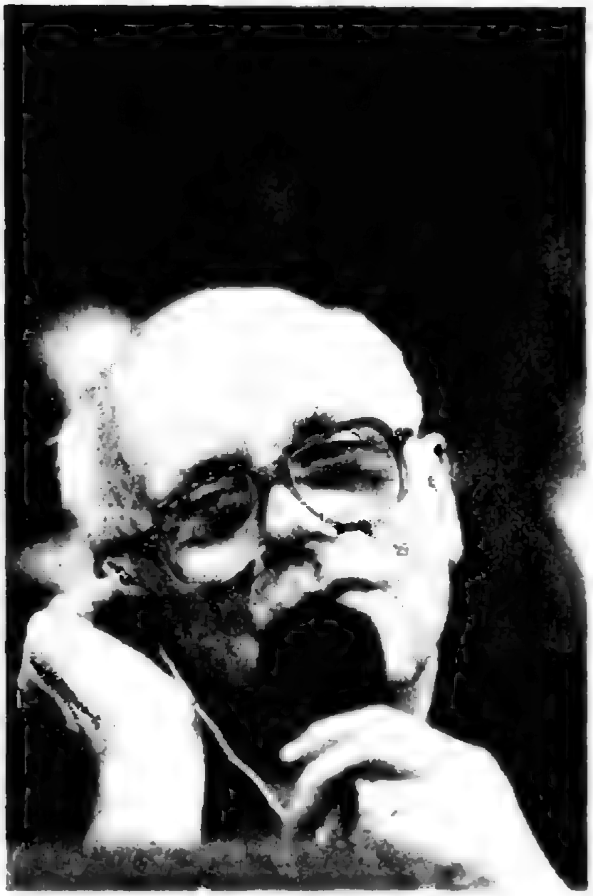
74 **Ответы, указания, решения**
Нам пишут *(9, 17, 30, 43)*
Реклама *(66)*

Наша обложка

1 *Темные (фраунгоферовы) линии на фоне разноцветной радуги — это линии, образующие спектр поглощения (см. «Калейдоскоп «Кванта»).*

2 *Репродукция картины Макса Эрнста (1891—1976) «Gli dei oscuri» (1957). «Зрительные рецепторы, так же, как и другие... получают сигналы из внешнего мира...» (из статьи «Математика в живых организмах»).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Плоский бурр».*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы «Квант», 1990



Памяти А. Д. Сахарова

Неожиданная смерть Андрея Дмитриевича Сахарова ошеломила... И сейчас еще трудно в полной мере представить глубину потери, которую понесли страна, мир, каждый мыслящий человек на Земле...

Когда было особенно трудно, даже короткая встреча с А. Д. снова вселяла надежду на лучшее будущее; само его существование и несгибаемое личное мужество в борьбе за истину, за справедливость, за «маленького» человека — были опорой в трудные моменты жизни.

40 лет с перерывами общаться с таким человеком — это неоценимый подарок судьбы. Его влияние на многих людей трудно осознать до конца. Я могу лишь попытаться набросать контуры того образа этой незаурядной личности, который продолжает складываться в моем сознании из множества впечатлений.

С первых встреч в 1949 году в Физическом институте АН СССР я подсознательно понял, что А. Д. Сахаров — это особо сконструированная личность. Уже в то время он пользовался большим авторитетом у ведущих ученых, занимавшихся атомной проблемой, хотя ему не было еще и 30 лет.

Излагал он свои мысли как бы с трудом, медленно, но каждая фраза была глубоко продумана. Это качество затрудняло его преподавательскую деятельность — студенты, как он говорил, плохо понимали его. Способность же А. Д. из общих качественных соображений объяснять сложные физические проблемы поражала.

Особенно сильное впечатление произвела в 1950 году статья-отчет А. Д. Сахарова и И. Е. Тамма об управляемом термоядерном синтезе. Игорь Евгеньевич рассказывал мне в этой связи: «Мы работали тогда, как будто в шорах. Все время тратили на атомную проблему. И вот однажды приходит ко мне вечером А. Д. и... излагает свою идею о том, что можно попытаться удержать плазму в замкнутом тороидальном объеме с помощью магнитного поля и, в принципе, разогреть ее до температуры термоядерной реакции». Так родилось новое направление в физике — теория и разработка магнитных термоядерных реакторов.

С 1950 по 1969 год А. Д. работает во Всесоюзном научно-исследовательском институте экспериментальной физики (ВНИИЭФ), вносит выдающийся вклад в разработку и создание ядерного оружия.

Но уже с конца 50-х годов он все глубже осознает опасность накопления ядерного оружия у противоборствующих сверхдержав — СССР и США, а также возрастающую экологическую угрозу, которую несут испытания этого оружия. Он был единственным ученым из экспертов, кто в 1961 году решительно высказался против испытаний 60-мегатонной водородной бомбы на Новой Земле. Его не послушали...

Именно тогда он впервые, по-видимому, понял, что угроза ядерного конфликта неизмеримо возрастает при наличии неподконтрольной власти отдельной личности или узкой группы лиц, стоящих во главе государства. Это было начало нового мышления.

Переломным в жизни А. Д. Сахарова стал 1968 год, когда он, как провозвестник новой эры, в своем меморандуме «Размышления о прогрессе, мирном сосуществовании и интеллектуальной свободе» привлек внимание к трем главным проблемам, стоящим перед человечеством: экологической, ядерной и проблеме авторитарной власти. Статья ходила по рукам. Ее не позволили опубликовать в открытой печати. После этого А. Д. вынужден уйти из ВНИИЭФа. Он вернулся в ФИАН на должность старшего научного сотрудника.

Не буду описывать все перипетии и коллизии его общественной и научной деятельности с 1969 по январь 1980 года, когда его без суда и следствия высылают в Горький и лишают всех правительственных наград. Именно в эти годы в полной мере проявились основные черты его личности — последовательного и бескомпромиссного защитника инакомыслящих, борца за коренные изменения в сторону демократизации и полной перестройки всей нашей политической, экономической и социальной системы. Воистину он был предтечей перестройки в нашей стране.

Трудно вообразить, какому давлению подвергались он и те, кто его поддерживал. Доставалось руководству и сотрудникам Отдела теоретической физики им. И. Е. Тамма ФИАНа, где он работал. Но никто из них не подписал порочащих А. Д. заявлений.

Все эти годы А. Д. Сахаров продолжал заниматься наукой. Получила развитие его опубликованная еще в 1967 году работа о нестабильности протона. Сейчас во всем мире проводятся эксперименты по обнаружению этого уникального явления. Большой интерес А. Д. проявлял к вопросам космологии и квантовой гравитации, где в последнее десятилетие вскрыта глубокая взаимосвязь между процессами, происходящими на ранней стадии развития Вселенной, и кварк-лептонной структурой элементарных частиц.

В период с 1979 по 1988 год А. Д. написал восемь статей, среди которых — работы по барионной асимметрии Вселенной (1979, 1988; по этому вопросу А. Д. сделал обзорный доклад на Международной конференции в Ленинграде, посвященной 100-летнему юбилею А. А. Фридмана), «Космологические модели Вселенной с поворотом стрелы времени» (1980), «Многомерные модели Вселенной» (1982). Эти работы свидетельствуют о силе его духа, преданности науке, о неослабевающем интересе к принципиальным вопросам современной физики.

Еще один штрих — об ответственности. После возвращения 23 декабря 1986 года из ссылки, А. Д. готовил доклад к международному форуму «За безъядерный мир, за выживание человечества». Я спросил его, когда можно будет познакомиться с этим докладом. Он ответил, что подготовка текста идет с трудом: «Приходится биться над каждой фразой, боюсь нанести ущерб нашей стране».

Время все ставит на свои места. А. Д. поверил в перестройку и принял ее. Он говорил, что верит в искреннее стремление М. С. Горбачева демонтировать нашу командно-административную систему. Но он был решительно против дальнейшей затяжки с принятием основных законов о земле, о собственности, о власти, с обсуждением 6 статьи Конституции. Его радовали перемены и особенно появление на политической арене прогрессивных молодых и талантливых политиков-депутатов.

Он был против любого насилия над личностью. Его терпимость и милосердие поражали окружающих. Он очень любил жизнь и верил, что человечество станет добрее.

Доктор физико-математических наук
В. Файнберг

1*

КИНЕМАТИКА БАСКЕТБОЛЬНОГО БРОСКА

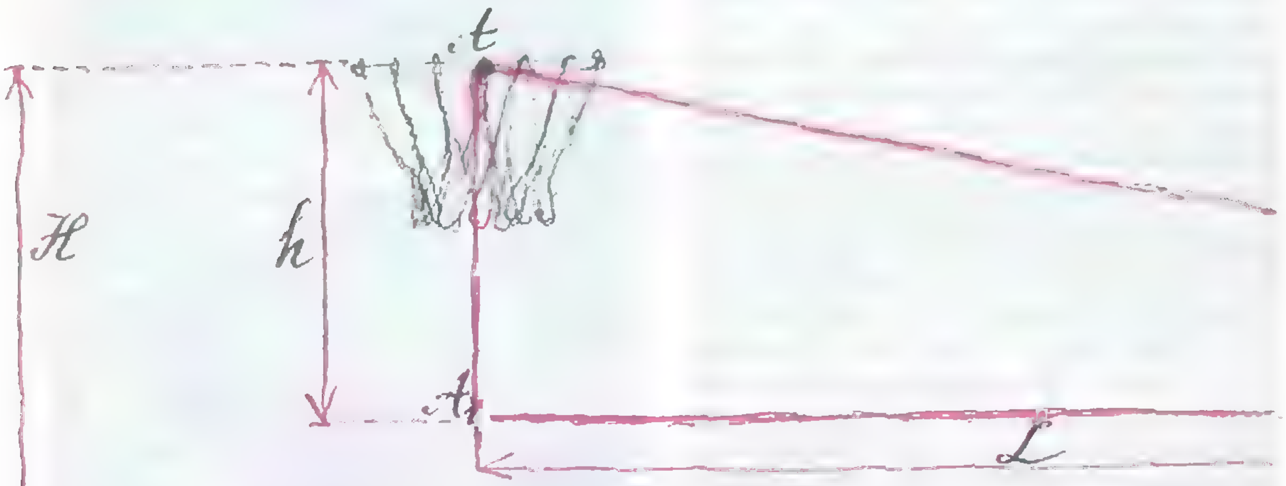


Рис. 1.

Кандидат технических наук Р. ВИНОКУР

Это произошло в конце прошлого столетия в американском городе Спрингфилде в штате Массачусетс. Студенты местного колледжа очень любили играть в бейсбол и футбол. Однако из-за плохой погоды спортивные занятия часто переносились в тесный гимнастический зал. Чтобы его питомцы не скучали, преподаватель физического воспитания Джеймс Нейсмит в 1891 году придумал игру, для которой не надо большой площадки, и назвал ее «баскетбол» — от английских слов «баскет» — корзина и «бол» — мяч. Это название очень емко передает сущность игры, поскольку, как часто ни корректировались правила баскетбола за его последующую историю, всегда главным элементом игры оставался бросок мяча в корзину: сначала в натуральную (из-под персиков), а потом — в металлическое кольцо с подвешенной к нему сеткой без дна.

На родине баскетбола, в США, помимо игровых баталий, престижны и соревнования на точность выполнения различных бросков. Американец Тед Мартин забил подряд 2036 штрафных бросков (1977 г.), а его соотечественник Фред Ньюмен — «всего» 88, но... с закрытыми глазами (1978 г.). Фантастической меткостью запомнились во многих матчах югослав Дражан Пе́трович и наш Сергей Белов.

Чтобы стать баскетбольным снайпером, помимо врожденных данных, необходимо много работать над техникой броска. Например, Дражан Петрович каждое утро приходил в зал только для того, чтобы 500 раз бросить мяч по кольцу из различных положений (и это не считая бросков во время матчей и тренировок с товарищами по команде). Как видите, практические достижения в точности баскетбольных бросков достаточно впечатляющи, од-

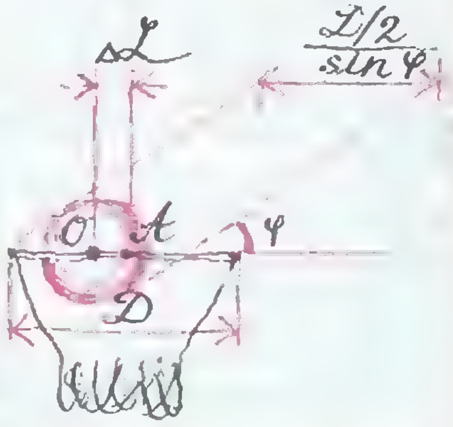
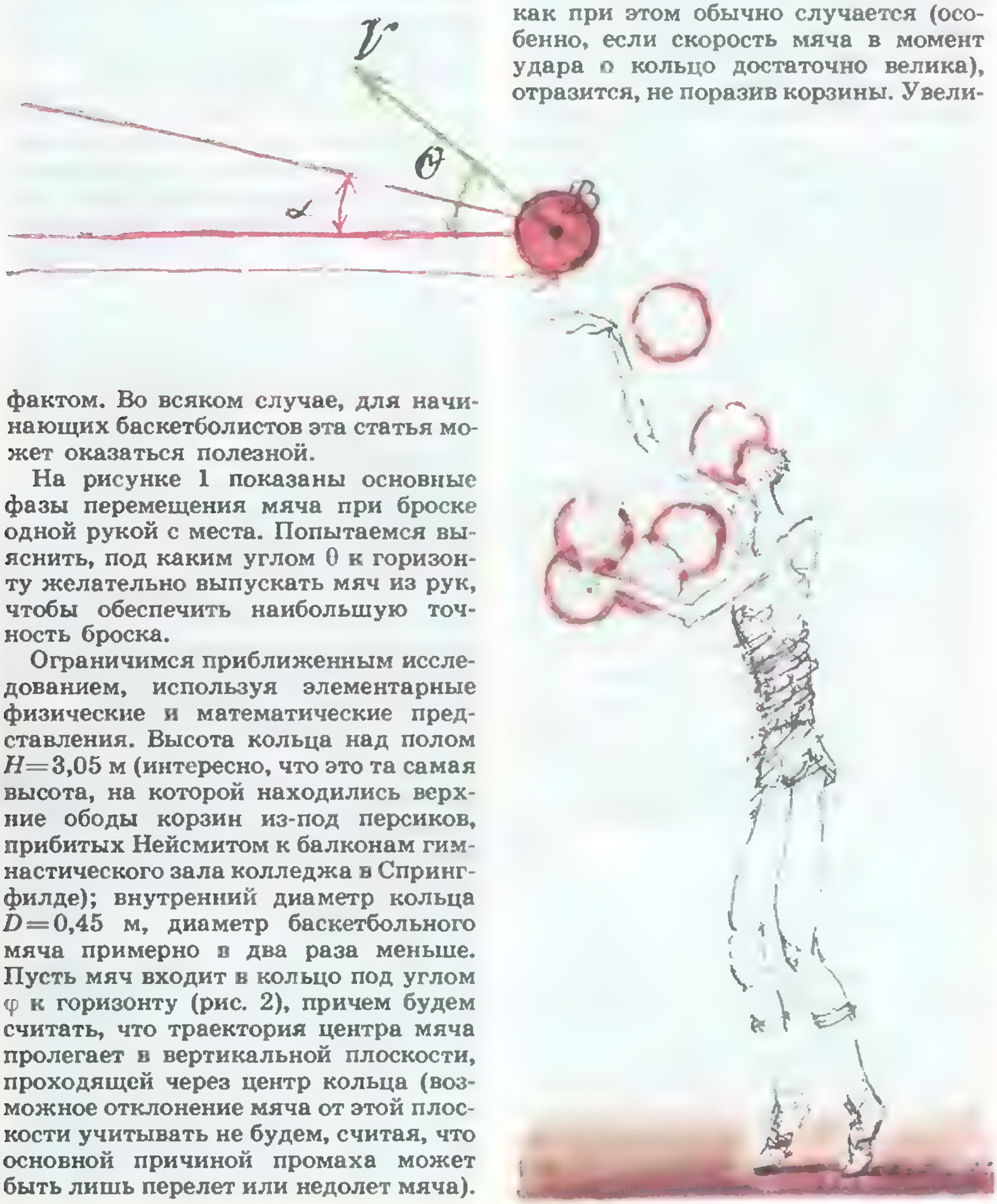


Рис. 2.

нако не мешает и «алгеброй гармонию поверить». Дело здесь не просто в удовлетворении любопытства, хотя для людей, увлекающихся не только баскетболом, но и наукой,— это всегда интересно. В настоящее время уже вряд ли кто будет спорить о полезности научных исследований для роста спортивных достижений, ставшей фактом. Во всяком случае, для начинающих баскетболистов эта статья может оказаться полезной.



На рисунке 1 показаны основные фазы перемещения мяча при броске одной рукой с места. Попытаемся выяснить, под каким углом θ к горизонту желательно выпускать мяч из рук, чтобы обеспечить наибольшую точность броска.

Ограничимся приближенным исследованием, используя элементарные физические и математические представления. Высота кольца над полом $H=3{,}05$ м (интересно, что это та самая высота, на которой находились верхние ободы корзин из-под персиков, прибитых Нейсмитом к балконам гимнастического зала колледжа в Спрингфилде); внутренний диаметр кольца $D=0{,}45$ м, диаметр баскетбольного мяча примерно в два раза меньше. Пусть мяч входит в кольцо под углом φ к горизонту (рис. 2), причем будем считать, что траектория центра мяча пролегает в вертикальной плоскости, проходящей через центр кольца (возможное отклонение мяча от этой плоскости учитывать не будем, считая, что основной причиной промаха может быть лишь перелет или недолет мяча). Тогда условие, при котором мяч пройдет через кольцо, не задев его, можно записать так:

$$|\Delta L| \leqslant l = \frac{D}{2}\left(1-\frac{1}{2\sin\varphi}\right), \qquad (1)$$

где ΔL — смещение центра мяча (O) от центра кольца (A). Это условие имеет смысл при $\varphi>30°$. Если $\varphi<30°$, то мяч обязательно заденет кольцо и, как при этом обычно случается (особенно, если скорость мяча в момент удара о кольцо достаточно велика), отразится, не поразив корзины. Увеличивая угол φ, мы повышаем шансы попасть в корзину, поскольку при этом растет величина l. Так, если $\varphi=40^\circ$, то $l\approx0{,}05$ м, а при $\varphi=60^\circ$ $l\approx0{,}095$ м, т. е. почти вдвое больше. Предельно возможное значение $l\approx0{,}112$ м (при $\varphi=90^\circ$).

Очевидно, что угол φ тем больше, чем круче угол θ, под которым игрок бросает мяч в кольцо (см. рис. 1). Однако, бросая под очень крутыми углами ($\theta\gtrsim70^\circ$), довольно трудно попасть в корзину, по крайней мере с дальних дистанций. Трудно не только попасть, но иногда и просто добросить мяч до кольца — это требует больших усилий. (Если баскетболисты и бросают издали под крутыми углами, то чаще всего «не от хорошей жизни»: надо перекинуть мяч через руки защитника, плотно опекающего «своего» игрока.) Чтобы понять причину происходящего, проведем несложные теоретические исследования, дополнив их экспериментом, для которого необходимо иметь лишь шариковую ручку или карандаш, лист бумаги, линейку и транспортир.

Пусть в момент, когда баскетболист выпускает мяч из рук, центр мяча расположен в точке B (см. рис. 1) и через время t достигает центра кольца — точки A. Начальная скорость броска V, дальность броска (проекция отрезка BA на горизонтальную плоскость) равна L. Рассматриваем «чистый» бросок — без отражения мяча от щита. Пренебрегая сопротивлением воздуха (и защитника), опишем движение мяча как движение материальной точки, брошенной под углом θ к горизонту:

$$L=(V\cos\theta)\,t,$$

$$h=L\operatorname{tg}\alpha=(V\sin\theta)\,t-\frac{gt^2}{2}.$$

Угол φ, под которым мяч влетает в кольцо, определяется из условия

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{|V_{yA}|}{V_{xA}}=\frac{|V\sin\theta-gt|}{V\cos\theta},$$

где V_{xA} и V_{yA} — соответственно горизонтальная и вертикальная составляющие скорости мяча в точке A. После простых преобразований получаем:

$$L=\frac{V^2}{g}\,\frac{\sin(2\theta-\alpha)-\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta-2\operatorname{tg}\alpha). \qquad (3)$$

Исследуем полученные выражения. Из (2) видно, что при условии $2\theta-\alpha=90^\circ$ заданная дальность броска достигается при минимально возможной скорости и, следовательно, при минимальных затратах усилий на выполнение броска. Так что оптимальный угол бросания мяча —

$$\theta=\theta_{\text{опт}}=45^\circ+\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

В частном случае $\alpha=0^\circ$ (точки B и A расположены на одном уровне) $\theta_{\text{опт}}=45^\circ$ и, как видно из (3), $\varphi=\theta$. Для игрока со средним (не «баскетбольным») ростом мяч в завершающей фазе броска находится от пола на высоте $H'\approx2$ м. Наиболее «выгоден» в современном баскетболе точный бросок из-за так называемой шестиметровой линии, за который даются три очка (за попадание с более близкой дистанции засчитываются лишь два очка, а при штрафных бросках — одно очко). Полагая $h=H-H'=1{,}05$ м, $L=6$ м, получаем $\alpha=\operatorname{arctg}(1{,}05/6)\approx10^\circ$, т. е. $\theta_{\text{опт}}\approx50^\circ$. Из выражения (2) находим, что начальная скорость мяча при $\theta=\theta_{\text{опт}}$ в этом случае составляет 8,37 м/с; если бежать с такой скоростью, то стометровую дистанцию можно преодолеть за 11,9 с, что неплохо для рядового физкультурника, но значительно уступает мировому рекорду. Однако в отличие от легкой атлетики очень высокие скорости здесь не нужны: чем больше начальная скорость мяча, тем выше его скорость на входе в кольцо, а это, как уже упоминалось, увеличивает вероятность отскока мяча при касании кольца.

В пользу угла $\theta_{\text{опт}}$ свидетельствуют и более важные соображения, связанные с учетом влияния на дальность броска ошибки в угле бросания. Пусть при начальной скорости V и угле бросания θ центр мяча пройдет в корзину через центр кольца. Обеспечить абсолютную точность этих величин не под силу даже выдающемуся мастеру, поэтому начальная скорость мяча на деле окажется равной $V'=V+\Delta V$ ($\Delta V \ll V$), а угол бросания (здесь будем выражать углы не в градусной, а в радианной мере) — $\theta'=\theta+\Delta\theta$ ($\Delta\theta \ll 1$). В результате изменится дальность броска — она станет равной $L'=L+\Delta L$. Чтобы бросок был точным, необходимо выполнение условия (1); при этом, поскольку величина l достаточно мала, значение $|\Delta L|$ также должно быть малым.

Из выражения (2) видно, что ошибка в начальной скорости броска может существенно сказаться на его результативности — ведь $L \sim V^2$. (Отработка броска и связана в первую очередь с приобретением навыков, позволяющих достаточно точно задать начальную скорость мяча. Важно также не допускать отклонения мяча в сторону от плоскости, проходящей через центр кольца. Соответствующие навыки, даже при наличии большого баскетбольного таланта, можно приобрести лишь в результате упорных тренировок (вспомните Дражана Пéтровича).)

Что же касается ошибки $\Delta\theta$ в угле бросания, то ее влияние на величину ΔL оценим, предполагая для простоты, что $\Delta V=0$ (т. е. начальная скорость броска является постоянной величиной). Для оценки используем выражение (2), пренебрегая возможным изменением угла α. Считая, что ошибка в угле бросания сравнительно мала, после несложных выкладок находим:

$$\Delta L = L\cdot 2\,\frac{\Delta\theta\cdot\cos(2\theta-\alpha)-(\Delta\theta)^2\sin(2\theta-\alpha)}{\sin(2\theta-\alpha)-\sin\alpha}. \qquad (5)$$

(Если читателю не удастся самостоятельно получить это, прямо скажем, не слишком элегантное выражение, советуем посмотреть «Приложение» в конце статьи.)

Из выражения (5) следует, что изменение дальности броска, обусловленное ошибкой в угле бросания, прямо пропорционально дальности броска (не зря броски из-за шестиметровой линии оцениваются дороже, чем броски с более близкого расстояния). Однако важно в данном случае другое. Если пренебречь членом, включающим очень малую величину $(\Delta\theta)^2$, то при $\theta=\theta_{\text{опт}}$ имеем парадоксальный результат: $\Delta L=0$, т. е. дальность броска не зависит от ошибки в угле бросания. Если же в (5) не пренебрегать ничем, то зависимость ΔL от ошибки $\Delta\theta$ существует, хоть и достаточно слабая:

$$\Delta L = -\frac{2L(\Delta\theta)^2}{1-\sin\alpha}. \qquad (6)$$

Таким образом, бросок под углом $\theta=\theta_{\text{опт}}$ является оптимальным не только потому, что требует минимальной начальной скорости, но и потому, что ошибка в угле бросания при $\theta=\theta_{\text{опт}}$ очень мало влияет на дальность броска.

Итак, результативность броска во многом зависит от способности игрока «выдерживать» нужное значение θ. Каково же допустимое значение $\Delta\theta$? Оценим его для частного случая $\alpha=0°$, $L=6$ м. При этом $\theta_{\text{опт}}=\varphi=45°$ (см. формулы (4) и (3)), и, как следует из (1), $l\approx 0{,}066$ м. Используя выражение (6), для $\Delta\theta$ получаем (переведя радианную меру в градусную): $|\Delta\theta| \lesssim 4{,}2°$. Много это или мало? Доступна ли для среднего по психофизическим данным человека возможность не выйти за этот предел? К сожалению, мы обычно мало осведомлены о способностях собственного организма, а ведь для их выявления порой достаточно простого эксперимента. Этим мы сейчас и займемся.

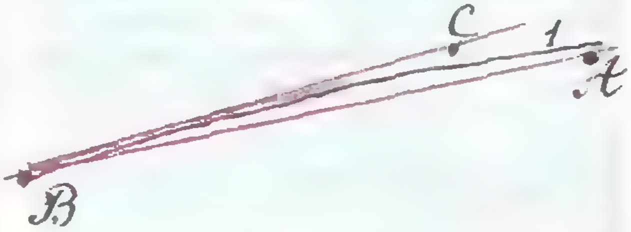


Рис. 3.

На листе бумаги обозначьте две точки: B и A (рис. 3). Установив кончик карандаша или шариковой ручки в точке B и глядя на точку A, попытайтесь быстро провести прямую, соединяющую эти точки. Конечно, полученная линия *1* будет отличаться от идеальной прямой и, возможно, не пройдет через точку A. С помощью линейки проведите прямую BA и прямую BC, примерно совпадающую с линией *1* на начальном ее участке. Теперь измерьте транспортиром угол ABC. Скорее всего, он окажется не больше 3—4°, а после некоторой тренировки можно достигнуть еще лучшего результата. Предложенное упражнение, хоть и не связано непосредственно с баскетболом, характеризует точность движения вашей руки в зрительно заданном направлении. Разумеется, этот эксперимент нельзя отождествить с бросанием мяча. Но результат обнадеживает...

Теперь вернемся к нашим формулам. Посмотрим, под каким углом φ входит в кольцо мяч, брошенный под углом $\theta=\theta_{\text{опт}}=45^\circ+\alpha/2$. Из выражения (3) с помощью несложных тригонометрических преобразований (тех, кого уже утомили преобразования, могут сразу посмотреть «Приложение», п. 2) находим:

$$\varphi(\theta_{\text{опт}})=45^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

Это означает, что при $\alpha>30^\circ$ бросок под углом $\theta_{\text{опт}}$ вообще не будет точным, поскольку при $\varphi<30^\circ$ мяч не может свободно пройти сквозь кольцо. Вообще говоря, и при $\alpha\approx20^\circ$ (т. е. $\varphi\approx\approx35^\circ$) вероятность попадания еще мала из-за того, что в этом случае относительно невелико значение l (см. условие (1)). Ситуация, когда угол α сравнительно крут, возникает в случае броска с близкого расстояния (до 1—2 м), когда высота кольца над центром мяча в начальный момент его свободного полета практически не меньше, а иногда и больше дальности броска. Однако угол α можно уменьшить, бросая мяч в прыжке, т. е. приближая центр мяча в начальный момент к уровню кольца. Обычно считается, что бросок в прыжке нужен для того, чтобы «переиграть» защитника, однако при бросках с близких дистанций, как следует из полученных результатов, прыжок способствует и увеличению точности броска.

Дополнительное уменьшение угла α при близких бросках может быть достигнуто за счет броска с отражением от щита. Схема такого броска показана на рисунке 4, где изображена проекция траектории мяча на горизонтальную плоскость (K — точка отражения мяча от щита). Если приближенно считать удар мяча о щит абсолютно упругим, то начальные параметры броска должны быть таковы, чтобы при отсутствии щита обеспечить попадание мяча в зеркальное отображение кольца относительно плоскости щита (по траектории BKA'). Уменьшение угла α происходит в данном случае за счет увеличения дальности броска ($BK+KA>BA$). Понятно, что такой бросок производит игрок, находящийся несколько сбоку от кольца.

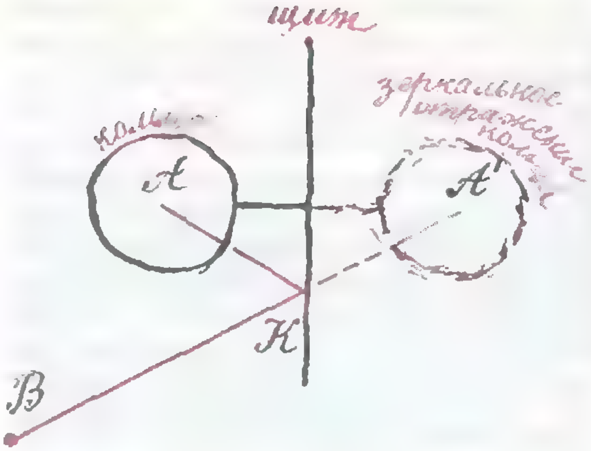


Рис. 4.

Во всех наших расчетах мы пренебрегали сопротивлением воздуха, и поэтому может возникнуть вопрос, насколько правомерны полученные результаты (ведь известно, что, если бы не сопротивление воздуха, винтовочная пуля пролетала бы примерно в 10 раз большее расстояние, чем в реальных условиях). Сила сопротивления воздуха зависит от формы движущегося тела (вспомните обтекаемые силуэты скоростных автомобилей и самолетов), от площади сечения, перпендикулярного направлению движения (не зря велосипедист-гонщик «складывается» почти вдвое при езде), и особенно значительно — от скорости движения тела. Сравнительно заметное воздействие может оказывать воздушная среда на движение теннисного, волейбольного и футбольного мячей; баскетбольный мяч подвержен этому в гораздо меньшей степени. Основная причина здесь в скоростях: любой мяч ударом можно заставить двигаться с большей начальной скоростью, чем толкая его пальцами руки. Так, скорость теннисного и футбольного мячей достигает 30 м/с, а скорость баскетбольного мяча обычно не превышает 10 м/с.

Вообще говоря, учет силы сопротивления воздуха для баскетбольного броска связан с решением дифференциальных уравнений, чем мы здесь, естественно, заниматься не будем, а укажем только результат. Хотя сила сопротивления воздуха несколько снижает дальность броска, ее влиянием на оптимальный угол броска можно пренебречь. Так, для бросков с расстояния до 6—7 м оптимальный угол ниже значения, определяемого по формуле (4), не более чем на 2—3°.

Движение мяча в принципе зависит и от его вращения вокруг своего центра. В такое вращение вовлекаются прилегающие слои воздуха, что в сочетании с поступательным движением воздуха относительно мяча приводит к возникновению силы, действующей на мяч перпендикулярно его траектории (эффект Магнуса). Не останавливаясь на этом интересном эффекте, заметим, что, в отличие, скажем, от тенниса (как большого, так и настольного), его влияние на движение баскетбольного мяча сравнительно мало.

Приложение

1. Изменение дальности броска при сделанных в статье предположениях равно

$$\Delta L = L' - L = \frac{V^2}{g}\,\frac{\sin(2\theta' - \alpha) - \sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{V^2}{g}\,\frac{\sin(2\theta - \alpha) - \sin\alpha}{\cos\alpha} = L\,\frac{\sin(2\theta' - \alpha) - \sin(2\theta - \alpha)}{\sin(2\theta - \alpha) - \sin\alpha}.$$

Преобразуя разность синусов в числителе полученного выражения, имеем:

$$\sin(2\theta' - \alpha) - \sin(2\theta - \alpha) = 2\cos(2\theta + \Delta\theta - \alpha)\sin(\Delta\theta) = 2(\cos(2\theta - \alpha)\cos(\Delta\theta) - \sin(2\theta - \alpha)\sin(\Delta\theta))\sin(\Delta\theta).$$

Полагая, что величина $\Delta\theta$ выражена в радианах, и используя приближенные равенства $\sin x \approx x$ и $\cos x \approx 1$ при $x \ll 1$, получаем в итоге выражение (5).

2. Подставляя в выражение (3) $\theta = \theta_{\text{опт}} = 45° + \alpha/2$, получаем:

$$\varphi(\theta_{\text{опт}}) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta_{\text{опт}} - 2\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)} - \frac{4\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \operatorname{tg}(\alpha/2)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/2)}\right) = 45° - \frac{\alpha}{2}.$$

Нам пишут

«Золотое сечение» в физике

Золотым сечением называется такое деление отрезка на две части, при котором бóльшая часть относится ко всему отрезку, как меньшая относится к большей. Нетрудно подсчитать, что это отношение равно $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$. Золотое сечение обладает удивительным свойством появляться в самых разных областях знания.

Известно, что ускорение силы тяжести при удалении от земной поверхности описывается следующей формулой (докажите!):

$$g_h = \frac{g_0 R^2}{(R + h)^2},$$

где h — высота над поверхностью Земли, R — ее радиус. При опускании тела в глубь Земли характер зависимости g от hменяется:

$$g_{-h} = g_0\left(1 - \frac{h}{R}\right).$$

Зададимся вопросом, когда $g_h = g_{-h}$? Ясно, что одним из решений будет $h = 0$. Второе решение (которое вы сможете легко найти) таково:

$$h = \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) R.$$

Это один из примеров появления золотого сечения в реальной физической задаче.

В. Дроздов

От редакции. *Постоянные читатели «Кванта» хорошо знают, что означают четыре буквы: ВЗМШ. Это — Всесоюзная заочная математическая школа, вступительное задание которой печатается ежегодно в первом номере нашего журнала. В этом году ВЗМШ исполняется 25 лет. Мы решили предоставить Заочной школе страницы нашего журнала. Перед вами — первый материал «по мотивам» ВЗМШ. Автор этой статьи — один из энтузиастов ВЗМШ, член ее методической комиссии.*

ДАМА С СОБАЧКОЙ

Кандидат физико-математических наук
А. ТООМ

Давным давно, когда я был студентом мехмата МГУ, один из старших друзей спросил меня: «Знаешь «Даму с собачкой»?» — «Ну конечно»,— ответил я, имея в виду рассказ А. П. Чехова.— «Нет,— сказал собеседник,— я про другое. Есть такое доказательство основной теоремы алгебры». И тут же рассказал мне очень красивое (хотя и нестрогое) рассуждение, которое в итоге оказалось одним из самых ярких моих впечатлений за все годы учебы. Однако, несмотря на свою наглядность, доказательство это, давно уже вошедшее в «математический фольклор», по-моему, так до сих пор и не записано в своем наиболее доступном виде.

В заставке использована картина Дж. Балла «Собака на поводке» (1912).

Цель статьи — восполнить это досадное упущение.

Кто автор этого рассуждения — сказать трудно. Скорее всего, им следует считать К. Гаусса, который всю жизнь интересовался основной теоремой алгебры (называемой также теоремой Д'Аламбера — Гаусса) и дал несколько различных ее доказательств*). Мне говорили, что в обиход московских математических кружков и студенческих семинаров это рассуждение ввел А. Н. Колмогоров, но я не смог проверить, правда ли это. И я не знаю, кто первым украсил его образами Чехова.

Прежде чем приступить к самому доказательству, давайте вспомним основные понятия из теории комплексных чисел**). Те, кто с ними знаком, могут прямо перейти к четвертому разделу статьи.

Числа действительные и комплексные

Как известно, действительные числа естественно располагаются на числовой оси, т. е. на прямой, на которой отмечена точка O, выбран масштаб и положительное направление (рис. 1). Комплексные числа столь же естественно располагаются на комплексной плоскости, т. е. на плоскости, на которой задана система координат Oxy, причем ось Ox названа действительной, а ось Oy — мнимой (рис. 2). Точкам, лежащим на действительной оси Ox, соответствуют привычные нам действительные числа. Точкам, лежащим на мнимой оси Oy, соответствуют мнимые числа, снабженные специальным множителем i. Вообще любой точке с координатами (x, y) соответствует комплексное число $x+iy$, причем координата x называется его действительной, а координата y — его мнимой частью. Точке O — началу координат — соответствует комплексное число 0, у которого и действительная, и мнимая части равны нулю. Буква i в теории комплексных чисел обозначает число, соответствующее точке с координатами (0; 1).

Правила сложения, вычитания и умножения на действительное число для комплексных чисел такие же,

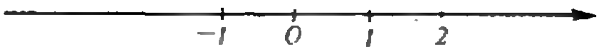


Рис. 1.

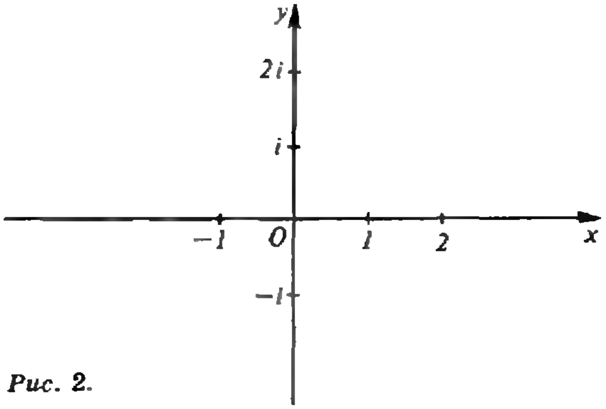


Рис. 2.

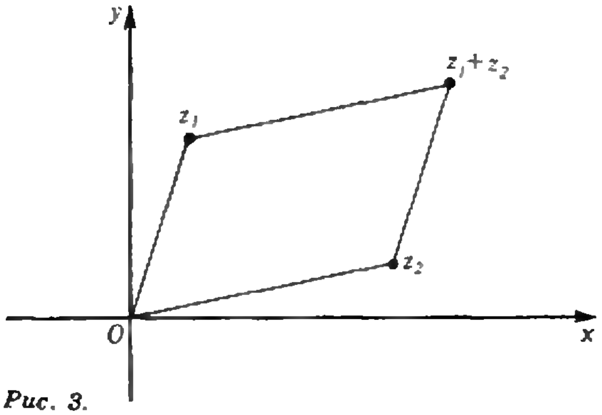


Рис. 3.

как для векторов:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=$$
$$=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=$$
$$=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$
$$k(x+iy)=kx+iky.$$

Геометрически сложение комплексных чисел осуществляется по «правилу параллелограмма» (рис. 3), а умножению на действительное число k соответствует гомотетия с центром O и коэффициентом k.

---

*) О жизни и деятельности этого великого ученого можно узнать, в частности, из только что вышедшей книги В. К. Бюлера «Гаусс. Биографическое исследование» (М., Наука, 1989).

**) Существует обширная популярная литература о комплексных числах, отчасти приведенная в конце статьи. Когда я учился в школе (это было еще до всех «усовершенствований» школьной программы последних трех десятков лет), знакомство с комплексными числами входило в школьную программу. В «Кванте» комплексным числам и расширению понятия числа была посвящена статья Л. С. Понтрягина «Обобщение чисел» (№ 2, 3 за 1985 год).

Умножение произвольных комплексных чисел основано на тождестве

$$i^2=-1.$$

Пользуясь им, получаем

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=$$
$$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Можно определить и деление комплексных чисел — как действие, обратное умножению. Выражение z_1/z_2 имеет однозначный смысл всегда, когда $z_2\neq 0$, и определяется формулой

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

В частности,

$$\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

Комплексное число $\bar z=x-iy$ называется сопряженным к числу $z=x+iy$. Очевидно, каждое комплексное число сопряжено к своему сопряженному: $\bar{\bar z}=z$, а точки $\bar z$ и z симметричны друг другу относительно действительной оси.

С комплексными числами можно делать все четыре действия арифметики, причем верны те алгебраические соотношения, которые позволяют выполнять привычные преобразования (перенос членов из одной части равенства в другую, приведение подобных членов, вынесение за скобки). На языке математики это означает, что комплексные числа образуют поле.

Упражнения

1. Выполните действия

а) $(1+i)(1-i)$; б) $(1+i)/(1-i)$; в) $(1+i)^4-(1-i)^4$.

2. Для каждого целого n укажите, чему равны: а) i^n; б) $(1+i)^n$.

3. Рассмотрим геометрическое преобразование комплексной плоскости, переводящее каждую точку z в точку $1/z$. а) Во что это преобразование переводит прямую $\{1+iy\}$? б) Докажите, что это преобразование переводит окружность, проходящую через точку O, в прямую, а окружность, не проходящую через точку O, в окружность.

Решение уравнений

Исторически комплексные числа возникли в математике благодаря стремлению сделать более стройной теорию решения алгебраических уравнений, т. е. уравнений вида

$$P(z)=0, \qquad (1)$$

где $P(z)$ — алгебраический многочлен n-й степени;

$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0. \qquad (2)$$

Корнем уравнения (1) или, что то же самое, многочлена (2), называется такое значение z, при котором (1) истинно. Решить уравнение — значит найти все его корни.

Для того чтобы найти все корни многочлена, неплохо было бы знать заранее, сколько их. Путем построения подходящей системы определений математикам удалось создать ситуацию, в которой число корней многочлена всегда равно его степени. Покажем на примере квадратных уравнений, как им это удалось. Рассмотрим приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами

$$z^2+pz+q=0. \qquad (3)$$

Как известно, его корни выражаются формулой

$$z_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}, \qquad (4)$$

где дискриминант $D=p^2-4q$. Но, пока мы работаем только с действительными числами, эта формула теряет смысл при $D<0$, и наше уравнение не имеет корней. Получается разнобой: некоторые квадратные уравнения имеют два корня, некоторые — ни одного. Этот разнобой издавна вызывал у математиков чувство неудовлетворенности, приведшее к развитию теории комплексных чисел. В поле комплексных чисел формула (4) имеет смысл и при $D<0$, принимая вид

$$z_{1,2}=\frac{-p\pm i\sqrt{-D}}{2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3), легко убедиться, что получается истинное равенство.

Правда, остается еще случай, когда $D=0$: в этом случае существует только один корень $z_1=z_2$. Но мы будем считать, что этот корень двукратный, потому что и в этом случае, как и во всех прочих, наш квадратный трехчлен разлагается на множители

$$z^2+pz+q=(z-z_1)(z-z_2).$$

Более громоздкое, но, в сущности, не такое уж трудное, рассуждение показывает, что и при произвольных комплексных значениях коэффициентов p и q уравнение (3) тоже имеет два комплексных корня.

Итак, вводя подходящие определения, мы пришли к ситуации, в которой у всякого квадратного уравнения есть два корня. Аналогичное верно и для всех степеней.

Основное утверждение, к которому мы стремимся прийти в этой статье, состоит в следующем. Всякий многочлен n-й степени (2) разлагается в поле комплексных чисел на n множителей

$$p(z)=(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n), \quad (5)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_n$ — все корни нашего многочлена (некоторые из них могут совпадать друг с другом). При этом коэффициенты многочлена (2) могут быть комплексными.

Во всяком деле труднее всего первый шаг. Так и здесь: труднее всего доказать, что всякий многочлен степени $n\geqslant 1$ имеет хотя бы один комплексный корень. Это последнее утверждение (может быть, именно потому, что в нем главная трудность) и называется обычно *основной теоремой алгебры.*

Обратим внимание на один частный случай, когда утверждение основной теоремы алгебры сравнительно очевидно. Пусть все коэффициенты многочлена (2) — действительные числа и n нечетно. В этом случае многочлен заведомо имеет хотя бы один действительный корень. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим график $P(x)$, где x пробегает действительную числовую ось, а именно — поведение этого графика при x, удаляющемся по оси в бесконечность влево и вправо. При больших по модулю значениях x поведение многочлена определяется поведением его старшего члена x^n, по сравнению с которым сумма всех остальных членов — мелочь, которой можно пренебречь. Вместе с x^n наш многочлен уходит в «плюс бесконечность» при $x\to\infty$ и в «минус бесконечность» — при $x\to-\infty$. Поэтому $P(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Но график многочлена — непрерывная кривая, и раз эта кривая в одном месте расположена выше оси абсцисс, а в другом месте — ниже, то она должна хоть раз пересечь эту ось. Разумеется, это рассуждение нестрогого, но, прежде чем учиться рассуждать строго, имеет смысл ознакомиться с теми идеями, ради которых стоит строить сложный аппарат строгих рассуждений.

Чуть позже мы дадим столь же нестрогое доказательство основной теоремы алгебры. Но сначала обсудим геометрический смысл умножения комплексных чисел.

Упражнения

4. Решите уравнения

а) $z^2+iz=0$; б) $z^2+i=0$; в) $z+\dfrac{1}{z}=1$.

5. Докажите, что если все коэффициенты уравнения — действительные числа, то множество его корней на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси. Отсюда еще раз выведите, что уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

6. Для произвольного комплексного числа $p+iq$ решите уравнение

$$z^2=p+iq.$$

7. Докажите *теорему Виета*

$$z_1+z_2=-p, \quad z_1\cdot z_2=q,$$

где z_1 и z_2 — корни уравнения (3), p и q — любые комплексные числа.

8. Решите в комплексных числах уравнения и покажите их корни на комплексной плоскости

а) $z^4-1=0$; б) $z^3-1=0$; в) $z^6-1=0$.

При перемножении нескольких комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

Как известно, модуль действительного числа равен расстоянию от точки

x до точки O на числовой оси. Аналогично, модуль комплексного числа — это расстояние от соответствующей точки до точки O на комплексной плоскости. Из теоремы Пифагора можно вывести следующую формулу

$$|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между изображающими их точками на комплексной плоскости.

Докажем, что модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей:

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$$

Пусть

$$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2.$$

Тогда

$$|z_1z_2|=\sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}=$$
$$=\sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}=$$
$$=\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}=|z_1|\cdot|z_2|,$$

что и требовалось доказать.

Теперь нам надо ввести величину, характеризующую «направление» комплексного числа. Назовем аргументом $\mathrm{Arg}(z)$ комплексного числа z тот угол, на который луч Oz повернут относительно положительной полуоси Ox. Поворот против часовой стрелки считается положительным, поворот по часовой стрелке — отрицательным. Только у нуля нет аргумента. У всякого же комплексного числа $z\neq 0$ есть аргумент, определенный с точностью до слагаемого $360°\cdot n$, где n — любое целое число. Например,

$$\mathrm{Arg}\,(1)=360°\cdot n,$$
$$\mathrm{Arg}\,(i)=90°+360°\cdot n,$$
$$\mathrm{Arg}\,(-1)=180°+360°\cdot n,$$
$$\mathrm{Arg}\,(-i)=270°+360°\cdot n.$$

Впрочем, все эти формулы можно писать и в ином виде, например

$$\mathrm{Arg}\,(-i)=-90°+360°\cdot n.$$

Выберем комплексное число z_0, модуль которого равен единице, и покажем, что умножение всех комплексных чисел на z_0 есть поворот комплексной плоскости вокруг точки O на аргумент z_0.

Прежде чем читать дальше, рассмотрите геометрический смысл умножения на z_0 в четырех частных случаях:

$$z_0=\pm1 \text{ и } z_0=\pm i.$$

Во всех четырех случаях получается поворот вокруг точки O на некоторый угол, не правда ли?

Итак, рассмотрим умножение на произвольное число z_0, модуль которого равен единице. Выше мы говорили, что расстояние между точками z_1 и z_2 — это модуль разности чисел z_1 и z_2. Пользуясь этим, покажем, что при умножении на z_0 расстояние между точками сохраняется:

$$|z_1z_0-z_2z_0|=|(z_1-z_2)z_0|=$$
$$=|z_1-z_2|\cdot|z_0|=|z_1-z_2|.$$

Всякое геометрическое преобразование, при котором расстояние между точками не меняется, называется движением (к нему близко понятие твердого тела в физике). В данном случае движение оставляет на месте точку O и не оставляет на месте никакую другую точку, а такое движение есть поворот вокруг точки на некоторый угол. На какой угол? На тот самый угол, на который луч Oz_0 повернут относительно положительной полуоси Ox, т. е. на $\mathrm{Arg}\,z_0$.

Теперь разберемся в том, что происходит с комплексными числами при умножении их на произвольное число z_0, отличное от нуля. Для этого разложим z_0 на два множителя, один из которых действительный и равен $|z_0|$, а другой имеет модуль 1 и равен $z_0/|z_0|$. Умножение на первый множитель — гомотетия, при которой аргумент не меняется, а модуль умножается на $|z_0|$. Умножение на второй множитель — поворот, при котором модуль не меняется, а аргумент увеличивается на $\mathrm{Arg}(z_0)$.

Вот мы и доказали, что при перемножении двух произвольных комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Опираясь на это, легко доказать аналогичное утверждение и для любого числа сомножителей.

Важный частный случай: если комплексное число возводится в n-ю степень, то его модуль возводится в n-ю степень, а аргумент умножается на n. Формула, выражающая это утверждение, называется *формулой Муавра*. Благодаря этому факту мы можем понять, как расположены на комплексной плоскости корни уравнения

$$z^n-1=0. \qquad (6)$$

Эти корни — вершины правильного n-угольника с центром в точке O, одна из вершин которого — точка 1. Решая уравнение (6) алгебраически (если это удается сделать), мы получаем выражения для тригонометрических функций углов вида $k\cdot 360^\circ/n$.

Упражнения

9. Докажите, что три различные точки z_1, z_2 и z_3 лежат на одной прямой, если и только если

$$(z_3-z_1)/(z_2-z_1)$$

— действительное число.

10. Докажите, что треугольник $z_1z_2z_3$ подобен треугольнику $z_1'z_2'z_3'$, если и только если

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{z_3'-z_1'}{z_2'-z_1'}.$$

11. Докажите, что точки z_1, z_2 и z_3 являются вершинами правильного треугольника с центром O, если и только если

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0, \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|>0. \end{cases}$$

12. Какую геометрическую фигуру на комплексной плоскости образуют решения уравнения

$$3|z|=2|z-5|?$$

13. Решите уравнение

$$z^5-1=0$$

двумя различными способами: с помощью формулы Муавра и без нее. Опираясь на полученные данные, вычислите синусы и косинусы углов в 72° и 144°. Опишите способ построения правильного пятиугольника циркулем и линейкой.

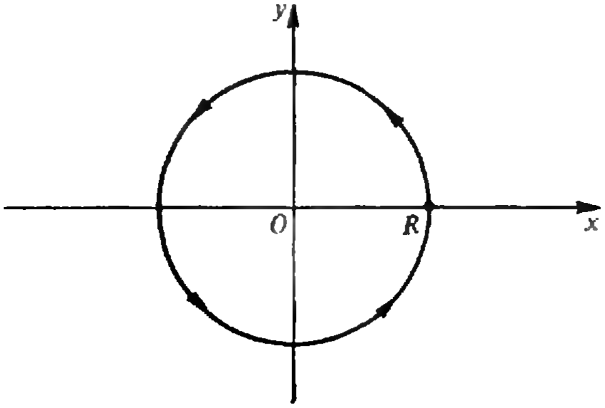


Рис. 4.

14. Пусть требуется вычислить сумму

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+n\beta).$$

С помощью комплексных чисел сведите эту задачу к вычислению суммы геометрической прогрессии.

Дама выходит из дома

Вспомните, как в конце второго раздела статьи нам помогло то, что мы рассматривали большие по модулю значения переменной. Так мы поступим и сейчас, с той, однако, разницей, что теперь у нас не действительные, а комплексные числа. Зафиксируем большой радиус R и предположим, что комплексное число z обходит окружность радиусом R с центром O. Пусть z начинает свой путь в точке R (т. е. в точке с координатами $(R,\ 0)$), движется по окружности в положительном направлении (против часовой стрелки) и заканчивает свой путь в той же самой точке R (рис. 4).

Точка z^n при этом движется по окружности радиусом R^n (так как модуль числа z^n есть n-я степень модуля z), но обходит ее не один, а n раз (так как аргумент z^n равен аргументу z, умноженному на n). Поскольку точка z^n ведет себя так хорошо и чинно, мы ее назовем Дамой. Дама выходит из своего дома, расположенного в точке R^n, совершает моцион, обходя n раз окружность радиусом R^n с центром O, и возвращается домой.

Многочлену $P(z)$ (см. формулу (2)) отводится в этом рассказе роль Собачки, потому что его путь проследить гораздо сложнее. Во всяком случае, мы знаем, что $P(z)$ тоже непрерывно движется по комплексной плоскости, начиная и заканчивая свой путь в точке $P(R)$ — в конуре.

Оценим расстояние между Дамой и Собачкой:

$$|P(z)-z^n|=|a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\ldots+a_1z+a_0|\leqslant|a_{n-1}z^{n-1}|+|a_{n-2}\times z^{n-2}|+\ldots+|a_1z|+|a_0|=|a_{n-1}|\cdot R^{n-1}+|a_{n-2}|\cdot R^{n-2}+\ldots+|a_1|\cdot R+|a_0|\leqslant(|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\ldots+|a_1|+|a_0|)\times R^{n-1}=L.$$

Мы воспользовались тем, что модуль

суммы комплексных чисел не больше, чем сумма их модулей. Геометрически это очевидно: длина ломаной, составленной из векторов, отвечающих этим числам, не превосходит расстояния между ее концами. Кроме того, в последнем неравенстве мы предположили, что $R \geqslant 1$; это неудивительно, так как мы уже говорили, что R — большое число. L — это длина поводка, на котором Дама держит Собачку: при каждом значении z Собачка не может удалиться от Дамы на расстояние, большее L. Теперь мы можем придать точный смысл словам «R — большое число», а именно придадим R значение

$$R_0 = |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_1| + |a_0| + 1.$$

Ясно, что при этом значении R длина поводка L меньше радиуса R^n того круга, по которому гуляет Дама. Отсюда следует, что на своем пути Собачка, как и Дама, n раз обходит вокруг точки O.

Чтобы пояснить это важное соображение, для наглядности предположим, что к ошейнику Собачки подвешен клубок нити, конец которой закреплен в конуре. Когда Собачка совершает свой путь, клубок разматывается, и нить остается лежать на плоскости, отмечая траекторию Собачки. Концы нити совпадают. Итак, траекторию Собачки отмечает замкнутая нить, уложенная на плоскость так, что она делает n петель вокруг точки O.

А теперь внимание: наступает самый ответственный момент нашего рассуждения! Мы начинаем менять параметр R от R_0 до нуля. Будем называть этот процесс стягиванием. При стягивании радиус того круга, по которому гуляет Дама, уменьшается, но она по-прежнему проходит n кругов с центром O. Только когда R становится равным нулю, эти круги стягиваются в точку O. Как в процессе стягивания меняется траектория Собачки — это вопрос сложный, но во всяком случае ее траектория меняется непрерывно, и при $R=0$ стягивается в точку a_0, а при R, близком к нулю, траектория близка к точке a_0.

Давайте исключим из рассмотрения случай $a_0=0$, потому что в этом случае утверждение теоремы очевидно: у нашего многочлена есть корень 0. Тогда при R близком к нулю траектория Собачки, будучи при всех z близка к $a_0 \neq 0$, не обходит вокруг точки O ни разу.

Итак, в процессе стягивания число обходов траектории Собачки вокруг точки O уменьшается от n до нуля. Поскольку число это целое, оно меняется скачками, т. е. является разрывной функцией от R. Выберем какое-нибудь значение R, являющееся точкой разрыва этой функции, и подумаем о том, какова траектория Собачки при этом значении R. Ясно, что при этом значении R траектория Собачки проходит через точку O. Но каждая точка этой траектории — значение нашего многочлена. Раз хотя бы одна из этих точек совпадает с нулем, значит у многочлена есть корень!

Итак, мы доказали, что у каждого многочлена $P(z)$ ненулевой степени есть хотя бы один корень z_1. Тогда, по теореме Безу (см. заметку «Уравнения, которые удается решить» в этом номере журнала), данный многочлен раскладывается в произведение

$$P(z) = (z - z_1) \cdot P_1(z).$$

К $P_1(z)$ (если его степень положительна) мы можем применить то же самое рассуждение и доказать, что у него тоже есть хотя бы один корень z_2, и, снова применив теорему Безу, получим

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdot P_2(z).$$

Повторяя это рассуждение n раз, мы наконец-то получаем разложение (3) произвольного многочлена n-й степени на n множителей, к которому все время стремились.

Упражнение

15. Пусть комплексное число z выходит из точки 1, обходит окружность радиусом 1 с центром O и возвращается в ту же точку 1. Начертите линию, по которой при этом движется точка:

а) $1/z$; б) $z + \frac{1}{z}$; в) $z^2 + z + 1$; г) $(z-1)^n$.

(Окончание см. на с. 26)

Нам пишут

Об одной комбинаторной формуле

В «Кванте» № 3 за 1989 год в разделе «Нам пишут» была опубликована формула для числа способов выбора k из n чисел $1, 2, \ldots, n$ с условием, что любые два выбранных числа отличаются не меньше, чем на p:

$$\frac{(n+k-pk+p-1)!}{k!(n-pk+p-1)!}. \qquad (1)$$

Наш постоянный читатель московский математик *Л. М. Коганов* предлагает следующий вывод формулы (1).

Сопоставим каждому способу выбора k из n чисел «слово» из n символов 0 и 1, ставя 1 на месте выбранных чисел из конечной последовательности $1, 2, \ldots, n$, и 0 — на остальных $n-k$ местах:

$$\underbrace{0\ldots0}_{a}1\underbrace{0\ldots0}_{b_1}1\underbrace{0\ldots0}_{b_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{b_{k-1}}1\underbrace{0\ldots0}_{c}. \qquad (2)$$

Каждое слово вида (2) однозначно кодирует выбор k чисел. Нам нужно выяснить, сколько существует слов, удовлетворяющих следующим условиям: $b_1 \geqslant p-1$, $b_2 \geqslant p-1$, …, $b_{k-1} \geqslant p-1$ (это значит, что разность выбранных чисел не меньше, чем p) и $a+b_1+b_2+\ldots+b_{k-1}+c=n-k$ (это значит, что выбрано ровно k чисел).

Удалим из каждой внутренней серии нулей, ограниченной слева и справа единицами, по $(p-1)$ нулей (т. е. уменьшим каждое b_i на $p-1$). Мы получим «слово» из k единиц и $N=n-k-(k-1)(p-1)$ нулей, причем исходное «слово» (2) однозначно восстанавливается по этому новому «слову». Число таких новых «слов» равно $\binom{N+k}{k}$ — чтобы определить «слово», достаточно выбрать k мест, на которых стоят единицы. И, поскольку число новых «слов» есть искомое число «слов» вида (2), формула (1) доказана.

Другой читатель (и автор) «Кванта» *В. С. Шевелев* из Ростова-на-Дону обнаружил формулу (1) в опубликованной в 1986 году работе китайского математика Джиньзонга Мао. В этой статье приведена также формула для числа способов выбора k из n элементов, расположенных по окружности так, чтобы, между любыми двумя выбранными располагалось не менее, чем $(p-1)$ элементов. Это число равно

$$\frac{n}{k}\binom{n-pk+k-1}{k-1}. \qquad (3)$$

В. С. Шевелев обобщил формулы (1) и (3). Обозначим через $C_n^k(r, m)$ число сочетаний из n чисел $1, 2, \ldots, n$ по k, в которых имеется r нарушений естественного порядка следования элементов (разрывов), причем каждый разрыв имеет длину не меньше, чем m. Например, если $r=k-1$, $m=p-1$, то речь идет о сочетаниях, в которых разность любых двух элементов не меньше, чем p. Аналогичный смысл имеет обозначение $D_n^k(r, m)$ — только числа располагаются не линейно, а по кругу. Вот формулы, полученные В. С. Шевелевым:

$$C_n^k(r, m)=\binom{k-1}{r}\binom{n-k-(m-1)r+1}{r+1};$$

$$1 \leqslant k \leqslant n;\ 0 \leqslant r \leqslant k-1,$$

$$D_n^k(r, m)=\frac{n}{r}\binom{k-1}{r-1}\binom{n-k-(m-1)r-1}{r-1};$$

$$1 \leqslant k \leqslant n-1,\ 1 \leqslant r \leqslant k.$$

Надеемся, что вы сможете доказать эти формулы самостоятельно.

Числа C и D выражаются друг через друга:

$$(n-k-r(m-1))D_n^k(r, m)=nC_{n-m}^k(r-1, m)$$

и удовлетворяют рекуррентным соотношениям, которые задаются следующим образом. Пусть

$$P_n(x)=\Sigma_k C_n^k(k-1, m)x^k,$$
$$Q_n(x)=\Sigma_k D_n^k(k, m)x^{k-1},$$
$$n=1, 2, 3, \ldots$$

Тогда

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+xP_{n-m-1}(x),\ n \geqslant m+2$$

с начальными условиями $P_i(x)=1+ix$, $i=1, 2, \ldots, m+1$;

$$Q_n(x)=Q_{n-1}(x)+xQ_{n-m-1}(x)+1,\ n \geqslant m$$

с начальными условиями $Q_i(x)=0$ при $i=1, 2, \ldots, m$, $Q_{m+1}(x)=m+1$.

Интересное свойство многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ выражается следующими формулами:

$$P_{n-1}(-1)=\begin{cases}-1, & \text{если } n=6t-2 \text{ или } 6t-3,\\ 0, & \text{если } n=6t-1 \text{ или } 6t-4,\\ 1, & \text{если } n=6t \text{ или } 6t-5,\end{cases}$$

$$Q_n(-1)=\begin{cases}-1, & \text{если } n=6t,\\ 0, & \text{если } n=6t-1 \text{ или } 6t-5,\\ 2, & \text{если } n=6t-2 \text{ или } 6t-4,\\ 3, & \text{если } n=6t-3.\end{cases}$$

Еще одно наблюдение В. С. Шевелева состоит в том, что при $n \geqslant m^2+m$ все числа

$$D_n^k(k, m),\ k=1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{m+1}\right]$$

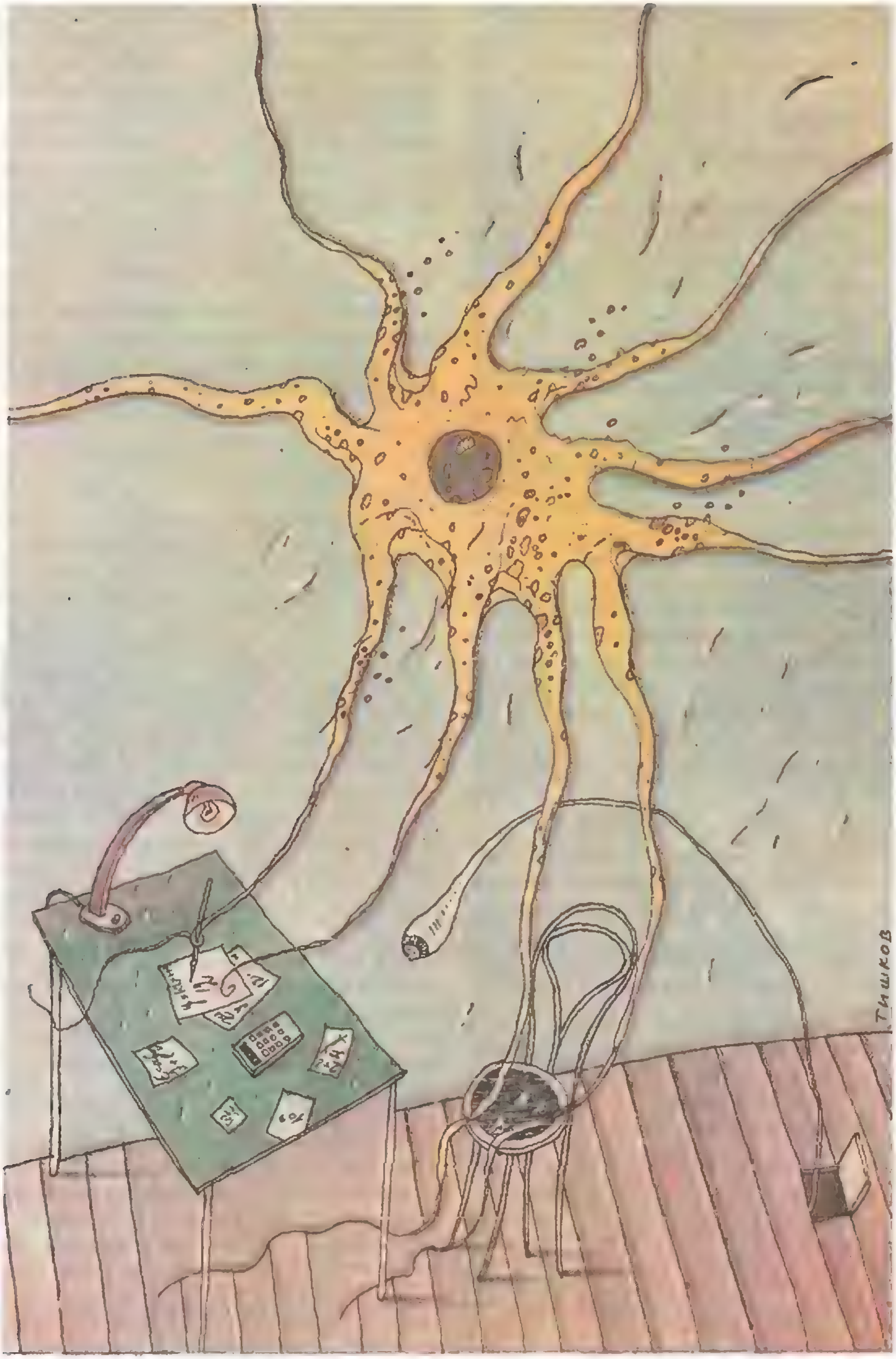
делятся на n тогда и только тогда, когда n — простое число.

В заключение сформулируем гипотезу, к которой привело В. С. Шевелева изучение чисел $C_n^k(r, m)$ и $D_n^k(r, m)$. Рассмотрим семейство многочленов $R_n(x)$, заданных соотношением

$$R_n(x)=R_{n-1}(x)+x(R_{n-2}(x)+R_{n-3}(x))+2$$

с начальными условиями $R_1(x)=0$, $R_2(x)=2$, $R_3(x)=6$. Все коэффициенты многочлена $R_n(x)$ делятся на n тогда и только тогда, когда n — простое число.

Если Вам удастся придумать простые и красивые доказательства приведенных результатов или продвинуться в доказательстве гипотезы, обязательно пришлите их в «Квант».


Тишков

От редакции. *Как уже говорилось во введении к статье А. Тоома в этом номере журнала, в 1990 году исполняется 25 лет Всесоюзной заочной математической школе. У ВЗМШ есть биологическое отделение*), которое тоже отмечает юбилей — пятнадцатилетний. Мы поздравляем биологов ВЗМШ и представляем нашим читателям статью двух авторов, стоявших у истоков ВЗМШ и ее биологического отделения и продолжающих активную работу в заочной школе и сейчас.*

МАТЕМАТИКА В ЖИВЫХ ОРГАНИЗМАХ

Кандидат биологических наук
М. БЕРКИНБЛИТ,
кандидат педагогических наук
Е. ГЛАГОЛЕВА

Живая природа сделала множество «изобретений», которые люди поняли и смогли повторить лишь при соответствующем уровне развития науки и техники. Например, принцип эхолокации эффективно используют и дельфины, и летучие мыши, а в технике он появился только в XX веке; поиск добычи по инфракрасному излучению используют многие виды змей, в то время как очки для ночного видения созданы лишь недавно и т. д. До последнего времени бытовало убеждение, что природа не изобрела колеса, что здесь техника пошла своим оригинальным путем. Но оказалось, что жгутики бактерий вращаются в специальных «подшипниках» и, значит, колесо тоже «изобретено» природой еще на самых ранних этапах эволюции. Существует специальная наука — бионика, которая изучает «патенты природы». Оказывается, что их можно иногда использовать и в «человеческой» технике.

Менее известно, что в живых организмах происходят явления, которые позволяют считать, что природе принадлежит «приоритет» и в создании своеобразных ЭВМ — устройств, производящих операции, весьма сходные с математическими операциями, которые мы склонны считать достижением человеческой науки*). Похоже, что здесь повторяется история с изобретением колеса.

О некоторых таких операциях мы и расскажем в этой статье: о том как «считают» нервные клетки, как «логарифмирует» глаз (и зачем ему это понадобилось), как оперирует с векторами и тригонометрическими функциями мозг кошки и обезьяны (и наш с вами тоже). Может быть, кто-нибудь решит, что и изучать эти вещи не надо, раз это дано от природы. А, может быть, некоторые — мы надеемся, что таких будет больше,— захотят узнать о математической и биологической стороне дела.

Как считают нейроны

Первое знакомство с математикой — это счет: «Раз, два, три, четыре, пять, вышел зайчик погулять». И самым простым кажется и считается натуральное число. Уже отрицательные числа очень медленно входили в математику. Появившись в раннем средневековье у математиков Индии, они лишь в XIII—XIV веках проникают в европейскую науку, встречая там поначалу весьма сдержанное отношение. Их называют «ложными», «абсурдными» числами. Но постепенно отрицательные числа доказали свое право на существование и стали привычными не только для специалистов — то, что было «на переднем крае науки» в средние века, сегодня спокойно воспринимают пятиклассники.

---

*) Конкурсные задачи для поступления на биологическое отделение публикуются в журнале «Наука и жизнь» № 1 за 1990 год.

*) Это действительно ЭВМ, так как действия этих устройств основаны на электрических явлениях в организме.

А вот в живых организмах, оказывается «все наоборот»: нервной клетке (нейрону) естественно и просто осуществлять операции с положительными и отрицательными действительными «числами», а для того чтобы «считать» даже до двух, требуется система из нескольких нейронов — примитивный «мозг».

Как же работает нейрон? Как всякая клетка, нейрон отделен от наружной межклеточной среды особой оболочкой — мембраной. Между внутренним содержимым клетки и наружной средой существует разность потенциалов. Если клетка находится в покое, разность потенциалов на ее мембране не меняется. Эту разность потенциалов в покое естественно принять за нулевой уровень (подобно тому, как приняли за нулевую температуру таяния льда).

На нейрон могут действовать другие нервные клетки — возбуждающие и тормозные. Сигналы, полученные от этих клеток, вызывают изменения разности потенциалов на мембране в двух противоположных направлениях*). Когда разные сигналы приходят к нейрону одновременно, они складываются, причем, естественно, с учетом знака, т. е. нейрон суммирует приходящие к нему положительные и отрицательные сигналы; эта сумма может быть положительной или отрицательной.

Интересная особенность работы нейрона состоит в том, что в отличие от технических сумматоров — от древнего абака до ЭВМ — полученную сумму он «помнит» недолго: если внешние воздействия прекратились, то накопленная сумма начинает убывать по абсолютной величине, чтобы нейрон возвратился в состояние покоя (потенциал на мембране стремится к значению, которое мы приняли за нуль).

Такая вроде бы «ненадежность» нейрона связана с тем, что он предназначен не для хранения, а для передачи и преобразования информации: полученный сигнал нейрон передает другим клеткам нервной сети (клеткам-«мишеням» или «адресатам»). По способу передачи сигнала существуют два разных типа нейронов с разными принципами работы: «аналоговые» и «пороговые» нейроны.

Нейрон первого типа действует на клетки-мишени с силой, пропорциональной накопленной сумме,— но только в том случае, когда эта сумма положительна. Когда же сумма отрицательна, то она дальше не передается — нейрон заторможен. Правило преобразования сигналов аналоговыми нейронами описывается формулой $y=k(x+|x|)/2$, где x — накопленный потенциал, y — величина переданного сигнала, а k — коэффициент пропорциональности.

Нейроны второго типа работают иначе. Такой нейрон «молчит», пока сумма воздействий не достигнет некоторой определенной положительной величины — «порога». Тогда нейрон возбуждается и посылает по своему выходному отростку — аксону — электрический импульс (всегда одной и той же величины), который и действует на клетки-мишени. После возбуждения нейрон некоторое время «отдыхает» — молчит, независимо от того, действуют на него другие клетки или нет, а затем, если к концу отдыха накопленная сумма выше порога, посылает новый импульс. В результате в зависимости от величины входного сигнала, его длительности и в зависимости от характеристик нейрона на выходе получается сигнал в виде серии импульсов постоянной величины, но разной частоты. Таким образом, пороговые нейроны используют совершенно нетривиальный принцип кодирования информации частотой сигнала.

Однако, как и непрерывный выходной сигнал нейронов аналогового типа, изменение частоты несет информацию только о величине входного сигнала, меняющейся непрерывно. В то же время известно, что животные умеют считать (например, выдавать реакцию только на каждый третий стимул). Естественно предположить, что в нервной системе имеются устройства, которые по-разному реагируют, например, на двукратное воздействие и на однократное. То, что известно о принципах работы нейронов, позволяет утверждать: одиночной нервной клетке такая «простая» с человеческой точки зрения операция, как счет, не под силу. Недостаток места не позволяет нам описать устройство из нескольких нейронов, способное выдавать ответ, например, на каждый второй стимул.

---

*) Как возникают эти сдвиги потенциала, вы можете прочитать в книге «Электричество в живых организмах» («Библиотечка «Квант», вып. 69).

Глаза и логарифмы

Зрительные рецепторы, так же, как и другие — слуховые, температурные и т. д., получают сигналы из внешнего мира; они должны передать зрительную информацию в мозг точно и своевременно. Передача сигналов от глаза к мозгу осуществляется нейронами «порогового» типа—аналоговый способ оказывается неприменимым при передаче сигналов на достаточно большие расстояния. А у пороговых нейронов, как уже говорилось, все импульсы совершенно одинаковы, и сведения о величине входного сигнала эти нейроны передают меняя частоту импульсации.

Тут возникает вот какая проблема. Освещенность в сумерках, когда предметы еле видны, отличается от освещенности при ярком солнечном свете примерно в миллиард (т. е. в 10^9) раз. Максимальная же частота, с которой может работать нейрон — 1000 импульсов в секунду. Легко сообразить, что нельзя передавать информацию, меняя частоту работы нейрона пропорционально освещенности: если при ярком свете частота импульсов будет максимальной (1000 имп/с), то при уменьшении освещенности в миллион раз сигнал будет поступать всего один раз в 15 минут. Но за это время он совершенно потеряет свою актуальность!

Но может быть, разумно такое устройство зрительной системы, когда разные ее элементы, разные нейроны работают каждый в своем диапазоне освещенности: одни в сумерки, другие в пасмурный день, третьи на ярком солнце. Простой подсчет показывает, что если принять за нижнюю границу частоты работы нейрона, необходимой для достаточно своевременной передачи информации, 1 имп/с, то для охвата диапазона изменения освещенности в миллиард раз потребуется миллион нейронов — и это без всякого «запаса» прочности, без дублирования их работы! Но главное вот что: в каждый момент будет работать только одна клетка из миллиона, а остальные 999 999 будут «даром есть хлеб»: ведь в отличие от технических, живые «механизмы» потребляют энергию (свой «бензин») не только во время работы. А экономия энергии в живой природе — одно из главных условий выживания.

Итак, линейная зависимость между входными и выходными сигналами в случае глаза оказывается нецелесообразной. И действительно, в природе в этом случае используется другая функция, по школьным меркам довольно сложная.

Экспериментально это было установлено в 1932 году английским ученым Х. Харлайном. На рисунке 1 приведены результаты его исследования. Он регистрировал нервные им-

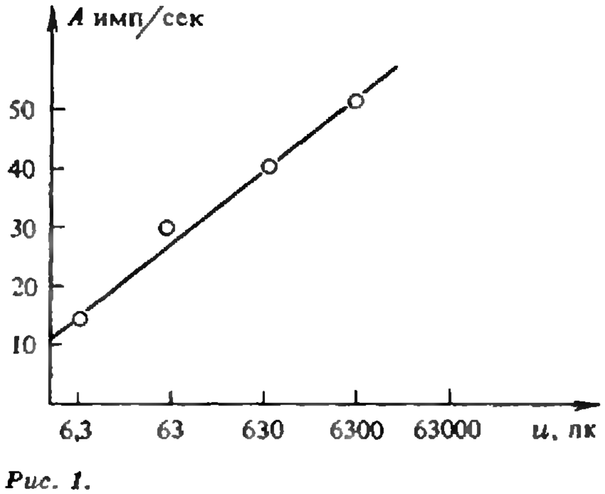


Рис. 1.

пульсы, идущие по одиночному нервному волокну от глаза к мозгу, у мечехвоста (морского членистоногого, похожего на вымерших трилобитов)*). На графике показана зависимость частоты импульсации от яркости света.

«Но позвольте! — скажете вы.— На графике прямая линия — значит, это линейная функция.» Не торопитесь, вглядитесь в шкалу на горизонтальной оси, она ведь неравномерна, нелинейна: при сдвиге на одно деление аргумент (яркость) меняется не на одну и ту же величину, а в одно и то же число раз.

При линейной зависимости равным приращениям аргумента соответствуют равные приращения функции, или, что то же самое, линейная зависимость переводит арифметическую прогрессию значений аргумента в арифметическую же прогрессию значений функции. Когда мы имеем дело с показательной функцией $y=a^x$, то равным приращениям аргумента соответствует равномерный относительный прирост функции. Например, при постоянных условиях обитания и неограниченных ресурсах так растет численность какой-либо популяции: число особей за каждый год увеличивается на 10 %, т. е. в 1,1 раза. Другими словами, показательная функция «переводит» арифметическую прогрессию в геометрическую. На нашем графике ситуация обратная: частота импульсации нейрона меняется на одну и ту же величину, когда воздействие меняется в одно и то же число раз. Значит, мы имеем дело с функцией, обратной к показательной, т. е. с логарифмической; иными словами, нейроны глаза мечехвоста превращают геометрическую прогрессию раздражений в арифметическую прогрессию сигналов.

Это свойство зрительных рецепторов, выработавшееся в ходе эволюции, позволяет глазу работать эффективно и экономно, обеспечивает возможность хорошо воспринимать контраст. Пусть светлый и темный предметы различаются по способности отражать свет в десять раз. Тогда и на ярком солнце, и в сумерках светлый предмет будет отражать в десять раз больше света, чем темный. Поэтому сравнительная яркость этих предметов не меняется; не меняется и расстояние между соответствующими точками на оси абсцисс. А это означает, что разница частот работы рецепторов, на которые падает свет от этих двух предметов, будет оставаться неизменной при разных освещенностях. Так что «умение логарифмировать» позволяет глазу не только работать в широком диапазоне освещенностей, но и при малой освещенности различать предметы, абсолютная разность освещенностей которых очень мала.

Интересно, что описанная зависимость между внешним сигналом (раздражением) и сигналом, воспринимаемым мозгом (ощущением), первоначально была обнаружена психологами. Сделал это французский ученый П. Бугер еще в XVIII веке. В начале XIX века немецкий физиолог и психолог Э. Вебер детально изучил связь между раздражением и ощущением. Он выяснял, как нужно изменить какой-то раздражитель, чтобы человек заметил это изменение. Оказалось, отношение изменения величины раздражителя к его первоначальному значению есть величина постоянная: $\frac{\Delta I}{I}=k$, где I — мера раздражителя, ΔI — прирост раздражителя, а k — константа Вебера.

Константа Вебера зависит от того, какой рецептор раздражается. Например, при восприятии веса $k=1/30$. Это значит, что, когда человек держит груз в 100 г, он замечает его изменение при увеличении веса на 3,4 г, а для груза в 200 г требуется прибавка в 6,7 г. Для высоты звука константа Вебера равна 0,003, для громкости звука — 0,09 и т. д.

Исходя из экспериментов Вебера, другой немецкий физиолог и психолог

---

*) Кстати, у мечехвоста нет зрачка, и, значит, нет диафрагмы. Впрочем, даже учет эффекта диафрагмы не спасает положения, изменяя освещенность всего на 1—2 порядка.

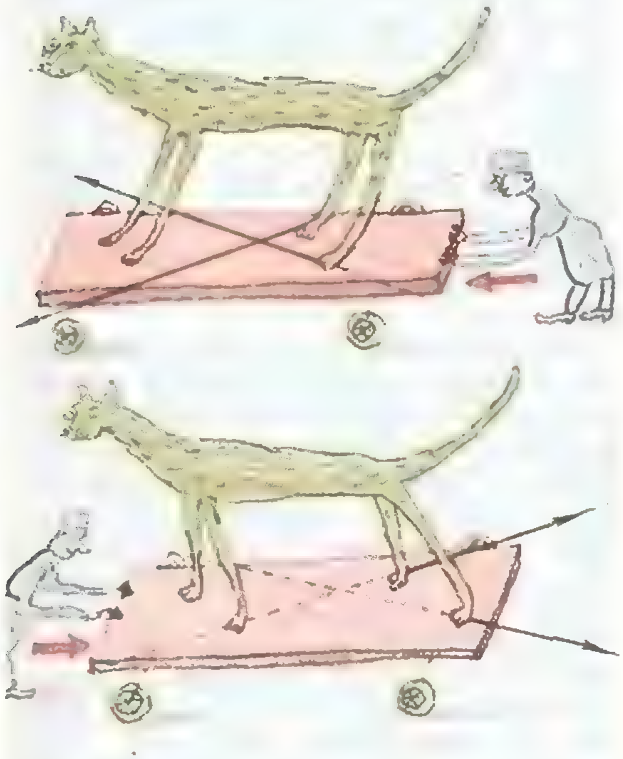
Г. Фехнер сформулировал знаменитый *закон Вебера — Фехнера:*

Ощущения растут в арифметической прогрессии, когда раздражение растет в геометрической прогрессии.

Этот закон был опубликован в книге Фехнера «Элементы психофизики» в 1859 году. Там же было приведено и математическое выражение закона:

$$E = a\log I + b,$$

где E — мера ощущения, a и b — константы, I — мера раздражения.



Зачем кошке векторы?

Слово «вектор», можно сказать, совсем «младенец» — по-видимому, оно появилось впервые в работе английского математика У. Гамильтона в 1845 году. Но соответствующее понятие использовалось в физике еще за несколько столетий до этого в связи с рассмотрением закона сложения сил («правила параллелограмма»). Про векторы же в организме животных мы узнали только в самые последние годы.

Началось с кошек. В 1988 году канадский ученый Дж. Макферсон выполнила интересную работу. Она ставила кошку на специальную платформу, толкала эту платформу в каком-нибудь направлении и смотрела, каким образом кошка сохраняет равновесие. Допустим, она толкнула платформу вперед. Ноги кошки вместе с платформой стали уходить вперед, а тело остается на месте. Тогда кошка, чтобы возвратить центр тяжести в правильное положение над точками опоры активирует мышцы лап и, отталкиваясь от платформы, двигает тело вперед. Если платформу толкнуть вправо, центр тяжести отклонится влево по отношению к опоре и лапы должны создать силу, направленную вправо, и т. д.

Как же происходит эта работа лап при сохранении равновесия?

Самое естественное — это предположить, что каждая из двух задних лап*) при толчке вперед создает силу, направленную вперед; сумма этих двух сил и восстанавливает правильное положение тела (рис. 2, *а*). Если платформу токнули вправо, каждая лапа создает силу, направленную вправо, и т. д. Такая гипотеза согласуется с тем, что у кошки есть мощные мышцы, которые двигают лапу вперед или назад — они используются для ходьбы и прыжков, а также мышцы, отводящие лапу наружу или по направлению к оси тела. Однако, когда Макферсон стала выяснять, что происходит на самом деле, оказалось, что картина совершенно другая: при толчке платформы, независимо от направления движения, задние лапы кошки создают силы, направленные вдоль двух прямых (каждая лапа — вдоль своей), расположенных примерно под углом 45° к оси тела. Даже в простейшем случае, когда платформу толкают прямо вперед, силы, создаваемые лапами, направлены не вперед, а тоже под углом 45° к оси тела (снова см. рис. 2, *а*). И только их сумма имеет нужное направление и величину. На рисунке 2, *б* показано, как

---

*) Выяснилось, что при восстановлении положения центра тяжести у кошки передние лапы используются как пассивные подпорки. Активно работают именно задние лапы.

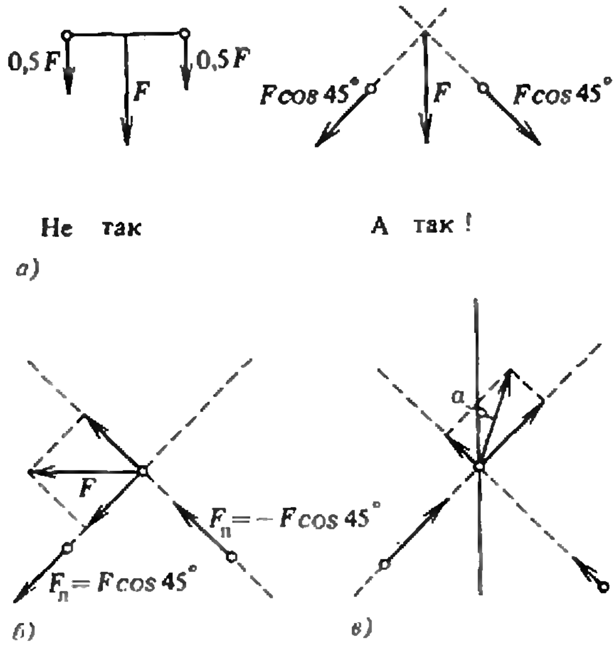


Рис. 2.

получается сила, направленная перпендикулярно телу, а на рисунке 2, *в* — сила, направленная под углом 30° к оси тела.

Значит, нервная система кошки решает следующую задачу. При толчке платформы по информации, полученной от разных рецепторов, определяется, какой вектор (силу) нужно получить, затем этот вектор раскладывается по фиксированным осям координат. При таком способе получается, что каждой из двух задних лап нужно передать всего одно число — координату вектора силы (положительную или отрицательную), которую должна создать эта лапа вдоль своей фиксированной оси.

Получается очень экономная схема. Но жизнь так полна неожиданностей! Разбираясь в том, какими мышцами создается это фиксированное направление (казалось бы, чего проще: использовать для единичного вектора одного направления мышцы, двигающие ногу вперед и внутрь, а для создания другого — назад и наружу, а дальше менять пропорционально силу, развиваемую этими мышцами,— «умножать на число», и все в порядке), Макферсон получила еще один неожиданный результат. Оказалось, что в создании «единичного» вектора могут участвовать разные мышцы, их сочетание меняется в зависимости от направления толчка. В чем смысл такого, с нашей точки зрения, усложненного решения, еще выяснять и выяснять. Однако здесь проявляется общий принцип живого: избегать жестких схем, иметь всегда избыток «степеней свободы», словом, плюрализм.

Векторы в мозгу обезьяны и человека

Трудности в выяснении вопроса о том, как на самом деле происходит решение той или иной задачи, связаны с тем, что заглянуть в «управляющий центр» — в мозг — очень трудно. В этом смысле мозг пока что во многом «черный ящик»: можно видеть, какая задача ему предложена, можно видеть, какой он выдает результат,— а вот что происходит внутри, об этом сведений еще очень и очень мало.

Тем более интересна и важна работа, которая позволила почти непосредственно увидеть, как идет работа мозговых нейронов при решении некоторых задач. Эту работу совсем недавно выполнил американский ученый А. Георгопулос. Он экспериментировал с дрессированными обезьянами. Лапа обезьяны помещалась в некоторой точке стола, а в различных точках стола помещались электрические лампочки. Обезьяну научили при вспышке какой-нибудь лампочки двигать лапу по направлению к этой лампочке. В это время экспериментатор регистрировал с помощью вживленных электродов активность (частоту импульсации) нервных клеток коры больших полушарий в той ее зоне, которая управляет движениями этой лапы.

Оказалось, что активность большинства клеток этой зоны мозга зависит от направления движения лапы; и эта зависимость достаточно четкая: для каждой из клеток существует такое направление движения, при котором активность максимальна; при других направлениях активность уменьшается примерно как косинус угла между данным направлением и направлением максимальной активности*). Для тех направлений, для которых косинус отрицателен, клетка вообще перестает импульсировать.

Получается, что с каждой клеткой коры связан определенный вектор максимальной активности $A_{\max}$ (рис. 3). Когда нужно двигать лапу по другому направлению, т. е. задан некоторый единичный вектор направления e, клетка находит проекцию $A_{\max}$ на это направление, т. е. «вычисляет» скалярное произведение $A_{\max}\cdot e$. Выяснив это, Георгопулос поставил обратную задачу: нельзя ли, регистрируя работу нервных клеток, определить направление движения лапы. Математически эта задача может быть сформулирована как вопрос о существовании функции, обратной к заданной. Ясно, что по активности одной клетки направление движения определить нельзя: во-первых, косинус — функция четная, и в том промежутке, который нас интересует, не имеет обратной. Действительно, если, например, направление максимальной активности — это прямо вперед, а активность нейрона составляет половину максимальной, то известно, что лапа движется под углом 60° к преимущественному направлению, но вправо или влево от него — определить невозможно. Во-вторых, у одной клетки слишком велика «мертвая зона» — зона, когда она вообще молчит. Но если регистрировать несколько клеток, то можно успешно определить направление, в котором движется лапа (и даже предсказать, в каком направлении она будет двигаться, так как клетки начинают работать за десятую долю секунды до того, как лапа начинает двигаться). Представляем читателю самостоятельно решить такую задачу: какое минимальное число клеток требуется для того, чтобы уверенно определять направление движения во всех случаях? (Конечно, мы даем эту задачу, так сказать, в математической формулировке, которая, как всегда, упрощает ситуацию — как и мы ее упрощаем в нашем рассказе.)

То, что по активности нейронов можно не только установить, куда движется лапа, но и предсказать, куда обезьяна еще только собирается двигать ее, т. е. как бы подсмотреть мысль о движении, позволило Георгопулосу сделать еще одну, очень красивую работу.

Еще в 1971 году американские психологи Р. Шепард и Дж. Метцлер обнаружили явление, которое они назвали «мысленным вращением». В экспериментах испытуемым показывали две фигуры и спрашивали: это разные фигуры или одна и та же, но повернутая на некоторый угол? Время ответа оказалось линейной функцией величины угла поворота одной фигуры относительно другой.

В другом варианте эксперимента попеременно показывали букву R или ее зеркальное отражение — букву Я; надо быстро определить, какая это буква. При этом букву показывали в разных положениях. И здесь время ответа было пропорционально углу поворота буквы относительно «нормального» положения.

Ученые предположили, что чело-

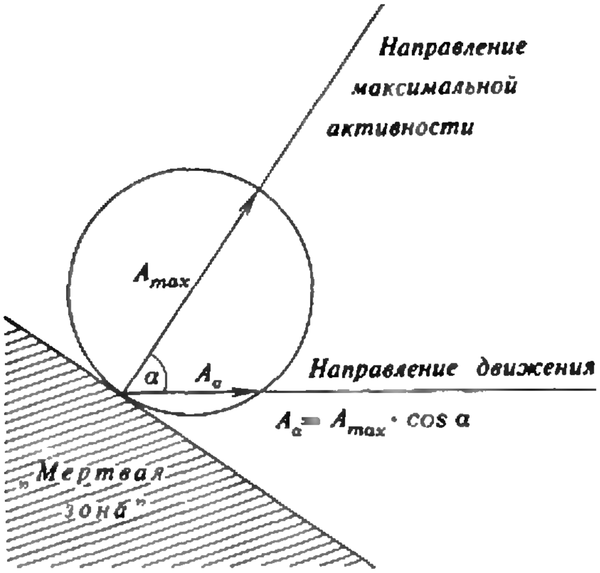

Направление максимальной активности
A_{max}
a
A_a
Направление движения
$A_a = A_{max}\cdot\cos a$
„Мертвая зона"

Рис. 3.

---

*)Пропорциональность частоты работы нервных клеток косинусу того или иного угла была известна и до работы Георгопулоса. Например, еще в 1981 году в стволе мозга были обнаружены нейроны, связанные со «скачками» глаз: их активность менялась в зависимости от направления скачка глаза по закону косинуса.

век в таком эксперименте мысленно вращает образ воспринимаемой фигуры (а по ряду психологических экспериментов, скорее, эталон фигуры, хранимый в памяти) с постоянной угловой скоростью и даже определили эту скорость. Получилось 450°/с. Однако такими экспериментами невозможно доказать гипотезу «мысленного вращения», так как остается неизвестным, что же происходит в действительности в головах испытуемых.

Георгопулос, обретя возможность «подглядывать» за работой нейронов мозга обезьяны, получил в 1989 году данные, которые делают гипотезу о мысленном вращении более обоснованной.

Теперь обезьяну научили тянуть лапу не к той лампочке, которая горит, а к той, которая находится под углом 90° к ней. Экспериментаторы смогли узнать, что происходит в мозгу обезьяны от момента, когда зажглась лампа, до начала движения лапы. Оказалось, что после вспышки вектор направлен прямо на лампочку, затем начинает вращаться и, когда повернется на 90°, начинается движение лапы. Скорость вращения вектора оказалась равной примерно 730°/с, т. е. была того же порядка, что и в психологических опытах с человеком.

Таким образом, как показывают эти эксперименты, мозг может производить и геометрические преобразования (на самом деле, не только повороты, но, видимо, и многие другие, например преобразования подобия).

Сделаем еще один намек на математические способности мозга. Сейчас бурно развивается параллельное программирование. Но когда человек берет предмет, он одновременно управляет работой и плеча, и локтя, и пальцев, осуществляя самое настоящее параллельное программирование.

Заключение

Итак, в живых организмах идут процессы переработки, передачи информации и использование ее в целях управления. Эволюция постепенно находит удачные формы обработки информации, и эти формы имеют немалое сходство с математическими операциями. Такие ухищрения эволюции мы и назвали «математикой в живых организмах».

Дама с Собачкой

(Начало см. на с. 10)

Некоторые сведения из истории комплексных чисел

1545 год. Д. Кардано (*Италия*) публикует книгу «Великое искусство, или О правилах алгебры», где вводит мнимые величины.

1629 год. А. Жирар (*Голландия*) публикует книгу «Новые открытия в алгебре», где формулирует основную теорему алгебры.

1707 год. А. де Муавр (*Англия*) вводит правила возведения в степень и извлечения корня из комплексных чисел (формулы Муавра).

1746 год. Д Аламбер (Франция) публикует первое (не вполне строгое) доказательство основной теоремы алгебры.

1770-е годы. Л. Эйлер (Россия) вводит понятие функции комплексной переменной.

1799 год. К. Гаусс (*Германия*) публикует первое строгое доказательство основной теоремы алгебры.

1799 год. К. Вессель (*Дания*) впервые описывает геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

Литература

Курант Р., Роббинс Г. *Что такое математика.* М., Просвещение, 1968.

Маркушевич А. И. *Комплексные числа и конформные отображения.* М., 1979.

Яглом И. М. *Комплексные числа и их применение в геометрии.* М., 1963.

Книги из серии «Популярные лекции по математике» (издательство «Наука»):

Бакельман И. Я. *Инверсия* (вып. 44).

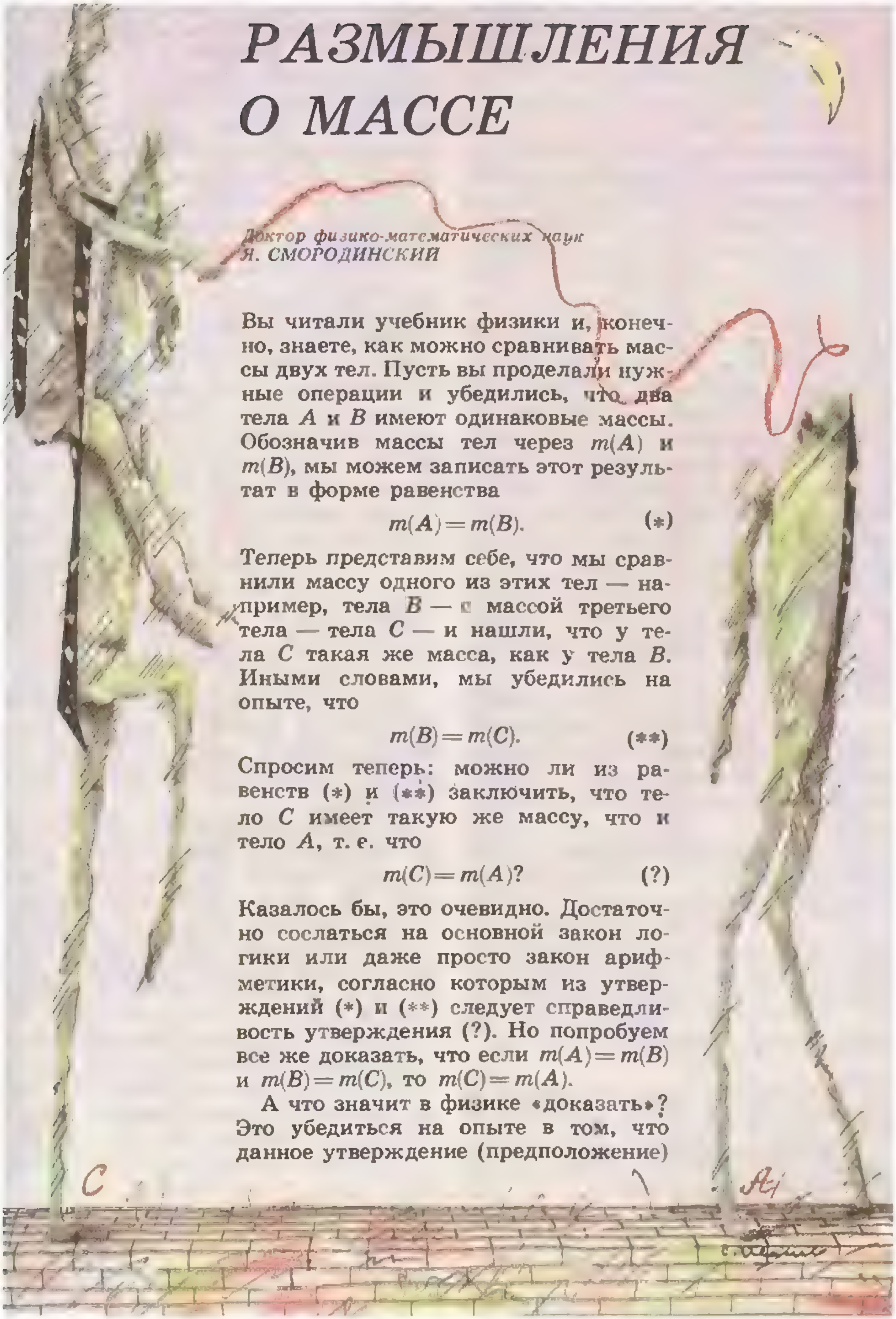
Маркушевич А. И. *Комплексные числа и конформные отображения* (вып. 13).

Шафаревич И. Р. *О решении уравнений высших степеней* (вып. 15).

Шерватов В. Г. *Гиперболические функции* (вып. 16).

РАЗМЫШЛЕНИЯ О МАССЕ

Доктор физико-математических наук
Я. СМОРОДИНСКИЙ



Вы читали учебник физики и, конечно, знаете, как можно сравнивать массы двух тел. Пусть вы проделали нужные операции и убедились, что два тела A и B имеют одинаковые массы. Обозначив массы тел через $m(A)$ и $m(B)$, мы можем записать этот результат в форме равенства

$$m(A)=m(B). \qquad (*)$$

Теперь представим себе, что мы сравнили массу одного из этих тел — например, тела B — с массой третьего тела — тела C — и нашли, что у тела C такая же масса, как у тела B. Иными словами, мы убедились на опыте, что

$$m(B)=m(C). \qquad (**)$$

Спросим теперь: можно ли из равенств (*) и (**) заключить, что тело C имеет такую же массу, что и тело A, т. е. что

$$m(C)=m(A)? \qquad (?)$$

Казалось бы, это очевидно. Достаточно сослаться на основной закон логики или даже просто закон арифметики, согласно которым из утверждений (*) и (**) следует справедливость утверждения (?). Но попробуем все же доказать, что если $m(A)=m(B)$ и $m(B)=m(C)$, то $m(C)=m(A)$.

А что значит в физике «доказать»? Это убедиться на опыте в том, что данное утверждение (предположение) не противоречит никаким известным (доказанным, проверенным опытом) законам. При этом надо соблюдать определенные «правила игры». И первое правило — нельзя пользоваться словом «очевидно».

Итак, приступим к доказательству. Произведем мысленно такой опыт (его обсуждал еще Э. Мах*)). Согнем колечко из проволоки и насадим на него три шарика A, B и C. Массы этих шариков удовлетворяют равенствам (*) и (**). Толкнем теперь шарик A, сообщив ему скорость u. Если трение отсутствует, то шарик будет двигаться по колечку, не изменяя величины скорости (по модулю), пока он не столкнется с шариком B. После столкновения шарик A остановится, а B начнет двигаться с той же скоростью u (опять же по модулю), с которой до столкновения двигался шарик A. (Если бы мы не знали заранее, что массы A и B одинаковые, то можно было бы об этом узнать, сравнив скорости A и B до и после столкновения — это вполне хороший способ, или же проверив, что шарик A остановился.**))

Двигаясь, шарик B через некоторое время столкнется с шариком C. Результат столкновения также предсказуем: B остановится, а C начнет двигаться со скоростью u (ведь $m(B) = m(C)$).

Следующим событием будет столкновение шарика C с шариком A. Мы не проверили опытом, что $m(C) = m(A)$, а потому не можем утверждать заранее, что A начнет двигаться с той же скоростью u, с которой он двигался сначала. Для такого заключения мы должны привлечь на помощь закон сохранения энергии.*) Если бы скорость шарика A после столкновения оказалась больше u, то эту бо́льшую скорость A сообщил бы при соударении шарику B и таким способом можно было бы получать энергию из ничего: после каждого столкновения с шариком C шарик A двигался бы все быстрее и быстрее!

Если бы скорость A оказалась меньше u, то шарики со временем остановились бы и их кинетическая энергия бесследно исчезла (напомним, что шарики двигаются без трения). Оба вывода ложны, а следовательно, утверждение о том, что после столкновения с C шарик A будет двигаться со скоростью u, истинно.

Теперь все стало на свои места. Чтобы выполнялся закон сохранения энергии, скорость шарика A после столкновений $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$ вернулась к своему исходному значению.

Мы видим, что для строгого доказательства почти очевидного равенства масс одной логики не хватает, необходимо привлечь на помощь физический закон — закон сохранения энергии. Без этого нельзя заключить, что $m(C) = m(A)$!

Но для практических целей строгое определение нужно не везде. В обыденной жизни нам достаточно не столь строгое, но более понятное определение.

Ньютон на первых страницах своей великой книги «Математические начала натуральной философии» объяснял, что такое масса, так: «Количество материи есть мера таковой, пропорциональная плотности и объему ее»*). Если, не задумываясь, считать, что количество материи обозначает у Ньютона массу, то такое определение представляется лишенным содержания: для того чтобы узнать плотность ϱ, надо разделить массу m на объем V, и потому формула $m = \varrho V$ есть следствие формулы $\varrho = m/V$! Надо сказать, что многие так и воспринимали сказанное Ньютоном. И это было ошибкой. Надо понять смысл того, что писал Ньютон, а не обвинять его в тривиальной нелогичности. Определяя массу до введения понятия импульса, не зная о существовании закона сохранения энергии (само понятие «энергия» появилось спустя сто с лишним лет), Ньютон оказался в трудном положении. И он нашел единственный выход, придумав свое Definitio.

---

*) Эрнст Мах (1838—1916) — крупный австрийский физик и философ-идеалист. Занимался механикой, акустикой, оптикой.

**) Эти утверждения не очевидны. Их можно оправдать ссылкой на то, что шарики A и B одинаковы. Но не будем придираться!

***) Надо признаться, что закон сохранения энергии (или импульса) мы молчаливо использовали раньше, когда утверждали, что шарики A и B поменялись ролями после столкновения: A остановился, а B «принял на себя» скорость A. Хотя это и «очевидно», но без законов сохранения доказать нельзя. (Остерегайтесь слова «очевидно»!)

*) Поскольку почти всегда это определение дается с ошибками, приведем его на том языке, на котором писал Ньютон — на доброй латыни (латыни ведь сейчас учат в гимназиях): "*Definitio I.* Quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim".

Сам Ньютон слово масса не употреблял и вкладывал в свое определение другой смысл. В 17—18 веках считалось, что все тела состоят из одинаковых очень маленьких частиц — их называли монадами. Монады все были одинаковыми, а разные тела отличались друг от друга только тем, что монады в них упакованы с разной плотностью. Как выглядят монады, какие у них свойства — узнать из опытов нельзя; но ученых в то время не очень волновали опыты, они считали, что законы природы можно открыть одними рассуждениями. Теорией монад занимались Лейбниц, Эйлер и другие ученые.

Крупным специалистом по монадам считался немецкий философ Христиан Вольф, популяризатор идей Лейбница. По учебникам Вольфа училась почти вся Европа. Ломоносов перевел один из учебников Вольфа, и это был первый учебник физики в России. Тогда о монадах все знали и, говорят, даже придворные дамы при Прусском дворе любили о них рассуждать. Поэтому для читателя 18 века определение Ньютона было исполнено смысла.

Теория монад, конечно, давно ушла из науки. В 19 веке уже говорили об атомах с разными химическими и физическими свойствами, но, как это ни удивительно, в нашем 20 веке полезно вернуться к идее Ньютона и говорить, что масса тела пропорциональна количеству нуклонов — нейтронов и протонов, в нем содержащихся,— или даже пропорциональна объему тела и «нуклонной плотности» — среднему числу нуклонов в 1 см^3.

Какие возражения может вызывать такое определение? Масса нейтрона больше, чем масса протона, примерно на 0,2 %. Можно, конечно, учесть это различие, считая нейтроны и протоны отдельно; но, с другой стороны, ошибка в десятые доли процента нас во многих случаях не беспокоит (по крайней мере, при решении школьных задач).

Более принципиальная ошибка связана с тем, что нуклоны в ядрах «легче» нуклонов в свободном состоянии. Дело в том, что энергия связанной системы частиц (ядра атома) меньше суммарной энергии этих частиц в свободном состоянии. Чтобы разделить ядро на составляющие его нуклоны, нужно затратить энергию, равную разности этих энергий (ее называют энергией связи). А поскольку между энергией и массой существует связь, выражаемая формулой Эйнштейна — $E=mc^2$, — разность энергий означает разность масс. Значит, масса атомного ядра меньше суммы масс составляющих его нуклонов. Это уменьшение массы достаточно велико и составляет почти 1 % (точнее, 0,6—0,8 %).

Мы знаем, что атомная масса водорода*) равна 1,0078 атомных единиц массы, а масса атома основного изотопа урана равна 238 а. е. м., т. е. меньше, чем сумма масс 92 протонов и 146 нейтронов, из которых состоит ядро этого изотопа. Можно сделать поправку на «энергию связи», но не стоит усложнять задачу.

Итак, определение Ньютона — отнюдь не «пустое». Правильно понятое, оно определяет массу с ошибкой меньше процента.

Но мы еще не кончили наш рассказ.

Масса, о которой мы говорим, измеряется не в килограммах и не в граммах — единицей измерения служит атомная единица массы (напомню, что а. е. м. определяется как 1/12 массы атома углерода ^{12}C). Перевести атомные единицы массы в килограммы оказалось не так легко, хотя никаких фундаментальных трудностей в этой части задачи, конечно, нет. Идея измерения самая простая — надо поделить массу (в килограммах) образца элемента на число атомов в этом образце. Трудности и состоят в том, что надо «поштучно» пересчитать атомы. Такая точность сегодня необходима и физикам, и химикам.

---

*)Это масса нейтрального атома водорода (протон+электрон). Пользуясь атомной массой, не надо делать поправку на массу электрона.

Мы не будем подробно рассказывать о хитроумных опытах, в которых производились подсчеты. Скажем только, что для этого изготовили очень хороший кристалл, измерили очень точно его размеры, потом с помощью рентгеновского анализа определили расстояние между атомами... Каждая операция потребовала большой изобретательности — ведь речь шла об очень большой точности.

В проблеме массы это была самая трудная часть.

Еще одно замечание в заключение. В популярных книжках, да и в учебниках бытует понятие, от которого давно пора отказаться. От него пользы нет никакой, и живет оно только по старой привычке. Понятие это — масса движущегося тела, которая растет со скоростью. В действительности массу движущегося тела никто не измеряет, измеряют его энергию (например, энергию протона в ускорителе). Массу же вычисляют по формуле $m = E/c^2$. Физики давно такую массу не используют и ведут все вычисления только с энергией. Массой же теперь называют только «массу покоя» — массу покоящейся частицы. И в таблицах элементарных частиц собраны значения именно масс покоя (хотя слово «покоя» и опущено).

Постарайтесь забыть, что «масса растет со скоростью», — эта фраза сейчас имеет мало смысла. Со скоростью увеличивается энергия.

Нам пишут

Считаем в двоичной системе

Пусть перед нами расположены несколько предметов и нам нужно сосчитать их. Как обычно, мы делаем это *последовательным пересчетом:* берем первый предмет и говорим «один», берем следующий — «два», следующий — «три» и так далее до последнего. Поскольку считаем мы в *десятичной системе*, то и число предметов N получим в десятичной системе

$$N = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0.$$

Здесь каждая цифра a_i — это 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9 и

$$N = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

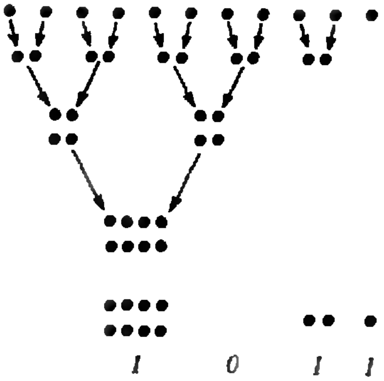
А теперь представим себе, что при счете мы *пользуемся* исключительно *двоичной системой* (в наше время, время всеобщей компьютеризации, это, наверное, не так уж и трудно себе представить). В этой системе число N представляется в виде

$$N = b_l b_{l-1} \ldots b_1 b_0,$$

где каждая цифра b_i либо 0, *либо* 1 *и*

$$N = b_l \cdot 2^l + b_{l-1} \cdot 2^{l-1} + \ldots + b_1 \cdot 2 + b_0.$$

Для подсчета числа предметов в двоичной системе мы можем использовать тот же самый последовательный пересчет: последовательно по одному перебирать предметы *и последовательно* называть числа в двоичной системе.



Однако в двоичной системе существует принципиально иной метод счета, с которым я и хочу вас познакомить. Обратимся к рисунку: сгруппируем все предметы по парам. При этом либо ничего не останется, *либо* останется один непарный предмет. Скажем так: останется либо 0 предметов, либо 1 предмет. На втором этапе каждые две пары объединим в четверки. При этом опять останется либо 0 пар, либо 1 пара. Дальше объединим попарно четверки, затем восьмерки и так далее. После последнего объединения мы получаем разбиение всех предметов на группы, и число элементов в каждой группе есть степень двойки. Если в разбиении присутствует группа с 2^i элементами, то положим $b_i = 1$, если такая группа отсутствует — $b_i = 0$. И тогда

$$N = b_l b_{l-1} \ldots b_1 b_0$$

— запись числа предметов в двоичной системе.

Какой же из этих двух способов предпочтительнее? Предлагаю вам решить этот вопрос самостоятельно.

А. Панов

Задачник „Кванта"

Задачи

M1206—M1210, Ф1213—Ф1217

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 апреля 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1206» или «Ф1213». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1206. В круге проведены два перпендикулярные друг другу диаметра AE и BF. На дуге EF взята точка C. Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE соответственно в точках P и Q (рис. 1). Докажите, что площадь четырехугольника $APQB$ равна квадрату радиуса круга.

А. Костенков

M1207. Докажите, что для любых x, y и любого натурального m выполняется неравенство

$$(x^2+y^2)^m \geqslant 2^m x^m y^m + (x^m - y^m)^2.$$

Ш. Рагимов

M1208. Последовательность чисел h_n задана условиями:

$$h_1 = \frac{1}{2} \text{ и } h_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$$

для каждого n. Докажите, что сумма любого количества чисел h_n не превосходит 1,03.

Д. Акулич

M1209*. Числовой треугольник, первая строка которого состоит из N единиц, вторая — из $N-1$ целых чисел, образуется по следующему правилу: для любых четырех чисел a, b, c, d, стоящих в вершинах ромбика (a и c — соседние числа в строке, рис. 2), выполняется равенство $ac = bd + 1$. Докажите, что

а) если все числа в треугольнике отличны от 0, то все они целые;

б) если все числа в треугольнике натуральные, то в нем встречается не менее $N/4$ различных чисел.

Д. Фомин

M1210*. Имеется кучка из M спичек и лист бумаги, на котором написано число M. Двое играют в такую игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок берет из кучки или возвращает в кучку от 1 до k спичек и записывает на листе, сколько спичек стало в кучке. (Вначале все имеющиеся спички лежат в кучке — у игроков спичек нет.) Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход или вынужден записать число, уже имевшееся на листе ранее. Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если а) $k=2$; б) $k=5$?

К. Кохась

Ф1213. Однородная нерастяжимая веревка подвешена за концы в точках A и B, находящихся на разной высоте (рис. 3). Натяжение веревки в точке A равно T_A. Найти натяжение веревки в точке B, если она находится на h выше точки A. Масса веревки m, длина l.

Е. Татаринова

Ф1214. Вдогонку снаряду, выпущенному горизонтально с горы высотой $h = 1$ км со скоростью $v_0 = 500$ м/с, через время $t_0 = 1$ с выпущен второй снаряд. Какой минимальной начальной скоростью он должен обладать

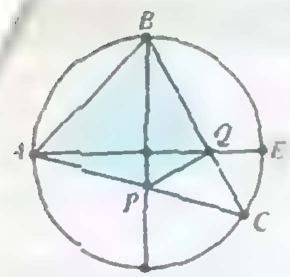


Рис. 1.

Рис. 2.

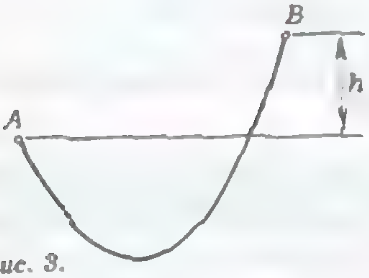


Рис. 3.

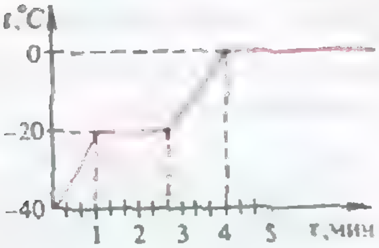


Рис. 4.

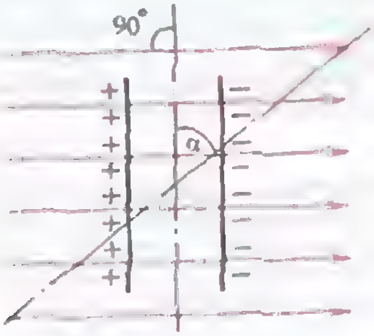


Рис. 5.

и под каким углом вылететь, чтобы догнать первый снаряд?

В. Никифоров

Ф1215. В теплоизолированный сосуд с нагревателем внутри помещены 1 кг льда и 1 кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой. Сначала температура в сосуде была равна —40 °С, затем включили нагреватель, потребляющий *постоянную* мощность. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке 4. Удельная теплоемкость льда $c_л = 2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), твердого вещества — $c = 10^3$ Дж/(кг · К). Найти удельную теплоту плавления вещества и его удельную теплоемкость в расплавленном состоянии.

А. Буздин

Ф1216. Плоский заряженный конденсатор внесли в область однородного электрического поля, напряженность которого направлена так, как показано на рисунке 5. Для этого необходимо было совершить работу A_1. Затем конденсатор повернули на угол α, совершив при этом работу A_2. Полагая заданным значение угла α, определить отношение работ A_2/A_1. Считать, что все собственное поле конденсатора однородно и сосредоточено внутри его объема.

В. Можаев

Ф1217*. В последнее время широкое распространение получила новая конструкция контактных линз. (Контактные линзы используются для коррекции зрения вместо очков. Они представляют собой очень тонкие пластинки, надеваемые непосредственно на глазное яблоко.) Фокусировка света такой линзой основана на его волновой природе. Для этого вокруг центральной круговой прозрачной области линзы наносятся концентрические кольца с чередующейся прозрачностью (непрозрачное — прозрачное — и т. д.).

а) Определить диаметр центральной прозрачной области.

б) Определить диаметры двух ближайших к центру линзы прозрачных колец при условии, что фокусное расстояние линзы равно $F = 25$ см.

в) Зная, что контактная линза дает четкое изображение в фокальной плоскости не только удаленных объектов, но также и точечного объекта, расположенного на *конечном расстоянии от линзы*, найти это расстояние.

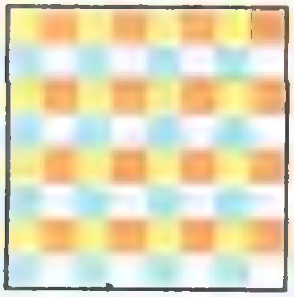
Считать для определенности, что длина световой волны равна $\lambda = 500$ нм, что линза плоская, очень тонкая, а кольца очень узкие.

Из задач Шведской национальной олимпиады школьников

Решения задач

M1181 — M1185, Ф1193 — Ф1197

M1181. *На шахматной доске расставлено 8 фигур так, что в каждом горизонтальном и в каждом вертикальном ряду клеток стоит по одной фигуре. Докажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное число фигур.*



Раскрасим поля доски, как показано на рисунке. Поскольку на каждой горизонтали стоит ровно одна фигура, на красных и желтых полях стоят 4 фигуры. Аналогично, на синих и желтых полях тоже стоят 4 фигуры. Поэтому фигур на красных полях столько же, сколько на синих, а общее их число четно. Но красные и синие поля — это и есть черные поля исходной шахматной раскраски.

В. Произволов

M1182. *В некоторой роще было $n \geqslant 3$ скворечников, причем все расстояния между скворечниками различны. В каждом из них жило по скворцу. В какой-то момент некоторые из них покинули свои скворечники и перелетели в другие, так что снова в каждом скворечнике оказалось по скворцу. При этом, если расстояние между какой-то парой скворцов было меньше расстояния между другой парой (один скворец может засчитываться в разных парах), то после перелета расстояние между первой парой скворцов оказалось больше расстояния между второй парой. При каких n это возможно?*

Ответ: при $n=3$.

Докажем, что любой скворец либо остается на месте, либо меняется местами с другим.

Пусть скворец из скворечника A_1 перелетел в A_2, из A_2 в A_3 и т. д. Число скворечников конечно, поэтому в последовательности $A_1, A_2, A_3, \ldots$ начнутся повторения, причем первым повторится A_1 (если вновь появилось, скажем, A_3, то непосредственно перед ним должно стоять A_2, а перед A_2 — A_1, т. е. A_1 вторично встречается раньше). Допустим, что $A_i \neq A_1$ при $1 < i \leqslant k$, $A_{k+1} = A_1$ и что наименьшее из расстояний $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_kA_1$ — это, например, A_1A_2. Из того, что A_1A_2 меньше всех остальных расстояний A_iA_{i+1}, по условию следует, что A_2A_3 — больше всех остальных расстояний A_iA_{i+1}, а отсюда — что A_3A_4 меньше всех остальных расстояний A_iA_{i+1}, т. е. $A_3A_4 = A_1A_2$. Но все расстояния A_iA_j различны, следовательно, $A_3 = A_1$. Другими словами, если уж скворец покинул скворечник A_1, то он меняется местами со скворцом из A_2.

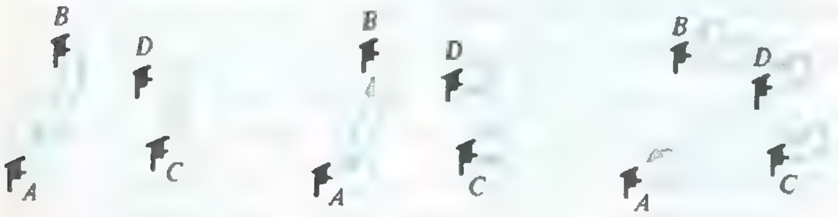


Рис. 1.

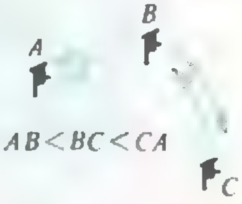


Рис. 2.

Если $n \geqslant 4$, то, очевидно, можно выбрать 4 скворечника, перелеты между которыми устроены одним из способов, показанных на рисунке 1. В любом случае расстояния между скворцами A и B, C и D после перелета не меняются, в то время как по условию меньшее расстояние должно стать большим.

Для случая $n=3$ пример приведен на рисунке 2.

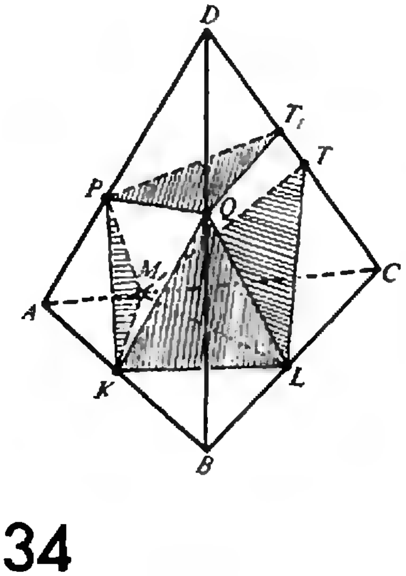
А. Берзиньш, В. Дубровский

M1183. *Каждый из семи мальчиков в воскресенье 3 раза подходил к киоску мороженого. Известно, что каждые два из них встречались около киоска. Докажите, что в некоторый момент там встречались одновременно трое мальчиков.*

Пусть утверждение задачи неверно и пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — непересекающиеся промежутки времени, в течение которых около киоска находились двое мальчиков. В начальный момент каждого из промежутков $\Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_n$ к киоску подходил по крайней мере один мальчик, в начальный момент промежутка Δ_1 — либо один (если около киоска уже был мальчик), либо двое (если около киоска никого из мальчиков не было). Следовательно, общее число s приходов к киоску всех семи мальчиков не меньше $n+1$. Так как всего из 7 мальчиков можно образовать $7 \cdot 6/2=21$ различную пару, а по условию каждые двое мальчиков встречались у киоска, $n \geqslant 21$. Следовательно, $s \geqslant 22$. С другой стороны, $s=7 \cdot 3=21$. Противоречие.

А. Анджанс

M1184. *На всех ребрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на ребрах, выходящих из одной вершины, проведем плоскость. Докажите, что если три из них касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвертая плоскость касается вписанного шара.*



Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ и возьмем на его ребрах точки K, L, M, P, Q, T, как показано на рисунке. Пусть плоскости KMP, MLT и LKQ касаются вписанного в тетраэдр шара, а плоскость PTQ этого шара не касается. Пусть, для определенности, вписанный шар пересекает плоскость PTQ. Проведем через PQ плоскость, касающуюся вписанного шара и обозначим через T_1 точку пересечения этой плоскости с ребром DC.

Рассмотрим выпуклый многогранник (восьмигранник) $KMLPQTT_1$. Для удобства окрасим грани KMP, MLT, LKM и PQT_1 в черный цвет, а остальные грани пусть останутся белыми. В черный цвет окрашены грани, не принадлежащие поверхности тетраэдра $ABCD$, белыми являются грани, принадлежащие поверхности $ABCD$. Заметим, что ни одна пара черных граней не имеет общего ребра. Что же касается белых граней, то есть одно исключение: ребро T_1T является общим для двух белых граней. Все грани нашего восьмигранника касаются одного шара. Возьмем в каждой грани точку касания и соединим ее со всеми вершинами этой грани. Каждая грань разобьется на треугольники. При этом каждому черному треугольнику соответствует равный ему белый треугольник в смежной грани, имеющий с ним общую сторону. У белых же треугольников одно исключение — пара равных белых треугольников при ребре T_1T.

Рассмотрим сумму углов получившихся черных треугольников вокруг точек касания. Эта сумма равна $4\cdot 2\pi=8\pi$. Поскольку каждому черному треугольнику соответствует равный ему белый треугольник, то аналогичная сумма для белых треугольников равна $8\pi+2\varepsilon$, где ε — угол, под которым видно из точки касания ребро T_1T. (Если вписанный шар не пересекает плоскость PTQ, то эта сумма равна $8\pi-2\varepsilon$.) Но, с другой стороны, сумма углов белых треугольников вокруг точек касания также равна $4\cdot 2\pi=8\pi$. Следовательно, $\varepsilon=0$, т. е. точка T_1 совпадает с T. Утверждение доказано.

Другое доказательство можно получить, опираясь на такую лемму. В выпуклый четырехгранный угол с плоскими углами α, β, γ, δ можно вписать шар тогда и только тогда, когда суммы пар противоположных плоских углов равны: $\alpha+\gamma=\beta+\delta$; если же $\alpha+\gamma<\beta+\delta$, то шар, касающийся плоскостей углов β, γ и δ, пересекает плоскость α.

И. Шарыгин

М1185. *Найдите положительные числа x_1, x_2, ..., x_n, удовлетворяющие системе n уравнений $(x_1+x_2+...+x_k)(x_k+x_{k+1}+...+x_n)=1$ $(k=1, 2, ..., n)$, если а) $n=3$; б) $n=4$; в)* $n=10$. г)* Докажите, что эта система при любом n имеет единственное решение (в положительных числах).*

Начнем с двух замечаний, относящихся к произвольному n (напомним, что все x_k положительны).

1) Положим $x_1+x_2+...+x_n=s$. Задав s, мы из данных уравнений можем выразить $x_1+x_2+...+x_k=s_k$ для всех $k=1, 2, ..., n$:

$$s_1=x_1=\frac{1}{s},$$

$$s_2=x_1+x_2=\frac{1}{s-s_1},$$

$$s_3=x_1+x_2+x_3=\frac{1}{s-s_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_n=\frac{1}{s-s_{n-1}};\quad s_n=s.$$

Отсюда видно, что равенства могут выполняться лишь при одном значении s. Действительно, пусть при некотором s они верны. Если s увеличить, то s_1, s_2, ..., s_n уменьшатся (и наоборот); при этом последнее равенство будет нарушено.

На рисунке 1 показано, как можно при выбранном s построить точки s_1, s_2, s_3, ..., для которых $s_{k+1}=\frac{1}{s-s_k}$ $(s_0=0, s_1=1/s, ...)$: для этого достаточно нарисовать (красную) «лестницу» — ломаную, вершины которой попеременно лежат на гиперболе $y=\frac{1}{s-x}$ и на прямой $y=x$, а звенья параллельны осям.

Заметим, что при непрерывном изменении s гипербола и все вершины ломаной сдвигаются непрерывно; отсюда легко видеть, что при некотором s решение существует (оно соответствует случаю, когда s_n

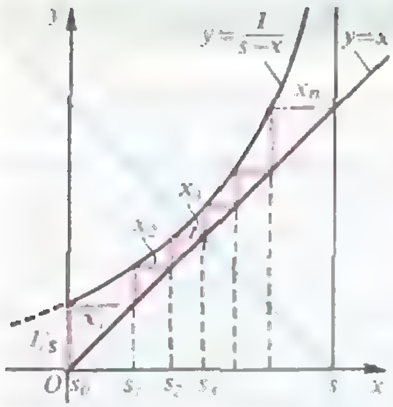


Рис. 1.

совпадает с s; на нашем рисунке это произошло при $n=5$.

2) Из данных уравнений сразу следует, что $x_1=x_n$, $x_2=x_{n-1}$, $x_3=x_{n-2}$, ...: в самом деле, из первого и последнего видно, что $x_1=x_n=1/s$, из второго и предпоследнего — что $x_1+x_2=1/(s-x_1)=1/(s-x_n)=$ $=x_{n-1}+x_n$, т. е. $x_2=x_{n-1}$, и т. д. Эта симметрия сразу видна и из рисунка 1, поскольку гипербола симметрична относительно голубой биссектрисы $y=$ $=s-x$.

Второе замечание позволяет коротко записать решение для небольших n.

а) $n=3$. Тогда $s=2x_1+x_2=x_1+s_1$. Из уравнений $x_1(x_1+s_1)=1$, $s_1^2=1$ находим $s_1=1$, $x_1^2+x_1-1=0$, откуда (поскольку $x_1>0$)

$$x_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ x_2=1-x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2},\ x_3=x_1.$$

б) $n=4$. Тогда $s=2x_1+2x_2=2s_1$. Из уравнений $2x_1s_1=1$, $s_1(2s_1-x_1)=1$ находим $2s_1^2=1+x_1s_1=3/2$, $s_1=\sqrt{3}/2$, откуда

$$x_1=\frac{\sqrt{3}}{3},\ x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6},\ x_3=x_2,\ x_4=x_1.$$

Заметим, что в случае $n=2$ ответ находится сразу:

$$2x_1^2=1,\ x_1=x_2=\sqrt{2}/2.$$

Знатока геометрии эти числа наведут на мысль, что случаи $n=2$, $n=3$ и $n=4$ как-то связаны с углами соответственно *45°, 36° и 30°*. В самом деле, мы увидим (см. рисунок 2), что для любого n существует решение системы, связанное с углом $\alpha=180°/(n+2)$. Из первого замечания следует, что это решение единственно.

Построим равнобедренный треугольник A_0OA_n с боковыми сторонами $A_0O=OA_n=1$ и углами $\alpha=180°/(n+2)$ при основании; на основании A_0A_n отметим точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ так, что отрезки $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ видны из вершины O под равными углами α. Докажем, что длины этих отрезков $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют нашей системе. Удобно провести через точку O еще луч OP, параллельный A_0A_n ($\angle POA_0=\alpha$). Треугольники A_0OA_k и $A_nA_{k-1}O$ подобны ($\angle A_0=\angle A_n=\alpha$, $\angle A_0OA_k=k\alpha=\angle POA_{k-1}=\angle OA_{k-1}A_n$), причем сторонам $A_0O=1$ и $A_0A_k=x_1+\ldots+x_k$ первого соответствуют стороны $A_{k-1}A_n=x_k+\ldots+x_n$ и $OA_n=1$ второго, откуда получаем нужное уравнение

$$(x_1+\ldots+x_k)(x_k+\ldots+x_n)=1.$$

Итак, существование решения доказано. Пользуясь *теоремой синусов*, легко получить явные формулы: поскольку $OA_0=1$,

$$\angle A_0OA_k=k\alpha,\ \angle A_0A_kO=180°-\angle POA_k=180°-$$
$$-(k+1)\alpha,$$

из $\Delta OA_{k-1}A_k$ и ΔOA_0A_k получаем

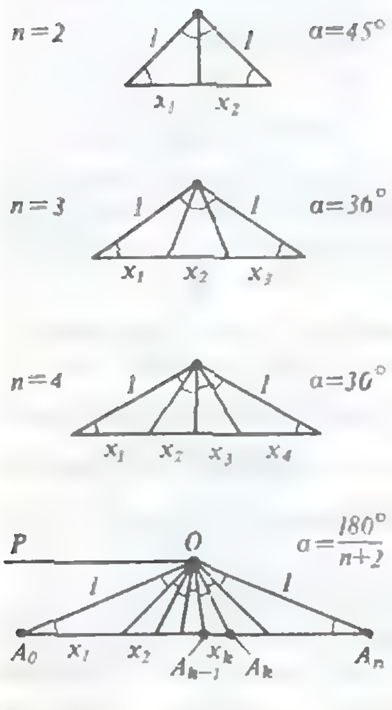


Рис. 2.

$x_1=x_{10}=\sqrt{6}/2-\sqrt{2}/2,$
$x_2=x_9=\sqrt{2}-\sqrt{6}/2,$
$x_3=x_8=\sqrt{6}/3-\sqrt{2}/2,$
$x_4=x_7=3\sqrt{2}/2-5\sqrt{6}/6,$
$x_5=x_6=3\sqrt{6}/4-5\sqrt{2}/4.$

$$\frac{x_k}{\sin\alpha}=\frac{OA_k}{\sin k\alpha},\ \frac{OA_k}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin(k+1)\alpha},$$

откуда:

$$x_k=\frac{\sin^2\alpha}{\sin k\alpha\sin(k+1)\alpha}\ \left(k=1,2,\ldots,n;\ \alpha=\frac{\pi}{n+2}\right).$$

В частности, для $n=10$ имеем $\alpha=\frac{\pi}{12}$; при этом числа $\sin k\alpha$ для $k=1, 2, \ldots, 6$ равны соответственно $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$, 1 (и разумеется, $\sin(12-k)\alpha=\sin k\alpha$). Подставляя эти значения в общую формулу, получаем ответ, указанный на полях.

Н. Васильев, В. Протасов

Ф1193. *В пространстве движется кубик. В данный момент грань ABCD горизонтальна (рис. 1), а скорости точек A и B направлены вертикально вниз и равны по модулю v. Известно, что скорость точки C в этот же момент равна по модулю $2v$. Какую максимальную скорость могут иметь в этот момент другие точки кубика?*

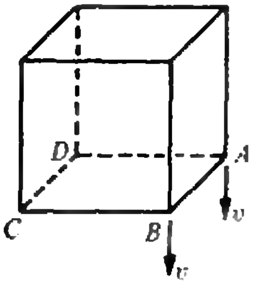


Рис. 1.

Представим движение кубика в любой момент времени как сумму поступательного движения со скоростью v вместе с прямой AB и вращательного движения относительно этой прямой. При этом, очевидно, скорости всех точек кубика, лежащих на произвольной прямой, параллельной AB, будут одинаковыми. Например, скорости всех точек ребра CD в данный момент времени равны по модулю $2v$. Таким образом, чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно рассмотреть движение одной грани кубика, например $BCEF$ (рис. 2), и найти на ней точки, скорости которых максимальны.

Рассмотрим точку C. Легко сообразить, что в данный момент вектор скорости этой точки вертикален (это следует из того, что как поступательная, так и вращательная составляющие скорости точки C вертикальны). При этом вектор скорости точки C может быть направлен как вверх — случай а), так и вниз — случай б).

Начнем со случая а). Очевидно, на прямой BC найдется такая точка, скорость которой в данный момент равна нулю. Действительно, если поступательная составляющая скорости всех точек кубика равна v и направлена вниз, то вращательная составляющая точки C равна $3v$ и направлена вертикально вверх. Тогда на расстоянии $a/3$ от точки B, где a — длина ребра кубика, будет находиться точка O, вращательная составляющая скорости которой равна v и направлена вверх. Следовательно, полная скорость точки O в данный момент равна нулю. Эту точку называют *мгновенным центром вращения*. Но если точка O в данный момент неподвижна, то максимальную скорость будет иметь точка, максимально удаленная от точки O. Очевидно, что этому условию удовлетворяет точка E. Так как

$$\frac{v_E}{v_C}=\frac{OE}{OC}\ \text{и}\ OE=\sqrt{a^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}a,$$

получаем

$$v_E=v_C\frac{OE}{OC}=v\sqrt{13}\approx 3{,}6v.$$

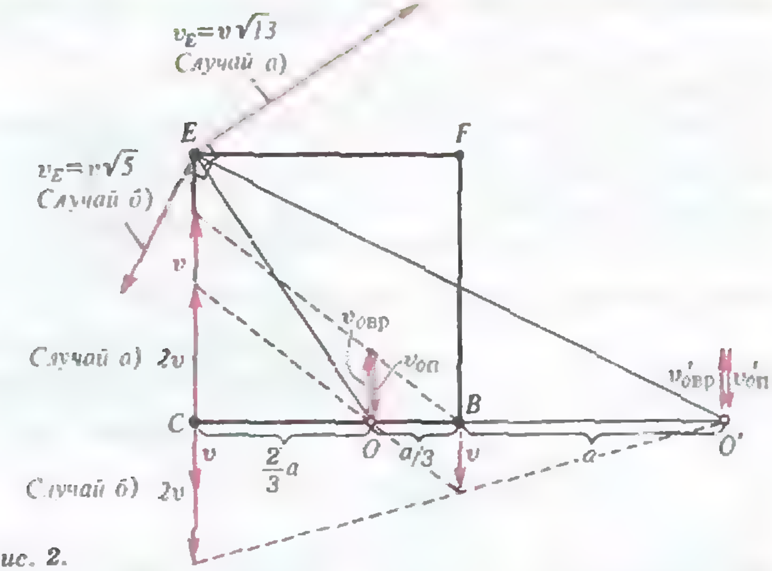


Рис. 2.

В случае б) мгновенный центр *вращения грани BCEF* — точка O' (см. рис. 2) — лежит вне ребра BC на расстоянии $BO' = a$ справа от точки B. Максимальную же скорость опять будет иметь точка E, причем

$$v_E = v_C \frac{O'E}{O'C} = 2v \frac{\sqrt{a^2 + (2a)^2}}{2a} = v\sqrt{5} \approx 2{,}2v.$$

Итак, для обоих возможных направлений вектора скорости точки C максимальное *значение* скорости будут иметь точки кубика, лежащие на ребре, которое параллельно прямой AB и проходит через вершину E.

С. Кротов

Ф1194. *Капилляр сделан из двух тонких стеклянных трубочек с внутренними диаметрами d_1 и d_2 (см. рисунок). В него ввели большую каплю воды массой M. Когда капилляр расположили горизонтально, вся капля «уползла» в тонкую часть, а когда его установили вертикально — вся вода из него вытекла. При каких углах между осью капилляра и вертикалью капля будет располагаться частично в толстой, а частично в тонкой трубочке? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, плотность воды ρ. Смачивание считать полным.*

Максимальное значение угла между осью капилляра и вертикалью соответствует случаю, когда практически вся капля воды оказывается в тонкой части капилляра. При этом длина столба воды

$$l_{\max} = \frac{M}{\rho\pi d_2^2/4},$$

а его высота

$$h_{\max} = l_{\max}\cos\alpha_{\max}.$$

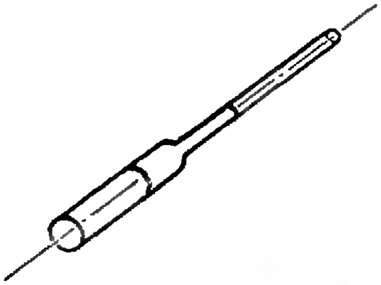
Тогда условием равновесия будет равенство

$$p_{атм} - \frac{4\sigma}{d_1} = p_{атм} - \frac{4\sigma}{d_2} + \rho g l_{\max}\cos\alpha_{\max},$$

откуда находим

$$\alpha_{\max} = \arccos\frac{\pi\sigma d_2}{Mg}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right).$$

Минимальное значение угла между осью капилляра и вертикалью будет соответствовать случаю, когда прак-

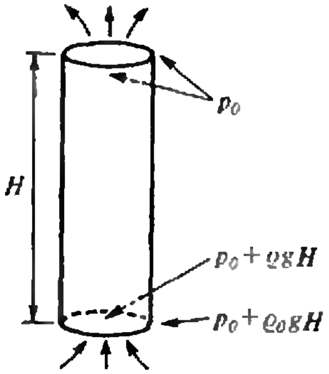


тически вся капля находится в широкой части капилляра. Аналогично предыдущему, находим

$$\alpha_{\min} = \arccos\frac{\pi\sigma d_1}{Mg}\left(\frac{d_1}{d_2} - 1\right).$$

А. Зильберман

Ф1195. *Вертикальная труба высотой $H=1$ м и площадью поперечного сечения $S=50$ см^2 открыта с двух концов. В нижней части трубы установлен нагреватель мощностью $N=100$ Вт. Какая скорость восходящего потока установится в трубе? Считайте, что нагреватель не загораживает поперечное сечение трубы. Атмосферное давление $p_0=1$ атм, температура снаружи комнатная. Молярная теплоемкость воздуха при неизменном объеме $C_V=2.5\,R$, где R — универсальная газовая постоянная.*



Очевидно, что нагрев приводит к уменьшению плотности воздуха, и архимедова сила, действующая на горячий воздух, поднимает его вверх, т.е. возникает восходящий поток воздуха в трубе.

Разобьем задачу на две части.

1) Пусть плотность воздуха в трубе ρ, плотность окружающего воздуха ρ_0 ($\rho<\rho_0$). Какова будет скорость равномерного движения воздуха в трубе?

Обозначим давление вблизи верхнего конца трубы (см. рисунок) p_0. Тогда вблизи нижнего конца внутри трубы давление будет $p_0 + \rho gH$, а снаружи $p_0 + \rho_0 gH > p_0 + \rho gH$. Получается, что вблизи нижнего отверстия трубы воздух, имеющий нулевую скорость, засасывается в трубу, где его давление падает, а скорость увеличивается до некоторого значения v. Найдем его, воспользовавшись уравнением Бернулли:

$$\rho\frac{v^2}{2} + p = \text{const}, \text{ или } \frac{\rho v^2}{2} + p_0 + \rho gH = p_0 + \rho_0 gH,$$

откуда получаем

$$v = \sqrt{2\frac{\rho_0-\rho}{\rho}gH}.$$

2) Зная мощность нагревателя N, найдем отношение $(\rho_0-\rho)/\rho$.

Мимо нагревателя проходит поток воздуха ρvS (масса в единицу времени) или $\frac{\rho}{M}vS$ (количество вещества в единицу времени). Нагрев происходит при постоянном давлении, поэтому

$$N = \frac{\rho}{M}vSC_p\Delta T,$$

где $C_p=C_V+R=7/2\,R$, а ΔT равно разности температур внутри трубы (после нагревателя) и снаружи. При постоянном давлении и при $\Delta T/T \ll 1$

$$\frac{\rho_0-\rho}{\rho} = -\frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{\Delta T}{T}.$$

Таким образом,

$$v^2 = 2\frac{\rho_0-\rho}{\rho}gH = 2\frac{\Delta T}{T}gH = \frac{2NMgH}{T\rho vSC_p},$$

или

$$v^3 = \frac{2NMgH}{T\rho SC_p} = \frac{2NgHR}{pSC_p} = \frac{4}{7}\frac{NgH}{pS} \approx \frac{4}{7}\frac{NgH}{p_0S}.$$

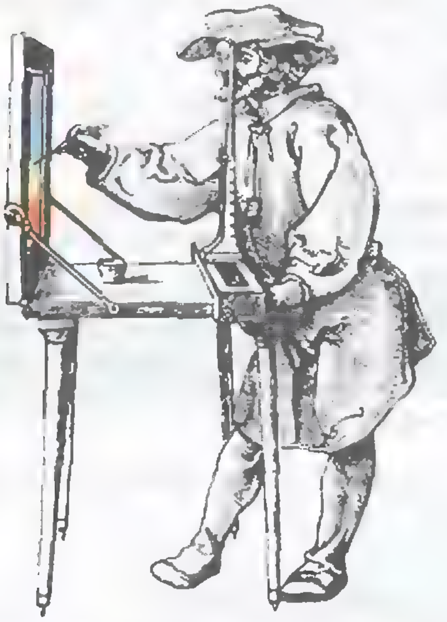
(Продолжение см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

> *Я не колеблясь утверждаю, что один только взгляд на призматический спектр дает возможность указывать на присутствие... мельчайших количеств веществ...*
>
> *Ф. Тальбот*

А так ли хорошо знакомы вам

спектры ?



С открытия Ньютона, разложившего белый свет на составляющие цвета и собравшего их вновь воедино, началась наука о цвете. Он же ввел и название — спектр. Вопрос о происхождении и природе спектров многие десятилетия не привлекал к себе должного внимания исследователей. Случайно наблюдая спектральные линии в самых разнообразных условиях, они не делали никаких выводов. Так было до тех пор, пока в середине XIX века Г. Кирхгоф не связал прочно спектральные линии с химическим составом излучающего или поглощающего вещества и не разработал совместно с Р. Бунзеном метод спектрального анализа.

Последующие годы принесли массу открытий, поток которых не иссякает и по сей день. Многие клеточки периодической таблицы элементов заполнены благодаря спектральному анализу. Без спектроскопов не обходится астрономия, накопившая с их помощью многие знания о Вселенной, о физических свойствах звезд, их химическом составе и движении.

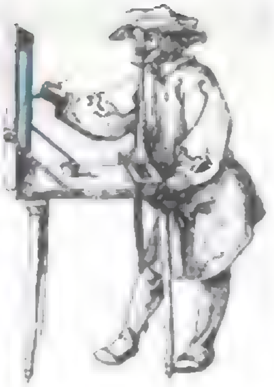
Изучение спектров проложило дорогу в миры атомов и галактик, и задачи нынешнего выпуска «Калейдоскопа» — лишь несколько шагов по этому увлекательнейшему пути.

Вопросы и задачи

1. Почему белый свет, пройдя через оконное стекло, не разлагается на составные цвета?

2. Какие изменения в спектре лампы наблюдаются при ее постепенном накаливании?

3. Рядом с горящей электрической лампой помещены два стекла — красное и синее — с прикрепленными к ним кусочками воска. От какого из стекол скорее отпадет воск?



4. Какую окраску принимают предметы при освещении их монохроматическим светом натриевой лампы?

5. Если изделие из керамики, на светлом фоне которого сделан темный рисунок, поместить в печь с высокой температурой, то виден светлый рисунок на темном фоне. Почему?

6. Каков спектр поглощения черного вещества?

7. Чем меньше длины волн, тем быстрее меняется показатель преломления. Как это отражается на спектре, полученном с помощью стеклянной призмы?

8. Белый свет падает на абсолютно зеркальную поверхность, смещающуюся вдоль лучей. Как меняется при этом спектральный состав отраженного света?

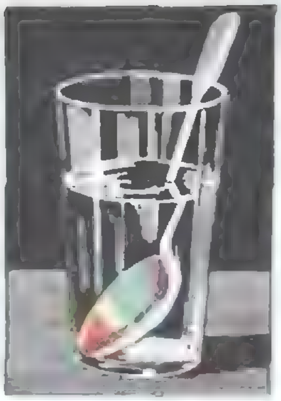
9. Какие источники света — синие, зеленые или красные — должны быть менее заметны с большой высоты, например, из кабины самолета?

10. Видимая днем Луна имеет чистый белый цвет, а после захода Солнца она принимает желтоватый оттенок. Почему?

11. Могут ли красные лучи вызвать люминесценцию?

12. Каким образом в театрах незаметно для зрителей вызывают свечение декораций?

13. Можно ли методами спектроскопии обнаружить антимиры — предполагаемые скопления материи, в которых ядра атомов состоят из антипротонов и антинейтронов, а их оболочки — из позитронов?



Микроопыт

Накапайте несколько капель молока в стакан с водой и посмотрите сквозь него на горящую лампочку. Какого цвета покажется она вам? Теперь посмотрите на свет, отраженный от стакана, сбоку — каков его цвет? Почему?

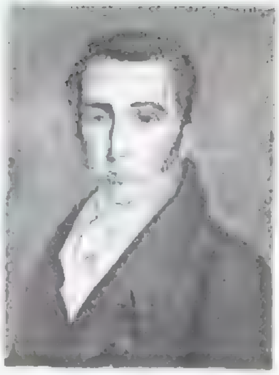
Любопытно, что...

...после того, как спектральный анализ показал наличие в атмосфере Солнца многих химических элементов, в том числе и золота, один из приятелей Кирхгофа заметил ему: «Ну и что толку от вашего солнечного золота? Ведь его все равно не доставить на Землю!» Прошло несколько лет, и Кирхгоф получил золотую медаль за свои замечательные исследования.

...только 9 % энергии солнечного излучения несут с собой ультрафиолетовые лучи и 44 % энергии приходится на видимую часть спектра. Остальные 47 % своей энергии Солнце посылает нам в виде инфракрасных лучей.

...спектральный состав света, излучаемого звездой, зависит от температуры ее поверхности. Чем выше температура звезды, тем меньше длина волны, на которую приходится максимум в спектре ее излучения. Поэтому звезды кажутся красными, белыми, голубыми.

...на могиле Фраунгофера, открывшего темные линии в спектре Солнца и изучавшего спектры планет и звезд, признательные соотечественники воздвигли памятник с надписью «Приблизил звезды».



...в 1910 году молодой австрийский физик А. Гааз предпринял первую попытку построения квантовой теории водородного атома. Однако видные ученые признали «наивной» попытку Гааза сочетать столь «несовместимые» вещи, как спектроскопия и квантовая теория. Его диссертация была провалена.

Что читать о спектрах в «Кванте»
(публикации последних лет)

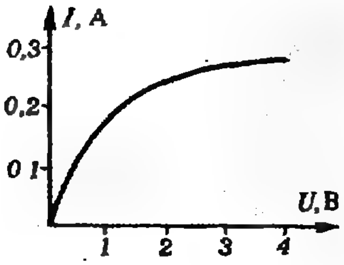
1. «Абсолютно черное тело» — 1985, № 2, с. 26;
2. «Как увидеть невидимое?» — 1985, № 3, с. 20;
3. «Формула Бальмера» — 1985, № 12, с. 16.
4. «Зеленый луч» — 1986, № 6, с. 16;
5. «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» — 1987, № 12, с. 32;
6. «Что и как мы видим» — 1988, № 3, с. 34;
7. «Кто творит радугу» — 1988, № 6, с. 46;
8. «Градусник для Солнца» — 1988, № 10, с. 40;
9. «Калейдоскоп «Кванта» — 1989, № 2.

Окончательно получаем

$$v \approx \sqrt[3]{\frac{4NgH}{7\,p_0 S}} \approx 1 \text{ м/с.}$$

М. Цыпин

Ф1196. *Рабочее напряжение лампочки, вольт-амперная характеристика которой приведена на рисунке, равно 3,5 В (кривая обрывается при напряжении 4 В — лампочка перегорает). Две такие лампочки соединяют последовательно и подключают к источнику с напряжением 5 В. Какой ток потечет по цепи? Какой резистор нужно подключить параллельно одной из лампочек, чтобы напряжение на другой составило 3,5 В? Перегорит ли какая-нибудь из лампочек, если этот резистор заменить еще одной такой же лампочкой?*



При последовательном подключении двух одинаковых лампочек напряжения на них будут одинаковыми и равными 2,5 В каждое (напряжение достаточно мощного источника не меняется при подключении к нему различных нагрузок). Таким образом, по цепи потечет ток (см. вольт-амперную характеристику)

$$I = 0{,}26 \text{ А.}$$

Во втором случае, когда параллельно одной из лампочек подключен резистор, напряжение на второй лампочке составляет 3,5 В, а на первой оно равно 5 В — 3,5 В = 1,5 В. Из вольт-амперной характеристики получаем, что через лампочки текут токи 0,22 А и 0,28 А соответственно. Значит, ток через резистор равен 0,28 А — 0,22 А = = 0,06 А, и его сопротивление

$$R = \frac{1{,}5 \text{ В}}{0{,}06 \text{ А}} = 25 \text{ Ом.}$$

Теперь обсудим, перегорит ли какая-нибудь из лампочек в третьем случае. Ясно, что говорить нужно об «одиночной» лампочке. Пусть напряжение на ней равно предельному значению 4 В, что соответствует току 0,28 А. При токах 0,14 А (половина от 0,28 А) напряжение на лампочках, включенных параллельно друг другу, составило бы 0,7 В. Это означает, что напряжение на «одиночной» лампочке может достичь своего предельного значения 4 В при напряжении источника 4 В + 0,7 В = = 4,7 В. Следовательно, при напряжении источника 5 В «одиночная» лампочка должна перегореть.

А. Зильберман

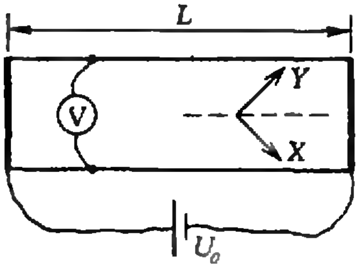
Ф1197. *При исследовании электрических свойств тонкой пластинки нового соединения было обнаружено, что его проводимость существенно анизотропна: вдоль одного направления (ось X) она максимальна, а вдоль перпендикулярного направления (ось Y) — минимальна. Из пластинки вырезали образец в виде полоски длиной L и шириной d ($L \gg d$) под углом $\alpha = 45°$ к осям X и Y и подключили к концам полоски источ-*

Проводимость σ — это, по определению, коэффициент пропорциональности между плотностью тока $\vec{j}$ и напряженностью электрического поля $\vec{E}$. В изотропном проводнике направления напряженности поля и плотности тока совпадают и $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. В анизотропной среде, например в кристалле, проводимость вдоль разных осей может быть разной.

В нашем случае проводимость σ_x вдоль оси X превосходит проводимость σ_y вдоль оси Y, поэтому плотность тока не совпадает по направлению с напряженностью электрического поля:

$$j_x = \sigma_x E_x,\ j_y = \sigma_y E_y, \text{ но } \frac{j_x}{j_y} \neq \frac{E_x}{E_y}\,!$$

ник с напряжением U_0 (см. рисунок). Измерив напряжение между краями полоски в поперечном направлении, получили значение U ($U \ll U_0$). Определите отношение проводимостей вдоль осей X и Y.



Задачник «Кванта»

Ток в образце течет вдоль полоски, а напряженность электрического поля направлена под углом к току и складывается из продольной составляющей, равной $E_1 = U_0/L$, и поперечной составляющей, равной $E_2 = U/d$. Проекции напряженности на оси X и Y равны соответственно

$$E_x=(E_1-E_2)\cos 45^\circ=\frac{E_1-E_2}{\sqrt{2}},$$

$$E_y=(E_1+E_2)\cos 45^\circ=\frac{E_1+E_2}{\sqrt{2}}.$$

Тогда для проекций плотности тока можно записать

$$j_x = \sigma_x E_x = \sigma_x \frac{E_1-E_2}{\sqrt{2}},$$

$$j_y = \sigma_y E_y = \sigma_y \frac{E_1+E_2}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку ток течет вдоль полоски, $j_x = j_y$, т. е.

$$\sigma_x \frac{E_1-E_2}{\sqrt{2}} = \sigma_y \frac{E_1+E_2}{\sqrt{2}}.$$

Значит, искомое отношение проводимостей равно

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{E_1+E_2}{E_1-E_2} = \frac{U_0/L+U/d}{U_0/L-U/d}.$$

А. Буздин

Нам пишут

В статье «Три формулы Рамануджана» («Квант» № 6 за 1988 год) приведен ряд интересных формул с тригонометрическими функциями. Автор этих формул *В. С. Шевелев* прислал нам еще две формулы такого типа:

$$\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{4\pi}{7}}}+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}}+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{8\pi}{7}}}+$$

$$+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{8\pi}{7}}{\cos\frac{2\pi}{7}}}+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{4\pi}{7}}{\cos\frac{8\pi}{7}}}+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{8\pi}{7}}{\cos\frac{4\pi}{7}}}=-\sqrt[3]{7},$$

$$\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}}}+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{9}}}+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{2\pi}{9}}{\cos\frac{8\pi}{9}}}+$$

$$+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{8\pi}{9}}{\cos\frac{2\pi}{9}}}+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{4\pi}{9}}{\cos\frac{8\pi}{9}}}+\sqrt[3]{\frac{\cos\frac{8\pi}{9}}{\cos\frac{4\pi}{9}}}=-\sqrt[3]{9}.$$

Попытайтесь доказать эти красивые формулы методами статьи «Три формулы Рамануджана». В «Кванте» № 10 за 1988 год в разделе «Избраные школьные задачи» под номером 2 была опубликована задача, в которой утверждается, что при $xyz=1$

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=1.$$

А. М. Колесников из Ростовской области обнаружил следующее обобщение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — такие числа, что $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. Тогда

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\ldots+x_1x_2\ldots x_{n-1}}+$$

$$+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3+x_2x_3x_4+\ldots+x_2x_3\ldots x_n}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1+x_nx_1x_2+\ldots+x_nx_1x_2\ldots x_{n-2}}=$$

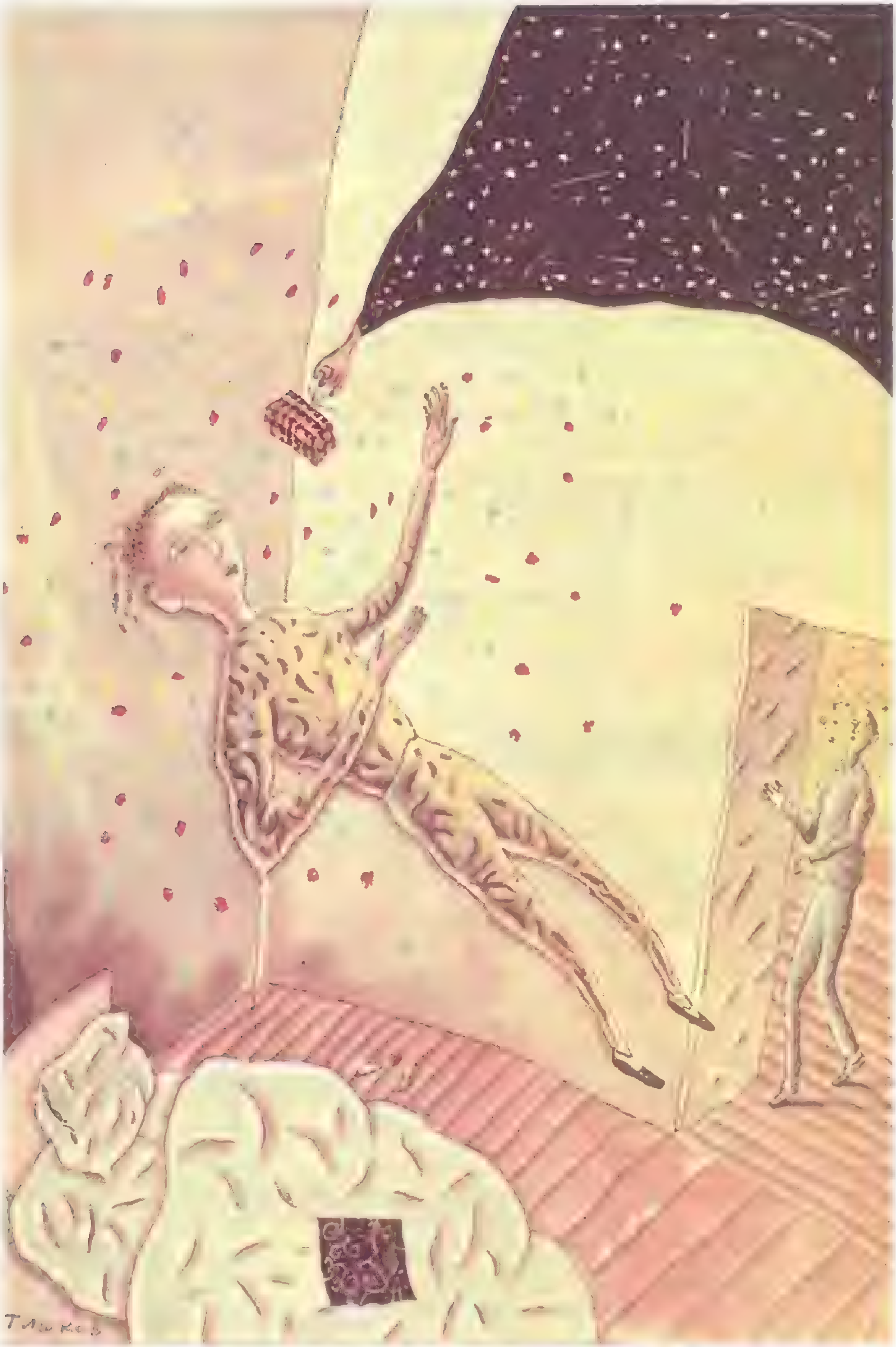
$$=1.$$

Доказательство получается сложением n очевидных равенств:

$$\frac{x_1x_2\ldots x_i}{1+x_1+x_1x_2+\ldots+x_1x_2\ldots x_{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{1+x_{i+1}+x_{i+1}x_{i+2}+\ldots+x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_{i-1}},$$

где $i=1, 2, \ldots, n$, и по определению $x_{n+j}=x_j$.



ЦИФЕРТОН

(фантастический рассказ)

С. САЙКС (США)

На Рождество все словно взбесились. Реклама компьютерной игры не сходила с телевизионных экранов. Дети ныли и клянчили у родителей новомодную игрушку.

Дэн Морган вспомнил, как во времена его детства поток хула-хупов разноцветной волной захлестнул всю округу, и не устоял: приобрел для своего девятилетнего сына «Цифертон». Наблюдая, как Джеред срывает с коробки обертку, Дэн подумал, что игра эта проста обманчивой простотой. Она была выполнена в виде маленькой — размером с пирог — «летающей тарелки» черного цвета. Перед игроком ставилась задача повторять во все усложняющемся порядке комбинации мигающих огней и звуков. Четыре огонька — красный, синий, желтый и зеленый — вспыхивали в случайной последовательности, сопровождаемые четырьмя мелодичными звуками разных тонов.

— Ух! «Цифертон»! — восторженно завопил Джеред и жестом профессионала возложил руки на цветные клавиши: он уже поднаторел в теории, поскольку с октября не пропускал ни одной рекламы, которыми переслаивали по субботам утренние программы мультфильмов. Кэсс на минуту отвела восхищенный взгляд от шелкового платья, подаренного Дэном, и посмотрела на зачарованного игрой сына.

— Хорошо, что ты не забыл купить для нее батарейки,— сказала она позже, когда супруги очищали квартиру от коробок, обрывков бечевки и разноцветной рождественской упаковочной бумаги.

— Чертовски дорогая игра,— проворчал Дэн.— Надеюсь, она окажется долговечнее, чем «Воздушный хоккей», что я подарил в прошлом году.

— Но, милый, хоккей сломал ты, а не Джеред.

...Пока Джеред демонстрировал своим друзьям на улице новый велосипед, Дэн оторвался от уборки, чтобы испробовать компьютерную игру. Он прикоснулся к клавишам, но огоньки не зажглись. Тогда он мягко нажал, копируя движения сына,— игрушка молчала.

— Проклятье! Она уже сломана!

Кэсс подняла голову, продолжая сворачивать бумагу.

— Уже? Ты уверен? Ты прочитал инструкцию?

— Где коробка?

Кэсс разгребла бумажный хлам.

— По-моему, ты сжег ее в камине.

— Я люблю порядок,— вздохнул Дэн и отложил игру в кучу старых игрушек Джереда.— Ребенок не читал никаких инструкций. Откуда он знал, как она работает?

— Чудеса телевидения. Если бы ты каждую субботу просиживал с зари перед экраном, то не только стал бы специалистом по компьютерным играм, но и знал наизусть все рекламные гимны во славу овсянке.

...В комнату ворвался Джеред.

— Где мой «Цифертон»?! — закричал он...

— «Цифертон» в игрушках. Унеси все барахло к себе и мой руки. Обед почти готов.

— Я только покажу «Цифертон» Майку и Кевину.

— Потом,— отрезала Кэсс.

— Ну, на минутку!

Дэн кашлянул.

— Ты слышал, что сказала мама?

Этот рассказ мы перепечатываем (с небольшими сокращениями) из журнала «Изобретатель и рационализатор» (1986, № 5). Перевод В. Бабенко.

© 1981 by Davis Publications, Inc.
© *перевод на русский язык, Изобретатель и рационализатор*, 1986.

«Точь-в-точь слова моего отца,— подумал он.— Штампы, заученные в детстве. Наступит, вероятно, день, когда Джеред скажет то же самое собственному сыну. Есть и другие классические примеры родительских ответов. Там видно будет... Спроси у матери... Последний раз тебе говорю... Сделай немедленно!.. Подожди, вернемся домой... Считаю до трех... Ну, сколько тебе можно повторять?.. Очевидно, ровно столько, сколько необходимо, чтобы штампы без искажений передавались следующему поколению...»

Дэн оторвался от газеты и посмотрел на сына. Мальчик сидел, скрестив ноги, на полу и играл с «Цифертоном». Прошло уже две недели, а ребенку до сих пор не надоело. Ни с одной игрушкой так не было. Напротив, Джеред ушел в игру с головой, все больше увлекаясь мигающими огоньками и причудливыми гармоничными звуками. «Порой он даже предпочитает игру телевизору, что само по себе уже фантастика»,— подумал Дэн.

— Дай-ка я попробую,— сказал он, отложив газету.

Джеред, казалось, не слышал. Он весь был в игре, продолжая повторять сочетания огоньков. Каждый раз, когда он ошибался, компьютер издавал резкий диссонирующий звук и начинал все сначала — с одного огонька и одной ноты.

«Цифертон» полыхнул зеленым. Джеред нажал на зеленую клавишу и повторил сигнал. Зажглись зеленый и желтый огоньки, тут же прозвучали две тихие мелодичные ноты. Мальчик нажал на зеленую и желтую клавиши и в награду получил третий цвет и третий звук. Когда серия усложнилась до комбинации из двенадцати вспышек и нот, Джеред ошибся и ему пришлось начинать с начала.

— Эй! — окликнул Дэн, опускаясь на пол рядом с сыном.— Теперь я.

Джеред и ухом не повел.

Дэн дотронулся до него, удивляясь полной отрешенности ребенка.

— Джеред?!

Только теперь мальчик вышел из транса. Он поднял глаза, и на какой-то миг Дэн уловил в них выражение, которое глубоко поразило его. Будто на него смотрел незнакомец — он был намного старше и гораздо мудрее девятилетнего мальчика. Затем незнакомец растаял, и снова появился ребенок.

— Ты чего, пап?

— Что?.. Э-э... Можно мне попробовать? По-моему, это занятная штука.

— Конечно! Держи.— Мальчик передал ему «Цифертон».— Знаешь, как играть?

— Нужно повторять последовательность огоньков, да?

— Ага. А если дашь промашку, она тебе гуднет малиновым. Лучше начинай с самой простой серии. Ты должен правильно повторить одиннадцать вспышек, чтобы выйти на первый уровень. Я сейчас на втором. Мне надо выдать двадцать подряд, а я пока на тринадцати сбиваюсь. Несчастливое число.

Дэн уселся, как Джеред, скрестив ноги, и положил руки на пластмассовые клавиши.

— Ничего не происходит.

Джеред хихикнул.

— Ты забыл включить.— Он указал на маленькую кнопку, которую Дэн раньше не замечал.

— А... Понял. Ну, «Цифертон», поехали.

Дэн дошел до пяти и сбился — к великой радости сына.

В комнату вошла Кэсс.

— Ребята! Пора ужинать! — позвала она.

— Черт! Из-за тебя я ошибся,— возмутился Дэн и начал с начала.

— Не из-за меня! — огрызнулась Кэсс.— Я только сказала...

— Тихо! Я не могу разговаривать и одновременно...

«Цифертон» снова малиново тявкнул. Джеред повалился на спину, заливаясь смехом.

— Еда на столе,— повторила Кэсс.

— Минутку,— пробормотал Дэн.— Дай мне только набрать одиннадцать.

Кэсс в растерянности замолчала, глядя на сгорбившегося над игрой мужа. Дойдя до семи, он неизменно ошибался в последовательности огоньков и ему приходилось начинать с нуля.

— Все сгниет, прежде чем ты выиграешь,— вздохнула Кэсс.

— Тс-с! После *пяти* она ускоряет *темп*. Ты заметила? Если промедлишь хоть секунду — считай пропало.

— Погоди, вот доберешься до второго уровня...— сказал Джеред.— У нас в школе один парень дошел до третьего. Но он «профессор» в математике. И еще играет на пианино. Помоему, это помогает. Па, можно мне учиться на пианино?

— А что общего у пианино с «Цифертоном»? — удивилась Кэсс.

— Не знаю. Это вроде как музыка. Бобби Эйвори играет с закрытыми глазами и доходит до шестнадцати. Он говорит, что у него в голове звучит песенка.

— Эти двое когда-нибудь замолчат?!— разъярился Дэн.— Я не могу сосредоточиться!

Кэсс молитвенно возвела глаза.

— Почему ты не можешь просто смотреть телевизор, как другие мужья? Хватит с меня одного девятилетнего ребенка в семье... Еда на столе, джентльмены. Мойте руки.

— Слышал, что мама сказала? — обратился Дэн к Джереду.

— А ты, пап?

— Иди, иди...

Кэсс и Джеред сидели за столом и ужинали, когда к ним присоединился торжествующий Дэн.

— Она пикает, когда выигрываешь,— сообщил он.— Я выдал одиннадцать подряд. Не так уж сложно, если умеешь сосредоточиться.

— Тебе потребовалось всего тридцать минут,— согласилась Кэсс.

— Ты преувеличиваешь. На самом деле...— Дэн взглянул на часы и заморгал.— Ну и ну! А казалось, что прошло всего две-три минуты. Как так?

Отбивная остыла, но Дэн счел за лучшее не комментировать сей факт.

— Идешь на второй уровень, пап?

— Конечно. Почему нет? Двадцать подряд — пара пустяков.

Двадцать подряд оказалось не парой пустяков. Дэн ощутимо расстроился, когда Джеред первым добился успеха и приступил к третьему уровню: теперь ему нужно было выстроить последовательность из тридцати двух огоньков и звуков. Последний уровень, четвертый, состоял — по слухам — из пятидесяти шести вспышек, но Джеред не знал никого, кто совершил бы такой невероятный подвиг.

— Все дело в сосредоточенности,— объяснял Дэн Ларри Хейесу, когда они ехали в город, где оба работали в электротехническом отделе фирмы «Воссман».— Это на самом деле увлекательная игра. Уж так затянет — не оторвешься. Хочется играть еще и еще... Уже прошло три месяца, а Джереду нисколько не надоело. Он уже бьется над четвертым уровнем, самым высоким. А я застрял на третьем. Даже не знаю, удастся ли мне когда-нибудь повторить серию из тридцати двух вспышек.

Хейес усмехнулся.

— Мой парень тоже требует «Цифертон» на день рождения. Кажется, он сведет меня с ума.

— Не говори,— улыбнулся Дэн.— Но все-таки благодаря этой игре у Джереда улучшились отметки. Не понимаю, каким образом, но, похоже, мальчик впервые выходит в отличники. И представь, он умолял нас — *умолял*,— чтобы ему позволили учиться на пианино. Будто это помогает с «Цифертоном». Ты понимаешь?! В его возрасте я упрашивал родителей, чтобы они разрешили мне *бросить* скрипку... Самая странная игра из всех, что я видел.

— Да, наши дети живут в эпоху вычислительных машин, это уж точно,— кивнул Хейес.— Моему парню одиннадцать, а у него четыре... нет, пять разных компьютерных игр и игрушек. Я даже не знаю, как некоторые из них работают. Порой я чувствую себя невеждой. Господи, что случилось с бейсболом, воздушными змеями, салочками?! Куда делись спортивные игры? Дети только и делают, что сидят да нажимают на кнопки. Нет, не нравится мне все это...

— Дэн! — Кэсс толкнула в темноте мужа.— Дэн, проснись!

— Что?..

— Проснись.

Дэн зевнул и перевернулся на бок.

— Что случилось?

— Тихо. Ты слышишь?

— Что — слышишь?

— Он снова за игрой.

Дэн прислушался. Он уловил мелодичные звуки «Цифертона», которые доносились из спальни Джереда. Дэн нащупал в темноте часы и нахмурился, различив светящийся циферблат.

— О боже! Четвертый час... Какого черта он играет?!

— Я же говорила, что и прошлой ночью мне послышались эти звуки, но ты заявил, что я свихнулась. Дэн, пойди и отбери у него игру. Это уже не смешно! Он теперь вообще ничем другим не занимается. Меня тошнит, когда я ее слышу. По-моему, она на него влияет.

— Каким образом?

— Не знаю. Вроде бы... он становится другим. Ты не замечал?

— У него превосходные отметки в школе. Может быть, у нас с тобой растет Эйнштейн. Что здесь плохого?

— Дело не в отметках, Дэн. Тут что-то другое... Ты видел, какие у него становятся глаза после этой чертовой игры?

Дэн все чаще и чаще видел это выражение в глазах сына. Взгляд того самого незнакомца, только теперь чужак жил в Джереде дольше и медленнее исчезал после того, как мальчик выныривал из состояния глубочайшей сосредоточенности. Дэн не делился с Кэсс своими наблюдениями, считая их скорее плодом собственного воображения.

— Он какой-то наэлектризованный,— продолжала Кэсс.— Я по несколько минут не могу до него докричаться. Кажется, эта игра гипнотизирует мальчика. Мне приходится словно отзывать его откуда-то. Это жутко, Дэн. Ты, конечно же, замечал такое?..

У Дэна давно уже не хватало времени на «Цифертон», но он помнил смутное ощущение отрешенности, возникающее после игры с огоньками. Дэн сравнивал это состояние с глубокой медитацией или по крайней мере со своим представлением о медитации, ибо у него никогда не было ни времени, ни склонности заниматься йогой, трансцендентальной медициной или какими-либо иными эзотерическими учениями, столь модными в дни его молодости.

— Ну, ты идешь? Или должна пойти я? — Кэсс зевнула.

Дэн пошарил под кроватью в поисках тапочек, чертыхнулся и зашлепал босиком по коридору к комнате Джереда, по пути считая доносящиеся до него мелодичные звуки. «Цифертон» резко фыркнул на пятьдесят первой ноте.

Он не стал зажигать свет, чтобы пощадить глаза, молящие о темноте. Мелодичное пиканье продолжалось. Остановившись у двери Джереда, Дэн считал про себя звуки.

Он отворил дверь, приготовившись сначала поздравить сына с близким финишем, а затем строго отчитать за ночные бдения, но картина, открывшаяся глазам Дэна, лишила его дара речи. Маленькая, темная словно тень фигурка неестественно прямо сидела посреди постели, скрестив ноги. Во мраке комнаты желтые, красные, зеленые и синие вспышки призрачными огнями озаряли лицо мальчика. Его широко раскрытые, немигающие, невидящие глаза были устремлены куда-то вдаль, а руки летали по клавишам, отвечая на цвета и звуки, диктуемые игрушкой. Дэн уставился на ребенка — на незнакомца! — с головокружительной скоростью играющего на компьютере, и по его спине забегали мурашки. В глубинах сознания раздался предостерегающий шепот. Дэн понял, что ему ни в коем случае не следует тревожить сына. Он должен тихо стоять и ждать, когда Джеред... вернется. Тормошить его сейчас — значит, мешать... мешать чему? Переносу... Дэн не понял, что означало это слово и почему оно пришло ему на ум. Единственное, в чем он был уверен,— это в том, что мальчик на грани душевного срыва.

Он стоял и ждал, считая про себя вспышки и звуки. Пятьдесят один, пятьдесят два, пятьдесят три... Раздался мягкий диссонирующий перезвон, словно компьютер выговаривал ребенку за ошибку. Джеред глубоко вздохнул и отложил игру.

— Ты давно тут... смотришь? — спросил мальчик, включив ночник.

— Несколько минут,— ответил Дэн, чувствуя себя виноватым, как будто нарушил чью-то сокровенную молитву. Джеред поднял на него глаза, и Дэн поразился мудрости и великодушию, светившимся во взгляде сына. В этих глазах не было ничего от его ребенка, но существо, которое на него смотрело, каким-то образом беззвучно успокаивало Дэна, заверяло, что все идет должным порядком.

— Ты знаешь, который час? — наконец спросил Дэн.

— Мне теперь не хочется много спать,— отрешенно сказал Джеред.— В сущности, мне нужно спать совсем мало. Я чувствую себя вполне отдохнувшим. Тебе мешают звуки?

— Н-нет... Джеред... Пожалуйста... Не играй больше в эту игру...

— Но я почти ТАМ...

— Знаю. Просто... Я думаю, тебе нужно на время оставить «Цифертон», вот и все.

— Если ты достигнешь четвертого уровня, то сможешь пойти со мной,— тихо проговорил мальчик.

Дэн покрылся испариной от страха. Он подошел к постели и сел рядом с сыном.

— Пойти с тобой — куда, Джеред?

— Туда.

— Не понимаю. Куда ты собрался?

— Это...— Мальчик заморгал, и незнакомец внутри него стал медленно исчезать.— Это... какое-то иное место... Они... учат нас...

— Учат? Чему?

— Тому, что мы должны знать.

— Кто такие «они»? — Дэн никак не мог решить, спит Джеред или бодрствует. Сын уже слишком большой для детских фантазий, со своим последним невидимым собеседником он расстался лет пять назад, когда пошел в детский сад. «Мальчик, должно быть, спит,— подумал Дэн,— спит и разговаривает спросонья, как другие ходят во сне.»

— Я не сплю,— сказал Джеред, прочитав его мысли.— Ты за меня не беспокойся. Они не причинят нам вреда. Они пытаются помочь.

Дэн взял в руки компьютерную игру.

— В общем, так. До поры до времени «Цифертона» ты не увидишь.

Джеред потянулся к коробке.

— Нет! Прошу тебя! Не отбирай игру! Мне она нужна. Папа, я почти там!

— Черта с два! А сейчас ложись!

— Отда-а-ай! — Вот теперь сын окончательно вернулся.

— Может быть, потом. Не сегодня. Спать! — С этими словами Дэн выключил ночник.— Завтра поговорим.

Слова его отца... Один к одному. Сколько захватывающих приключений его собственного детства откладывалось навсегда с обещанием «Поговорим завтра»!

— Значит, это и есть «Цифертон»? — спросил Хейес, когда Дэн достал игру в электричке.

— Он самый. Сегодня застукал Джереда за игрой в три часа ночи. Сна ни в одном глазу — сидит и играет. Я в сомнении. У него уже получаются пятьдесят три вспышки подряд. Мне кажется, если он дойдет до конца, его увезут в «психушку». Ночью он не на шутку напугал меня.

Хейес протянул руку и взял игру.

— Как это?

— Ну, не знаю... Он бормотал что-то, как *«Они»* чему-то учат его и как он «уйдет» куда-то. Я на самом деле очень встревожен, Ларри. Эта чертова игра вызывает галлюцинации, будто наркотик. Я отобрал ее у парня.

— А ты уверен, что это не зависть? Ведь ты прочно застрял на третьем уровне... Как в нее играть?

(Окончание следует)

Небольшой переполох в аптеке

Как-то раз в аптеку доставили 10 флаконов лекарства. В каждом флаконе по 1000 пилюль. Не успел провизор мистер Уайт расставить флаконы на полке, как почтальон принес телеграмму.

Мистер Уайт читает телеграмму управляющей аптекой мисс Блек.

Мистер Уайт. Срочно. Воздержитесь от продажи лекарства. По ошибке фармацевта в одном из флаконов каждая пилюля содержит на 10 мг лекарства больше допустимой дозы. Просьба незамедлительно вернуть флакон с повышенной дозой лекарства.

Мистер Уайт встревожился.

Мистер Уайт: «Нечего сказать, повезло! Теперь мне придется брать по пилюле из каждого флакона и взвешивать. Веселенькое занятие!»

Тяжело вздохнув, мистер Уайт хотел было приступить к неожиданно свалившейся на него работе, как мисс Блек остановила его. Мисс Блек: «Минуточку! Взвешивать 10 раз совсем не нужно! Достаточно произвести 1 взвешивание.»

Каким образом при помощи 1 взвешивания можно установить, в каком флаконе пилюли содержат повышенную дозу лекарства?

Идея мисс Блек состояла в том, чтобы взять 1 пилюлю из первого флакона, 2 пилюли из второго флакона, 3 пилюли из третьего флакона,..., 10 пилюль из десятого флакона...

...положить 55 отобранных пилюль на одну чашу весов и взвесить их. Предположим, что пилюли весили бы 5510 мг, или на 10 мг больше, чем следует. Тогда мисс Блек заключила бы, что среди отобранных пилюль имеется 1 пилюля с повышенной дозой лекарства, а ровно 1 пилюля была извлечена из первого флакона.

Если бы вес 55 пилюль оказался на 20 мг больше нормы, то это означало бы, что среди отобранных пилюль имеются 2 пилюли с повышенной дозой лекарства. Их можно было извлечь только из второго флакона. Так мисс Блек сумела понизить число взвешиваний до 1. Меньше не бывает!

Через 6 месяцев в аптеку доставили еще 10 флаконов того же лекарства. И на этот раз не успели распаковать коробку с флаконами, как почтальон принес телеграмму с извещением о том, что на этот раз фармацевт допустил более серьезную ошибку.

В посылке могло оказаться от 1 до 10 флаконов с пилюлями, каждая из которых на 10 мг тяжелее нормы. Мистер Уайт был вне себя от ярости.

Мистер Уайт: «Что делать, мисс Блек? Ваш метод, который позволил нам так блестяще выйти из затруднения в прошлый раз, неприменим!» Мисс Блек задумалась.

Мисс Блек: «Вы правы, мистер Уайт. Но если слегка модифицировать мой метод, то при помощи 1 взвешивания и на этот раз можно определить, в каких флаконах пилюли содержат повышенную дозу лекарства.»

Что имела в виду мисс Блек?

Как определить непригодные пилюли?

По условиям первой задачи на взвешивание пилюль все более тяжелые пилюли находятся в одном флаконе. Взяв из различных флаконов различное число пилюль (проще всего взять из каждого флакона число пилюль, равное его номеру), мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством номеров и множеством флаконов.

Чтобы решить вторую задачу, необходимо воспользоваться последовательностью, которая бы сопоставляла каждому флакону отличный от других номер и обладала бы еще одним дополнительным свойством: сумма членов любой ее подпоследовательности должна быть отличной от суммы членов любой другой ее подпоследовательности. Существуют ли такие последовательности? Да, существуют. Примером может служить хотя бы геометрическая прогрессия со знаменателем 2 и первым членом 1: 1, 2, 4, 8, 16, ... Все члены этой последовательности — степени числа 2, причем показатель возрастает от 0 с единичным шагом. Именно эта последовательность лежит в основе двоичной системы счисления.

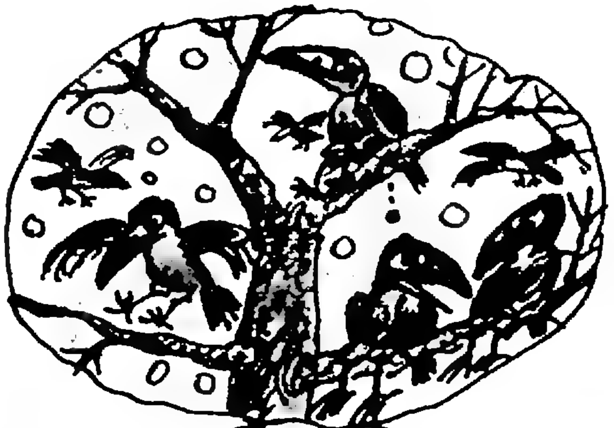
Решение задачи состоит в том, чтобы, выстроив флаконы в ряд, взять 1 пилюлю из первого флакона, 2 пилюли из второго флакона, 4 пилюли из третьего флакона и т. д., затем собрать все отобранные пилюли и взвесить. Предположим, что пилюли оказались на 270 мг тяжелее, чем нужно. Так как

(Окончание см. на с. 61)

„Квант" для младших школьников

Задачи

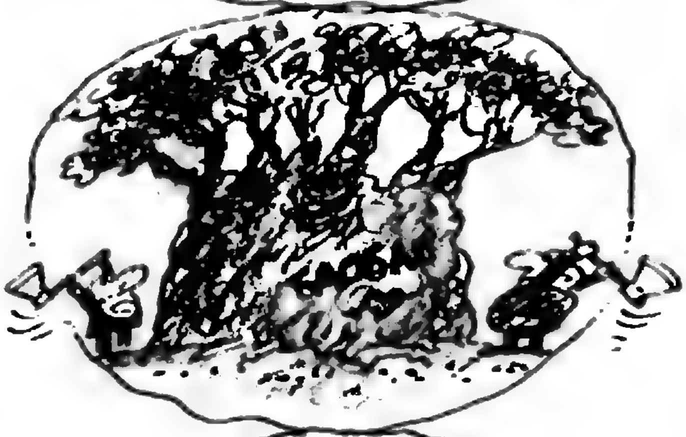
1. На дерево села стая птиц — на каждую ветку по три птицы, а одна птица продолжала летать вокруг дерева. Потом все птицы пересели на дерево по четыре на ветке, при этом одна ветка осталась свободной. Сколько было птиц и сколько веток?



2. В одной из новогодних телепередач поэт А. Вознесенский прочитал свое стихотворение, в котором утверждалось, что шоферы считают счастливыми те номера машин, в которых сумма цифр первой половины номера равняется сумме цифр второй половины. Номер 19—82 — счастливый, так как $1+9=8+2$. А в одной из передач серии «Следствие ведут знатоки» утверждалось, что по шоферскому поверью счастливым является номер, в котором сумма чисел первой и второй половины равняется 100, например 19—81, так как $19+81=100$.

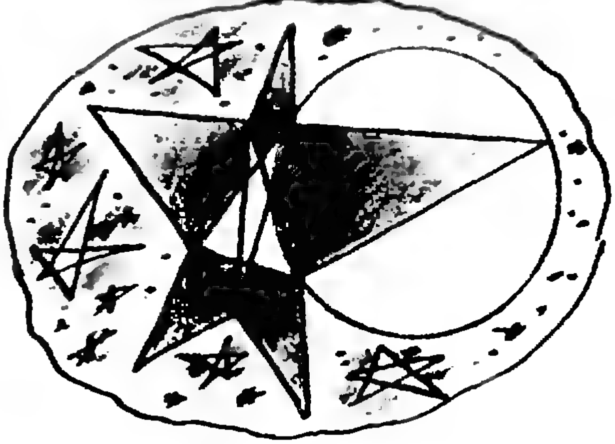
Перечислите все номера, счастливые одновременно в первом и во втором смысле.

3. Число БАОБАБ делится на 101. Какое это число?



4. Из последовательности всех простых чисел: 2, 3, 5, 7,... построили две другие последовательности: $5=2+3$, $8=3+5$, $12=5+7$, ... и $6=2\cdot 3$, $15=3\cdot 5$, $35=5\cdot 7$, ... В первом случае складываются последовательные простые числа, а во втором — они перемножаются. Может ли какой-нибудь член первой последовательности равняться некоторому члену второй последовательности?

5. Существует ли пятиугольная звездочка с таким свойством: вокруг любого ее красного четырехугольника (см. рисунок) можно описать окружность?



Эти задачи нам предложили ученик 10 класса из Навои Эмамбердин Эгамбердиев, А. Швецов, А. Савин, ученик 9 класса из Еревана Арам Акопян, И. Нагель.

ЕЩЕ РАЗ О ЗАКОНЕ ПАСКАЛЯ

Кандидат физико-математических наук
А. ШТЕЙНБЕРГ

Наш сегодняшний разговор о законе Паскаля мы хотим начать с эксперимента, который, возможно, покажется читателю несколько странным и не имеющим отношения к этой «жемчужине гидростатики».

Эксперимент назовем «стрельба по крутым и сырым яйцам». Автор отнюдь не призывает вас переводить продукты. Вполне достаточно представить себе эту ситуацию и догадаться, каковы будут результаты меткой стрельбы. Что будет, если попасть приблизительно в центр крутого яйца? Пуля пройдет навылет, оставив в яйце более или менее аккуратное отверстие. А если яйцо сырое? Вероятно, интуиция подсказывает вам, что при метком попадании оно разобьется вдребезги, как бы взорвется. И это — одно из проявлений закона Паскаля, который утверждает, что в жидких телах (в отличие от твердых) давление передается без изменения в каждую точку жидкости. Давление, оказываемое пулей на скорлупу сырого яйца в точке попадания, передается во все точки жидкости и соответственно действует изнутри на скорлупу, разрывая ее.

Возникает вопрос: а каков механизм передачи давления? Ответ на него изложен в школьном учебнике, и мы скажем по этому поводу лишь несколько слов. Давление, которое оказывает сжатая жидкость на стенки сосуда, связано с тем, что молекулы непрерывно бомбардируют изнутри эти стенки. Но движение молекул в жидкости хаотическое, и поэтому они с одинаковым «усердием» бомбардируют любую стенку сосуда. Отсюда сразу следует, что закон Паскаля, раз он связан с хаотичностью теплового движения, справедлив не только для жидкостей, но и для газов.

Перейдем теперь к другому, почти столь же «хулиганскому» опыту. Поставим пустую бутылку на землю и будем бить по горлышку сверху вниз палкой, пытаясь разбить бутылку. Автор, опять-таки, не призывает вас к уничтожению стеклотары. Речь идет только о мысленном эксперименте. Предположим, что разбить бутылку вам не удалось. Не отчаивайтесь — вам поможет закон Паскаля. Наполните бутылку водой доверху и заткните пробкой. А теперь достаточно сравнительно несильно ударить по пробке — и бутылка благополучно развалится на части.

Надо сказать, что Блез Паскаль к этому эксперименту не имеет отношения. Говорят, что честь первооткрывателя такого экзотического способа разбивания бутылок принадлежит Галилео Галилею, который все это проделывал лет за 30→40 до рождения выдающегося француза. Но вот для объяснения результатов эксперимента закон Паскаля необходим.

Предположим, вы ударили по пробке с силой F_1. Давление, которое вы (точнее — палка) при ударе оказываете на пробку площадью S_1, равно

$$P_1=\frac{F_1}{S_1}.$$

Это давление передается жидкости, а жидкость передает его на боковые стенки и донышко бутылки. И если общая площадь стенок и донышка S_2, то на них будет действовать сила

$$F_2=P_1S_2=F_1\frac{S_2}{S_1}.$$

Несложный подсчет показывает, что для обычной бутылки емкостью в 1/2 литра отношение S_2/S_1 составляет по порядку величины несколько сотен. Именно во столько раз оказывается усиленным ваш удар. Естественно, что даже если бить не очень сильно, бутылке все равно не устоять.

Последняя формула, разумеется, относится не только к «бутылочному» эксперименту. Она имеет общий характер, и это прекрасно понял Паскаль. Вот что он писал в своем «Трактате о равновесии жидкостей»*):

> «Если сосуд, наполненный водой и закрытый со всех сторон, имеет два отверстия, одно в 100 раз больше другого, которые прикрыты точно подогнанными к ним поршнями, то один человек, надавливающий на малый поршень, уравновесит силу 100 человек, надавливающих на поршень в 100 раз больший, и преодолеет силу 99. И каково бы ни было отношение этих отверстий, всегда, когда силы, приложенные к поршням, относятся друг к другу, как отверстия, силы эти будут в равновесии.
>
> ...Отсюда следует, что сосуд, наполненный водою, является новым принципом механики и новой машиной для увеличения сил в желаемой степени, потому что при помощи этого средства человек может поднять любую предложенную ему тяжесть».

Совершенно ясно, что в этих словах полностью сформулирована идея гидравлического подъемника, гидравлического пресса, гидравлического привода тормозов современного автомобиля и многих других подобных устройств.

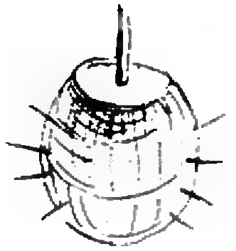
Рассказывая о научных достижениях Блеза Паскаля (1623—1662), невозможно не сказать хотя бы несколько слов об этой экстраординарной личности. В 16 лет он приобретает европейскую известность своей первой математической работой — трактатом о конических сечениях. И вообще период жизни с 12(!) до 23 лет безраздельно отдан математике, и Паскаль

---

*) *Полное название этой работы Паскаля таково:* «Трактаты о равновесии жидкостей и весе массы воздуха, содержащие объяснение причин различных явлений природы, которые до сих пор не были достаточны известны и, в частности, тех, которые приписывают боязни пустоты».

становится одним из признанных лидеров в этой области. Лишь после этого, вдохновленный работами итальянца Эванджелиста Торричелли, Паскаль начинает заниматься физикой. И снова — достижения мирового уровня. В 1651 году Паскаль резко обрывает научные занятия и со свойственной ему страстностью погружается в водоворот светской жизни. Еще через три года, испытав мистическое озарение, он внезапно обращается к религии. Ей и литературным занятиям посвящается остаток жизни.

В свой «физический» период Паскаль прославился остроумными опытами по гидростатике. Он в это время жил в Руане, и толпа в несколько сот горожан собиралась на его демонстрации как на праздничные представления. Один из самых известных опытов Паскаля, поразивший воображение жителей Руана, по идее близок к эксперименту с разбиванием бутылки. В тонкую длинную трубку, вставленную в закупоренную наполненную водой бочку, наливалась вода. Уровень воды в трубке повышался, и в какой-то момент крепко сколоченная бочка разрывалась. Объяснить этот «фокус» вы теперь должны без труда.



Есть еще один интересный исторический вопрос: а действительно ли именно Паскаль является первооткрывателем «своего» закона? Мы уже упоминали Галилея, который очень близко подошел к идеям Паскаля. Более того, в 1594 году Галилей получил от Венецианского дожа патент на гидравлический пресс сроком на 20 лет. Правда, гидравлический пресс получил распространение лишь через два века.

Другим предшественником Паскаля в деле открытия законов гидростатики был голландец Симон Стевин. Водяная инженерия имела исключительное значение для Нидерландов. И не случайно именно там появился принадлежащий Стевину первый (после Архимеда) серьезный трактат по гидростатике (1585 год). Трактат был, однако, написан на малораспространенном голландском языке и не получил поэтому широкой известности.

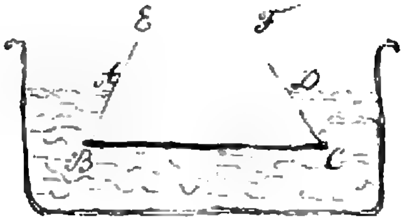
Итак, не исключено, что закон Паскаля называется именно так потому, что Галилей не придавал своим гидростатическим упражнениям достаточного внимания, а Стевин писал по-голландски. Так бывает нередко. Здесь уместно привести слова самого Паскаля из его философской работы «Мысли»:

> «Говоря о своих трудах, иные авторы твердят «моя книга, мой комментарий, моя история». Они как те выскочки, которые обзавелись собственным домом и не устают повторять «мой особняк». Лучше бы говорили «наша книга, наш комментарий, наша история», ибо чаще всего там больше чужого, чем их собственного».

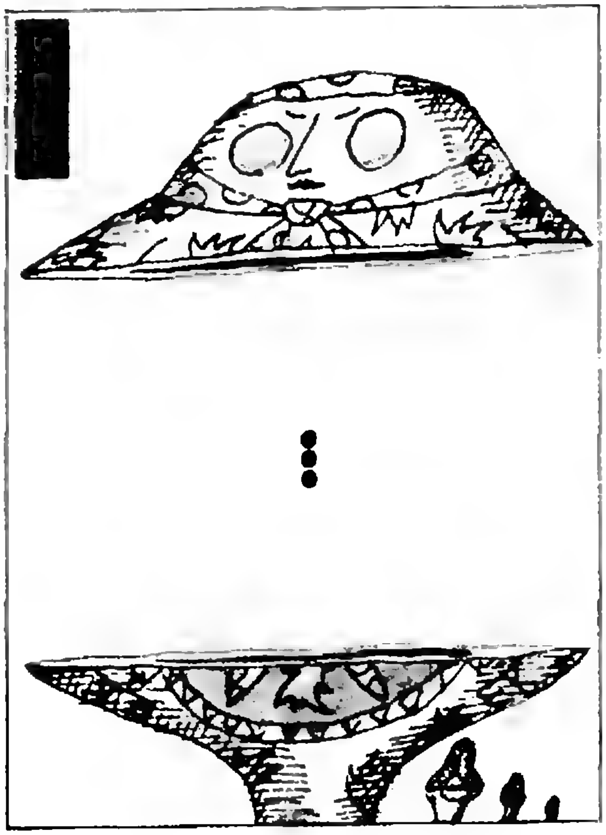
В заключение мы хотим предложить вам, уважаемые читатели, три гидростатические задачи:

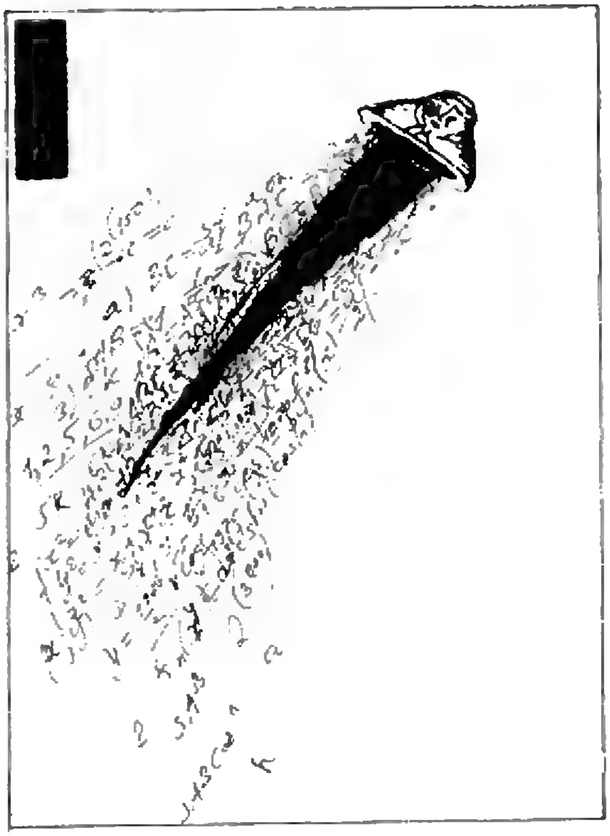
1. Предположим, что в опыте Паскаля с разрыванием бочки в бочку вставляется не одна, а две одинаковые трубки. Изменится ли давление воды в бочке? Изменится ли сила давления воды на стенки бочки?

2. Сосуд $EABCDF$ (см. рисунок) с приставным дном BC опущен в резервуар с водой. Вода в объеме $ABCD$ имеет массу 2,5 кг и весит, соответственно, 24,5 Н. Если на дно BC поставить узкую гирю весом 25 Н, оно не отрывается. А если налить 2,5 кг воды, то отрывается. В чем дело?



3. В жидкости на глубине h гидростатическое давление, как известно, равно ϱgh. Почему это давление в соответствии с законом Паскаля не передается на поверхность?





Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Уравнения, которые удается решить

В этой заметке пойдет речь об алгебраических уравнениях вида

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0. \quad (1)$$

В школе такие уравнения решают только для значений $n\leqslant 2$. Тем не менее, в некоторых случаях удается школьными методами решить уравнения степени выше второй, применяя специальные приемы. Некоторые из них мы здесь покажем.

I. **Теорема.** *Пусть в уравнении (1) все коэффициенты $a_n, \ldots, a_0$ — целые, и пусть несократимая дробь p/q — корень этого уравнения. Тогда ее числитель p есть делитель свободного члена a_0, а ее знаменатель q есть делитель старшего коэффициента a_n.*

Доказательство. Подставим в уравнение (1) $x=p/q$. Мы получим

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1}+\\+a_0q^n=0.$$

Множитель p входит во все члены, кроме последнего. Но тогда и последний член делится на p, так как он равен сумме остальных членов (со знаком «минус»). Поскольку наша дробь p/q несократима, ни один множитель числа p не может быть делителем числа q. Значит, чтобы последний член a_0q^n делился на p, необходимо, чтобы свободный член a_0 делился на p. Первое утверждение теоремы доказано. Второе доказывается аналогично.

Пользуясь этой теоремой, мы можем найти все рациональные корни любого уравнения с целыми коэффициентами (если они есть). Для этого достаточно составить список всех делителей свободного члена, список всех делителей старшего коэффициента и затем перепробовать все дроби вида p/q, беря p из первого списка, а q — из второго.

II. Теперь предположим, что мы уже знаем один корень уравнения. (Сейчас неважно, как мы его узнали.) Как воспользоваться этим, чтобы найти остальные корни? Нам поможет процедура деления многочленов, похожая на процедуру деления многозначных чисел. Покажем на примере, как это делается. Пусть нам было дано уравнение

$$x^3-2x+1=0.$$

Согласно предыдущей теореме, если это уравнение и имеет рациональные корни, то только 1 или —1. Проверкой убеждаемся, что число 1 действительно является корнем.

Теперь нам нужно разложить многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители. Это можно сделать искусной группировкой членов, но существует и надежный способ, не требующий догадки: делить наш многочлен уголком на $x-1$. Как это делается, показано на рисунке 1.

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} x^3-x^2 & x^2+x-1 \\ \cline{1-1} x^2-2x+1 & \\ x^2-x & \\ \cline{1-1} -x+1 & \\ -x+1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Рис. 1.

В данном случае в остатке получился ноль, благодаря чему мы смело можем записать тождество

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1).$$

Но, вообще говоря, при делении многочленов получается остаток. Другой пример деления показан на рисунке 2. Здесь получился остаток 2. Это значит, что имеет место тождество

$$x^3-2x+1=(x+1)(x^2-x-1)+2.$$

Остаток — это многочлен, степень которого меньше степени делителя. В частности, если делитель — двучлен вида $x-x_0$, то остаток — число. Именно этот случай нас здесь и интересует.

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} x^3+x^2 & x^2-x-1 \\ \cline{1-1} -x^2-2x+1 & \\ -x^2-x & \\ \cline{1-1} -x+1 & \\ -x-1 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Рис. 2.

Перейдем теперь к общим определениям.

Разделить многочлен $P(x)$ на двучлен $x-x_0$ — это значит найти такой многочлен $Q(x)$ и такое число R, что получится тождество

$$P(x)=(x-x_0)Q(x)+R. \qquad (2)$$

Искать их можно любым способом, например делением «уголком». О том, какой получится остаток при делении на двучлен $x-x_0$, говорит следующая теорема.

Теорема Безу. *Остаток при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x-x_0$ равен $P(x_0)$. В частности, этот остаток равен нулю в том и только в том случае, когда число x_0 — корень многочлена $P(x)$.*

Доказательство. Подставим $x=x_0$ в тождество (2) и получим

$$P(x_0)=R,$$

что составляет первое утверждение теоремы. Из этого равенства мы видим, что R равно нулю, если $P(x_0)$ равно нулю, т. е. если x_0 — корень $P(x)$.

Итак, если мы знаем, что число x_0 является корнем многочлена $P(x)$, мы делим его на $x-x_0$, заранее зная (благодаря теореме Безу), что в остатке получится нуль. Тем самым, мы сводим решение данного уравнения к решению другого уравнения меньшей степени. Иногда таким путем удается решить уравнение полностью, т. е. найти все его корни.

III. Еще один прием, полезный при решении уравнений,— это замена переменных. Наиболее интересный случай — возвратные уравнения. Уравнение (1) называется возвратным, если его коэффициенты, стоящие на равных расстояниях от концов, равны:

$$a_{n-k}=a_k \text{ при всех } k \text{ от 0 до } n.$$

Оказывается, что всякое возвратное

уравнение четной степени сводится к уравнению вдвое меньшей степени подстановкой

$$x+\frac{1}{x}=t. \qquad (3)$$

Покажем, как применить эту подстановку на примере возвратного уравнения четвертой степени:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0, \text{ где } a\neq 0.$$

Разделим его на x^2 и перепишем так:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Возведем равенство (3) в квадрат:

$$t^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,$$

т. е.

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$

Вводя новую переменную t, получаем квадратное уравнение

$$a(t^2-2)+bt+c=0.$$

Что же касается возвратных многочленов нечетной степени, то все они делятся на $x+1$ и после такого деления дают возвратные многочлены четной степени. Покажем это на примере возвратного уравнения пятой степени

$$ax^5+bx^4+cx^3+bx+a=0.$$

Легко видеть, что $x=-1$ — корень этого уравнения, поэтому по теореме Безу многочлен в левой части уравнения делится на $x+1$. Впрочем, результат деления можно получить и группировкой членов:

$$a(x^5+1)+bx(x^3+1)+cx^2(x+1)=0.$$

Как известно, и x^3+1, и x^5+1 делятся на $x+1$:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1),$$
$$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

И вообще, $x^{2k+1}+1$ делится на $x+1$ при любом k:

$$x^{2k+1}+1=$$
$$=(x+1)(x^{2k}-x^{2k-1}+\ldots-x+1)$$

(«плюсы» и «минусы» чередуются).

На этом мы закончим изложение теории. А чтобы научиться ее применять, решите следующие задачи.

Задачи

Решите уравнения:

1. $x^3-4x^2-7x+10=0.$
2. $x^4-5x^3+4x^2+10x-12=0.$
3. $x^4-\sqrt{2}\,x^3-2x^2+(2\sqrt{2}+1)x-\sqrt{2}=0.$
4. $x^4-10x^3+22x^2-10x+1=0.$
5. $x^5-4x^4+5x^3-5x^2+4x-1=0.$
6. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты уравнения

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0,$$

чтобы заменой

$$x+\frac{c}{x}=t$$

оно сводилось к квадратному уравнению?

А. Тоом

Задачи в стиле Заочной школы

Когда создавалась Заочная математическая школа, ныне ставшая Всесоюзной, традиция проведения олимпиад и кружковых занятий уже насчитывала десятилетия. Эта традиция, конечно, сильно помогла в создании ВЗМШ, но в то же время она не могла быть перенесена в условия заочной учебы полностью. Олимпиады всегда были нацелены на выявление способных ребят, еще не обладающих математической культурой. Типичная олимпиадная задача — это задача-орешек, требующая сообразительности, но не представляющая технических трудностей, решение которой, если уж до него додумаешься, записывается коротко и просто. Вот удачный пример олимпиадной задачи: «Докажите, что в любой треугольной пирамиде есть ребро, все четыре плоские угла прилегающие к которому — острые». Положительную оценку («плюс-минус») можно ставить уже за одну фразу: «Возьмем самое длинное ребро».

Заочная школа — это именно школа, цель которой — выработка математической культуры. В ней необходимы задачи, с точки зрения олимпиадной эстетики «некрасивые», представляющие трудности при записи решения, требующие расчетов, перебора случаев, небольшого самостоятельного исследования. Ученик ВЗМШ, имеющий месяц на выполнение очередного задания, должен этот месяц систематически работать. В Заочной школе необходимы такие задачи, которые неуместны на олимпиаде или на экзамене.

Ниже мы приводим несколько задач, характерных для ВЗМШ. Некоторые из них уже публиковались в учебных пособиях ВЗМШ, другие придуманы по их подобию.

Восьмой класс

1. а) Про два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ известно следующее: $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$, $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$. Следует ли отсюда, что $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$?

б) Рассмотрим задачу на построение: постройте треугольник ABC по углу $BAC=\alpha$ и сторонам $AB=1$ и $BC=a$. На координатной плоскости с координатами a и α покажите области, соответствующие каждому возможному числу решений этой задачи.

2. Начертите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$.

3. Можно ли выбрать на плоскости четыре различные точки, не лежащие на одной прямой, так, что все расстояния между ними — целые числа?

4. Найдите четыре числа, если известно, что, складывая их попарно, мы получим следующие шесть сумм:

1, 2, 5, 6, 9, 10.

5. Существует ли такое натуральное число k, что $5k$ — пятая степень целого числа, $6k$ — шестая степень целого числа, а $7k$ — седьмая степень целого числа?

6. Существует ли такое натуральное число k, что $6k$ — шестая степень целого числа, а $8k$ — восьмая степень целого числа?

7. В свежих огурцах было 99 % воды. В процессе хранения на овощной базе произошла усушка, после которой в огурцах стало 98 % воды. На сколько процентов уменьшился вес огурцов?

8. В газетном сообщении говорилось: «В микроавтобусе приехали спортсмены. Мастеров спорта среди них более сорока двух, но менее сорока трех процентов». Может ли это сообщение быть верным, если микроавтобус вмещает десять пассажиров?

9. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на сторонах четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$. Может ли площадь четырехугольника $ABCD$ быть больше площади четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$?

10. Существует ли треугольник, у которого длины всех сторон, длины всех высот и радиусы вписанной и описанной окружностей — целые числа?

Девятый класс

11. Войсковая колонна имеет длину 1 км. Связной, выехав из начала колонны, передал пакет в конец колонны и вернулся к началу. Колонна за это время прошла 1 км. Какой путь проехал связной? (Колонна движется равномерно.)

12. Две медианы прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите третью медиану.

13. Можно ли начертить на плоскости такие две замкнутые 100-звенные ломаные, что каждое ребро первой ломаной пересекает каждое ребро второй ломаной?

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2=y+z+2, \\ y^2=x+z+2, \\ z^2=x+y+2. \end{cases}$$

15. О треугольнике ABC были сделаны следующие три утверждения:

а) треугольник ABC — прямоугольный,

б) треугольник ABC — равнобедренный,

в) в треугольнике ABC есть угол в 45°.

Известно, что только два из этих утверждений верны. Найдите углы треугольника ABC.

16. Для всех значений параметра a найдите число решений системы

$$\begin{cases} |x|+|y|=1, \\ x^2+y^2=a. \end{cases}$$

17. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые десять членов — целые, а все следующие — не целые числа?

18. Постройте треугольник по трем медианам.

19. Постройте треугольник по трем высотам.

20. На координатной плоскости начертите множество таких точек $(x; y)$, для которых существует треугольник а) со сторонами $x, y, 1$; б) с медианами $x, y, 1$; в) с высотами $x, y, 1$.

Десятый класс

21. Начертите графики функций

а) $y=\sqrt[1970]{\log_{1970}\cos^{1970}x}$,

б) $y=\arcsin(\cos x)$,

в) $y=\cos(\arcsin x)$.

22. Что больше: $2^{3^{100}}$ или $3^{2^{150}}$?

23. Для всех значений параметра a найдите число решений уравнения $x^3-x-a=0$.

24. Решите уравнение

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x=\frac{\pi}{2}.$$

25. Одна пирамида находится внутри другой пирамиды. Может ли площадь боковой поверхности внутренней пирамиды быть больше площади боковой поверхности внешней пирамиды?

26. Дан четырехгранный угол. Постройте плоскость, пересечение которой с данным углом — параллелограмм.

27. Существует ли многогранник, имеющий шесть граней, но не являющийся кубом, у которого все двугранные углы равны друг другу?

28. Существует ли четырехгранная пирамида $SABCD$, у которой боковые грани SAB и SCD перпендикулярны плоскости основания?

29. Существует ли пирамида, у которой три боковые грани перпендикулярны плоскости основания?

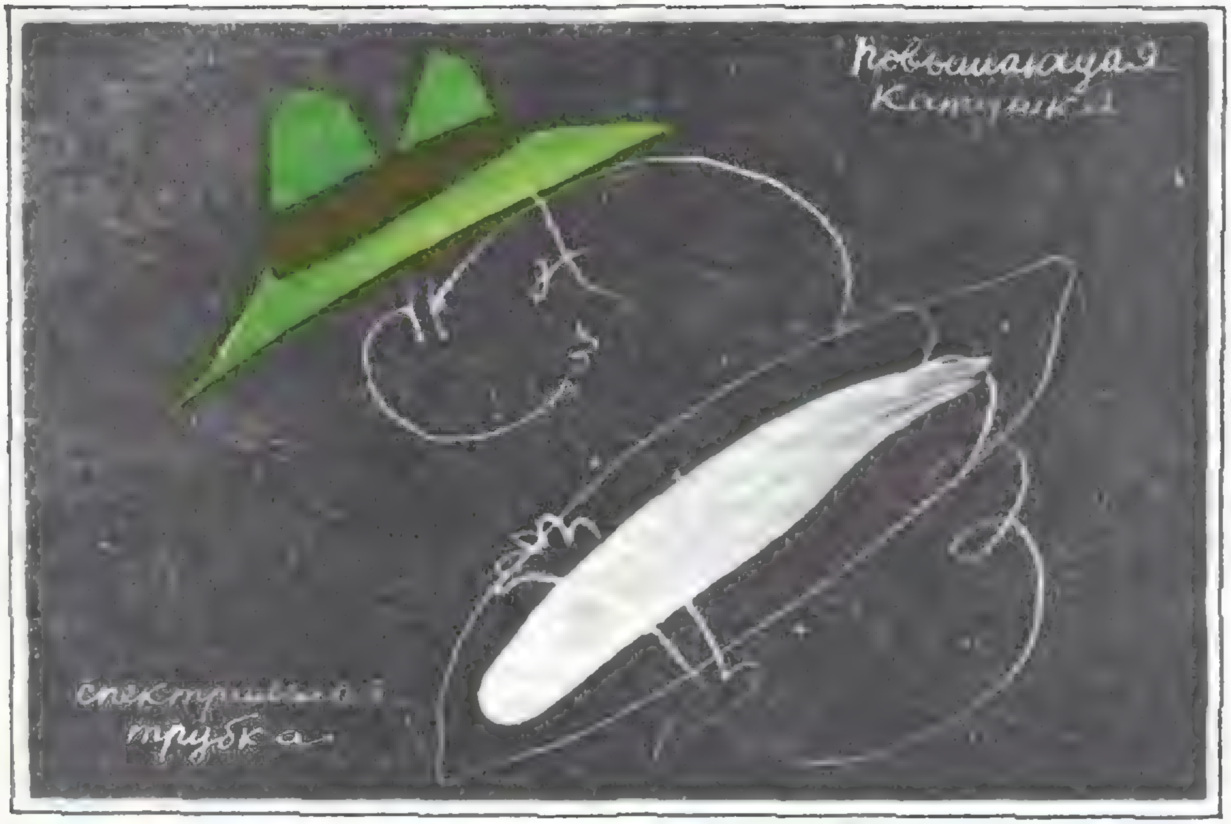
30. Определим индуктивно последовательность функций:

$$\begin{cases} f_1(x)=|x|, \\ f_{n+1}(x)=|f_n(x)-2|. \end{cases}$$

Для любого n решите уравнение:

$$f_n(x)=1.$$

Публикацию подготовил А. Тоом



Лаборатория „Кванта“

Опыты с высокочастотным генератором

М. ЦЫПИН

В предыдущей статье*) этого раздела журнала было рассказано об устройстве лампового генератора, позволяющего получать напряжение 3—4 тысячи вольт при частоте около 5 мегагерц. Там же описывался простой опыт со свечением неоновой лампочки, поднесенной к повышающей катушке генератора на расстояние приблизительно 10 сантиметров. Это свечение говорит о том, что напряженность электрического поля в разреженном неоне, заполняющем лампочку, вблизи генератора превышает критическое значение, при котором наступает *электрический пробой газа.*

Аналогичным образом можно вызвать электрический разряд не только в неоне. Воспользуйтесь, например, спектральными трубками из школьного набора. В него входят трубки, наполненные водородом, гелием, неоном, криптоном и т. п. Держа такую трубку за один конец, поднесите другой к повышающей катушке генератора (можно даже ввести его внутрь катушки). Свечение возникает сначала в ближайшей к генератору части трубки, а затем распространяется на всю трубку. Разряд в широкой части трубки часто имеет замысловатую форму и содержит яркие и тусклые области, которые к тому же могут перемещаться. Эти явления слишком сложны, чтобы объяснить их здесь, ими занимается физика плазмы.

Имея столь удобную возможность зажигания газоразрядных трубок, было бы очень кстати поинтересоваться спектрами их излучения. Для этого можно воспользоваться спектроскопом, а можно обойтись и без него — достаточно иметь треугольную стеклянную призму.

---

*) См. «Квант», 1989, № 12.

Отойдите от светящейся трубки на расстояние 2—3 метра и посмотрите на нее сквозь призму. Призму держите непосредственно около глаза, а смотрите в сторону от нее (учитывая преломление световых лучей призмой). Найдя правильное положение, вы увидите спектр, состоящий из отдельных ярких спектральных линий. Зрелище это чрезвычайно красивое: никакие рисунки или даже цветные фотографии не идут в сравнение с наблюдаемой картиной.

Газовый разряд можно вызвать не только в спектральных трубках, а и в любых других приборах, содержащих газ при низком давлении. Это и люминесцентные лампы, и стартеры к ним, и тиратроны, и даже обычные криптоновые лампы накаливания. Поэкспериментируйте и через некоторое время вы научитесь по виду спектра узнавать состав газа в приборе.

Электрический разряд в газе часто является источником не только видимого, но и невидимого ультрафиолетового излучения. В этом отношении особенно интересен разряд у острия, которым заканчивается повышающая катушка генератора. При таком разряде наряду с излучением в синей области видимого спектра возникает такое же, если не более сильное, излучение и в ближней ультрафиолетовой области. Как же его обнаружить? Оказывается, сделать это можно, воспользовавшись любопытным свойством некоторых сортов бумаги.

Безусловно, вы замечали, что бумага иногда бывает желтой, иногда более или менее белой, а иногда совсем белой. Этой белизны часто добиваются с помощью оптического отбеливателя — органического вещества, светящегося голубым светом под действием ультрафиолетового излучения. Поскольку в естественном солнечном свете всегда есть некоторое количество ультрафиолета, эта голубизна и делает бумагу белее. Если поднести такую бумагу к горящему газовому разряду, она будет испускать довольно яркое голубое свечение, сигнализирующее о наличии ультрафиолетового излучения. Эффект становится особенно наглядным при сравнении различных сортов бумаги: некоторые светятся лучше, другие хуже, а третьи не светятся вовсе. Вырежьте какую-нибудь фигурку из светящейся бумаги, наклейте ее на кусок несветящейся, и вы получите очень удобный индикатор ультрафиолетового излучения.

Еще одна область явлений, которые можно исследовать с помощью нашего генератора, связана с переменным током. Поскольку высокое напряжение для этого не нужно, повышающую катушку лучше убрать из генератора. Мы привыкли к тому, что в трансформаторе всегда есть железный сердечник, а его обмотки содержат сотни витков. На частоте же 5 мегагерц трансформатор может иметь первичную обмотку из шести витков, вторичную — из одного и вообще не иметь сердечника. При этом трансформатор, как ни странно, работает!

Возьмите кусок изолированного провода длиной около 40 сантиметров и сделайте из него петлю, т. е. катушку из одного витка, диаметром примерно 4 сантиметра. Выводы длиной порядка 15 сантиметров скрутите между собой, подключите этот виток к лампочке от карманного фонарика и постепенно подносите виток к контурной катушке генератора. Когда виток окажется достаточно близко, лампочка загорится (и даже может перегореть). Закрепив каким-нибудь образом ваш виток, служащий вторичной обмоткой импровизированного трансформатора, вы получите удобный источник небольшого высокочастотного напряжения. С его помощью можно проделать, например, такой опыт.

Подключите виток к лампочке не непосредственно, а через дополнительный кусок тонкого провода длиной несколько десятков сантиметров. Если бы источником тока была батарейка, этот провод практически никак не повлиял бы на результат — его сопротивление слишком мало. Однако вовсе не так обстоит дело при высокой частоте, когда начинает сказываться индуктивность провода,— теперь он оказывает заметное сопротивление, которое к тому же сильно зависит от его формы.

Чем больше вы будете экспериментировать с высокочастотным генератором, тем больше у вас возникнет вопросов. Например, таких:

— Как измерить высокое высокочастотное напряжение? Можно ли для этого применить электроскоп?

— Что представляет собой спектр разряда на острие?

— Проходит ли ультрафиолетовое излучение сквозь стекло?

— Совпадает ли спектр водородной газоразрядной трубки с «теоретическим» спектром атомарного водорода?

— Как зависит индуктивность провода от его формы? При какой форме индуктивность минимальна, а при какой максимальна?

— Можно ли наблюдать резонанс, включив последовательно с лампочкой катушку и конденсатор?

Постарайтесь найти ответы на эти вопросы. А если вы сами придумаете что-нибудь такое, что будет интересно не только вам, но и другим, напишите об этом в редакцию «Кванта».

Игры и головоломки

Небольшой переполох в аптеке

(Начало см. на с. 50)

каждая пилюля с повышенной дозой лекарства тяжелее нормальной на 10 мг, то, разделив 270 на 10, мы получим 27 — число более тяжелых пилюль.

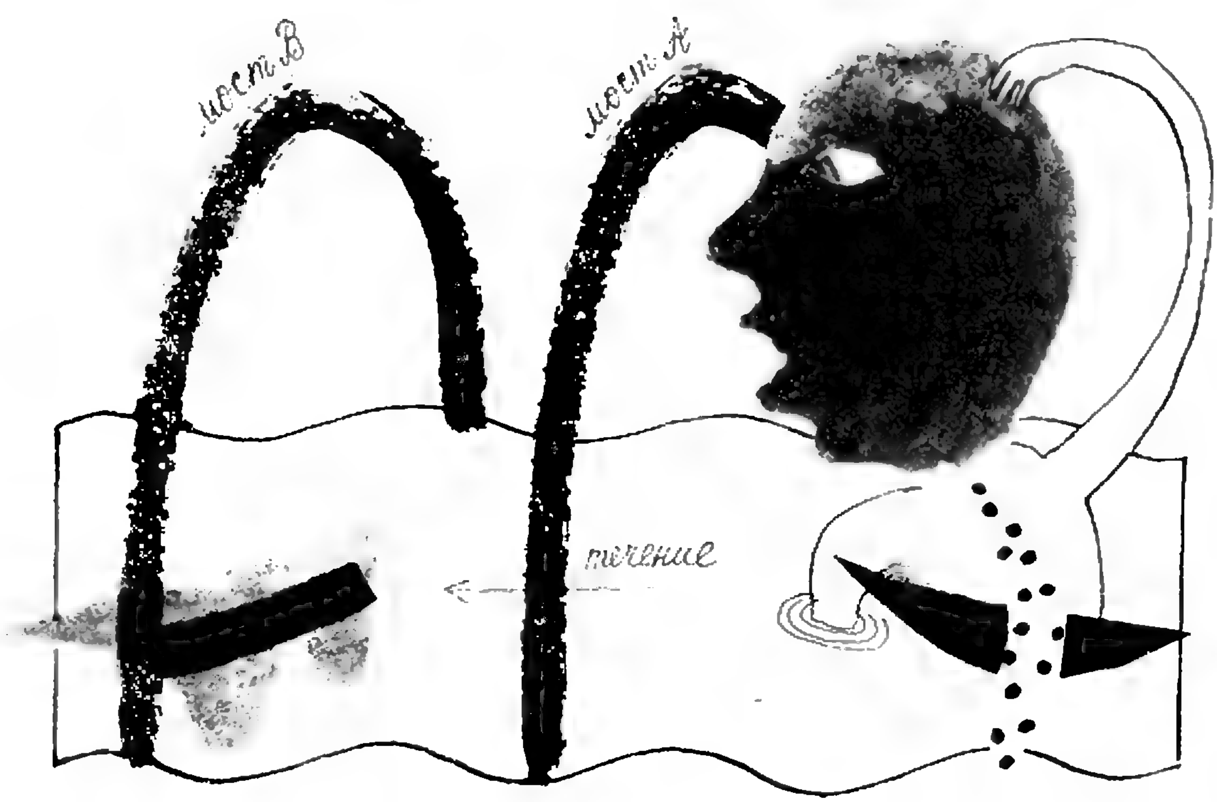
Запишем число 27 в двоичной системе: 11011. Двоичные разряды, в которых стоят единицы, говорят нам, какие степени числа 2 в сумме дают двоичное число 11 011 (или десятичное число 27): 1, 2, 8 и 16. Единицы стоят в первом, втором, четвертом и пятом двоичных разрядах. Следовательно, непригодные пилюли с повышенным содержанием лекарства находятся в первом, втором, четвертом и пятом флаконах. Почетное место отведено двоичной системе и в занимательной математике.

Вот простой карточный фокус, который позволит вам удивить и позабавить ваших друзей. Хотя внешне он ничем не напоминает задачу об отыскании флаконов с непригодными пилюлями, и задача, и фокус по существу «двоичны» — в основе их лежит двоичная система счисления.

Пусть кто-нибудь из зрителей тщательно перетасует колоду карт. Положив ее в карман, попросите вашего помощника назвать любое число от 1 до 15, после чего, сунув руку в карман, достаньте карты, значения которых в сумме равны названному числу (туз считается равным 1).

Секрет фокуса прост. Вы заранее кладете в карман туз, двойку, четверку и восьмерку. Определить на глаз недостачу четырех карт в колоде невозможно, и ваши зрители будут пребывать в уверенности, что вы попросили перетасовать полную колоду. Перетасованную колоду вы подкладываете под четыре карты, уже лежащие в кармане. После того как число названо, вы мысленно представляете его в виде суммы степеней числа 2 (например, если названо число 10, то вы мысленно разлагаете его в сумму 8+2=10) и, сунув руку в карман, достаете двойку и восьмерку.

Из книги М. Гарднера «Есть идея», М.: Мир, 1982.



Практикум абитуриента

Системы отсчета в задачах механики

Кандидат физико-математических наук
А. ЧЕРНОУЦАН

Проплывая на лодке под мостом A, рассеянный человек уронил в реку шляпу, но, не заметив этого, продолжал грести против течения. Через 15 минут, обнаружив пропажу, он развернул лодку и, гребя в том же темпе, догнал шляпу под мостом B, удаленном от моста A на 1 километр. Какова скорость течения реки?

Отнюдь не случайно разговор о системах отсчета мы начали с этой очень старой и уже ставшей классической задачи. Она наглядно иллюстрирует тот факт, что удачный выбор системы отсчета (С. О.) существенно упрощает, а иногда и делает просто устным решение многих физических задач.

И действительно, чтобы найти скорость течения в нашем примере, надо узнать, сколько времени заняло движение шляпы между мостами (поскольку скорость шляпы равна скорости воды). Перейдем в С. О., связанную со шляпой. В ней вода неподвижна, а скорость движения лодки в обоих направлениях одинакова. Значит, время движения лодки назад, к шляпе, равно времени движения от шляпы, т. е. 15 минутам. Тогда общее время между потерей и поимкой шляпы — 30 минут, и скорость течения — 1 км/0,5 ч=2 км/ч.

При переходе из одной С. О. в другую многие физические величины, описывающие механическое движение тел — например, скорость $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$ и т. п., изменяются. При этом выполняются известные законы сложения соответствующих величин:

$$\vec{v}_1=\vec{v}_{12}+\vec{v}_2, \quad \vec{a}_1=\vec{a}_{12}+\vec{a}_2.$$

Здесь $\vec{v}_1$ ($\vec{a}_1$) — скорость (ускорение) тела относительно первой С. О., $\vec{v}_{12}$ ($\vec{a}_{12}$) — скорость (ускорение) тела относительно второй С. О., $\vec{v}_2$ ($\vec{a}_2$) — скорость (ускорение) второй С. О. относительно первой.*)

Сразу заметим, что мы будем обсуждать только поступательное движение С. О. относительно друг друга.

А теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Сначала — из кинематики. Заметим сразу, что в рамках кинематики все С. О. (покоящиеся, движущиеся равномерно или ускоренно, вращающиеся и т. д.) равноправны; выбор С. О. определяется только удобством и здравым смыслом.

Задача 1. *Скорость течения реки $\vec{u}$, скорость лодки в стоячей воде $\vec{v}_{\text{отн}}$. Какой курс должен держать человек в лодке, чтобы течение снесло ее как можно меньше?*

Понятно, что здесь разумно обсуждать две С. О. Требование обеспечить наименьший снос имеет отношение к С. О., связанной с землей,— угол между скоростью лодки $\vec{v}$ и перпендикуляром к линии берега должен быть минимальным. В С. О., связанной с водой, задана величина скорости лодки $v_{\text{отн}}$ и требуется найти направление этой скорости, например — угол α между скоростью $\vec{v}_{\text{отн}}$ и перпендикуляром к линии берега. Ведь «держать курс» означает задавать направление корпуса лодки, а оно совпадает с направлением скорости лодки в той С. О., где вода неподвижна.

В условии задачи ничего не сказано о соотношении величин u и $v_{\text{отн}}$. Рассмотрим два варианта.

1) $v_{\text{отн}} > u$. В этом случае удается обеспечить движение лодки перпендикулярно берегу (сноса нет вовсе). Запишем закон сложения скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{u}$$

и изобразим его на рисунке 1. Из прямоугольного треугольника получаем

$$\sin\alpha = u/v_{\text{отн}}.$$

2) $v_{\text{отн}} < u$. Равенство, выражающее закон сложения скоростей, для этого случая изображено на рисунке 2. При изменении курса конец вектора $\vec{v}_{\text{отн}}$ описывает полуокружность. Минимальный угол между вектором $\vec{v}$ и перпендикуляром к линии берега соответствует условию, что этот вектор касается полуокружности. Отсюда получаем

$$\sin\alpha = v_{\text{отн}}/u.$$

Итак, при $v_{\text{отн}} > u$ $\sin\alpha = u/v_{\text{отн}}$; при $v_{\text{отн}} < u$ $\sin\alpha = v_{\text{отн}}/u$ (случай $v_{\text{отн}} = u$ разберите самостоятельно).

При рассмотрении свободного падения нескольких тел удобно использовать С. О., связанную с одним из этих тел. В ней все остальные тела будут двигаться прямолинейно и равномерно (сопротивление воздуха мы не учитываем). Этот прием часто называют «методом барона Мюнхгаузена» (вы поняли — почему?). Воспользуемся им в следующей задаче.

Задача 2. *Из двух точек, расположенных на одной высоте h над землей на расстоянии l друг от друга, одновременно бросают два камня: один вертикально вверх со скоростью v_1,*

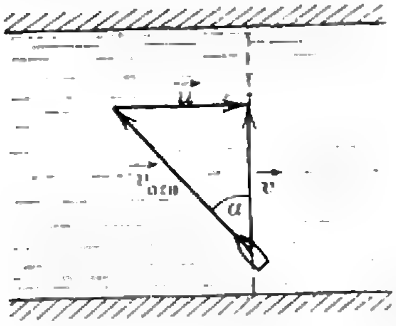


Рис. 1.

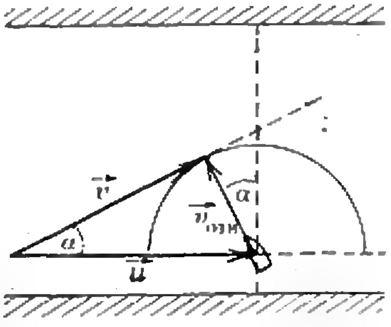


Рис. 2.

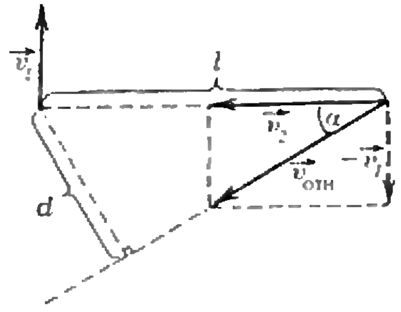


Рис. 3.

---

*) Подробнее все эти вопросы обсуждались в заметке «Относительность движения» («Квант», 1989, № 9).

другой горизонтально со скоростью v_2. Каково минимальное расстояние между камнями в процессе движения? Начальные скорости камней лежат в одной вертикальной плоскости.

Выберем С. О., связанную с первым камнем. Тогда движение второго камня будет прямолинейным и равномерным ($\vec{a}_{21}=\vec{a}_2-\vec{a}_1=\vec{g}-\vec{g}=0$) со скоростью

$$\vec{v}_{\text{отн}}=\vec{v}_2-\vec{v}_1.$$

Наименьшее расстояние между камнями легко найти из рисунка 3:

$$d=l\sin\alpha=\frac{lv_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Замечание. Наибольшее сближение камней произойдет через время

$$t=\frac{l\cos\alpha}{v_{\text{отн}}}=\frac{l\cos\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\frac{lv_2}{v_1^2+v_2^2}.$$

Необходимо, чтобы к этому моменту первый камень не упал на землю; т. е. должно выполняться условие

$$\frac{lv_2}{v_1^2+v_2^2}\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Может возникнуть такой вопрос: минимальное расстояние между камнями найдено нами в С. О., связанной с летящим камнем; может быть, в С. О., связанной с землей, ответ будет другим? Нет, это не так. Расстояние между двумя движущимися точками относится к так называемым инвариантным величинам, т. е. величинам, значение которых не изменяется при переходе из одной С. О. в другую. Вот примеры других инвариантных в классической механике величин: интервал времени между событиями, размеры предметов, их ориентация в пространстве и т. д.

Перейдем теперь к задачам динамики. Здесь круг «разрешенных» С. О. резко сокращается. Так как правила действий в неинерциальных С. О. выходят за рамки школьного курса, мы вынуждены ограничиться только инерциальными С. О. В любой из них мы можем пользоваться привычными для нас законами Ньютона и законами сохранения энергии и импульса

Задача 3. *Тележка массой M и длиной l стоит на гладкой горизонтальной плоскости. На тележке находятся два человека, массы которых m_1 и m_2. На какое расстояние переместится тележка, если эти два человека поменяются местами?*

С одной стороны, нас интересует перемещение тележки относительно земли; с другой — нам известны конечные перемещения людей не относительно земли, а относительно тележки. Как же быть?

Будем считать, что движения всех тел — и людей, и тележки — равномерные, и перейдем в С. О., скорость которой равна скорости тележки $v_{\text{т}}$ в некоторый момент времени. Относительно этой С. О. начальная скорость всех тел равна $-v_{\text{т}}$. Запишем для замкнутой системы «тележка — люди» закон сохранения импульса:

$$-v_{\text{т}}(m_1+m_2+M)=v_{1\,\text{отн}}m_1+v_{2\,\text{отн}}m_2.$$

Домножив это уравнение на Δt, найдем связь между соответствующими перемещениями:

$$s_{\text{т}}(m_1+m_2+M)=-s_{1\,\text{отн}}m_1-s_{2\,\text{отн}}m_2.$$

Очевидно, такая же связь будет и между полными перемещениями за все время движения. Учитывая, что $s_{1\,\text{отн}}=l$ и $s_{2\,\text{отн}}=-l$, получаем

$$s_{\text{т}}=\frac{m_2l-m_1l}{m_1+m_2+M}=l\,\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+M}.$$

Эта задача легко решается также в С. О., связанной с центром масс системы (убедитесь в этом самостоятельно)*). Напомним, что координаты и скорость центра масс находятся по формулам

$$x_{\text{ц}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_nx_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n},$$

$$\vec{v}_{\text{ц}}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\ldots+m_n\vec{v}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}.$$

Из второго равенства видно, что, если система тел замкнута, скорость центра масс остается постоянной. Поэтому С. О., связанная с центром масс замкнутой системы, является инерциаль-

---

*) О свойствах центра масс можно подробнее узнать, например, из заметки «Что такое центр масс» («Квант», 1988, № 3).

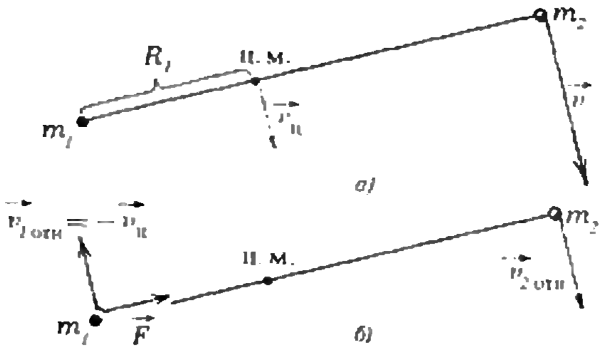


Рис. 4.

ной. Полный импульс системы тел в этой С. О. в любой момент равен нулю.

Воспользуемся С. О., связанной с центром масс, для решения следующей задачи.

Задача 4. *По гладкой горизонтальной плоскости движутся два маленьких тела, связанные невесомой и нерастяжимой нитью длиной l. В некоторый момент времени тело массой m_1 покоится, а тело массой m_2 имеет скорость v, направленную перпендикулярно нити (рис. 4, а). Найдите натяжение нити в этот момент.*

Центр масс данной системы тел находится на нити на расстоянии $R_1 = m_2 l/(m_1+m_2)$ от первого тела и движется относительно плоскости со скоростью $v_ц = m_2 v/(m_1+m_2)$. Выберем С. О., в которой центр масс покоится. В ней тела m_1 и m_2 совершают равномерное движение по окружностям вокруг неподвижного центра масс (рис. 4, б), при этом скорость первого тела относительно этой С. О. равна по величине $v_ц$.

Согласно второму закону Ньютона, сила натяжения нити, действующая на первое тело, равна

$$F = m_1 \frac{v_ц^2}{R_1}.$$

Откуда, подставляя выражения для R_1 и $v_ц$, находим окончательно

$$F = \frac{m_1 m_2 v^2}{(m_1+m_2)\,l}.$$

Во многих случаях при переходе в С. О., связанную с центром масс, решение задачи настолько упрощается, что имеет смысл сначала перевести все данные задачи в эту С. О. и получить результат, а потом вернуться в исходную С. О. В качестве примера рассмотрим две задачи об абсолютно упругом ударе шаров.

Задача 5. *Два шара с массами m_1 и m_2, движущиеся со скоростями v_1 и v_2 соответственно, испытывают абсолютно упругий лобовой удар. Каковы будут скорости шаров после удара?*

В С. О., связанной с центром масс, полный импульс шаров равен нулю как до, так и после удара. Легко догадаться, что оба закона сохранения — импульса и энергии — будут выполняться, если просто поменять направления скоростей шаров на противоположные. Запишем соответствующие формулы:

начальные скорости шаров в С. О. центра масс равны

$$u_1 = v_1 - v_ц = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2}, \quad u_2 = \frac{m_1(v_2-v_1)}{m_1+m_2};$$

конечные скорости шаров в С. О. центра масс —

$$u_1' = -u_1, \quad u_2' = -u_2;$$

конечные скорости шаров относительно земли есть

$$v_1' = u_1' + v_ц = -\frac{m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2} + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2} = \frac{(m_1-m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1+m_2},$$

$$v_2' = u_2' + v_ц = \frac{(m_2-m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1+m_2}.$$

В качестве последнего примера рассмотрим задачу о нецентральном упругом ударе.

Задача 6. *Шар массой m_1 налетает со скоростью v_1 на покоящийся шар массой m_2 ($m_2 < m_1$). На какой максимальный угол может отклониться шар m_1 при ударе? Шары абсолютно упругие и гладкие.*

В С. О. центра масс (рис. 5) шары сближаются со скоростями

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_ц = \vec{v}_1 - \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1+m_2},$$

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1+m_2}.$$

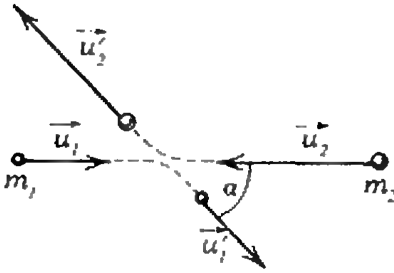


Рис. 5.

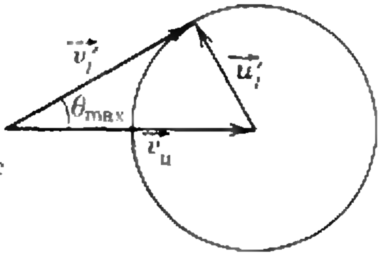


Рис. 6.

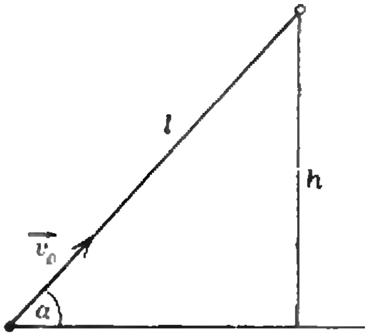


Рис. 7.

при этом

$$m_1\vec u_1 = -m_2\vec u_2.$$

В результате нецентрального удара скорости шаров сохранят прежние значения и опять будут направлены противоположно друг другу:

$$u_1' = u_1,\ u_2' = u_2,\ m_1\vec u_1' = -m_2\vec u_2'.$$

Однако вектор конечной скорости первого шара $\vec u_1'$ будет повернут относительно вектора его начальной скорости на некоторый угол α. В зависимости от взаимного расположения шаров в момент удара этот угол может изменяться от нуля (легкое касание шаров) до 180° (лобовой удар). Возможные положения конца вектора $\vec u_1'$ лежат на окружности радиусом u_1 (рис. 6). Конечная скорость первого шара относительно земли равна $\vec v_1' = \vec u_1' + \vec v_ц$. Максимальный угол между векторами $\vec v_1'$ и $\vec v_ц$ получается в том случае, когда вектор $\vec v_1'$ касается окружности. Отсюда находим искомый угол θ_{max}:

$$\sin\theta_{max} = \frac{u_1}{v_ц} = \frac{m_2 v_1}{m_1+m_2} : \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\theta_{max} = \arcsin(m_2/m_1).$$

Упражнения

1. В тот момент, когда начинается свободное падение тела, человек бросает камень, стремясь попасть в падающее тело. Какой должна быть для этого начальная скорость камня (угол с горизонтом и модуль), если тело перед падением находилось на высоте h и на расстоянии l от человека (рис. 7)?

2. Маленький грузик подвешен на нити длиной l. С какой скоростью надо перемещать точку подвеса в горизонтальном направлении, чтобы грузик совершил полный оборот?

3. Упругая гладкая стена движется со скоростью v_1. Навстречу стене летит упругий шар, скорость которого перед ударом равна v_2 и перпендикулярна стене. Найдите скорость шара сразу после удара о стену.

4. Притягиваясь по закону всемирного тяготения, две звезды движутся по круговым орбитам, оставаясь все время на расстоянии l друг от друга. Найдите период вращения такой двойной звезды, если ее масса равна M.

Реклама!

Если ты искренне любишь физику и математику (а как же иначе — ведь ты читаешь «Квант») и хочешь заниматься научной работой, но... тебя привлекает и инженерное, практическое воплощение научных идей, путь «от идеи — к жизни», иными словами, если ты никак не можешь выбрать, кем же ты хочешь стать — ученым, инженером или и тем и другим одновременно, ты — наш человек и тебе надо поступать в Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина на специальность 0906 «Физические процессы горного и нефтегазового производства».

Войди в нашу дверь — и через 5,5 лет ты выйдешь высококлассным инженером-исследователем, будешь вести интересную научную работу с прицелом на глобальное развитие нефтегазовой отрасли, закладывать идеи в принципиально новые, экологически чистые и эффективные технологии (и видеть, как они воплощаются в жизнь!). Ты будешь прекрасно знать математику, физику, гидромеханику, чувствовать физическую сущность технологических процессов, владеть персональной ЭВМ любого класса лучше, чем, например, электробритвой. Тебя будут ждать во всех НИИ — как отраслевых, так и академических. С тобой будут советоваться министры и депутаты, иностранные специалисты и кооператоры, ведь ты — Новый человек! А в годы учебы тебе предстоит интересная студенческая жизнь, общение с талантливыми студентами, остроумными преподавателями, обаятельными деканами... О чем еще можно мечтать?

Адрес института: 117296, г. Москва, Ленинский пр., 65. Справки по телефону приемной комиссии 135-83-06 и 930-92-73.

Мы ждем тебя!

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$4|\cos x|+3=4\sin^2 x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2}\leqslant 0.$$

3. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN=3$, а угол M равен $120°$. Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN. Найдите площадь треугольника KLN.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=\dfrac{5}{2},\\ 4\sqrt{x}-3\sqrt{y}=1.\end{cases}$$

5. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL=1$, $PQ=3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP, LP, NQ, MQ, PQ касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

6. Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1.$$

Вариант 2
(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Можно ли разместить равносторонний треугольник со стороной 3 внутри круга радиусом $\sqrt{10}$?

2. Решите уравнение

$$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33.$$

3. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут — мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что все трое преодолели одинаковую часть пути от A до B. На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

4. Решите неравенство

$$1\leqslant|\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{\frac{1}{\pi}}\left(\frac{a^2+4\pi^2+4}{4x-x^2-2(a-2\pi)|x-2|+4\pi a}\right)-\sqrt{(x-5a+10\pi-34)\cdot(|\pi-x|-a+\pi+2)}=0$$

имеет по крайней мере одно целочисленное решение.

6. В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC. Точка O, являющаяся серединой высоты SH, находится на одинаковом расстоянии от точки S, точки E, лежащей на ребре SA, и точки F, лежащей на ребре SB. Известно, что $SH=8$, $AB=16\sqrt{2}$, $EF=8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не больше $30°$, а расстояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 5x-\sin x=\sqrt{8}\cos 3x.$$

2. В остроугольном треугольнике площади S известны величины α и β углов A и B. Найдите длину высоты, опущенной на сторону, прилежащую к углам A и B.

3. Решите уравнение

$$\log_2(x+4)+2\log_2\sqrt{x}=5.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найдите отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к апофеме пирамиды.

5. При каких значениях m уравнение

$$(2x)^2-4x(m3^m)^{\frac{1}{2}}+3^{m+1}+m-3=0$$

имеет корни и каковы знаки корней при различных значениях m?

6. Две окружности радиусов R и r пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках C и D, N — точка пересечения прямых AB и CD (B между A и N). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника ACD,

2) отношение высот треугольников NAC и NAD, опущенных из вершины N.

Вариант 4
(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{2x}{x+1}<1.$$

2. Последовательность чисел b_1, b_2, b_3, ... является геометрической прогрессией. Известно, что $b_1\cdot b_3\cdot b_{11}=8$. Найдите $b_2\cdot b_8$.

3. Решите уравнение

$$\log_2(3\cos x-\sin x)+\log_2(\sin x)=0.$$

4. В прямоугольнике $LMNK$ диагонали LN и MK пересекаются в точке O. Треугольники MON и $MO'N$ симметричны относительно общей стороны MN. Угол MON в два раза больше, чем угол $LO'K$. Найдите стороны прямоугольника $LMNK$, если известно, что площадь пятиугольника $LMO'NK$ равна $5\sqrt{3}$.

5. Решите уравнение

$$(2x+1)(1+\sqrt{(2x+1)^2+7})+x(1+\sqrt{x^2+7})=0.$$

Вариант 5
(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{49}(2x^2+x-5)+\log_{\frac{1}{7}}(1+x)=0.$$

2. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x)=\frac{1}{2x^3-9x^2+12x+1}$$

на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 3$.

3. Решите уравнение

$$\sin x\,(3\sin 2x\cdot\sin^3 x+12\sin 2x\cdot\sin x-$$
$$-16\cos x)+2\sin 4x=0.$$

4. В окружность радиусом 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K, лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA<KF$ и $KA=\sqrt{11}-1$, проведена секущая KH, пересекающая окружность в точках N и H. Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2 ($KN=2$), а угол NFH — тупой. Найдите угол HKF.

5. Числа x, y, z таковы, что

$$x^2+3y^2+z^2=2.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$2x+y-z?$$

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\cos^2 x-2\sin 2x\cos 2x-\sqrt{3}\sin^2 x=0.$$

2. Автобус проехал первую часть пути из пункта A в пункт $Б$, расстояние между которыми 370 км, со скоростью 80 км/ч, а на второй части пути вынужден был снизить скорость до 40 км/ч из-за ремонта дороги. На обратном пути из $Б$ в A скорость на ремонтируемом участке дороги составляла 30 км/ч, а на остальной части пути — 90 км/ч. Известно, что обратный путь из $Б$ в A автобус проехал на 25 минут быстрее, чем из A в $Б$. Найдите время движения по маршруту из A в $Б$.

3. Решите неравенство

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+1)\leqslant 2.$$

4. Длина стороны AB прямоугольника $ABCD$ равна 12, а длина стороны AD равна 5. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E. Найдите отношение расстояния от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник AED, к расстоянию от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник DEC.

5. Решите неравенство

$$\left(x-x^2-\frac{5}{4}\right)\log_{\sqrt{3}}(2+2\cos^2 x-\cos 2x+$$
$$+3\cos^2\pi x)\geqslant -2.$$

Вариант 7
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right).$$

2. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 12 км от A, по горной дороге со скоростью 6 км/ч поднимается в гору пешеход. Одновременно с ним из пункта A в пункт B выехал автобус. Доехав до пункта B менее чем за один час, автобус поехал обратно навстречу пешеходу и встретил его через 12 минут после начала движения их пункта B. Найдите скорость автобуса на подъеме, если известно, что она в два раза меньше его скорости на спуске.

3. Решите неравенство

$$\log_{10-x^2}\left(\frac{16}{5}x-x^2\right)<1.$$

4. Даны четыре точки A, B, C, D, не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A, а прямых BC и CD в точке C. Найдите площадь сферы, если известно, что $AB=1$, $BD=2$, $\angle ABC=\angle BAD=90°$.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Известно, что $AD=2$, $\angle ABD=\angle ACD=90°$, и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найдите длину стороны BC.

Вариант 8
(геологический факультет)

1. Определите, какое из чисел больше:

$$2\log_2 5 \text{ или } 3\log_{\frac{1}{8}}\frac{1}{23}.$$

2. Решите неравенство

$$x\leqslant\frac{2}{x+1}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{|\cos x|}{\cos x}=\cos 2x-1$$

на отрезке $[\pi;\ 2\pi]$.

4. В треугольнике ABC угол ACB прямой, CD — биссектриса, $AD=2\sqrt{3}$. Найдите BC, если известно, что $DM=\sqrt{3}$, где DM — высота треугольника ADC.

5. В сосуде находилось 9 кг раствора соли в воде. Из сосуда отлили часть раствора и добавили количество воды, равное по весу отлитой части раствора. Затем опять вылили столько же по весу раствора, сколько в первый раз. После этого количество соли в сосуде уменьшилось в 9/4 раз по сравнению с исходным количеством. Определите первоначальное количество соли в сосуде, если известно, что вес добавленной воды вдвое меньше первоначального веса соли в растворе.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a^2+8a+16)(2-2\cos x-\sin^2 x)+$$
$$+(32+2a^2+16a)(\cos x-1)+3a+10=0$$

не имеет решений.

Вариант 9
(экономический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x^2-2x-8}}.$$

2. Вычислите

$$\frac{\log_3 42}{\log_{126} 3}-\frac{\log_3 378}{\log_{14} 3}.$$

3. Решите уравнение

$$|x+1+|-x-3||-6=x.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}(3\sin x)=-1,$$

удовлетворяющее условию $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$.

5. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E. Найдите величину угла ACB, если $CE=1$, $BE=CD=4$, $AD:BD=4:1$.

6. Решите уравнение в целых числах

$$9x^2y^2+9xy^2+6x^2y+x^2+2y^2+18xy+5x+$$
$$+7y+6=0.$$

Вариант 10
(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$x+3<\frac{1}{x+1}.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\left|\cos^2\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right|=3\cos x+1.$$

3. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2\log_x 8+3y=24, \\ -2(\log_x 0{,}5)^3+y=8. \end{cases}$$

4. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP и PQ, а другая — сторон MN, MQ и PQ. Точки B и A лежат, соответственно, на сторонах MN и PQ, причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ, если $NP=b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на величину $2p$.

5. При каждом значении параметра a найдите все решения неравенства

$$x+2a-\sqrt{3ax+4a^2}>0.$$

Вариант 11
(отделение прикладной социологии философского факультета)

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2-5x+4}{5-x}>0.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}(11+x)=2\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{x+1}+2).$$

3. До приближающегося Ахиллеса оставалось еще 6 м, когда черепаха поняла, что ей не уйти от погони, и она обреченно остановилась. Какой путь с начала погони проделала черепаха, если ее скорость в 17 раз меньше скорости Ахиллеса, расстояние между ними за время погони сократилось в 9 раз и их движение происходило по одной прямой?

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y(x)=\frac{3}{4}|x|-x^3$$

на отрезке $[-0{,}7;\ +0{,}7]$.

5. Найдите все пары значений (α,β), при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 8x+(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\,y=4, \\ (\alpha-\beta)\,x+26y=2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Вариант 12
(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2+x}>1+2x.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{2x+2}(2x^2-8x+6)=2.$$

4. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причем угол CDA равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AD, DC и дуги AC, если $OC=2$, $OD=\sqrt{3}$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая равенствам $x+y+z=x^2+4y^2$ и $x+2y+3z=a$.

Физика

Физический факультет

1. Двигатель запускаемого с земли реактивного снаряда массой m работает время τ, создавая постоянную по величине и направлению силу тяги F и обеспечивая прямолинейное движение снаряда под углом α к горизонту. Определите высоту, на которой прекращается работа двигателя. Изменением массы снаряда и сопротивлением воздуха пренебречь.

2. В одном из двух одинаковых заполненных водой цилиндрических сообщающихся сосудов плавает шарик (рис. 1). Масса шарика m, плотность воды ρ, сечение каждого сосуда (площадь дна) S. На сколько изменится уровень воды, если вынуть шарик?

3. На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью, находится маленькая шайба с прикрепленной к ней нитью (рис. 2). Другой конец нити закреплен в некоторой точке наклонной плоскости. Если

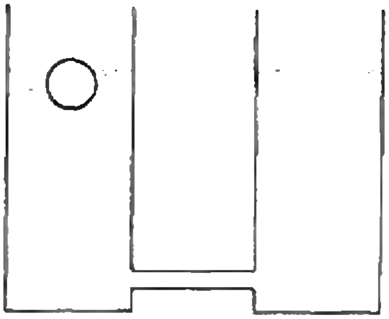


Рис. 1.

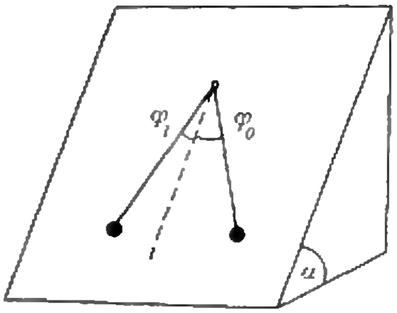


Рис. 2.

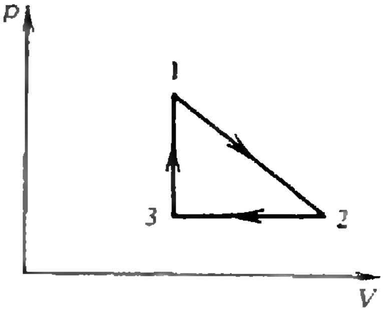


Рис. 3.

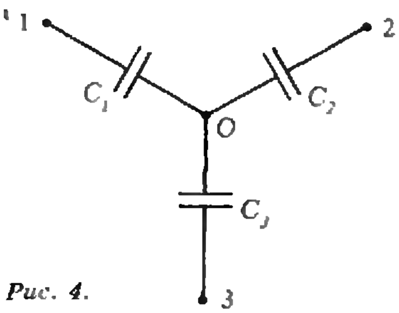


Рис. 4.

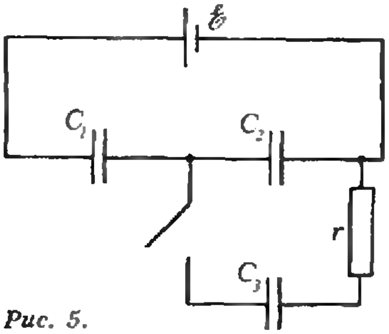


Рис. 5.

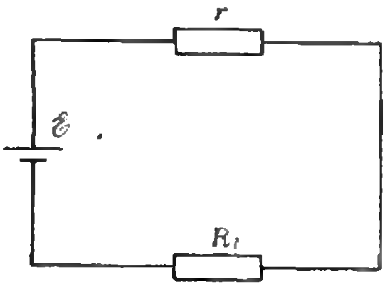


Рис. 6.

шайбу отклонить (при натянутой нити) от положения равновесия на малый угол φ_0 и отпустить (без начальной скорости), то в процессе колебаний максимальный угол отклонения шайбы в противоположном направлении будет равен φ_1 ($\varphi_1 < \varphi_0$). Найдите коэффициент трения шайбы о плоскость. Размерами шайбы пренебречь, силу трения считать не зависящей от скорости.

4. Идеальный газ расширяется из состояния *1* в состояние 2 (рис. 3), увеличивая свой объем в 2 раза. При этом давление изменяется по линейному закону, а температура в состоянии 2 оказывается равной температуре в состоянии *1*. Затем газ изобарически сжимается до исходного объема, переходя в состояние *3*. Из состояния *3* газ изохорически переводится в исходное состояние *1*. Какую работу совершает 1 моль газа за рассмотренный цикл, если его температура в состоянии *1* равна T?

5. В баллоне емкостью $V = 3$ л находится воздух с относительной влажностью $r_1 = 60$ % при температуре $t_1 = 17$ °C. Какой будет влажность воздуха, если в баллон добавить $m = 1$ г воды, а температуру повысить до $t_2 = 100$ °C? Давление насыщенных паров при температуре t_1 равно $p_{н1} = 2$ кПа.

6. В схеме, *изображенной* на рисунке 4, известны потенциалы точек *1*, *2* и *3* и емкости конденсаторов C_1, C_2 и C_3. Найдите потенциал точки *O*. Потенциалы со временем не меняются, предварительно все конденсаторы были разряжены.

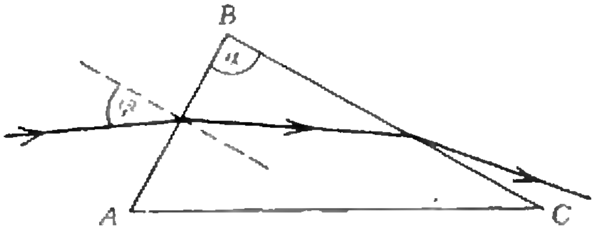


Рис. 7.

7. Конденсаторы C_1 и C_2 последовательно подключены к источнику постоянного напряжения (рис. 5). *После зарядки конденсаторов* к конденсатору C_2 через резистор r подключают конденсатор C_3. Какое количество теплоты выделится на резисторе в процессе зарядки конденсатора C_3? Емкости всех трех конденсаторов одинаковы и равны C. ЭДС источника $\mathscr{E}$.

8. К источнику постоянного напряжения через резистор r подключен резистор R_1 (рис. 6). При этом на нем выделяется мощность P_1. Если вместо резистора R_1 включить резистор R_2, то на нем выделяется мощность P_2. Чему равна ЭДС источника? Сопротивления резисторов R_1 и R_2 известны, сопротивление резистора r неизвестно.

9. На стеклянную призму с показателем преломления n в плоскости ABC на сторону AB падает луч света (рис. 7). Преломляющий угол призмы $\alpha = 90°$. Угол падения равен φ. Луч выходит из призмы, преломившись на стороне BC. На какой угол отклоняется луч в результате прохождения через призму?

10. Точечный источник света расположен на оси собирающей линзы. За линзой находится диафрагма с диаметром отверстия $d_1 = 1$ см. Оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости диафрагмы и проходит через центр отверстия диафрагмы. За диафрагмой на расстоянии $l = 10$ см находится экран, на котором образуется световое пятно диаметром $d_2 = 0{,}5$ см. В отверстие диафрагмы вставляется тонкая рассеивающая линза, при этом на экране образуется световая точка. Чему равно фокусное расстояние рассеивающей линзы?

Публикацию подготовили
Д. Денисов, М. Потапов, В. Прошкин,
И. Сергеев, А. Соколихин

Информация

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмые классы одиннадцатилетних общеобразовательных школ на заочное отделение. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в октябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно заполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 мая 1990 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи; закончившие 9-й или 10-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат при МГУ. Учащиеся, успешно выдачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс (полное название);

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см^2, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечание

Для школьников 8—11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 939-39-43.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1990 году

1. На праздничном фейерверке запустили 2 ракеты с интервалом 6 минут. Через t минут после своего старта первая ракета находится на высоте $h_1(t)=100\sqrt[3]{t}$ метров, а вторая — на высоте $h_2(t)=100\sqrt[4]{t}$ метров. Какая ракета будет находиться выше через 5 минут после старта второй ракеты?

2. Найдите такую точку M внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$, чтобы сумма $MA+MB+MC+MD$ была минимальной.

3. Найдите все целые положительные x и y, удовлетворяющие уравнению $xy-3x-5y=0$.

4. Постройте треугольник с помощью циркуля и линейки без делений, если известны, т. е. изображены на листе бумаги, следующие элементы: отрезок, равный стороне этого треугольника, отрезок, равный высоте, опущенной на эту сторону, и угол, равный углу между этой высотой и одной из оставшихся сторон.

5. Пусть неотрицательные числа x, y и z связаны соотношением $x+y+z=1$. Докажите, что $xy+yz+zx\leqslant\frac{1}{3}$.

6. Длины сторон прямоугольного треугольника равны x, $2kx$ и $3k^2x$. Найдите все возможные k.

7. На столе стоит 1990 коробок, в которых лежат шарики: в одной коробке — один, в другой — два, в третьей — три, и так далее до 1990. Разрешается производить следующую операцию: из любых двух коробок высыпаются все шарики, скажем, m и n, $m\geqslant n$, после чего в одну из этих двух коробок кладется $m-n$ шариков, а в другую — $2(m-n)$. Можно ли, повторив операцию достаточное количество раз, добиться, чтобы все коробки были пусты.

8. На 2 вакантных места в совете отряда имелось 4 кандидата: Петя, Коля, Сережа и Таня. Выборы были тайными: на пионерском сборе были розданы бюллетени с 4 фамилиями и каждый пионер вычеркнул 2 фамилии. По итогам голосования Петя набрал больше всех голосов — 8, а Коля меньше всех — 5. Сколько пионеров было на сборе?

9. На арену цирка, имеющую форму круга радиуса 7 метров, выбежали 7 клоунов. Обязательно ли расстояние между какими-нибудь двумя из них не превосходит 7 метров?

10. При каких a уравнения $x^3+2ax^2+2x+1=0$ и $x^4+(2a+1)x^3+(2a+2)x^2+4x+3=0$ имеют общий корень?

Прием на экспериментальное отделение ВЗМШ «Языки и литература»

Отделение принимает учащихся 7-х, 8-х и 9-х классов общеобразовательных школ (за исключением проживающих в Москве и Ленинграде).

Цель отделения «Языки и литература» — выработать навыки самостоятельного анализа языковых явлений и литературных фактов, ознакомить на практике с основными направлениями современной филологии, в том числе с математической и структурно-прикладной лингвистикой и информатикой, помочь профессиональной ориентации учащихся.

Успешно окончившим отделение «Языки и литература» выдаются удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ на отделение «Языки и литература» необходимо выполнить вступительную работу. Не обязательно ответить на все вопросы, иногда достаточно оригинального выполнения трех-четырех заданий, чтобы быть зачисленным.

Задачи

1. Даны зулусские слова (зулусский — язык коренного населения Южно-Африканской Республики), заимствованные из европейских языков:

pikiniki, pulezidenti, palagilafu, siginali, Tilansivali, kilasi, gilamu, pulani, asipilini, apendikisi, palafini, balikoni.

Задание 1. Определите, что могут означать эти слова.

Задание 2. Установите, как будут выглядеть в зулусской передаче английские слова clinic (больница), tram (трамвай), box (коробка), film (фильм), mandarin (мандарин).

Примечание. Зулусские слова записаны упрощенно: без начального грамматического показателя.

2. Даны венгерские существительные и *все* их переводы на русский язык (в перепутанном порядке):

nyírfa, körte, almák, körtefa, nyírfák, alma, almafa

береза, груша, яблоня, яблоко, березы, яблоки

Задание. Установите правильные переводы. Объясните свое решение.

Примечание. ö — особый гласный звук венгерского языка; знак ´ над гласной обозначает ее долготу.

3. В сербскохорватском языке ударение бывает четырех типов — два типа с восходящим движением тона (знаки ` и ´) и два типа с нисходящим движением тона (знаки ̏ и ̑). Ниже приведены некоторые сербскохорватские и соответствующие им русские слова:

мухо̀ловка	— мухоловка
верѐно	— веретено
ме̑д	— мёд
бро̑д	— брод
беспо̀вратно	— бесповоротно
мра̏з	— мороз
кр̏тки	— кроткий
седо̀бради	— седобородый
бро̏да	— брода (р. п.)
бра́да	— борода
гово̀рити	— говорить
красо̀та	— красота
бра̑в	— боров
зла̑то	— золото
бла̏то	— болото
бе̏зумни	— безумный
ву̏чица	— волчица
бу̏ха	— блоха
ту̑сти	— толстый
вла́кно	— волокно
сла̏би	— слабый

Задание 1. Переведите на сербскохорватский язык: город, голова, безголовый, голорукий, колода, золоторогий, сестра, волк, глотать, грех, верв.

Задание 2. Переведите на русский язык (проставив ударения в русских переводах): вра̑на, вѐдро, ве̏дро, о̏брезати, за̀мка, не̏бо, но̏ски.

4. Даны грузинские слова с переводами на русский язык:

mravalsaukunovani	— многовековой
ṭomi	— том
ṭiraži	— тираж
didṭiražiani	— многотиражный
saukune	— столетие
didmnišvnelovani	— многозначительный
saxe	— вид
mravalsaxovani	— многообразный
ǯaxi	— семья
mravalṭomiani	— многотомный
atasi	— тысяча

Задание 1. Переведите на грузинский язык слова: многосемейный, многотысячный.

Задание 2. Что означают грузинские слова didi и mravali?

Задание 3. Переведите слово kmariani (слово kmari означает «муж»).

5. Дана запись некоторых чисел на языке гуси (африканский язык, на котором говорят в Кении):

57 — emerongo etano na itano na ibere

82 — emerongo etano na etato na ibere

230 — amagana abere na emerongo etato

308 — amagana atato na itano na itato

705 — amagana atano na abere na itano

Задание. Запишите на языке гуси числа 28 и 837.

6. Даны предложения итальянского языка и их переводы на русский язык:

Mi lavo	— Я моюсь
Ti calzi	— Ты обуваешься
Ti pettiniamo	— Мы причесываем тебя
Ci calzate	— Вы обуваете нас
Posso pettinarmi	— Я могу причесаться
Lavateci	— Вымойте нас
Vi calzo	— Я обуваю вас

Задание. Переведите на итальянский язык следующие предложения:

Причешитесь

Ты моешь нас

Мы можем обуть тебя

7. Решите смысловые пропорции:

$$\frac{\text{ОТЕЦ}}{\text{БАБУШКА}} = \frac{?}{\text{МАТЬ}}$$

$$\frac{\text{СВАТАТЬСЯ}}{\text{ЖЕНА}} = \frac{?}{\text{ГОСТЬ}}$$

$$\frac{\text{АТЕЛЬЕ}}{\text{ШИТЬ}} = \frac{\text{БОЛЬНИЦА}}{?}$$

$$\frac{\text{ИДТИ}}{\text{ВОДИТЬ}} = \frac{\text{ДВИГАТЬСЯ}}{?} = \frac{?}{\text{КЛАСТЬ}}$$

8. Ваш любимый литературный жанр? Аргументируйте свое предпочтение: достоинства данного жанра по сравнению с другими, формальные особенности, содержательные возможности. Какие известные вам произведения написаны в этом жанре?

9. Чем отличается поэзия от прозы? Является ли различие непреодолимым?

10. Как бы вы объяснили, что такое эпос, эпопея, эпический дух, орфоэпия? Попытайтесь восстановить, какой смысл вкладывали в слово ἔπος древние греки.

Примечание. Не забудьте, что прежде, чем оперировать каким-либо понятием («повесть», «лирика», «эпос» и т. д.), надо оговорить, какое содержание вы в него вкладываете (сформулировать определение самостоятельно или с помощью словаря).

11. Как вы представляете себе «точные методы» в литературоведении?

12. Какие области научного знания вы считаете смежными с лингвистикой? Что может дать человеку наука о языке?

Задания 1—6 предлагались в разные годы на олимпиадах по лингвистике и математике, которые проводятся регулярно с 1965 года на базе отделения структурной и прикладной лингвистики филологического факультета МГУ, а с 1989 года — совместно тремя вузами: Московским государственным университетом им. М. В. Ломоносова, Московским государственным историко-архивным институтом и Московским государственным институтом иностранных языков им. Мориса Тореза.

Задания необходимо выполнять на русском языке в ученической тетради не более 18 листов. Эта тетрадь высылается простой бандеролью. Не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	Московская
Фамилия, имя ученика	Иванов Петр
Год рождения	1974
Класс и школа	7 кл. «Б» школы № 2
Фамилия, имя, отчество учителя русского языка и литературы	Орлова Мария Михайловна
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 3 Мать — медсестра
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	141456 Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Отвечать на вопросы надо в том порядке, в каком они стоят в задании: сначала вопросы, потом ответ.

В тетрадь вложите два листа бумаги размером 6×14 см с четко написанным вашим почтовым адресом, фамилией и именем, а также полностью надписанный почтовый конверт.

Срок отправки вступительной работы — *не позднее 1 мая 1990 года* (по почтовому штемпелю). Если вы успешно выполните вступительную работу, то, начиная с сентября 1990 года, будете получать задания по языкознанию и литературоведению, которые содержат теоретический материал и вопросы для самостоятельной работы, а также контрольные работы. Задания по языкознанию опираются на опыт проведения олимпиад по лингвистике и математике. В течение года предусмотрено три контрольных работы по каждому предмету. Все самостоятельные и контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями заочной школы — студентами, аспирантами и преподавателями филологического факультета МГУ.

Отмечаем особо, что обучение в заочной школе не дает никаких преимуществ при поступлении на факультет.

Вступительную работу надо выслать по адресу:

119823 Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ; на конверте в левом верхнем углу надо обязательно пометить: «Языки и литература».

Дорогие читатели!

К нам в редакцию поступают многочисленные жалобы по поводу несвоевременной доставки номеров подписчикам. Эти срывы происходят не по нашей вине. Чеховский полиграфкомбинат, который печатает журнал, в результате перегрузки не всегда соблюдает график выпуска номеров. Свою лепту вносит и Министерство связи СССР, которое не обеспечивает своевременную доставку вышедших номеров, а в 1989 году вообще сорвало доставку ряда номеров нашим подписчикам.

Выражаем сожаление и надеемся, что в 1990 году оснований для претензий по подобным поводам у вас не будет.

Редакция

Ответы, указания, решения

[illegible] раз о законе Паскаля

1. При вставлении в бочку второй трубки ничего не изменится.

2. Сила давления снизу на приставное дно BC равна весу водяного столба в форме цилиндра с основанием BC и высотой h. Из-за формы сосуда вес этого столба больше, чем 25 Н. Поэтому под тяжестью гири приставное дно не отрывается. Когда же налита вода, силы давления сверху и снизу одинаковы, и дно отрывается под действием собственной тяжести.

3. Противоречие разрешается, если рассмотреть механизм передачи давления по Паскалю. Сжимая внешней силой жидкость, мы увеличиваем ее плотность, и возникают упругие силы, препятствующие дальнейшему уплотнению. Они же вызывают давление на соседний слой, которое и передается по жидкости. Сила же гидростатического давления скомпенсирована весом вышележащего столба жидкости и аналогичным образом передаваться не может.

[illegible]емы отсчета в задачах механики

1. $\alpha=\arcsin(h/l)$; $v_0\geqslant l\sqrt{g/(2h)}$.
2. $v_{\min}=\sqrt{5gl}$.
3. $v_2'=v_2+2v_1$.
4. $T=2\pi l\sqrt{l/(GM)}$.

[illegible]ковский государственный университет [illegible] М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Указание. Сделайте замену $|\cos x|=t$.

2. $\left[1-\sqrt{3},\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left(2,\ \dfrac{5}{2}\right)$. Указание. Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} 1-\sqrt{3}\leqslant x<\dfrac{5}{2}, \\ x\neq 2. \end{cases}$$

Числитель дроби равен нулю и меняет знак при $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, знаменатель — при $x=2$. Вне отрезка $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant x\leqslant 2$ числитель и знаменатель имеют разные знаки.

3. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника KLN (см. рис. 1). Радиусы OL и ON перпендикулярны касательным LM и MN соответственно, а угол LON между ними равен 60°. Поэтому треугольник OLN — правильный, а из перпендикулярности OL и KN следует, что KM — биссектриса угла LNO. Следовательно, высота треугольника KLN, опущенная на известную его сторону KN, равна $\dfrac{1}{2}LO=\dfrac{1}{2}KN\times$ $\times\operatorname{tg}30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\left\{\dfrac{1}{9};\ \dfrac{1}{81}\right\}$. Указание. В первом уравнении выполните замену $z=\log_9 x$.

5. $\dfrac{36}{11\sqrt{11}}\pi$. Решение. Прямоугольник $KLMN$ касается сторонами шара, поэтому $KLMN$ — квадрат. Из равенства отрезков касательных, проведенных к шару из одной точки, следует, что треугольники KPL и MQN — равнобедренные. Пусть Q_1 и P_1 — середины их оснований KL и MN соответственно (это точки касания сферы, см. рис. 2), тогда точки Q, P, Q_1, P_1 лежат в плоскости, перпендикулярной MN и плоскости $MNKL$, поэтому центр шара лежит в плоскости QPQ_1P_1. Задача сводится к вычислению радиуса окружности, описанной около треугольника P_1SQ_1, где S — точка касания шара с отрезком PQ.

Пусть A, B, F точки касания шара с отрезками KP, NQ, KN соответственно, а H — точка пересечения продолжения сторон KP и NQ трапеции $KPQN$ ($KN\parallel QP\parallel P_1Q_1$). По свойству отрезков касательных имеем:

$$KA=NB=FN=KF=\frac{1}{2},$$

$$HA=HB,\ HN=HK,\ HP=HQ$$

(последнее равенство — следствие параллельности KN и PQ).

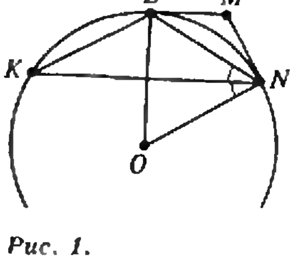


Рис. 1.

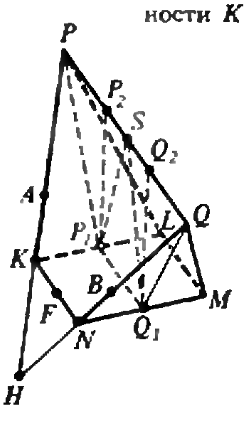


Рис. 2.

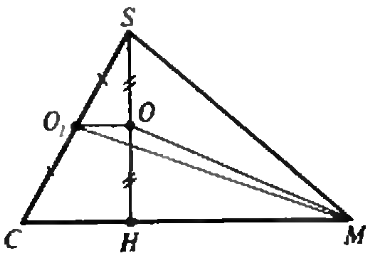


Рис. 3.

$$AP = QB = SP = SQ = \frac{3}{2},$$
$$KP = NQ = 2.$$

Пусть $Q_1Q_2 \perp PQ$, $P_1P_2 \perp PQ$, тогда $QQ_2 = PP_2 = 1$. По теореме Пифагора найдем последовательно из треугольников NQ_1Q, Q_1Q_2Q, Q_1Q_2S длины отрезков QQ_1, Q_1Q_2, $SQ_1 = SP_1$, и нам останется только найти радиус R описанной окружности для равнобедренного треугольника P_1SQ_1, у которого

$$SQ_1 = SP_1 = \sqrt{3},$$
$$Q_1P_1 = 1.$$

Получим $R = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$.

6. $-\sqrt{\dfrac{7}{5}}$. Указание. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно z, запишите его дискриминант. Затем из всех возможных x, для которых дискриминант неотрицателен, выберите наименьшее.

Вариант 2

1. Можно. Указание. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен $\sqrt{3}$, а $\sqrt{10} > \sqrt{3}$.

2. 1/2. Указание. Выполните замену $y = \sqrt{3 + 4x - 4x^2}$.

3. 48 мин. Указание. Пусть C — точка между A и B, в которой одновременно оказались все три путешественника, $s_1 = AC$, $s_0 = CB$, u, v, w — скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста соответственно, x — искомое время. Тогда, по условию

$$\frac{s_0}{u} = \frac{s_0}{v} + x = \frac{s_0}{w} = 1,$$

откуда

$$x = \frac{\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}}{\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{w}}.$$

Кроме того,

$$\frac{s_1}{u} = \frac{s_1}{v} + 2 = \frac{s_1}{w} + \frac{5}{2},$$

так что

$$\frac{\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{v}}{\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{w}} = \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5}.$$

4. $x = 3/2$; $-\dfrac{\pi}{3} + \pi k < x < -\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $\dfrac{\pi}{4} + \pi k < x < \dfrac{\pi}{3} + \pi k$, $k = 1, 2, \ldots$

Указание. Неравенство имеет вид $u^v \geqslant 1$, где u и v — некоторые функции, причем $|u| \leqslant 1$. Это, вообще говоря, значит, что $v \leqslant 0$ (в нашем случае $|u| \neq 1$). Так что приходим к неравенству

$$\sqrt{2x-3}\,\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}\,|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right) \leqslant 0,$$

причем следует учесть ограничения $|\cos x| \neq 0$, $|\cos x| \neq 1$, $\cos^2 x > \dfrac{1}{2}$.

Далее, заметив решение $x = 3/2$ и сократив на положительный множитель (при $x > 3/2$), придем к неравенству, решая которое, удобно сделать замену $|\cos x| = t$ $(0 < t < 1)$.

5. $2\pi - 8$, $2\pi - 1$, 2π. Указание. Пусть $|x - 2| = t$. Тогда знаменатель выражения, стоящего под знаком логарифма, имеет вид

$$f(t) = -t^2 - 2(a - 2\pi)t + 4\pi a + 4.$$

Функция f принимает свое наибольшее значение при $t = 2\pi - a$, и это значение равно $a^2 + 4\pi^2 + 4$. Поэтому дробь под знаком логарифма не меньше 1 и, значит, всегда логарифм не положителен. Отсюда следует, что (следует учесть неотрицательность корня) оба слагаемых равны нулю. Это возможно только при выполнении следующих условий: $|x - 2| = 2\pi - a$ и $x - 5a + 10\pi - 34 = 0$, либо $|x - 2| = 2\pi - a$ и $|x - \pi| - a + \pi + 2 = 0$. Решать полученные системы удобнее всего, исключив предварительно a.

6. $\dfrac{8(2\sqrt{2} - 1)}{7}$. Решение.

1. На первом этапе мы докажем, что точки H и C совпадают. Для этого рассмотрим сечение SCM (см. рис. 3). Пусть O_1 — середина SC. У треугольников SMC и SMH общий угол M, общая сторона SM и $MC \geqslant MH$. Поэтому $O_1M \geqslant OM$ (угол O_1OM — тупой) и, значит, $OM \leqslant 4\sqrt{13}$. Но тогда $HM = \sqrt{OM^2 - OH^2} \leqslant 8\sqrt{3}$ и потому $\operatorname{tg}\angle SMH = \dfrac{SH}{HM} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и, следовательно, $\angle SMH \geqslant 30°$. Но это значит, что $\angle SMH = 30°$ и $CH = HM$, т. е. $C = H$.

2. Рассмотрим пирамиду $SCAB$. Пусть $CB = a$, $AC = b$. Так как медиана $CM = 8\sqrt{3}$ (см. рис. 4), имеем

$$2(a^2 + b^2) = AB^2 + (2CM)^2 = 16^2 \cdot 5. \qquad (1)$$

Поскольку точка O одинаково удалена от точек E и F, причем каждое из этих расстояний равно половине SC, отрезки CF и CE перпендикулярны ребрам SB и SA соответственно. Следовательно, $\triangle SCB \sim \triangle SFC$ и $\triangle SCE \sim \triangle SCA$. Поэтому $SF \cdot SB = SC^2 = SA \cdot SF$. Отсюда следует, что $\triangle SFE \sim \triangle ASB$ и

$$\frac{EF}{AB} = \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SA}.$$

Так как $SB = \sqrt{a^2 + 8^2}$, $SA = \sqrt{b^2 + 8^2}$, $SE = \dfrac{8^2}{\sqrt{8^2 + b^2}}$, $SF = \dfrac{8^2}{\sqrt{8^2 + a^2}}$, получаем

$$EF^2 = AB^2\,\frac{SE \cdot SF}{SB \cdot SA} = \frac{8^4 \cdot 16^2 \cdot 2}{(a^2 + 8^2)(c^2 + 8^2)}. \qquad (2)$$

Таким образом, a и b удовлетворяют системам уравнений (1) и (2):

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2^7 \cdot 5, \\ (8^2 + a^2)(8^2 + b^2) = 2^{14} \cdot 5. \end{cases}$$

Выполнив замену $x = a^2 + 8^2$, $y = b^2 + 8^2$, приведем ее к виду

$$\begin{cases} x+y=2^8\cdot 3, \\ xy=2^{14}\cdot 5, \end{cases}$$

откуда $a=8$, $b=24$ или, что с точностью до обозначений то же самое, $a=24$, $b=8$. Итак, будем считать, что $a=8$, $b=24$. 3. Для определения радиуса r вписанной сферы воспользуемся равенствами $V=\frac{1}{3}rS$, где V — объем, а S — полная поверхность пирамиды. Для вычисления полной поверхности удобно заметить (это легко доказать с помощью теоремы, обратной теореме Пифагора), что треугольник ABC — прямоугольный:

$BC^2+AB^2=8^2+16^2\cdot 2=24^2=AC^2$ (угол $ABC=90°$).

Треугольник SBA — тоже прямоугольный по теореме о трех перпендикулярах ($AB\perp BC$ и потому $AB\perp SB$). Дальнейшие вычисления труда не представляют.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{6}(2n+1)$, $n\in\mathbf{Z}$.

2. $\sqrt{\frac{2s\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}}$.

3. 4.

4. $\frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{15})}{10}$. Указание. Пусть a — апофема пирамиды. Рассмотрите сечение, проходящее через высоту и апофему. Задача сводится к нахождению радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник со сторонами a, a и $2a\sqrt{\frac{3}{5}}$.

5. $m=0$ и $m\geqslant 3$. $x=0$ при $m=0$, $x=9/2$ при $m=3$. Оба корня положительны при $m>3$. Указание. Выполнив замену $y=2x$, запишите условие неотрицательности дискриминанта полученного уравнения.

6. 1) $\sqrt{rR}$; 2) $\sqrt{\frac{r}{R}}$. Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей (см. рис. 5), $\angle AO_1C=2\alpha$, $\angle AO_2D=2\beta$, ρ — искомый радиус. Тогда $\angle ACD=\alpha$, $\angle ADC=\beta$, $AC=2R\sin\alpha$, $AD=2R\sin\beta$. По теореме синусов для треугольника ACD: $\frac{AC}{\sin\beta}=2\rho$, $\frac{AD}{\sin\alpha}=2\rho$. Из этих равенств получим $\rho^2=R\cdot r$, $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{r}{R}}$. Пусть высоты треугольников ANC и AND, опущенные из точки N, равны h_1 и h_2 соответственно. Из равенства $CN=ND$ (оно следует из теоремы о квадрате касательной: $CN^2=NB\cdot NA=ND^2$), сразу получаем $\frac{h_1}{h_2}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\sqrt{\frac{r}{R}}$.

Вариант 4

1. $(-1;\ 1)$.
2. 4.
3. $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.
4. $MN=2\sqrt{3}$, $NK=2$. Указание. Из равенства $\angle LOK=2\angle LO'K$ (рис. 6) следует, что точка O' лежит на окружности с центром O, описанной около прямоугольника $LMNK$. Далее докажите, что $\angle KMN=\frac{\pi}{6}$.
5. $-1/3$. Указание. Пусть $f(t)=t(1+\sqrt{t^2+7})$. Тогда уравнение приводится к виду $f(2x+1)=-f(x)$. Из нечетности функции f и ее возрастания (убедитесь) следует, что оно равносильно уравнению $2x+1=-x$.

Вариант 5

1. 3.
2. 0,1.
3. $\frac{\pi k}{2}$, $\pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Указание. После раскрытия скобок и несложных преобразований приходим к уравнению $\sin 2x\times(3\sin^4 x+4\sin^2 x-1)=0$.
4. $\arcsin\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{77}}{28}$. Указание. Воспользуемся тем, что $\angle NKF=\angle OKF-\angle OKH$ (см. рис. 7: точка O и отрезок AF лежат по разные стороны от прямой KH). Кроме того, если точки V и W — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на отрезки KH и KF, то, последовательно применяя теорему Пифагора для имеющихся прямоугольных треугольников, находим $OW=\sqrt{7}/2$, дальнейшее ясно.
5. $\sqrt{32}/3$. Указание. Пусть $t=2x+y-z$. Выражая z через x, y, и t, приходим к уравнению, квадратному относительно y:

$$4y^2+2(2x-t)y+5x^2+t^2-2-4xt=0.$$

Для существования решений этого уравнения необходимо выполнение условия неотрицательности его дискриминанта, или, после вычислений, условие

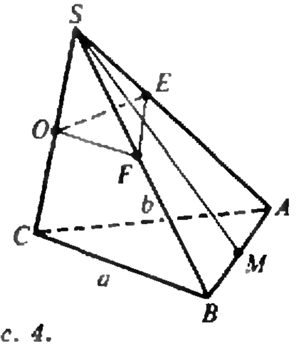


Рис. 4.

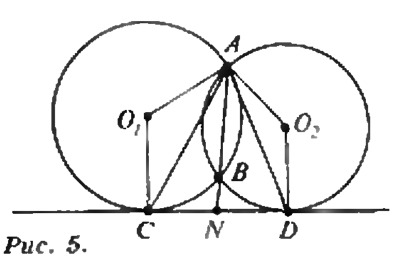


Рис. 5.

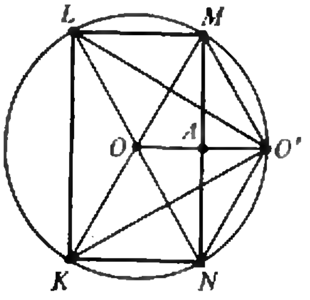


Рис. 6.

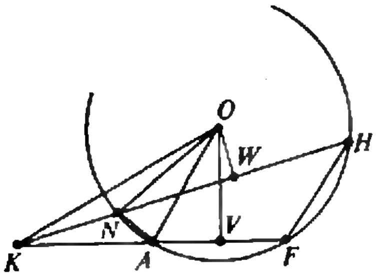


Рис. 7.

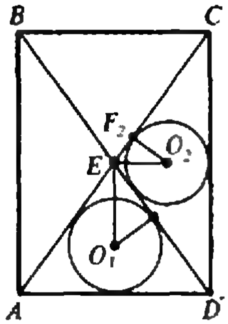


Рис. 8.

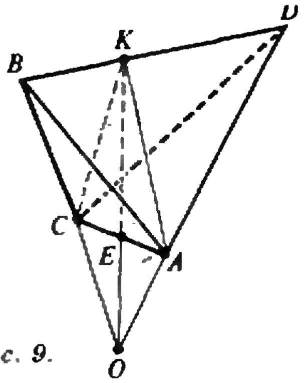


Рис. 9.

$$16x^2-12xt+3t^2-8\leqslant 0.$$

Для того чтобы данное неравенство имело решение, в свою очередь, необходима неотрицательность его дискриминанта, что приводит к неравенству $12t^2\leqslant 128$.

Вариант 6

1. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$. Указание. Преобразуйте уравнение к виду

$$\cos 2x(\sqrt{3}-2\sin 2x)=0.$$

2. 4 ч. 45 мин.

3. $(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,5]$.

4. $\frac{10}{3}$. Решение. Обозначим O_1 и O_2 центры вписанных окружностей, и пусть O_1F_1 и O_2F_2 — радиусы этих окружностей, проведенные в точки касания F_1 и F_2 сторон DE и EC (см. рис. 8). Из подобия треугольников DAB, EF_2O_2, O_1F_1E следует, что

$$\frac{EO_1}{EO_2}=\frac{O_1F_1}{EF_2}=\frac{O_1F_1}{O_2F_2}\cdot\frac{O_2F_2}{EF_2}=\frac{O_1F_1}{O_2F_2}\cdot\frac{AB}{AD}.$$

Треугольники AED и DEC имеют равные площади $S_1=S_2$, поэтому

$$\frac{O_1F_1}{O_2F_2}=\frac{2S_1/P_1}{2S_2/P_2}=\frac{P_2}{P_1},$$

где $P_1=18$ и $P_2=25$ — периметры этих треугольников.

5. $\frac{1}{2}$. Указание. Поскольку $x-x^2-\frac{5}{4}\leqslant\leqslant -1$ и $\log_{\sqrt{3}}(2+2\cos^2 x-\cos 2x+3\cos^2\pi x)=\log_{\sqrt{3}}(3+3\cos^2\pi x)\geqslant 2$, равенство в обоих случаях одновременно выполняется только при $x=\frac{1}{2}$.

Вариант 7

1. $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{\pi}{3}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

2. 15 км/ч.

3. $(0;3)\cup\left(\frac{25}{8};\sqrt{10}\right)$.

4. 6π. Решение. Из равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки к сфере, следует, что треугольники ABD и CBD равны и расположены так, что их высоты, опущенные из вершин A и C на общую сторону BD попадают в одну точку K (рис. 9). Тогда плоскость KAC, перпендикулярная BD, содержит центр O сферы. Используя теорему Пифагора и соотношения, вытекающие из подобия треугольников, последовательно вычисляем: $AD=\sqrt{3}$, $AK=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC=\sqrt{2}$, $AE=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $KE=\frac{1}{2}$, $OA=\sqrt{\frac{3}{2}}$ — радиус сферы.

5. $\sqrt{3}$. Решение. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности с диаметром AD, поэтому

$$BC=AD\sin\alpha=2\sin\alpha,$$

где $\alpha=\angle BAC$. Так как $\angle AED=\angle AFD=180^\circ-\frac{90^\circ}{2}=135^\circ$, то точки A, E, F, D, где E и F — точки пересечения биссектрис треугольников ABD и ACD (рис. 10), также лежат на некоторой окружности радиусом R. Отсюда следует, что

$$AD=2R\sin 135^\circ=2,$$
$$EF=2R\sin\angle EAF=\sqrt{2},$$

т. е. $R=\sqrt{2}$, $\sin\angle EAF=\frac{1}{2}$. Но $\angle EAF=\left(\alpha-\frac{1}{2}\angle BAD\right)+\frac{1}{2}(\angle BAD-\alpha)=\frac{\alpha}{2}$, и следовательно, $\alpha=60^\circ$.

Вариант 8

1. Первое число больше.

2. $(-\infty;-2]\cup[-1;1]$.

3. $\frac{5\pi}{4}$.

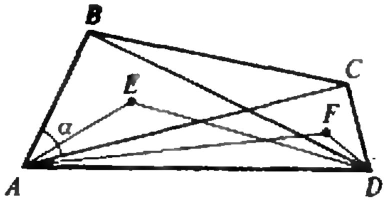


Рис. 10.

4. $\sqrt{3}+1$. Указание. Воспользуйтесь тем, что треугольник CMD — равнобедренный.

5. 6 кг.

6. $(-\infty; -10/3) \cup (-3; -2)$. Указание. Выполните замену $t=\cos x$ и затем выясните, при каких a полученное уравнение не имеет корней на промежутке $t \in [-1; 1]$.

Вариант 9

1. $[-5; -2) \cup (4; 5]$.

2. 2.

3. $\{-4; 2\}$.

4. $\pi+\arcsin\frac{\pi}{12}$, $\pi-\arcsin\frac{\pi}{4}$.

5. $\pi-\arccos\frac{\sqrt{15}}{20}$. Указание. Пусть $BD=x$, тогда $AD=4x$, а так как $AB\cdot DB=CB\cdot EB$, получаем уравнение $(4x+x)x=20$, т. е. $x=2$. Далее из теоремы косинусов находим $\cos\angle DBC=\frac{13}{20}$, из ΔABC находим $AC=2\sqrt{15}$. И, наконец, из ΔABC находим $\cos\angle ACB = -\frac{\sqrt{15}}{20}$.

6. $\{(-2; 0);\ (0; -2);\ (-3; 0);\ (-1; 2)\}$. Указание. Решая данное уравнение как квадратное относительно x, получаем две возможности: $x=-\frac{y+2}{3y+1}$ или $x=-\frac{2y+3}{3y+1}$. Остается найти такие целые y, при которых x будет целым числом.

Вариант 10

1. $(-\infty; -2-\sqrt{2}) \cup (-1; -2+\sqrt{2})$.

2. $\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Указание. Приведите уравнение к виду $|y|=6y$, где $y=3\cos x+1$.

3. $(2; 6)$, $\left(\frac{1}{2}; 10\right)$. Указание. Выполните замену $z=\log_x 2$.

4. $b+p$. Решение. Пусть P_1 и P_2 — периметры четырехугольников $BAQM$ и $ABNP$ соответственно. Тогда, учитывая равенство отрезков касательных к окружностям, проведенных из одной точки, имеем

$$AB=\frac{1}{2}P_2-b,\quad MQ=\frac{1}{2}P_1-AB.$$

Результат не зависит от расположения отрезка AB (рис. 11).

5. $\varnothing$ при $a<0$; $\left[-\frac{4a}{3}; -a\right] \cup (0; \infty)$ при $a>0$; $(0; \infty)$ при $a=0$. Решение. При $a<0$ в области допустимых значений x $\left(x\leqslant-\frac{4a}{3}\right)$ не выполняется необходимое условие неравенства: $x+2a>0$. При $a\geqslant 0$ ответ получается как пересечение области определения $\left(x\geqslant-\frac{4a}{3}>-2a\right)$ и решения неравенства $(x+2a)^2>3ax+4a^2$. При $a=0$ неравенство имеет вид $x>0$.

Вариант 11

1. $(-\infty; 1) \cup (4; 5)$.

2. $\frac{5}{4}$.

3. 3 м.

4. 0. Указание. Функция положительна на данном промежутке при $x<0$ и при $x>0$.

5. $(6; 2)$, $(-2; 6)$. Решение. Исключив y из системы, получим уравнение

$$\left(8-\frac{\alpha-\beta}{26}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\right)x=4-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{13},$$

которое имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} 8-\frac{\alpha-\beta}{26}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=0, \\ 4-\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{13}=0. \end{cases}$$

Вариант 12

1. $-\frac{\pi}{3}\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k$, $\frac{2}{3}\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

2. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. Указание. Неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} 2x^2+x\geqslant 0, \\ 1+2x<0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+x>(1+2x)^2, \\ 1+2x\geqslant 0. \end{cases}$$

3. $\sqrt{17}-4$. Указание. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2x^2-8x+6=(2x+2)^2, \\ 2x+2>0, \\ 2x+2\neq 1. \end{cases}$$

4. $2\sqrt{21}-9$. Решение. Пусть r — искомый радиус окружности, O_1 — ее центр, M — точка касания окружности с отрезком OC. Тогда (рис. 12) $OO_1=2-r$, $\angle O_1DA=\angle O_1DM=\frac{\pi}{3}$; наконец (теорема косинусов),

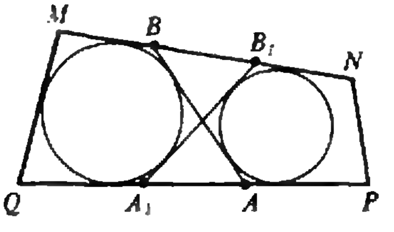


Рис. 11.

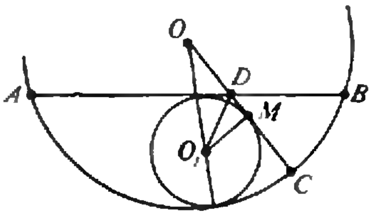


Рис. 12.

$OO_1^2=OD^2+O_1D^2-2\cdot OD\cdot O_1D\cdot\cos\angle ODO_1$, где $\angle ODO_1=\frac{2\pi}{3}$, дает уравнение для r, при решении которого надо учесть, что $r\geqslant 0$.

5. $-\frac{17}{48}$. Решение. Из второго равенства получаем

$$z=\frac{a}{3}-\frac{x}{3}-\frac{2y}{3},$$

с учетом этого из первого получаем уравнение

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2y-\frac{1}{12}\right)^2=\frac{a}{3}+\frac{17}{144},$$

правая часть которого должна быть равна нулю.

Физика

1. $h=\frac{g\tau^2}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{F}{mg}\right)^2-\cos^2\alpha}-\sin\alpha\right)\sin\alpha.$
2. $\Delta h=m/(2\rho S)$.
3. $\mu=\frac{\cos\varphi_1-\cos\varphi_0}{\sin\varphi_1+\sin\varphi_0}\operatorname{tg}\alpha\approx\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}\operatorname{tg}\alpha.$
4. $A=RT/4$.
5. $r_2=\frac{p_{н1}T_2}{p_{н1}T_1}r_1+\frac{mRT_2}{\mu Vp_{н2}}\approx 58\ \%$ (здесь $p_{н2}\approx 10^5$ Па, $\mu=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль).
6. $\varphi_0=(C_1\varphi_1+C_2\varphi_2+C_3\varphi_3)/(C_1+C_2+C_3)$.
7. $Q=C\mathscr{E}^2/12$.
8. $\mathscr{E}=\frac{R_2-R_1}{\sqrt{R_2/P_2}-\sqrt{R_1/P_1}}$.
9. $\delta=\varphi-\pi/2+\arcsin\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}$.
10. $F=-ld_1/d_2=-20$ см.

нт» для младших школьников
«Квант» № 1)

1. Да, был.
2. Первую и третью девочку.
3. Пусть a и b — искомые числа. Тогда $a-b=n$ и $a=nb$. Отсюда $b(n-1)=n$ или $b=\frac{n}{n-1}=1+\frac{1}{n-1}$.

Так как b — натуральное, то $n=2$, $b=2$ и $a=4$.

4. См. рис. 13.
5. 11 оборотов.

К	О	Р	А	Н
Н	Р	А	К	О
А	К	О	Н	Р
О	А	Н	Р	К
Р	Н	К	О	А

Рис. 13.

анные задачи Ленинградской городской матической олимпиады 1989 года
(см. «Квант» № 1)

1. Решение единственно — это числа 166667 и 333334.
2. Выигрывает второй игрок. Его стратегия такова: отвечать на симметричное относительно центра доски поле другим знаком, за исключением тех случаев, когда есть прямо выигрывающий ход.
3. После вычитания второго уравнения из первого получаем $(A-B)^2+(B-C)^2=0$, откуда вытекает, что есть два решения $A=B=C=\pm 10$.
4. Если у нашего числа есть простые делители, большие 3, то оно не меньше 3000. Но уже число $2^{11}=2048$, очевидно, удовлетворяет требованиям задачи. Значит, искомое число не больше 2048 и не может иметь делителей, больших 3. Поэтому его надо искать среди чисел вида $2^k\cdot 3^l$.
5. Количество физиков за столом равно количеству лжецов, а оно четно.
6. Второй ставит фишку в симметричное относительно центра доски поле. Докажите (это чисто геометрический факт), что его ход всегда длиннее предыдущего хода первого игрока.
7. Рассмотрим любой набор из различных натуральных чисел, например 1, 2, ..., 100. Умножим все числа на одно и то же число A, делящееся на все возможные суммы пятерок чисел нашего набора. Получим, например, набор $500!$, $2\cdot 500!$, $3\cdot 500!$, ..., $100\cdot 500!$ — проверьте, что это и есть требуемый набор.
8. Пусть $B-K=k$. Тогда $A^2+1=(A+k)\times\times(A-k)+k^2+1$, и значит, k^2+1 делится на B, т. е. $k^2+1\geqslant B$, или $k^2\geqslant B-1>A$ (случай $B=A+1$ по условию не возможен).
9. Так как $x+y+z=0$ и $xy+xz+yz=0$, то $(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=x^2+y^2+z^2=0$, т. е. $x=y=z=0$, что невозможно.
10. а) 2; б) 2 или 3. Очевидно, что 2 участника могли провести подобный турнир. Рассмотрим теперь победителя турнира — он набрал не более $k(n-1)$ очков (если всего n участников). Все остальные набрали не менее $k(n-1)(n-2)/2$ очков. С другой стороны, если знаменатель прогрессии равен q, то победитель должен набрать более чем в $q-1$ раз больше очков, чем все остальные участники. Отсюда следует общий результат: если k не делится на 7, то $n=2$; если k делится на 7, то $n=2$ или 3.
11. Обратите внимание на то, что все пять треугольников, расположенных в вершинах звезды,— это подобные равнобедренные треугольники.
12. Ответ положительный. Доказательство легко проводится индукцией для всех таблиц вида $2n\times 2n$.
13. Рассмотрите грани, примыкающие к самому короткому боковому ребру.
14. Используя свойства операции $*$, получаем $(c*a)*b=-b*(c*a)=-(b*c)*a=a*(b*c)==(a*b)*c=-c*(a*b)=-(c*a)*b$. Отсюда следует, что $x*y$ всегда равно 0.
15. Обозначим центр описанной около BMC окружности через O. Докажите, что $ABOC$ — вписанный четырехугольник. Отсюда нетрудно

вывести, что AM — биссектриса угла BAC, а BM — биссектриса угла ABC.

16. Этот факт доказывается индукцией по n. Легко видеть, что на самом деле верны гораздо более сильные оценки для указанной суммы.

17. Сумма всех чисел в таблице равна $k^2(k^2+1)/2$ и должна делиться на наименьшую из указанных степеней двойки, которая не меньше $k(k+1)/2$. Легко проверяется, что k должно быть четным, и, значит, $k^2/2$ должно делиться на число, не меньшее $k(k+1)/2$ — противоречие.

18. Допустим, что этого не произойдет. Так как в любой момент есть полностью занятые фишками строки и столбец, т. е. крест одного цвета, то в самом начале этот крест — белый, а в конце — черный. Но за одно перекрашивание цвет креста измениться не может.

19. Обратите внимание на то, что $1^2+8^2=4^2+7^2$, т. е. два прямоугольных треугольника с катетами 1, 8 и 4, 7 имеют одинаковые гипотенузы и из них можно сложить четырехугольник.

20. а) Стратегия первого игрока здесь очень проста — прибавлять единицу. б) Начало игры может идти по двум путям: 2→3→4→5→6→ ... или 2→3→4→6→ ..., причем именно первый игрок определяет начало. В одном случае число 6 получает первый игрок, в другом случае — второй.

21. Да, удастся. Пусть P — множество образов точки O, в которой стоит профессор Смит, при всевозможных композициях отражений в зеркалах; P_1 — множество, которое получается из P при гомотетии с коэффициентом 1/2 и центром O; Q — множество точек из P_1, не входящих в P. Любую точку из Q можно получить отражениями в зеркалах одной из конечного множества точек комнаты (их, включая точки на сторонах и в вершинах квадрата, не более 15) — в них и нужно расставить студентов.

22. Используйте то, что число 9999999 делится на 239.

23. Воспользуйтесь неравенством

$$(1-x)(1-z^2)+(1-y)(1-x^2)+(1-z)(1-y^2)\geqslant 0.$$

24. Докажите, что функция

$$f(x)=\sin(\sin(\sin(\sin(\sin x))))$$

выпукла вверх на отрезке $[0;\pi]$ и значит, на этом отрезке ровно 2 корня уравнения: 0 и некоторое число a. Отсюда следует, что всего у уравнения три корня: 0, a, $-a$.

25. После k нажатий можно из числа A получить любое натуральное число из промежутка $]2^k(a-1);\ 2^k a]$. Докажите, что при достаточно больших k в этом промежутке обязательно есть пятая степень.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов,
Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, М. Башмаков,
В. Белонучкин, В. Болтянский,
А. Боровой, Ю. Брук, В. Вавилов,
Н. Васильев, С. Воронин, Б. Гнеденко,
Н. Долбилин, В. Дубровский,
А. Земляков, А. Зильберман, С. Козел,
С. Кротов, Л. Кудрявцев, А. Леонович,
В. Лешковцев, С. Новиков, Т. Петрова,
М. Потапов, В. Разумовский, Н. Родина,
Н. Розов, А. Савин, Я. Смородинский,
А. Сосинский, В. Уроев, В. Фабрикант

Редакционный совет:
А. Балдин, С. Беляев, Е. Велихов,
И. Верченко, Б. Воздвиженский,
Г. Дорофеев, Н. Ермолаева,
Ю. Иванов, В. Кириллин, Г. Коткин,
Р. Кузьмин, А. Логунов, В. Можаев,
В. Орлов, Н. Патрикеева, Р. Сагдеев,
А. Стасенко, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Буздин, А. Виленкин, А. Егоров, Л. Кардасевич,
И. Клумова, Т. Петрова, С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов,
Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров,
И. Смирнова, Л. Тишков, П. Чернуский,
В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов
Художественный редактор Т. Макарова
Заведующая редакцией Л. Чернова
Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 27.11.89. *Подписано к печати* 10.01.90.
Т—06407 Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,94. Тираж 170627 экз.
Заказ 2679. Цена 45 коп.

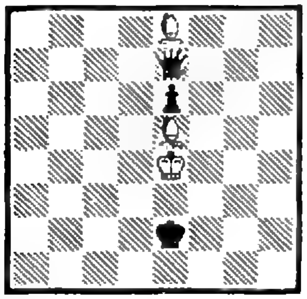
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

МАКСИМУММЕР

Раздел сказочных шахмат, с которым мы сегодня познакомимся, тесно связан с геометрией. В задаче-максимуммере одна из сторон обязана делать самые длинные ходы (геометрически — по прямой, соединяющей центры полей). Чаще всего это требование предъявляется черным в задачах на обратный мат, когда белые вынуждают черных объявить мат белому королю.

Первая диаграмма принадлежит классику сказочных шахмат, причем на ней представлены сразу две задачи.



Т. Доусон, 1920 г.

а) Обратный мат в 5 ходов (максимуммер).

б) То же задание, но с белой пешкой е3 вместо слона е5.

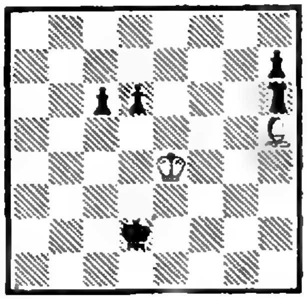
Все фигуры выстроились на одной вертикали и кажется, что должны существовать два симметричных решения. Однако слева на доске «лишняя» вертикаль, и решение единственное.

а) **1. Cd6! Фh4+.** Не 1...Фа7, потому что длина хода Фе7—а7 равна 4, а ход Фе7—h4 длиннее: $3^2+3^2>4^2$. **2. Cf4 Фd8 3. Ce5 Фd1.** Теперь ход по прямой длиннее. **4. Крf4 Фd8 5. Cd7! Фh4×.**

В случае симметричного 1. Cf6 Фа3 2. Cd4 Фf8 3. Ce5 черный ферзь идет на а3, и комбинация разваливается.

б) **1. Крf4 Фа3 2. Cb5+ Фd3 3. e4 Ф:b5 4. e5 Фe8 5. Крe4 Фа4×.** Легко убедиться, что не ведет к цели симметричное 1. Крd4.

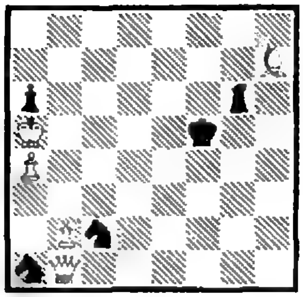
Вот еще два классических примера на тему максимуммера, иллюстрирующие четкие геометрические маневры, неожиданные перестроения фигур и хитроумное сооружение матовой сети.



К. Фабель, 1938 г.

Обратный мат в 9 ходов (максимуммер).

1. Cg6! Лh1 2. Крd4 Лa1 3. Cb1! Вынуждает черную ладью сменить еще один угол. **3...Лa8 4. Ca2! Лh8 5. Cg8!** Ладья заперта. **5...h5 6. Ce6.** Ладья выпускается из заточения и направляется на линию «h». **6...Лa8 7. Cc8 Лa1 8. Ca6 Лh1 9. Cf1 Лb4×.** Изящная дуэль ладьи и слона.



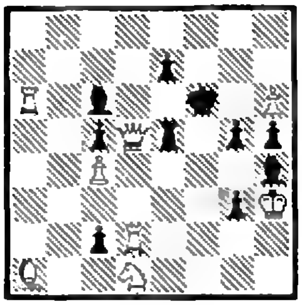
Ф. Палатц, 1925 г.

Обратный мат в 5 ходов (максимуммер).

После хода Кa1—b3 белый король заматован. Но как заставить черных пойти этим конем? **1. Cg8! Лg1** (или 1...Лb6 — ход той же длины) **2. Ca2 Лg8 (Лh6) 3. Фh1 Лg1 (Лb6) 4. Фh7+ Лg6 5. Cb1!** Все фигуры черных, кроме коня a1, «запатованы», остается **5...Кb3×.**

Как видите, задачи-максимуммеры — это самые настоящие головоломки!

В заключение рассмотрим несколько задач-максимуммеров современных авторов.

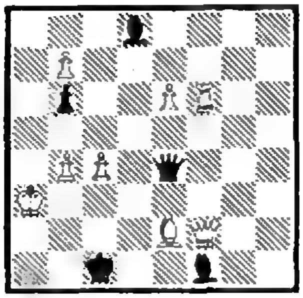


М. Класинч, 1980 г.

Обратный мат в 2 хода (максимуммер).

1. Фh1! Взятие пешкой длиннее, чем ее ход на одно поле, поэтому черные вынуждены взять коня d1. При этом возможны четыре превращения и всякий раз белая ладья d2 заставляет превращенную фигуру дать мат. **1...cdФ (Л, С, К) 2. Лd7 (Лd3, Лc2, Лf2+)** и соответственно **2...Ф:d7 (Л:h1, Cg4, К:f2)×.**

В этой задаче есть и несколько интересных ложных следов. Любой другой вступительный ход белого ферзя опровергается превращением пешки в соответствующую фигуру. 1. Фd8 (d3, d7, :c5)? cdФ (Л, С, К)!



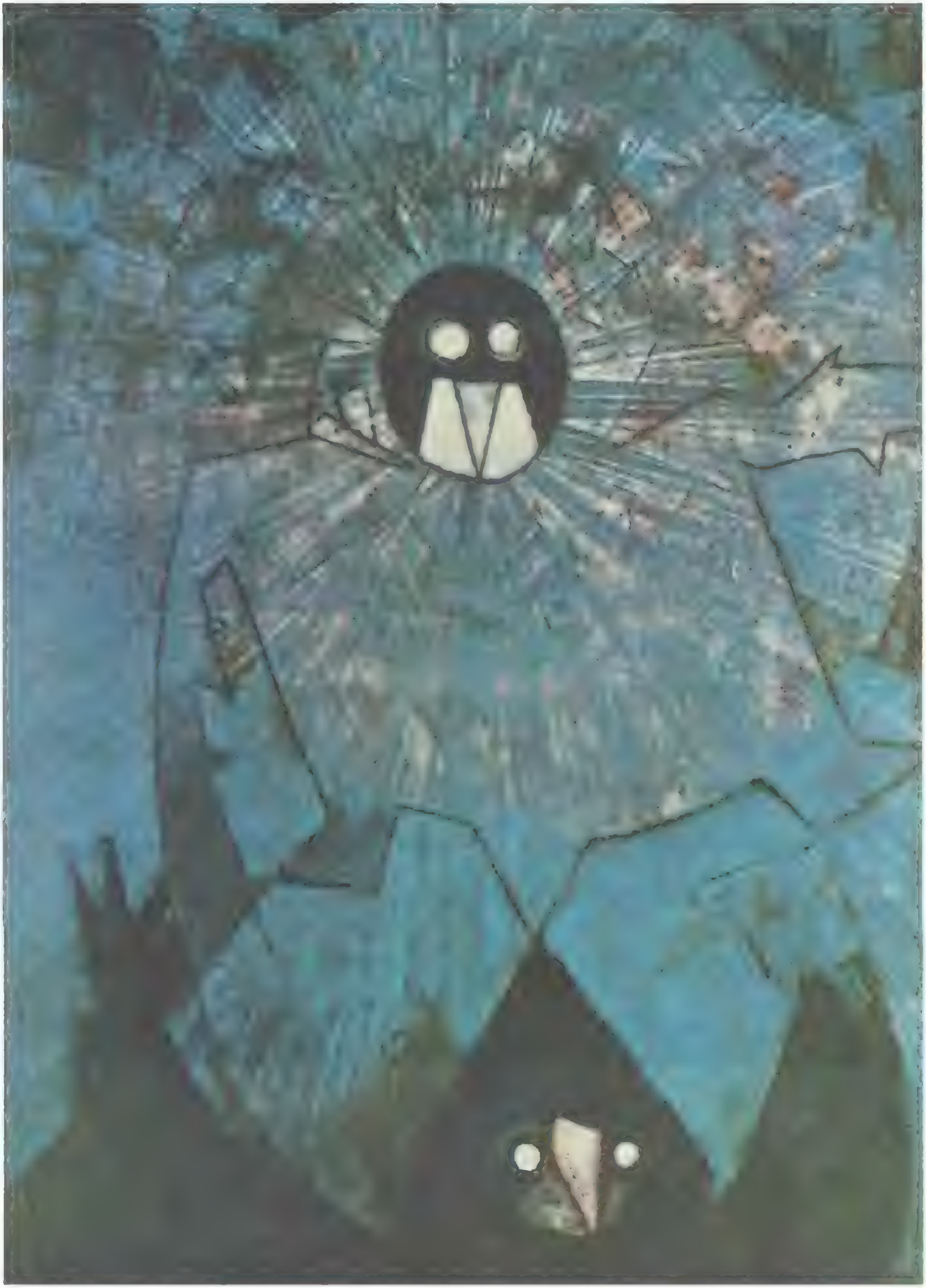
К. Альхейм, 1980 г.

Обратный мат в 3 хода (максимуммер).

Важно сделать правильный вступительный ход. У черных четыре «равнодлинных» ответа — 1...Фb1 (Ф:b7, Фh7, Фh1). Последует соответственно **2. Фe3+ (Крa2, Фe1+, Лf3) Крc2 (Фh1, Крc2, Фh8) 3. Фb3+ (Крa1, b8Л, Лb3) Ф:b3 (Фa8, Фa7, Фa1)×.**

1. Cf3! Теперь в случае 1...Фb1 и Фh7 возникают знакомые варианты, на 1...Ф:b7 следует 2. Крa2 Фh7 3. Крa1 Фb1×. Ход 1...Фh1 исчез, но зато появился 1...С:c4, и тогда 2. Фe1+ Ф:e1 3. b5 Фa5×.

Е. Я. Гик

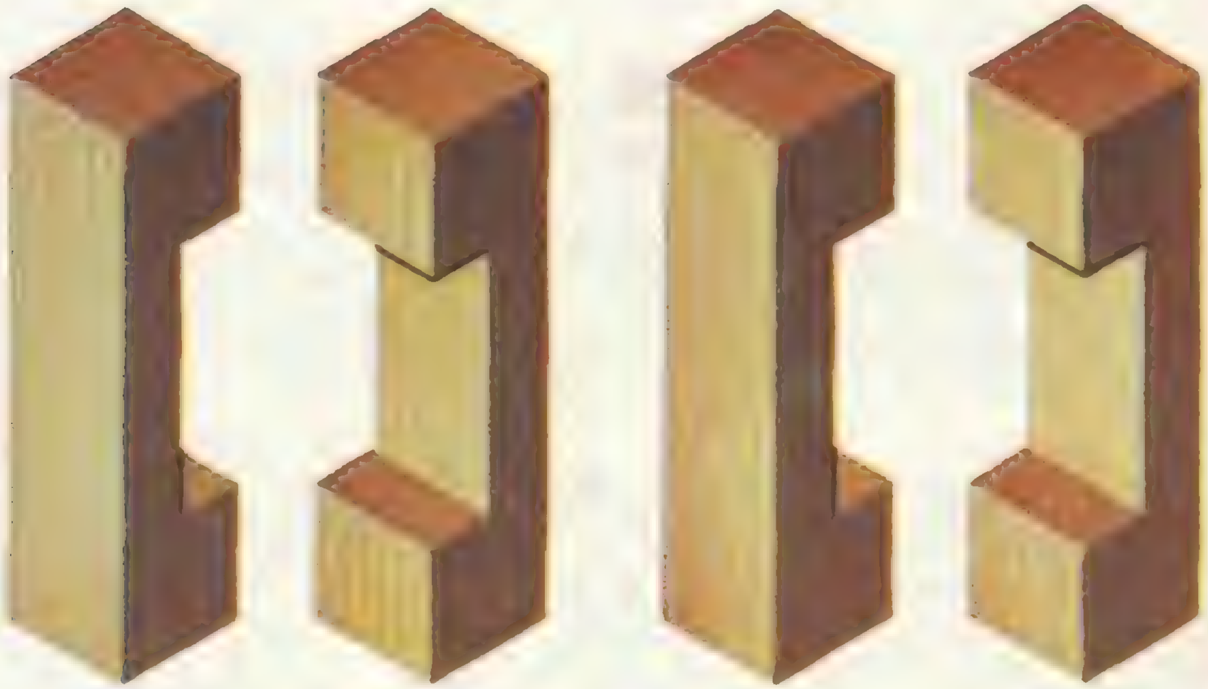


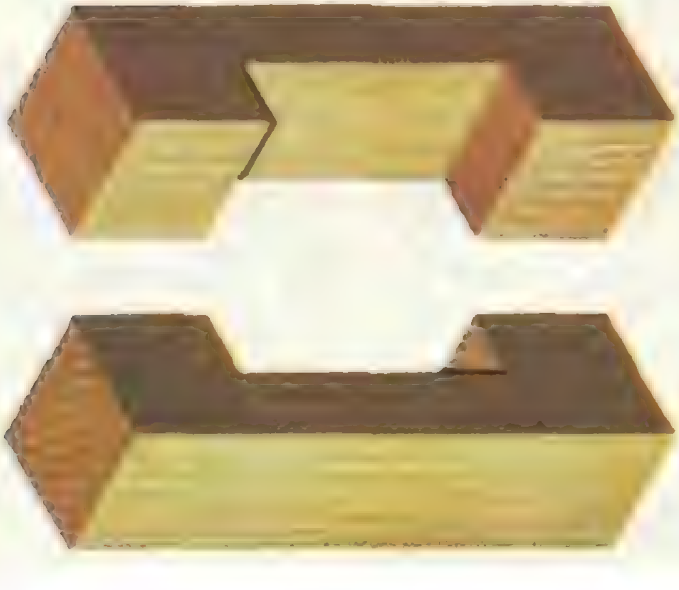
45 коп.

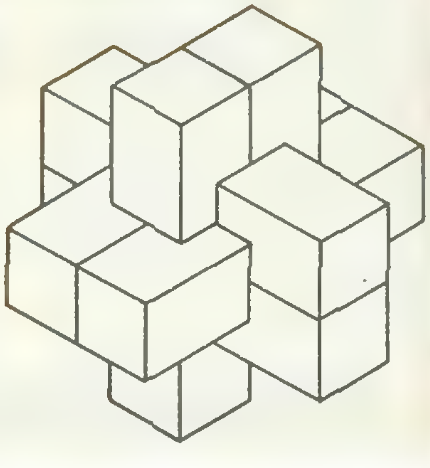
Индекс 70465

Есть очень много головоломок, в которых требуется сцепить несколько брусков с вырезами в одну жесткую фигуру, часто напоминающую трехмерный крест. Такие головоломки называются буррами. Об одной из них рассказывалось в «Кванте» № 6 за 1981 г.— ее нередко можно встретить в продаже в форме звездчатого многогранника. Другой бурр, наверняка знакомый многим любителям головоломок,— «крест адмирала Макарова». Предлагаем вам несложный, но забавный «плоский бурр»: вырежьте нарисованные здесь бруски, надрежьте их по черным линиям и попробуйте сплести из них плоское изображение трехмерного креста, показанное справа внизу.

Д. К.







НОМЕР
3

Квант

1990

3

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва, «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *А. Абрикосов.* О чем не думает горнолыжник
11 *В. Лев.* Поглядим на диаграмму...
17 *Е. Абакумов, О. Ижболдин, Л. Курляндчик, Н. Нецветаев.* Кратчайшие сети

Р — значит ракета

25 Человек за бортом

Задачник «Кванта»

26 Победители конкурса «Задачник «Кванта»
27 Задачи М1211 — М1215, Ф1218 — Ф1222
28 Решения задач М1186 — М1190, Ф1198 — Ф1202

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *В. Тихомирова.* Электризация через влияние

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Фантастика

44 *С. Сайкс.* Цифертон

Школа в «Кванте»

Физика 9, 10, 11:

49 Как зависит g от глубины?
52 Силовые линии и теорема Гаусса

Математический кружок

56 *Б. Эрдниев, Н. Манцаев.* Теоремы Чевы и Менелая

Практикум абитуриента

60 *И. Шарыгин.* Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене

65 **Варианты вступительных экзаменов**

Наша анкета

72 Журнал — читатель — журнал

75 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(43)*
Реклама *(71)*

Наша обложка

1,4 *Гиперболический параболоид — удивительная поверхность, составленная из двух семейств прямых линий.*
2 *Картина В. Стерлигова (1904—1973) «Равновесие» (1928), на наш взгляд, хорошо иллюстрирует состояние человека, вышедшего из космического корабля в открытый космос (см. с. 25).*
3 *Шахматная страничка.*

© Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1990

О ЧЕМ НЕ ДУМАЕТ ГОРНОЛЫЖНИК

Кандидат физико-математических наук
А. АБРИКОСОВ

В мире зимних видов спорта горные лыжи, санки и бобслей стоят как бы особняком. Когда наблюдаешь такие спортивные состязания только по телевизору, возникает некоторое недоумение: можно ли вообще соревноваться, кто быстрее съедет с горки? и не является ли разброс результатов простой случайностью? Ведь все мы решали задачу о скатывании тела с наклонной плоскости (рис. 1). Система уравнений, описывающих это движение, позволяет найти ускорение тела на начальном участке, скорость установившегося движения, время движения по трассе от старта до финиша. Тут и возникает парадокс, оправдывающий недоумение телеболельщика: результаты не зависят от поведения спортсмена. Но ведь мы и не пытались учесть этот фактор в исходных уравнениях. А если попытаться?

Сразу приходит в голову обратить внимание на силу трения и силу сопротивления воздуха. Коэффициент трения связан с выбором мази. Для саночников и лыжников-спусковиков (да и гигантистов тоже) нельзя недооценивать роль аэродинамики. Важно не только принять и сохранить правильную стойку, но и подобрать материал и хорошо сшить из него комбинезон. Примером может служить легендарная победа французской сборной команды в скоростном спуске. Французы первыми поняли, что трепещущий нагрудный номер — это недопустимая роскошь при скорости 100 км/ч. Под градом шуток они приклеили номера к костюмам пластырем. И повеселились на финише. Ныне в погоне за сотыми долями секунды даже конькобежцы надели «сверхобтекаемые» комбинезоны, а лыжников порой обдувают в аэродинамических трубах. Изогнутые палки позволяют принять более выгодную стойку. Испытываются новые мази и покрытия для лыж, сплавы для саночных полозьев. Описанное Л. Кассилем в книге «Ход белой королевы» похищение лыжной мази кажется невинной забавой, когда идет борьба за олимпийское золото.

Но вот экипировка участников более-менее равноценна, и на первый план выходят индивидуальные качества спортсмена — воля к победе, физическая и специальная подготовка. Мы расскажем, как законы механики позволяют применить свои физические данные и обратить волю к победе в драгоценные секунды результата. Чтобы понять основы лыжной техники, давайте отвлечемся от скоростного спуска (где так важны аэродинамика, умение правильно вести лыжи и удачно выбрать траекторию) и перейдем к слаломным дисциплинам. Здесь спортсменам приходится бороться за успех своими силами, проявляя временами акробатическую ловкость.

Трасса глазами лыжника

Вернемся к силам, которые действуют на лыжника на трассе. Мы, зрители, видим спортсмена в инерциальной системе отсчета, связанной со склоном или с телекамерой. Ну а для лыжника более естественна неинерциальная система, связанная с ним самим. Для вычислений она не очень удобна, но все-таки попробуем взглянуть на трассу глазами лыжника.

Будем предполагать, что речь идет о равномерном скольжении по окружности. В связанной с лыжником системе отсчета наряду с реальными силами (силы тяжести, трения, реакции опоры, сопротивления воздуха) нужно ввести центробежную силу инерции $F_{цб}$, направленную от центра дуги и равную

$$F_{цб}=mv^2/R,$$

где v — скорость лыжника, R — радиус дуги (рис. 2). Центр тяжести лыжника в этой системе неподвижен; значит, в любой момент времени равнодействующая приложенных сил равна нулю. Поэтому сила реакции снега должна быть направлена к центру дуги — ведь это единственная сила, которая может скомпенсировать $F_{цб}$. У саночников это обеспечивается наклоном желоба. А у лыж для лучшего сцепления со снегом скользящая поверхность имеет металлические канты, и при повороте лыжи «кантуют» — спортсмен наклоняет лыжи «на ребро», так, чтобы они зацепились за снег металлическими кантами — как коньки. Горизонтальная компонента силы реакции снега сообщает спортсмену центростремительное (в инерциальной системе отсчета) ускорение. Чтобы уверенно чувствовать себя на жестких и льдистых склонах, канты нужно регулярно точить, особенно перед соревнованиями.

А кстати, какие нагрузки испытывает спортсмен? Давайте прикинем. Средняя скорость слаломиста около 10 м/с при радиусе дуги порядка 5 м, и $F_{цб}=mv^2/R\approx m\ 20\cdot$ м/с^2, т. е. равна примерно удвоенному весу лыжника. Эту силу нужно векторно сложить с перпендикулярной склону составляющей силы тяжести $mg\cos\alpha$ (обычно $\alpha<30°$, $\cos\alpha>1/2$). Так что суммарная перегрузка превышает $2g$, причем падает она в основном на «внешнюю» ногу (попытка встать на внутреннюю лыжу, как правило, заканчивается падением). Ну а по характеру своему нагрузка весьма напоминает испытание на вибростенде. Поэтому спортсмены-горнолыжники даже летом занимаются общей физической подготовкой. Например, приседают со штангой.

Оптимальная траектория ±10 см

Теперь мы начинаем «раскладывать» успех на отдельные слагаемые. Почему лыжника, скатывающегося с горы, нельзя уподобить, скажем, бусинке, соскальзывающей по гладкой изогну-

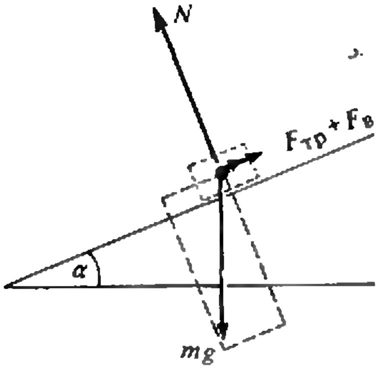


Рис. 1. Тело на наклонной плоскости: mg — сила тяжести, N — сила реакции опоры, $F_{тр}$ и $F_в$ — силы трения и сопротивления воздуха. Уравнение движения тела —

$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}+\vec{F}_в.$

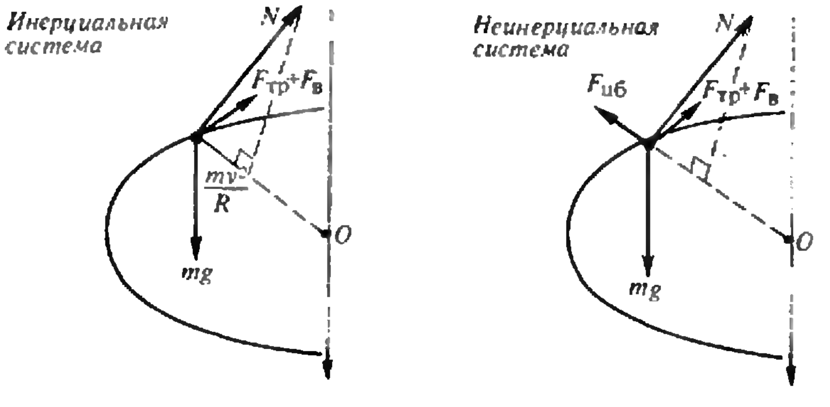


Рис. 2. Инерциальная и неинерциальная системы отсчета. В неинерциальной системе на лыжника действует центробежная сила инерции.
Здесь и далее на рисунках голубая прямая со стрелкой обозначает линию склона.

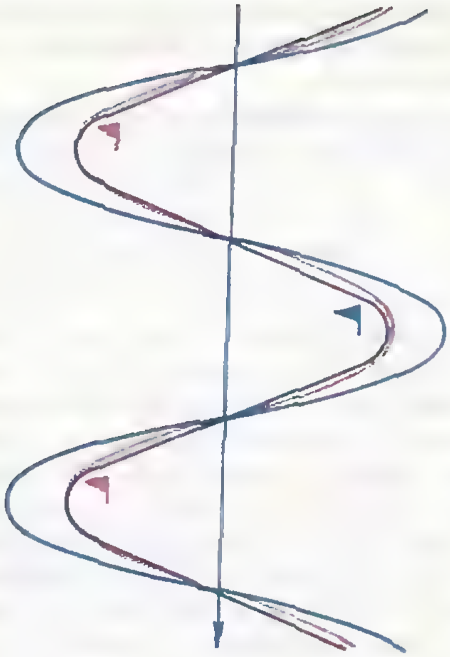


Рис. 3. Варианты выбора маршрута на трассе слалома. Красная кривая — оптимальная траектория.

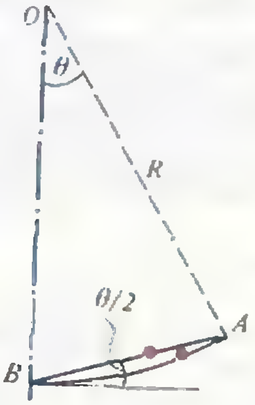


Рис. 4. Бусинки на проволочках. Время соскальзывания по дуге AB меньше, чем по стягивающей ее хорде.

той проволоке? В первую очередь потому, что он сам выбирает маршрут движения в коридоре, заданном флагами (у саночников — желобом). Говоря научным языком, склон горы представляет собой двумерное пространство, где спортсмену (даже если считать его материальной точкой) предстоит найти оптимальную траекторию, в то время как движение бусинки чисто одномерное.*)

Вид оптимальной траектории определяется сочетанием целого ряда факторов. Прежде всего, желательно пройти трассу кратчайшим путем, как можно меньше уклоняясь от линии склона (рис. 3). При этом мы выигрываем не только из-за сокращения расстояния, но и за счет увеличения средней крутизны маршрута — чем круче склон, тем больше скатывающая сила и тем меньше сила трения. Поэтому слаломисты стараются идти как можно ближе к флагам, отбивая их плечом и корпусом.

Можно оценить потерю времени вследствие удлинения пути. Пусть отклонение от оптимальной кривой составляет всего лишь ±10 см. Того же порядка будет удлинение каждой из образующих ее дуг. На слаломной трассе из 50 ворот при средней скорости 10 м/с проигрыш окажется вполне ощутимым:

$$\Delta t \approx (50 \cdot 0{,}1\ \text{м})/(10\ \text{м/с}) = 0{,}5\ \text{с}.$$

В то же время в скоростном спуске или слаломе-гиганте, где ворот меньше, а средняя скорость больше, этот фактор скажется незначительно.

Однако, как ни странно, «идти на флаг», т. е. спрямлять участки пути между флагами, также невыгодно. Во-первых, при этом придется сбрасывать скорость, чтобы вписаться в более крутой поворот, а во-вторых, время движения по прямой вовсе не обязательно наименьшее.

Рассмотрим простой пример. Бусинка скатывается без начальной скорости из точки A в точку B сначала по дуге окружности, а затем по стягивающей ее хорде (рис. 4). Если угловой размер дуги мал, то время движения в первом случае равно четверти периода колебаний математического маятника длиной R (трением пренебрегаем):

$$T_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}.$$

---

*) В каком-то смысле «самым одномерным» является бобслей, где очень многое зависит от умения экипажа разогнать снаряд на старте.

Длина хорды равна $l=2R\sin(\theta/2)$, бусинка движется с ускорением $a=g\sin(\theta/2)$, и во втором случае время будет

$$T_2=\sqrt{2l/a}=2\sqrt{R/g}.$$

Отношение $T_1/T_2=\pi/4<1$, т. е. по дуге бусинка скатится быстрее. Никакого чуда здесь нет. Хотя путь вдоль дуги длиннее, он начинается с более крутого участка. Бусинка быстрее разгоняется, и выигрыш в скорости оказывается важнее, чем проигрыш в расстоянии. С этой точки зрения траектория, составленная из плавно сопряженных дуг, также оказывается лучше, чем та, где резкие повороты перемежаются спрямленными участками.

Еще Галилей интересовался формой брахистохроны — линии наискорейшего спуска от одной точки к другой. Он считал, что это дуга окружности (как в рассмотренном нами примере). В 1697 году И. Бернулли показал, что в отсутствие трения это другая магическая кривая — циклоида.

Уравнение брахистохроны используют при проектировании санных трасс и «американских» (они же «русские») горок. Но рассчитать, не выходя из кабинета, оптимальный путь лыжника не удается. Спортсменам приходится полагаться на собственную интуицию, опыт, тщательно запоминать расположение флагов на трассе. И, следуя совету замечательного французского горнолыжника Ж.-К. Килли, «думать на пять ворот вперед».

Механизм торможения, или Что такое хорошие лыжи

В горных лыжах, да и во многих других видах спорта, прогресс и развитие техники спортсменов идут бок о бок с совершенствованием инвентаря. Как до появления фиберглассовых шестов нельзя было и мечтать о шестиметровых прыжках, так едва ли можно было вообразить стиль нынешних лыжников, стоя на трофейных гикоревых лыжах с креплениями «Кандахар».

Для того чтобы «быстро бегать», лыжи должны не только хорошо скользить, но и как можно крепче держаться за склон, не соскальзывать в поперечном направлении. Действительно, из формулы для центробежной силы видно, что скорость, с которой можно пройти вираж, пропорциональна квадратному корню из силы F поперечного сцепления лыж со снегом —

$$v=\sqrt{FR/m}.$$

Однако дело не только в этом. Соскальзывание является основной причиной потери скорости (драгоценная энергия расходуется на «сгребание» снега со склона). Обычно лыжники пользуются боковым соскальзыванием, когда нужно погасить скорость, преодолеть крутой участок, где новичок не надеется на свои силы, или просто загладить склон после тренировки. Но если спортсмена «потащило на повороте», это сразу же зафиксирует секундомер. Отсюда стремление поставить лыжу как можно круче к склону и врезаться кантами в снег. (А на открывающейся при этом скользящей поверхности особенно эффектно выглядит реклама лыжной фирмы. Правда, появилась она там совсем недавно.)

У истоков развития горных лыж стоял Ф. Нансен. Великий полярник, политический деятель, лауреат Нобелевской премии мира был также автором первой книги о горных лыжах.

Во времена Нансена катались в мягких кожаных ботинках на жестких неокантованных лыжах. А первым собственно горнолыжным приемом был «телемарк» (рис. 5). Этот красивый поворот требовал ловкости и был чреват падением.

На смену «телемарку» пришел более демократичный «плуг» (рис. 6). По сей день многие лыжники начинают с него свою карьеру. Это самый простой, но, увы, самый медленный способ.

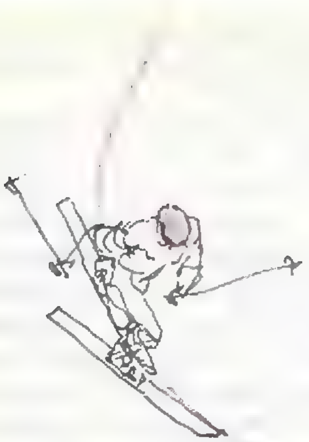


Рис. 5. «Телемарк». Лыжник делает выпад вперед внешней лыжей и балансирует руками. Современное снаряжение не позволяет поворачивать таким образом.

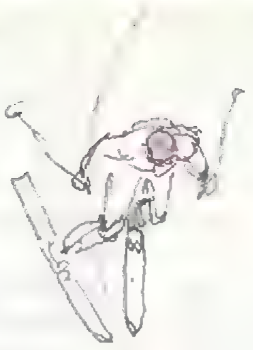


Рис. 6. «Плуг». Стоя на внутренней лыже, лыжник «упирается» в снег отставленной внешней.

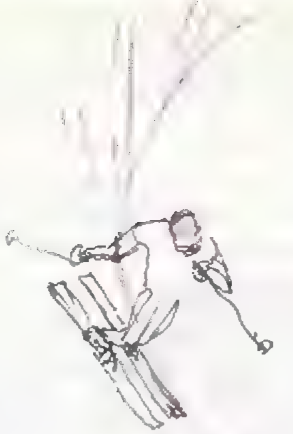


Рис. 7. «Христиания» соскальзыванием. Параллельные лыжи заметают меньшую площадь, чем при «плуге», поэтому торможение меньше.

Последнее слово осталось за «христианией» — поворотом на параллельных лыжах. Постепенно совершенствуясь, он прочно занял главное место в техническом арсенале горнолыжника. Сначала «христианию» выполняли соскальзыванием (рис. 7). Внутренняя лыжа разгружена, корпус лыжника подан чуть вперед, поэтому носок сильнее «держится» за снег. В ходе движения задники немного соскальзывают, и получается поворот. Такой способ был быстрее и надежнее предшествующих.

А дальше уже сама собой, просто и естественно напрашивается идея «резаного» поворота (рис. 8), при котором сопротивление движению минимально. Выросли скорости, и требования к снаряжению сменились на прямо противоположные. Теперь делают жесткие и высокие пластиковые ботинки, которые передают усилие прямо от голени к лыже и позволяют хорошо ее закантовать. А сама лыжа — мягкая, она изгибается по дуге и выписывает поворот, оставляя узкий «резаный» след. Чтобы лыжа легко принимала форму дуги, в середине, где давит ботинок, ее делают немного уже, чем с концов (рис. 9). При кантовании сцепление со снегом оказывается максимальным на концах, и давление посередине прогибает лыжу нужным образом.

Сделать хорошие лыжи непросто, ведь надо убить по крайней мере двух зайцев. Во-первых, лыжа должна мягко гнуться по дуге в продольном направлении. Во-вторых, чтобы не соскальзывать, она должна быть жесткой «на пропеллер», т. е. противостоять скручиванию. Не говоря уж о том, что лыжа должна держать направление и не гнуться в плоскости склона («саблевидный изгиб»). Найти удачное сочетание хотя бы этих качеств — сложная конструкторская задача, причем выбор конкретного решения неоднозначен. Для слалома, где виражи круче, а скорости меньше, спортсмены берут лыжи короче и податливее, чем для слалома-гиганта. Свои требования предъявляют метеоусловия и качество снега. Поэтому буквально перед самым стартом решает будущий чемпион, какие из подготовленных накануне лыж послужат ему сегодня.

К счастью, любители не знают таких проблем. Скорее наоборот, ведь спортивный инвентарь зачастую «строг» и не прощает мелких огрехов. Так что те отборные лыжи, которые мы видим по телевизору,— это лишь верхушка айсберга. А мил-

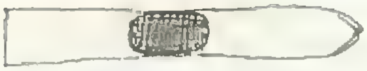
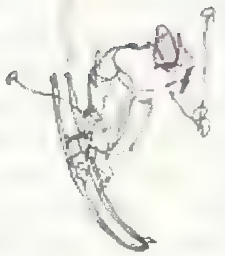


Рис. 9. Чтобы при повороте лыжа легче изгибалась по



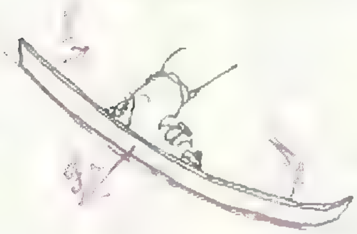


Рис. 8. «Резаный» поворот. Лыжи прогнулись и не «сгребают» снег: в этом случае торможение минимально.

дуге, у нее делают «талию» — небольшое сужение в середине. При кантовании давление ботинка прогнет лыжу нужным образом.

лионы более комфортных туристских лыж верно служат многочисленным любителям и «фанатам» — тем, на кого опирается большой спорт.

Поворот с ускорением, или Фокусы на кривой дорожке

Наконец мы переходим к важнейшему элементу, без которого немыслима техника современного слалома и слалома-гиганта. Несмотря на ясность лежащих в основе физических принципов, этот раздел может вызвать разногласия. До сих пор некоторые специалисты не верят, что спортсмен может ускорять себя при спуске с горы, хотя кинограммы движения хороших лыжников доказывают это. Какие возможности таит активное ведение лыж, показал еще в самом начале своего фантастического взлета Ингемар Стенмарк. «Шведский ураган» опережал соперников больше чем на секунду, в то время как борьба шла за десятые.

Горнолыжников, пожалуй, может удивить непривычный взгляд на данное им в ощущениях. Ни в коем случае не посягая на личный опыт читателей, мы лишь предлагаем свою точку зрения на объективную реальность.

Давайте оглянемся, не подскажут ли разгадку горнолыжного ускорения другие виды спорта? Скажем, обычные беговые лыжи... Теперь здесь правит коньковый ход (рис. 10, *а*). Благодаря ему выросли скорости. Не перенять ли опыт слаломистам? Идея не новая. Ход «коньком» был опробован именно в горных лыжах, а уже потом спустился на равнину. На склоне это выглядит так: каждый поворот сопрягается с одним отталкиванием внешней лыжей, и следы слегка расходятся от начала к концу дуги (рис. 10, *б*). Казалось бы, возникает выигрыш в скорости, но за него приходится платить. Во-первых, «конек» требует очень точ-

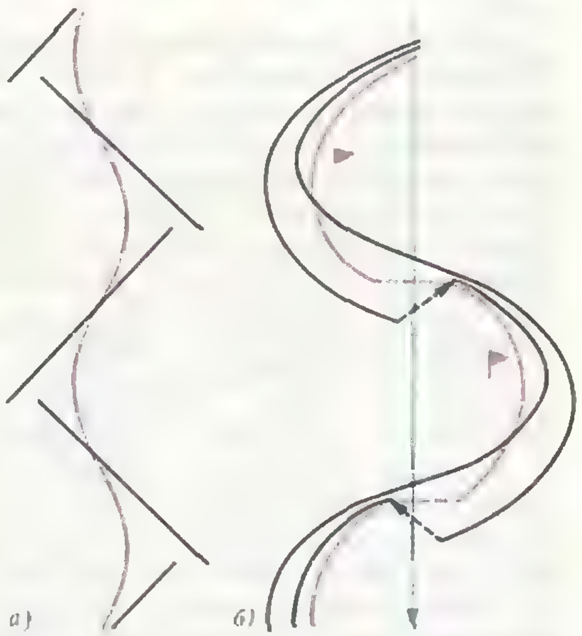


Рис. 10. Коньковый ход на ровном месте (а) и на склоне (б). Красные кривые — траектории центра тяжести лыжника, черные — следы лыж.

ной координации работы ног и соблюдения равновесия, когда лыжник загружает внутреннюю ногу. А во-вторых, затягивается переход из поворота в поворот. В точках пересечения траектории с линией склона спортсмен «перекладывается» из дуги в дугу, перенося свой центр тяжести над лыжами. Затем начинается следующий поворот. Если лыжи стоят широко, то перекладывание займет больше времени, вырастет спрямленный участок траектории. Кроме того, лыжи дольше будут не закантованы, проскальзывание приведет к торможению. Сильнее всего это заметно на льдистых трассах, где так трудно уцепиться за склон. Вот и получается, что на горе «конек» — не самая резвая лошадка...

Хорошо бы и ускоряться, и лыжи вести поуже! Возможно ли такое? Присмотримся еще раз к коньковому ходу (рис. 10, *а*). *Центр тяжести конькобежца или лыжника-гонщика* описывает волнообразную траекторию (красная линия на *рисунке*). Корпус спортсмена опережает опорную лыжу и движется под углом к ней. При этом (а не при переступании с ноги на ногу) совершается работа и набирается скорость.

Постойте, но ведь слаломист тоже движется по «змейке»! Причем его корпус вовсе не следует за лыжами буквально. В конце поворота центр тяжести спортсмена «догоняет» лыжи, проходит над ними и уходит вперед — внутрь следующей дуги. Нельзя ли дополнить это отталкиванием? Оказывается, можно.

Правда, *такой* толчок имеет мало сходства с «коньком» и совсем не бросается в глаза. Составляют его две фазы: сгибание и разгибание.

Вначале, при подходе к точке сопряжения дуг (к точке *пересечения* траектории с линией склона), когда корпус нагоняет лыжи, спортсмен сгибает ноги, словно «амортизируя» бугор. Такое сгибание (иногда очень резкое «проглатывание» — авальман) *позволяет* сохранить набранную скорость, избежать соскальзывания лыж. Сразу за точкой сопряжения следует разгибание, которое *выносит* корпус чуть вперед, сообщая ему добавочный импульс по линии склона. К концу дуги лыжи снова опережают спортсмена, и следуют новые сгибание (амортизация) и разгибание (отталкивание). Причем на узко поставленных лыжах*).

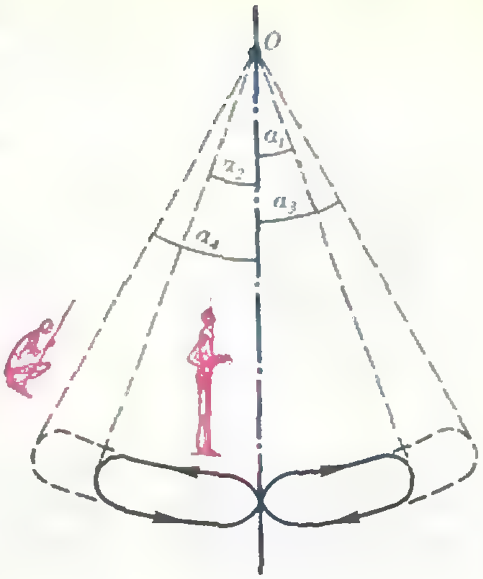


Рис. 11. Движение центра тяжести при раскачивании на качелях.

Лучше понять физику такого, казалось бы, нехитрого процесса нам поможет известное совсем не зимнее развлечение.

Летние аналогии

Итак, давайте немного отвлечемся и вспомним, как летом мы раскачиваемся на качелях, больших парковых качелях-лодках. Представьте себе... Вот качели, постепенно замедляясь, *летят наверх*. В тот миг, когда они зависают в верхней точке, мы приседаем и вот уже мчимся вниз, так что ветер свистит в ушах.

---

*) Наблюдая за горнолыжниками, вы, возможно, замечали, что часто, сопрягая дуги, мастера делают *как бы* приставной шаг с лыжи на лыжу. Это не должно сбивать вас с толку. *Порой это продиктовано* спецификой трассы, а иногда... Даже великие иногда ошибаются.

Внизу, когда перегрузка максимальна, встаем и снова, с замиранием сердца,— наверх, уже чуть выше, чем в прошлый раз. Центр тяжести системы описывает при раскачивании восьмеркообразную спираль (рис. 11).

Раскачивание колебательной системы за счет изменения ее параметров (на качелях это расстояние от точки подвеса до центра тяжести) называется параметрическим разонансом. Вставая в нижней точке, мы совершаем положительную работу против суммы силы тяжести и центробежной силы инерции (мы рассматриваем движение в неинерциальной системе отсчета). А в верхней точке центробежная сила равна нулю, от силы тяжести остается лишь проекция $mg\cos\alpha$. Поэтому отрицательная работа при приседании (с той же амплитудой) по модулю меньше. Полная работа, совершенная за цикл, положительна, и энергия системы растет.

А теперь попробуем прикинуть энергетический баланс горнолыжника, как мы только что это сделали для качелей.

Здесь нас подстерегает сюрприз. На первый взгляд, все очень похоже. При движении по дуге на лыжника тоже действуют сила тяжести и центробежная сила инерции (рис. 12). Угол между ними меняется, так что их равнодействующая минимальна в начале дуги ($F_{р1}$) и достигает максимума в конце ($F_{р2}$). Приседая, лыжник совершает отрицательную работу, а вставая — положительную. Однако когда он разгибается в начале дуги, на него действует меньшая сила, чем при сгибании в конце. Значит, суммарная работа, совершаемая за цикл сгибания — разгибания (амортизация — толчок), будет отрицательна. Парадокс?! Казалось бы, гораздо естественнее совершать положительную работу и увеличивать кинетическую энергию.

Никакой ошибки здесь нет. Просто до сих пор мы не заботились особенно о балансе энергии и думали только о том, как сократить потери и выиграть скорость. В этой теоретической гонке за секундами немудрено было и перегнуть палку. Настало время поставить все на свои места. Давайте запишем закон сохранения энергии на каком-либо участке трассы:

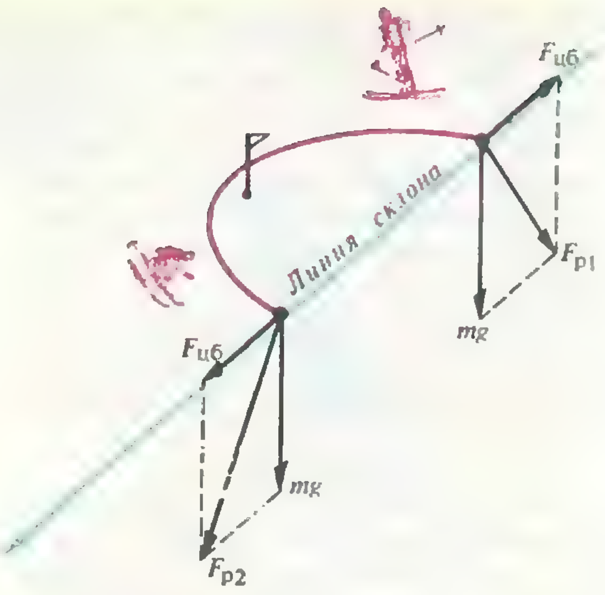


Рис. 12. Равнодействующие сил тяжести и центробежной в начале и в конце дуги: $F_{р2} > F_{р1}$.

$$\Delta E = mg\Delta h + \frac{\Delta(mv^2)}{2} = A_{тр} + A_{в} + A_{лыжн}.$$

В левой части — изменение потенциальной ($mg\Delta h$) и кинетической ($\Delta(mv^2)/2$) энергии лыжника, в правой — работа, совершаемая самим лыжником, силами трения и сопротивления воздуха. Каковы соотношения между этими слагаемыми?

Начнем с левой части уравнения. Средняя скорость слаломиста на трассе меняется не слишком сильно. Поэтому второе слагаемое едва ли существенно, т. е. $\Delta(mv^2/2) \approx 0$. А вот первое, наоборот, велико. Чтобы набрать обычную для слаломиста скорость $v \sim 10$ м/с, достаточно потерять всего лишь $\Delta h = v^2/2g = 5$ м высоты. (В больших горах перепады, как правило, исчисляются сотнями метров.)

Теперь о правой части. Торможение лыж при резаном повороте очень мало. Сопротивление воздуха зависит от скорости. Однако обе эти силы не мешают спусковикам превышать скорость 100 км/ч, т. е. 28 м/с. Но трасса слалома на такой скорости сливается в непробиваемый частокол, становится непроходимой*) И задача слаломиста — не увеличивать скорость, а по крайней мере сдерживать ее рост. Так что отрицательная работа, совершаемая лыжником в цикле сгибания — разгибания,— необходимое условие баланса энергии:

$$A_{\text{лыжн}} < 0.$$

Итак, чтобы выиграть, горнолыжник должен совершать работу, которая не становится легче от знака «минус». Законы физики подтверждают: за победу надо бороться!

Чем же такой способ понижения энергии выгоднее постепенного расхода при повороте соскальзыванием? Во-первых, заменой статических нагрузок на менее утомительные динамические. Нет нужды что есть силы упираться кантами в снег и терять в конце дуги набравшуюся скорость. А во-вторых, вспомним пример с двумя бусинками (см. рис. 4). Если энергия лыжника тратится на трение, его движение по дуге можно грубо представить себе равноускоренным, как у бусинки на прямой проволочке. А при повороте с ускорением лыжник сначала совершает работу и набирает скорость, а гасит ее излишек в конце дуги. В итоге средняя скорость больше, и на поворот уходит меньше времени (как у бусинки на дуге). Режим сгибания — разгибания оказывается дополнительным средством контроля скорости.

Свобода движений и уникальные динамические возможности отличают горные лыжи от санок и бобслея и роднят с молодой еще роликовой доской — «скейтбордом», или просто «скейтом». Кстати, вот прекрасный пример того, что ускоряться не обязательно «коньком»: куда шагнешь, если обе ноги стоят на одной доске? Тем не менее, ускорение за счет параметрического резонанса позволяет даже преодолевать на скейте небольшие подъемы. А механизм все тот же: корпус наклонен внутрь дуги, значит, разгибание в начале поворота и сгибание в конце дают суммарный импульс в направлении движения. И вас не должно смущать, что на скейте сгибание сопровождается энергичным скручиванием в пояснице, помогающим вести дугу. С точки зрения внешнего наблюдателя, главную роль играет перпендикулярная оси доски компонента силы трения (на лыжах это компонента силы реакции снега при кантовании). При движении по «змейке» она меняется по величине и по направлению, но в среднем направлена вперед.

Вот и весь секрет. Только не обольщайтесь, ведь наша теоретическая модель «сесть — встать на два счета» предельно упрощена. Учиться плавать надо в воде. И не было еще на свете лыжника, не измерившего собой пару-тройку больших сугробов.

Заключение

Ни с чем не сравнимое чувство удивительной свободы, когда весь мир рвется тебе навстречу, сверкая искрами морозного снега, не описать формулами. Маленькие дети учатся кататься, подражая взрослым, и не думают о физике. Но знание законов Ньютона открывает второй путь — от головы к ногам.*) Может быть, именно здесь горнолыжник найдет ответ на какие-то нерешенные вопросы. Ну а не горнолыжник... Неужели теперь, когда вы столько знаете, вам не захотелось попробовать? Право же, эта мечта достойна воплощения. Ведь даже если горные лыжи — это не счастье, они вполне могут заменить его.

---

*) Разумеется, на слаломной дуге трение лыж больше, чем на спуске, но не настолько, чтобы изменить последующий вывод.

*) А здесь есть еще с чем подумать. Например, о моментах сил, действующих на горнолыжника. Ведь мы даже не касались этой важнейшей, но сложной темы.

ПОГЛЯДИМ НА ДИАГРАММУ...

В. ЛЕВ

Знакомая задача

Вам, наверное, встречалась следующая задача[*]: «Найти десятизначное число, первая цифра которого равна количеству единиц в этом числе, вторая цифра — количеству двоек, ..., а последняя, десятая цифра — количеству нулей».

После некоторого размышления и ряда неудачных попыток, вы, конечно, найдете ответ: 2 100 010 006. Но, возможно, вам также захочется понять, в чем состоит скрытый механизм этой, такой простой на вид, задачи. В математике часто бывает так: для того, чтобы лучше понять задачу, ее нужно обобщить. Почему, например, мы ограничили себя деся-

---

[*] См., например, «Квант» № 6 за 1989 год, с. 43.

тизначными числами? Напрашивается обобщение задачи: рассмотрим числа в системе счисления с основанием q, состоящие ровно из q цифр. Условимся для краткости называть их просто «q-числами».

Создадим себе проблему!

Вполне естественно, мы начнем с постановки проблемы, которой собираемся заниматься. А подскажет нам ее простая переформулировка исходной задачи.

Рассмотрим какое-нибудь q-число. Построим по нему новое q-число следующим образом: первая цифра этого нового числа будет равна количеству единиц в исходном числе, вторая — количеству двоек,..., предпоследняя — количеству цифр «$q-1$», последняя — количеству нулей в исходном числе. Таким образом, мы определили некоторое отображение на q-числах; это отображение проиллюстрировано на рисунке 1.

Исходная задача состоит в том, чтобы найти «неподвижную точку» такого отображения, т. е. такое q-число, которое при этом отображении переходит само в себя (как, например, число 12002 на рисунке 1).

Попробуем теперь проследить судьбу какого-нибудь q-числа при нашем отображении. Хотя q-чисел не так уж мало (подумайте, сколько), их все же конечное число. Поэтому последовательные образы исходного q-числа не могут все быть различны. А значит, начиная с некоторого места, эти образы начнут периодически повторяться — возникнет цикл наподобие тех, что изображены справа на рисунке 1. Неподвижная точка — это, конечно, цикл единичной длины. Но интересно также описать все циклы такого отображения. Именно в этом и будет состоять наша проблема!

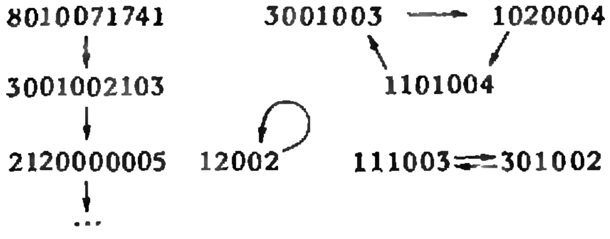


Рис. 1.

Упражнение. Свяжем с q-числом $A=(a_1a_2...a_q)$ величины $s(A)=a_1+a_2+ ... +a_q$; $m(A)=a_1+2a_2+...+(q-1)a_{q-1}$. Докажите, что если q-число A есть образ некоторого другого q-числа B при нашем отображении, то $s(A)=q$. Кроме того, $s(B)=m(A)$.

Диаграммы Юнга

Читатели «Кванта», наверное, уже знакомы с такими диаграммами, часто возникающими в связи с вопросами о разбиении натуральных чисел на слагаемые. Несколько примеров изображено на рисунке 2, где рядом с каждой диаграммой указан ее *порядок* — общее число квадратиков во всех столбцах диаграммы. Высота столбцов возрастает справа налево.

Группой столбцов мы будем называть совокупность всех столбцов диаграммы заданной высоты, если только количество таких столбцов не менее двух; все остальные столбцы (т. е. те, которые не попали ни в одну группу) будем называть *отдельными столбцами*.

Зачем они нам?

Пришло время объяснить, как связана наша задача с диаграммами Юнга. Прежде всего укажем способ, который любому q-числу ставит в соответствие некоторую диаграмму порядка q. Вот этот нехитрый способ: переставим в q-числе цифры так, чтобы одинаковые цифры следовали подряд, объединим их в горизонтальные прямоугольники и затем «повернем» эти прямоугольники, поставив их вертикально; взгляните на рисунок 3!

Конечно, разным q-числам может соответствовать одна и та же диаграмма: например, если эти числа получаются друг из друга некоторыми перестановками и переобозначениями цифр (см. рисунок 4). Очевидно и обратное: если два q-числа имеют одну и ту же диаграмму Юнга, то каждое из них может быть получено из другого такими перестановками

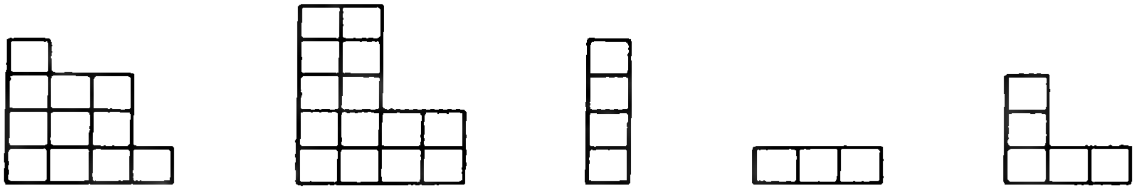


Рис. 2. $q=11$, $q=14$, $q=4$, $q=3$, $q=5$.

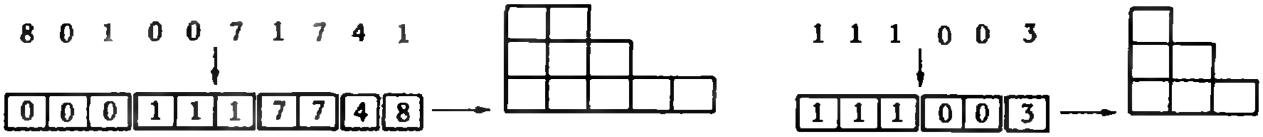

8 0 1 0 0 7 1 7 4 1
0 0 0 1 1 1 7 7 4 8
1 1 1 0 0 3
1 1 1 0 0 3

Рис. 3.

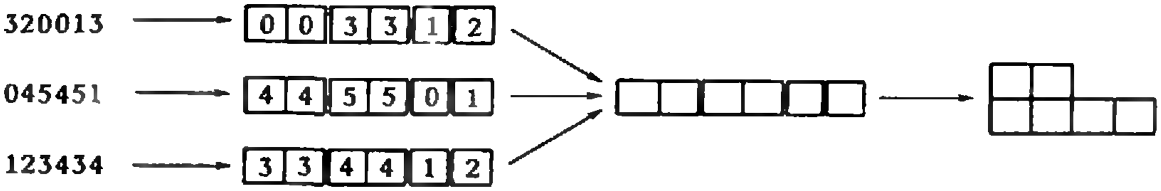

320013
0 0 3 3 1 2
045451
4 4 5 5 0 1
123434
3 3 4 4 1 2

Рис. 4.

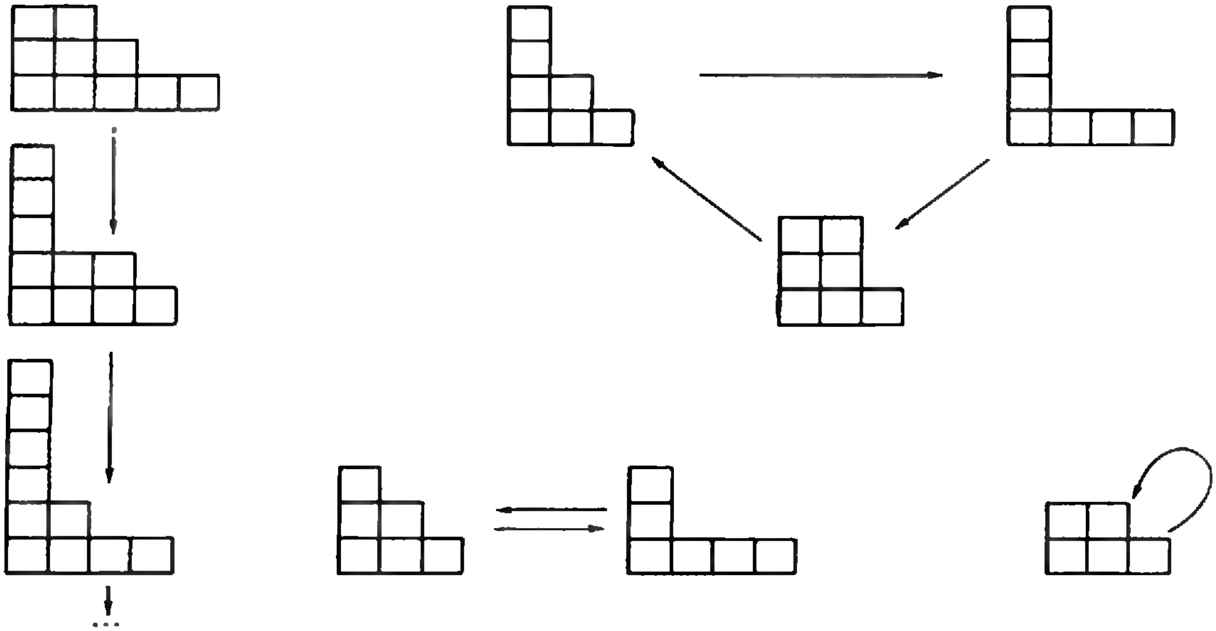


Рис. 5.

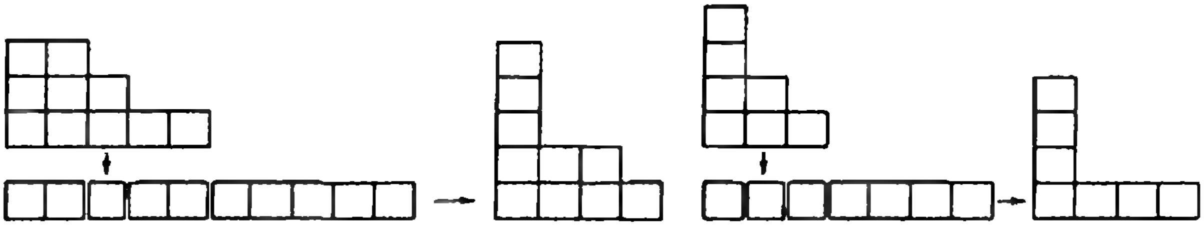


Рис. 6.

и переобозначениями. Заметим теперь, что их образы при нашем отображении q-чисел получаются друг из друга простой перестановкой цифр (обязательно проверьте это!), и, следовательно, эти образы также имеют одну и ту же диаграмму. Мы доказали следующее:

> если двум q-числам соответствует одна и та же диаграмма Юнга, то их образам также соответствует одна и та же диаграмма Юнга.

Это утверждение, несмотря на простоту, имеет для нас решающее значение. Ни в коем случае не читайте дальше эту статью, пока оно не станет вам полностью очевидно!

Что же из этого следует?

Возьмем какую-нибудь диаграмму Юнга порядка q и рассмотрим любое порождающее ее q-число. Найдем затем образ этого q-числа и построим, в свою очередь, соответствующую этому образу диаграмму; «синее» утверждение (см. выше) означает, что эта последняя диаграмма полностью определяется той, которая была взята вначале. Таким образом, введенное нами выше отображение на множестве q-чисел определяет некоторое отображение на множестве диаграмм Юнга порядка q. Примеры этого последнего отображения приведены на рисунке 5.

Любой цикл отображения на q-числах, конечно, будет определять некоторый цикл отображения на диаграммах Юнга порядка q. Это позволяет от поиска циклов на q-числах перейти к поиску циклов на диаграммах Юнга. Конечно, потом надо будет еще «вернуться назад», найдя для каждого цикла на диаграммах Юнга все соответствующие циклы на q-числах. Однако это делается уже довольно легко; к этому вопросу мы вернемся в конце.

Итак, наша задача трансформировалась в следующую:

> найти все циклы на диаграммах Юнга порядка q, определяемые введенным выше отображением диаграмм.

Давайте разберемся...

«как работает» построенное нами отображение диаграмм Юнга. Каждому отдельному столбцу исходной диаграммы соответствует ряд цифр исходного числа, имеющий «уникальную» длину, а значит, соответствует некоторая уникальная цифра числа-образа, т. е., в конце концов, соответствует столбец диаграммы-образа, имеющий единичную высоту. Совершенно аналогично, каждой группе столбцов исходной диаграммы соответствует один столбец диаграммы-образа, высота которого равна ширине основания этой группы столбцов. Кроме того, цифры 0 числа-образа не соответствуют никаким рядам цифр исходного числа. Эти нули порождают еще один столбец диаграммы-образа, который мы будем называть *дополнительным.*

Для того чтобы осуществить отображение исходной диаграммы в диаграмму-образ, необходимо:

1) нарисовать «длинный» прямоугольник высотой в одну и длиной в q клеточек, совместив его левую сторону и основание с левой стороной и основанием исходной диаграммы;

2) разбить «длинный» прямоугольник на несколько коротких вертикальными сторонами, ограничивающими группы столбцов и отдельные столбцы исходной диаграммы;

3) поставить вертикально полученные короткие прямоугольники, составив из них новую диаграмму Юнга. Это и будет диаграмма-образ.

Отображение диаграмм Юнга порядка q может быть полностью описано графом, показывающим, какая диаграмма в какую переходит. Для значений $q<7$ такие графы изображены на рисунке 7. Видно, например, что при $q=2$ и $q=6$ имеется ровно по одному циклу, состоящему из двух диаграмм; при $q=5$ и $q=7$ имеется по одной, а при $q=4$ — две неподвижные точки; циклы из трех диаграмм имеются лишь при $q=3$ и $q=7$ (как мы докажем чуть позже, таких циклов больше нет ни при каких других значениях q).

Остается решить задачу...

и теперь мы полностью готовы к этому. Так как случаи $q<7$ уже разобраны на рисунке 7, мы будем считать, что $q>7$. Внимательный читатель уже мог догадаться, в чем состоит наша основная идея: помните, при описании отображения на диаграммах Юнга мы говорили, что «каждой группе столбцов исходной диаграммы соответствует один столбец диаграммы-образа»? Это означает, что, как правило, число столбцов при переходе к диаграмме-образу может лишь уменьшиться. Точнее, число столбцов может увеличиться лишь в том случае, если все столбцы исходной диаграммы являются отдельными; неизменным же число столбцов может оставаться только в случае, если диаграмма содержит ровно одну группу, состоящую из двух столбцов, а все остальные столбцы должны быть отдельными. На этом и будет основано наше решение: ведь если мы возьмем любой цикл на диаграммах Юнга, то либо все диаграммы этого цикла будут содержать одно и то же количество столбцов, либо по крайней мере одна диаграмма цикла будет содержать строго меньше столбцов, чем ее образ. Иначе говоря, в каждом цикле либо все диаграммы содержат одну группу из двух столбцов и некоторое (постоянное для всех диаграмм цикла) число отдельных столбцов; либо найдется диаграмма, состоящая лишь из отдельных столбцов. Эти две возможности мы сейчас и рассмотрим последовательно.

А. Пусть все диаграммы нашего цикла включают группу из двух столбцов и некоторое количество отдельных столбцов, одно и то же для всех диаграмм цикла.

Рассмотрим некоторую диаграмму цикла. Ее диаграмма-образ, также принадлежащая циклу, будет состоять из столбца высоты 2, некоторого количества столбцов единичной высоты и дополнительного столбца; так как эта диаграмма подчиняется общему правилу — «группа из двух и некоторое количество отдельных столбцов»,— то легко проверить, что число столбцов единичной высоты — ровно 2, а дополнительный столбец имеет высоту не менее трех клеточек (при этом надо учесть условие $q>7$). Но тогда следующая диаграмма цикла будет состоять из столбца высотой 2, двух столбцов единичной высоты и дополнительного столбца высотой $q-4$; такой же вид будут иметь и все последующие диаграммы, т. е. на самом деле наш цикл состоит всего из одного элемента — он является неподвижной точкой отображения диаграмм Юнга порядка q (см. рис. 8 слева).

B. Пусть одна из диаграмм нашего цикла состоит лишь из отдельных столбцов.

Тогда следующая диаграмма состоит из столбцов единичной высоты и

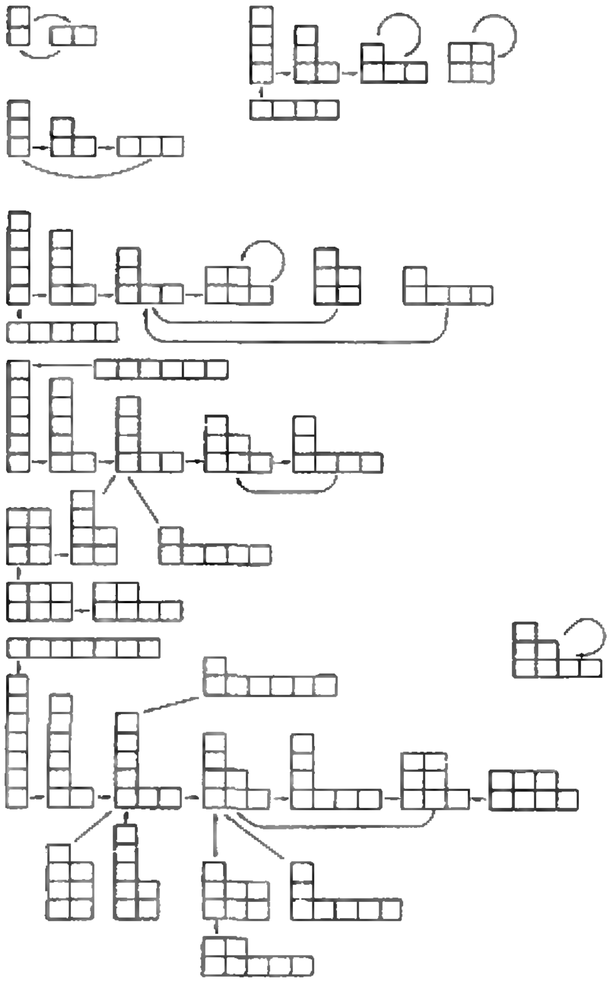


Рис. 7.

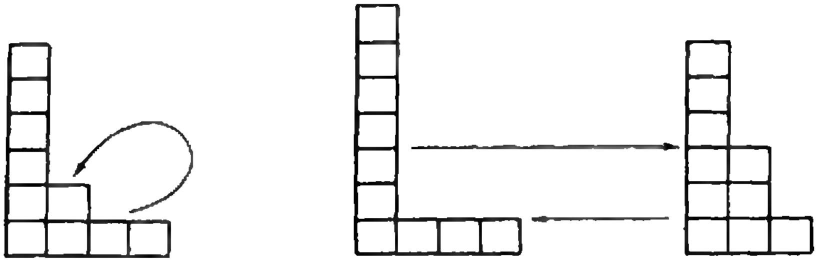


Рис. 8.

дополнительного столбца, высота которого больше 1 (последнее очевидно, так как высота дополнительного столбца равна числу клеточек исходной диаграммы, находящихся «не ниже второго этажа» диаграммы). В свою очередь, образ этой диаграммы будет включать три столбца, один из которых — единичной высоты. Все эти три столбца не могут иметь одинаковую высоту (почему?); если же совпадают некоторые две высоты, то следующая диаграмма цикла все-таки будет состоять из трех столбцов с различными высотами. Итак, в любом случае в нашем цикле встретится диаграмма, состоящая из трех столбцов с различными высотами; следующая диаграмма будет состоять из трех столбцов единичной высоты и дополнительного столбца высотой $q-3$; следующая — вновь из трех столбцов с различными высотами (равными 3, 1 и $q-4$: мы вновь используем условие $q>7$) и т. д.,— мы пришли к циклу, состоящему из двух диаграмм (см. рис. 8 справа).

Наша задача решена. Мы показали, что для отображения на диаграммах Юнга порядка $q>7$ имеется ровно два цикла: одна неподвижная точка и один цикл длиной 2.

Назад, к q-числам!

Для того чтобы полностью завершить наше небольшое исследование, остается вернуться от диаграмм Юнга к q-числам, определив, какие циклы на q-числах могут порождать найденные нами два цикла на диаграммах Юнга при $q>7$. К счастью, проделать это совсем не сложно.

Начнем с цикла длиной 1 — неподвижной точки отображения диаграмм Юнга. Порождающее единственную диаграмму этого цикла число включает группу из $(q-4)$-х одинаковых цифр, группу из двух цифр и еще некоторые две различные цифры; следовательно, образ этого числа будет состоять из цифр $(q-4)$, 2, 1, 1, а все остальные цифры образа — нули; но тогда следующий образ будет иметь первую цифру 2, вторую цифру 1, $(q-4)$-ю цифру 1, последнюю цифру $(q-4)$, а остальные цифры — нули; так же будут выглядеть и все последующие образы. Итак, единственный цикл на q-числах, порождающий неподвижную точку отображения диаграмм Юнга, сам является неподвижной точкой: он состоит из единственного числа 210...010...0 $(q-4)$ (вторая единица стоит на $(q-4)$-ом месте). При $q=10$ это число уже встречалось вам в самом начале статьи.

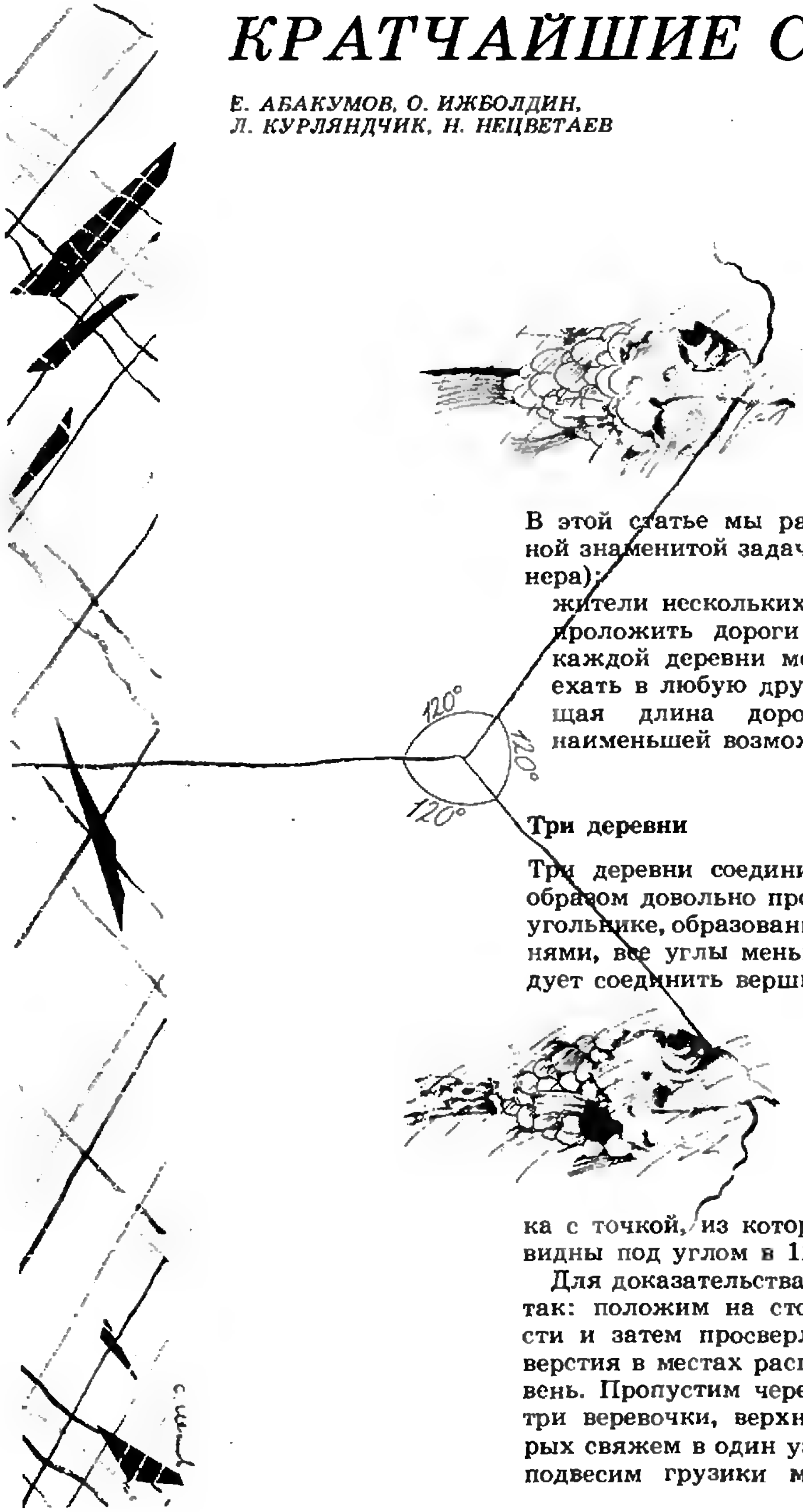
Цикл длины 2 рассматривается совершенно аналогично. Мы предоставим детали заинтересованному читателю, а здесь сообщим лишь результат: этот цикл также порождается ровно одним циклом на q-числах, состоящим из двух элементов: 30...0100 $(q-4)$ и 1010...01000 $(q-3)$.

И в заключение — нерешенная задача

Итак, мы знаем, что каждое q-число в конце концов попадет либо в неподвижную точку, либо в цикл длиной два. Но как предсказать «судьбу» конкретного q-числа? Вероятно, есть признак, позволяющий по виду числа определять, какая именно из двух возможностей реализуется. Автору не удалось найти такой признак. Может быть, кто-нибудь из читателей сможет решить эту задачу?

КРАТЧАЙШИЕ СЕТИ

Е. АБАКУМОВ, О. ИЖБОЛДИН,
Л. КУРЛЯНДЧИК, Н. НЕЦВЕТАЕВ



В этой статье мы расскажем об одной знаменитой задаче (задаче Штейнера):

> жители нескольких деревень хотят проложить дороги так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в любую другую, причем общая длина дорог была бы наименьшей возможной.

Три деревни

Три деревни соединить кратчайшим образом довольно просто: если в треугольнике, образованном этими деревнями, все углы меньше 120°, то следует соединить вершины треугольника с точкой, из которой все стороны видны под углом в 120° (рис. 1).

Для доказательства этого поступим так: положим на стол план местности и затем просверлим в столе отверстия в местах расположения деревень. Пропустим через эти отверстия три веревочки, верхние концы которых свяжем в один узел, а к нижним подвесим грузики массой по 1 кг.

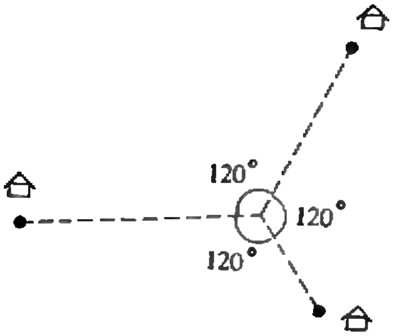


Рис. 1.

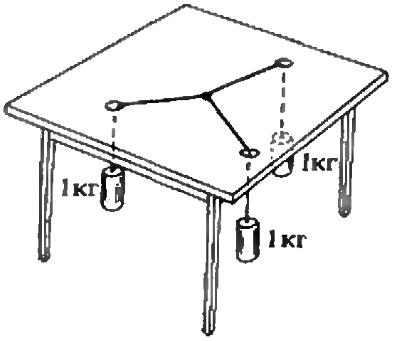


Рис. 2.

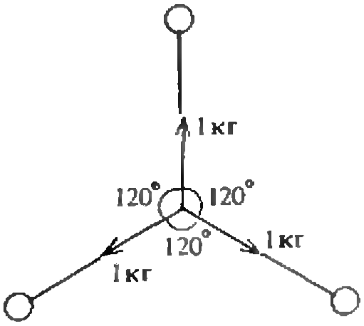


Рис. 3.

(рис. 2). Веревочки на столе займут положение с минимальной суммарной потенциальной энергией грузиков. Значит, общая длина веревочек под столом окажется максимально возможной, а веревочки на поверхности стола укажут искомое кратчайшее соединение данных трех точек. Остается только понять, почему узел при этом попадет в точку, из которой все стороны видны под углом в 120°. Для этого достаточно заметить, что на узел действуют три одинаковые по величине силы (рис. 3), а они могут уравновесить друг друга только в том случае, если все три угла, образованные ими, равны.

Упражнение 1. Докажите это.

И в этом месте мы могли бы уже закончить доказательство, если бы были уверены, что узел не попадет в отверстие. Но что это значит — узел попал в отверстие? Это означает, что сумма двух сил натяжения, направленных по сторонам треугольника (рис. 4), не превышает 10 Н. А это возможно лишь в случае, когда угол, образованный этими силами, не менее 120°.

Подведем итог обсуждению задачи о соединении трех точек *A*, *B*, *C* кратчайшей сетью дорог.

Если все углы треугольника ABC меньше 120°, то нужно соединить все вершины с точкой, из которой все стороны видны под углом 120°. Если же один из углов треугольника не меньше 120°, то вершину этого угла следует соединить с двумя другими вершинами.

Решение закончено, но нам хочется сделать к нему три замечания.

Замечание первое. По сути дела исходную задачу о кратчайшей сети, связывающей три данные точки, мы подменили задачей о нахождении точки, для которой сумма расстояний до этих трех,— наименьшая возможная. (Кстати, такая точка называется точкой Ферма.)

Упражнения

2. Обоснуйте правомерность такой переформулировки.

3. Выясните, возможна ли аналогичная переформулировка в случае четырех точек.

Замечание второе. Можно предложить другой способ построения кратчайшей сети дорог. Положим на стол план местности и затем вобьем три гвоздя в местах расположения деревень. После этого натянем резинку, используя маленькое колечко, так, как это показано на рисунке 5. При отсутствии сил трения резинка в натянутом состоянии займет такое положение, при котором ее длина будет минимальной, а это нам и даст кратчайшую сеть дорог.

Замечание третье. Да, мы научились находить кратчайшую сеть в треугольнике. Но решение задачи обошлось нам не дешево: пришлось испортить стол. Хорошо бы найти чисто геометрическое построение необходимой нам точки (из которой все стороны видны под углом 120°). Построим на сторонах треугольника *ABC* равносторонние треугольники во внешнюю сторону (рис. 6). Тогда искомая точка будет точкой пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1. (Естественно, что сейчас мы говорим о

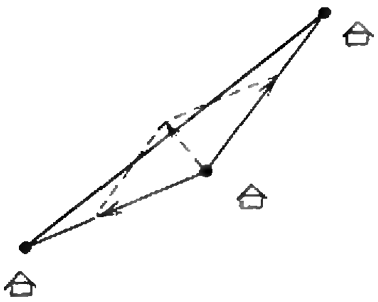


Рис. 4.

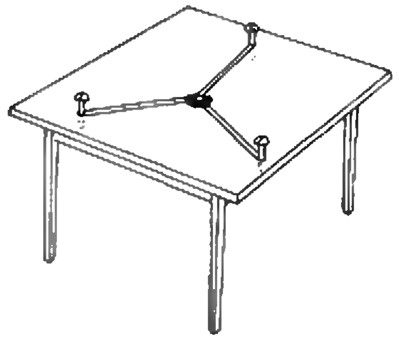


Рис. 5.

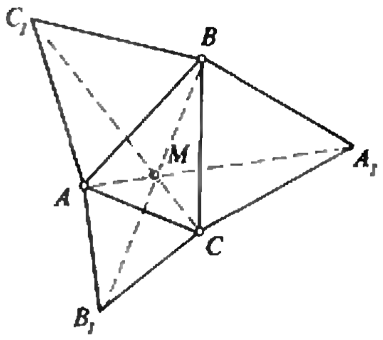


Рис. 6.

случае, когда углы треугольника ABC меньше 120°.)

Упражнения

4. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что точка пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1 — искомая.

6. Пусть M — точка пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что $AM+BM+CM=$ $=AA_1=BB_1=CC_1$.

7. Докажите, что для любой точки X треугольника ABC выполнено неравенство $AX+BX+CX\geqslant AM+BM+CM$.

8. Используя результаты предыдущих упражнений, приведите чисто геометрическое решение задачи о кратчайшем соединении трех точек.

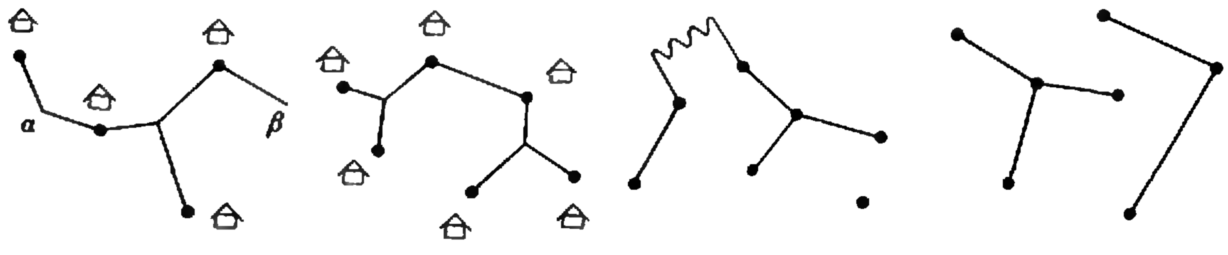
Свойства кратчайшей сети

Итак, мы решили задачу о соединении трех деревень кратчайшей сетью дорог. Переходя к общему случаю, сформулируем возникающую перед нами задачу.

Даны n точек на плоскости. Требуется соединить их сетью отрезков, имеющих наименьшую общую длину.

Такая сеть называется *кратчайшей*. Во избежание недоразумений уточним понятие сети. *Сетью, соединяющей данные n точек*, мы будем называть такой набор из конечного числа отрезков, что любые две исходные точки являются концами ломаной из отрезков этого набора. Исходные n точек мы будем называть *деревнями*. Все остальные концы отрезков сети будем называть *развилками*. На рисунках 7, *а*, *б* приведены примеры сетей, а то, что изображено на рисунках 7, *в*, *г*, сетями не является.

На рисунке 7, *а* развилка α по сути дела лишняя и уж совсем не согласуется с интуитивным представлением о развилках. Также очевидно, что можно обойтись и без развилки β (которая скорее является тупиком). Эти наблюдения подсказывают, что, говоря о кратчайших сетях, мы можем ограничиваться случаем, когда в каждой развилке сходится не менее трех отрезков. Строго это можно доказать так. Если бы из какой-нибудь развилки выходило ровно два отрезка, то их можно было бы заменить одним отрезком, соединяющим их концы (при этом общая длина сети не увеличится). Ну а если бы развилка



а) б) в) г)

Рис. 7.

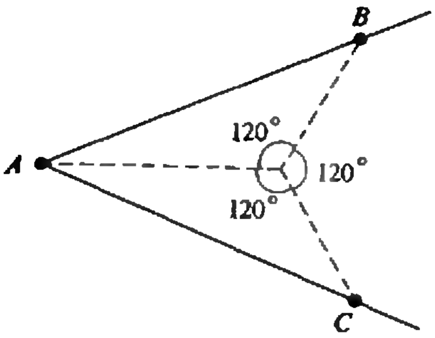


Рис. 8.

являлась концом только одного отрезка, то, выкинув этот отрезок, мы бы также уменьшили длину сети.

Выясним, какой угол могут образовывать два отрезка кратчайшей сети, выходящие из одной точки. Этот угол не может быть меньше 120°. Действительно, если бы отрезки AB и AC образовывали угол меньше 120°, то, заменив участок сети, образованный этими отрезками, на кратчайшую сеть треугольника ABC (рис. 8), мы уменьшили бы общую длину сети. Отсюда, в частности, следует, что из каждой деревни и из каждой развилки выходит не более трех отрезков.

Подводя итог всему сказанному, получаем два главных свойства кратчайшей сети.

Свойство 1. *Из всякой развилки выходит ровно три отрезка. Каждые два из них образуют угол в 120°.*

Свойство 2. *Из каждой деревни выходит один, два или три отрезка, причем если из деревни выходит два отрезка, то угол между ними не меньше 120°, а если выходят три отрезка, то углы между ними равны 120°.*

Нам потребуются и некоторые другие свойства кратчайших сетей. Сформулируем еще одно — простое, но важное

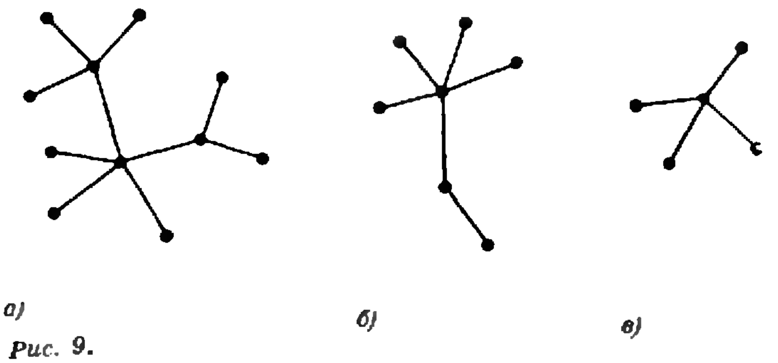
Свойство 3. *Никакие отрезки сети не образуют замкнутую ломаную.*

Это почти очевидно. Действительно, если в сети нашлась замкнутая ломаная, то, выкинув произвольное звено этой ломаной, мы уменьшим длину сети. При этом любые две деревни останутся связанными.

Сколько может быть развилок в сети?

Итак, нами доказаны три основных свойства кратчайшей сети. Тем из вас, кто знаком с понятием графа, конечно же ясно, что кратчайшая сеть является *деревом*. А для тех, кто еще не встречался с этими понятиями, скажем, что под деревом мы понимаем такой набор отрезков на плоскости, что в нем нет замкнутых ломаных, а вся картинка является «связной», т. е. любые два конца этих отрезков соединяются ломаной. Примеры деревьев изображены на рисунках 9, *а*—*в*. Отрезки, из которых состоит дерево, принято называть ребрами, а концы отрезков — вершинами.

Посмотрите на рисунок 9: у каждого из деревьев количество вершин на единицу больше числа ребер. Это свойство выполнено для любого дерева. Доказывается это индукцией по числу вершин: возьмем какую-нибудь вершину, из которой выходит только одно ребро (почему такая вершина всегда найдется?), и отбросим эту вершину вместе с ребром. Мы снова



а) *б)* *в)*

Рис. 9.

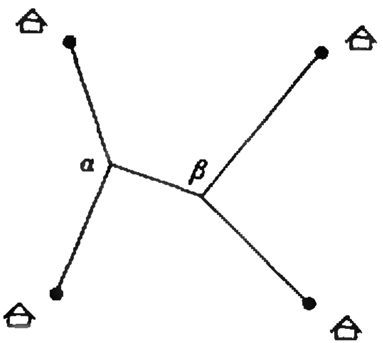


Рис. 10.

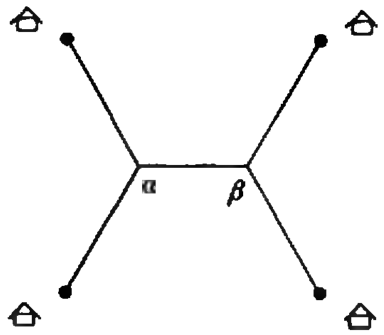


Рис. 11.

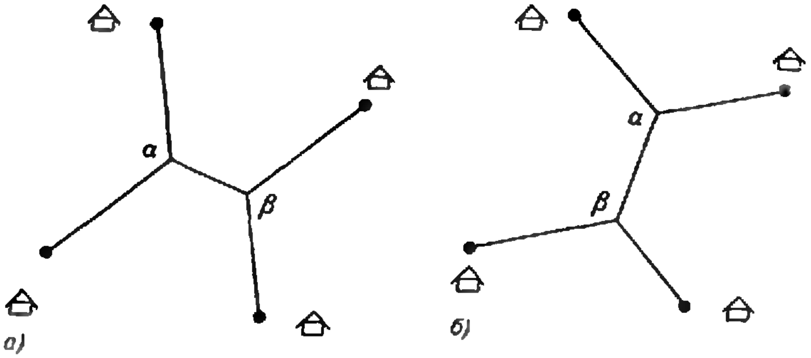


Рис. 12.

получим дерево, но уже с меньшим числом вершин. По предположению индукции, число вершин нового дерева равно числу его ребер плюс единица. Значит это свойство выполнено и для исходного дерева.

Подводя итог сказанному, получаем: *число деревень плюс число развилок на единицу больше числа отрезков сети*. Посчитаем количество отрезков сети другим способом. Так как из каждой развилки выходят три отрезка, а из каждой деревни хотя бы один отрезок, то число отрезков заведомо не меньше, чем $\frac{3Р+Д}{2}$ ($Р$ — число развилок, $Д$ — число деревень; делим пополам потому, что у отрезка два конца!). Т. е. $Д+Р-1\geqslant\frac{3Р+Д}{2}$. Значит, $Р\leqslant Д-2$.

Тем самым, мы получили еще одно свойство кратчайшей сети.

Свойство 4. *Число развилок по крайней мере на две меньше числа деревень.*

Упражнение 9. Докажите, что количество развилок кратчайшей сети равно $Д_1-Д_3-2$, где $Д_1$ — количество деревень, из которых выходит один отрезок, а $Д_3$ — количество деревень, из которых выходит три отрезка.

Четыре деревни в вершинах квадрата

Мы располагаем уже достаточными знаниями о кратчайших сетях. Попробуем их применить в конкретной ситуации. Рассмотрим четыре деревни, расположенных в вершинах квадрата. Как их соединить кратчайшим образом?

Понятно, что кратчайшая сеть не выходит за пределы квадрата. Отсюда следует, что из каждой деревни выходит ровно одна дорога. Действительно, если бы из какой-то деревни выходило не менее двух, то образованный ими угол был бы не больше 90°. А это противоречит второму свойству кратчайшей сети.

Воспользовавшись обозначениями из упражнения 9, получаем, что $Д_1=4$, $Д_3=0$, и, значит, количество развилок равно $Д_1-Д_3-2=2$. Понятно, что эти две развилки соединены отрезком, а каждая из них соединяется с двумя деревнями (рис. 10). На этом рисунке нам неизвестно точное расположение развилок α и β. Как же определить их истинное расположение в квадрате?

Воспользуемся еще раз вторым свойством кратчайшей сети: все шесть углов на рисунке 10 должны быть равны 120°. Пример сети с таким условием нарисовать несложно (рис. 11).

Четыре деревни

Решим теперь более сложную задачу: четыре деревни расположены в вершинах выпуклого четырехугольника, все углы которого меньше 120°. Как их соединить кратчайшим образом?

Повторяя рассуждения, приведенные при решении задачи о кратчайшей сети в квадрате, получаем, что и в данном случае кратчайшая сеть должна иметь ровно две развилки, а из каждой деревни должна выходить одна дорога. Возможно ровно два способа соединения A, B, C, D с таким условием (рис. 12, *а*, *б*). (В случае квадрата мы обошлись рассмотрением одного способа соединения, ибо второй способ попросту получается поворотом на 90°.)

Естественно, возникает вопрос: какой же именно вид — 12,*а* или 12,*б* — имеет кратчайшая сеть? Ответ на этот вопрос можно получить лишь найдя кратчайшую сеть каждого из двух видов и сравнив их по длине. Итак, требуется построить кратчайшую сеть данного вида (скажем, 12, *а*), т. е. найти истинное положение развилок α и β.

Построение развилок (рис. 13) мы начнем с замечания, что отрезки $A\alpha$, $B\alpha$, $\alpha\beta$ образуют кратчайшую сеть в треугольнике $AB\beta$. Значит, развилка α является точкой Ферма в этом треугольнике. Аналогично, точка β является точкой Ферма в треугольнике $CD\alpha$.

Построим на отрезках AB и CD во внешнюю от четырехугольника сторону равносторонние треугольники ABO_1 и CDO_2. Точки O_1, α, β — лежат на одной прямой (см. упражнение 5). По тем же причинам и точки O_2, β, α лежат на одной прямой. А значит, все четыре точки O_1, α, β, O_2 лежат на одной прямой. Теперь уже построить точки α и β легко: это точки пересечения описанных вокруг равносторонних треугольников ABO_1 и CDO_2 окружностей с отрезком O_1O_2 (рис. 13).

Итак, мы построили кратчайшую сеть вида 12, *а*. Аналогичным образом строится кратчайшая сеть вида 12, *б*. Из двух построенных соединений более короткое и является ответом задачи.

Упражнения

10. Где в доказательстве использовано условие, что все углы четырехугольника меньше 120°?

11. Докажите, что длина кратчайшей сети, построенной по рисунку 13, равна длине отрезка O_1O_2.

12. Найдите механическое решение этой задачи, используя два колечка, резинку и четыре гвоздя.

13. Найдите длину кратчайшей сети в прямоугольнике 3×4.

Правильный пятиугольник

Решим теперь задачу о нахождении кратчайшей сети для пяти деревень, расположенных в вершинах правильного пятиугольника. При решении этой задачи поступим так же, как и в случае четырех деревень. Так как все углы в правильном пятиугольнике меньше 120°, то из каждой вершины пятиугольника выходит ровно один отрезок. Следовательно, число развилок сети, равное D_1-D_3-2 (см. упражнение 9), в данном случае равно трем, так как $D_1=5$, $D_3=0$. По существу, достаточно рассмотреть один вариант соединения (рис. 14), так как остальные четыре способа соединения с тремя развилками получаются из него поворотом. Теперь остается найти истинное расположение развилок α, β, γ. Для построения этих развилок воспользуемся уже применявшейся идеей: построим на отрезках AB и DC правильные треугольники ABO_1 и DCO_2 во внешнюю от пятиугольника сторону. Поскольку развилки α и γ должны лежать на отрезках $O_1\beta$ и $O_2\beta$, то отрезки βO_1, βO_2 и βE должны образовывать углы 120°, и, следова-

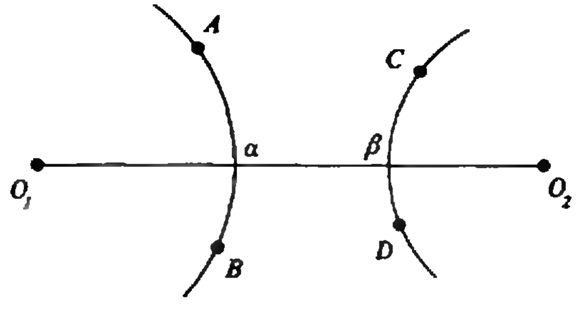


Рис. 13.

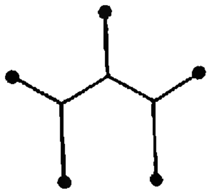


Рис. 14.

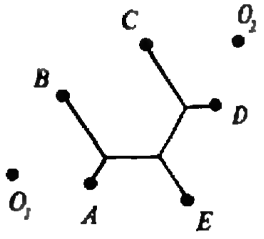


Рис. 15.

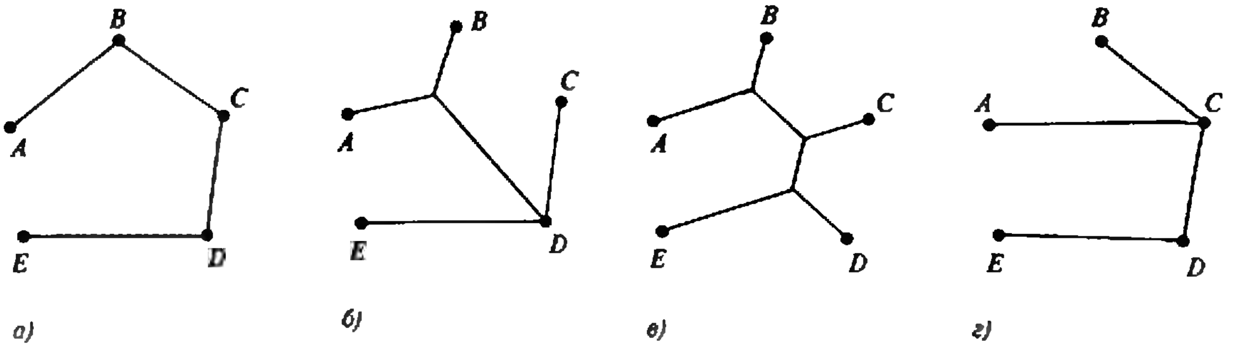


Рис. 16.

тельно, β является точкой Ферма в треугольнике O_1O_2C. Как строить точку Ферма в треугольнике, мы уже знаем.

Теперь уже легко строятся развилки α и γ — это точки Ферма в треугольнике $AB\beta$ и $CD\beta$. Получившаяся сеть и является кратчайшей для вершин правильного пятиугольника $ABCDE$ (см. рис. 15).

Построение кратчайшей сети

А как же решить задачу в общем случае, т. е. соединить n деревень кратчайшей сетью дорог? Внимательный читатель, конечно же, заметил, что решение задачи в случае четырех и пяти деревень разбивалось на два этапа. Сначала мы выяснили, каким может быть граф соединения, т. е. определяли, сколько может быть развилок и какие из развилок и деревень соединены отрезками. На втором этапе, используя эту информацию (о графе соединения), мы находили истинное положение развилок. Именно так мы поступим и в общем случае.

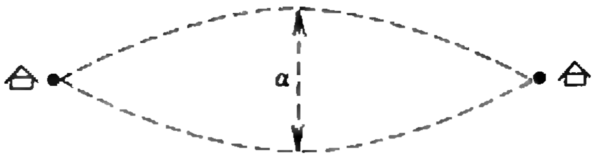
Начнем с первого этапа. Как нам известно, количество развилок не больше чем $n-2$, и поэтому возможных схем (точнее, графов) соединения данных n точек лишь конечное число. Следовательно, первый этап сводится к конечному перебору всех возможных графов соединения. Примеры некоторых возможных графов соединения пяти деревень изображены на рисунках 16, *а—г*.

Теперь перейдем ко второму этапу: построение кратчайшей сети по данному ее графу. Достаточно научиться сводить задачу о построении сети для n деревень к построению сети для меньшего числа деревень.

Итак, пусть у нас есть граф соединения n деревень. Если в этом графе какие-то деревни соединены отрезком, то, выбросив его, мы разобьем наш граф на два с меньшим числом деревень. Для каждого из этих графов задачу о кратчайшей сети нужно решать отдельно. Предположим теперь, что всякий отрезок, выходящий из деревни, ведет в развилку. Так как количество развилок меньше числа деревень, то из каких-то двух деревень отрезки ведут в одну развилку. Обозначим эти деревни и развилку буквами A, B и α.

Ясно, что развилка α является точкой Ферма треугольника $AB\beta$ (рис. 13). Воспользуемся идеей, которую мы уже неоднократно применяли: построим равносторонний треугольник ABO_1. Как известно, в кратчайшей сети развилка α обязана лежать на отрезке $O_1\beta$. Теперь задача сводится к меньшему числу деревень заменой двух деревень A и B на одну, находящуюся в точке O_1, и заменой отрезков $A\alpha$, $B\alpha$, $\alpha\beta$ на отрезок $O_1\beta$. Построив сеть для новой системы деревень (вместо A и B — точка O_1), мы найдем точное положение всех развилок, кроме одной — развилки α. Ну а эта развилка является точкой пересечения окружности, описанной вокруг треугольника ABO_1, и отрезка $O_1\beta$. Так как теперь все развилки построены, то задача решена.

А теперь мы обращаемся к придирчивому читателю, который, конечно



Чем меньше a, тем короче сеть !

Рис. 17.

же, обнаружил в доказательстве ряд неточностей. Чтобы исправить положение, мы предлагаем ряд упражнений, решив которые, вы сможете ликвидировать пробелы в доказательстве.

Упражнения

14. Как быть в случае, когда из какой-то из деревень A или B ведет не одна, а по крайней мере две дороги?

15. На стороне AB можно построить два равносторонних треугольника. Какой именно нужно выбрать?

16. Второй этап доказательства состоял в описании способа построения сети по данному графу. Всегда ли это построение приведет к некоторой сети?

17. Что делать, если точка O_1 совпадет с какой-то из деревень? Что делать, если какой-то из отрезков Aa или Ba пересечет какой-нибудь из построенных отрезков?

Зачем нужны теоремы существования?

Можно ли считать, что поставленную нами задачу о кратчайшем соединении n точек на плоскости мы решили полностью? Оказывается, нет!

В нашем решении отсутствует очень существенная деталь: нет доказательства того, что кратчайшая сеть существует. Но является ли этот вопрос действительно принципиальным? Несомненно, да. Ведь сам алгоритм построения кратчайшей сети основан на факте ее существования. Может, однако, возникнуть впечатление, что сам факт существования очевиден, а доказательство нужно лишь потому, что так уж принято у математиков — все доказывать. Но такое впечатление обманчиво. Чтобы проиллюстрировать сказанное — рассмотрим задачу.

Требуется соединить кратчайшим образом две деревни сетью дорог так, чтобы при закрытии движения по любому отрезку сети деревни оставались бы связанными.

Постановка этой задачи похожа на исходную, а задача, несомненно, более проста — ведь деревень всего две. Однако сходство чисто внешнее — кратчайшей сети в данном случае попросту нет (рис. 17).

Теперь мы надеемся, что убедили вас не только в необходимости доказательства существования кратчайшей сети, но и в том, что сам факт существования совершенно не очевиден.

Однако должны вас разочаровать. Мы не сможем изложить это доказательство — оно выходит за рамки школьной программы. Мы лишь хотели продемонстрировать принципиальное значение теорем существования. В заключение предлагаем несколько тем для исследований.

1. Решите задачу о кратчайшем соединении вершин правильного n-угольника.
2. Рассмотрите задачу о кратчайшем соединении нескольких деревень при наличии препятствий (например, круглого озера).
3. Рассмотрите задачу о кратчайшем соединении для точек в пространстве.

И еще несколько слов об алгоритмах. В математике часто бывает, что алгоритм решения какой-либо задачи существует, но его практическая реализация занимает слишком много времени. В таком случае содержательной задачей становится поиск быстрых алгоритмов (особенно важным это стало с развитием вычислительной техники). Типичный пример такой ситуации — всем знакомый алгоритм умножения чисел «в столбик». Сейчас обнаружены гораздо более быстрые алгоритмы умножения, основанные на глубоких математических идеях (например, на преобразовании Фурье). Другой пример — проблема разложения чисел на множители, имеющая большое практическое значение (на этом основаны некоторые коммерческие шифры). Если вас интересуют удобные алгоритмы построения кратчайших сетей, советуем вам прочитать посвященную этому предмету статью в журнале «В мире науки» № 3 за 1989 год.

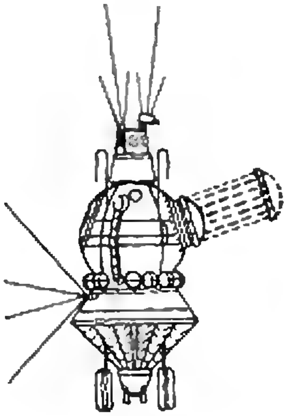
Ф-значит ракета

Человек за бортом

(к 25-летию полета «Восхода-2»)

> *Когда открыли наружную дверь и я увидел себя у порога ракеты, я обмер и сделал судорожное движение, которое вытолкнуло меня из ракеты. Уж, кажется, привык я висеть без опоры между стенками этой каюты, но когда я увидел, что подо мною бездна, что нигде кругом нет опоры,— со мной сделалось дурно, и опомнился я только тогда, когда вся цепочка уже размоталась и я находился в километре от ракеты.*
>
> *К. Э. Циолковский. Вне Земли*

18 марта 1965 года, т. е. ровно 25 лет назад, на орбиту искусственного спутника Земли был выведен космический корабль «Восход-2». Его пилотировали П. И. Беляев и А. А. Леонов. Полет корабля длился всего 25 часов, но два обстоятельства сделали его историческим.



Первое и самое главное — впервые человек совершил выход в открытое космическое пространство. Разумеется, сегодня выходом уже никого не удивишь (впрочем, чем сегодня вообще можно удивить?). Однако 25 лет назад задача эта совсем не казалась такой уж тривиальной.

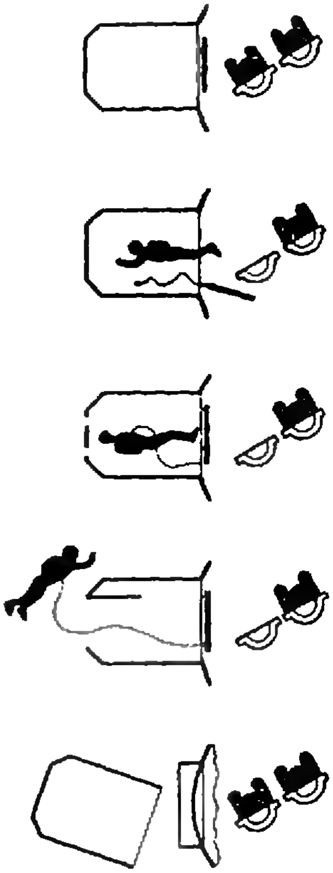
Какие проблемы надо было решить? Во-первых, вопрос организации шлюзовой камеры (ШК). Можно было, конечно, выходить напрямую из кабины корабля (несколько позже американцы так и поступили на «Джемини»). Но тогда пришлось бы ужесточить требования к бортовой аппаратуре. В нештатной ситуации она и так должна работать в разгерметизированной кабине, но это в нештатной...

В небольшой кабине «Восхода» разместить ШК не представлялось возможным. Значит, надо было делать ее снаружи. Но законы аэродинамики неумолимы. Принимается оптимальное решение — делать ШК надувной.

Кроме организации шлюзовой камеры, надо было решить, каким образом обеспечить дыхание космонавта во время выхода. Подавать воздух по шлангу не только не выгодно по массовым затратам, но и небезопасно (шланг мог где-нибудь перегнуться или порваться). Поэтому решено было снабдить космонавта баллонами с кислородом. Что же касается телефонной и телеметрической связи, то она осуществлялась через кабель.

Скафандр А. Леонова существенно отличался от скафандров в предыдущих полетах: ведь он должен был обеспечить жизнедеятельность не просто в вакууме, но и при почти 300-градусных перепадах температуры (на освещенной и затененной сторонах).

Разумеется, были еще проблемы, с которыми раньше не приходилось сталкиваться, но наиболее интересная из них, на наш взгляд, не техническая, а психологическая.



На рисунке показано, как осуществлялся выход в космическое пространство. Что же испытал А. Леонов, стоя на срезе шлюза? Были ли его чувства близки чувствам, описанным в повести К. Э. Циолковского? Так ли уж далека от реальной реакция его героя? В книге «Психология и космос» Ю. Гагарина и В. Лебедева приводится рассказ одного испытателя

(Окончание см. на с. 43)

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из «Задачника «Кванта». Объявляем имена победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1989 года. Награждаются свидетельством и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1990 года:

По математике

А. Акопян — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 11 кл.
А. Алексеев — Донецк, с. ш. № 17, 11 кл.
А. Блинова — Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.
К. Волченко — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
И. Герман — Ленинград, с. ш. № 566, 10 кл.
Х. Джафаров — с. Тюркоба АзССР, 11 кл.
И. Изместьев — Киров, с. ш. № 35, 9 кл.
С. Иноземцев — Омск, с. ш. № 92, 11 кл.
Д. Кабыш — Москва, с. ш. № 21, 11 кл.
С. Кимбар — Дзержинск Минской обл., с. ш. № 4, 11 кл.
С. Коваценко — Винница, с. ш. № 6, 10 кл.
Д. Козлов — Ленинград, с. ш. № 566, 10 кл.
М. Марченко — Гайворон, с. ш. № 2, 11 кл.
Р. Мучник — Винница, с. ш. № 17, 10 кл.
А. Насыров — Обнинск, с. ш. № 5, 10 кл.
А. Наумович — Минск, с. ш. № 19, 9 кл.
В. Некрашевич — с. Крутые Горбы Киевской обл., 9 кл.
А. Ненашев — Хабаровск, с. ш. № 2, 10 кл.
Г. Ониани — Кутаиси, ФМШ, 11 кл.
В. Острик — Мариуполь, с. ш. № 7, 11 кл.
Т. Панов — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Е. Перельман — Ленинград, с. ш. № 239, 7 кл.
Ф. Попеленский — Москва, с. ш. № 91, 11 кл.
В. Стакаускас — с. Воке ЛитССР, с. ш. № 13, 10 кл.
С. Тихонов — Воронеж, с. ш. № 58, 11 кл.
К. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.

По физике

Т. Бакеев — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.
Н. Балюнас — Вильнюс, с. ш. № 45, 11 кл.
Г. Вейтас — Вильнюс, с. ш. № 45, 11 кл.
Г. Выгон — Москва, с. ш. № 978, 11 кл.
К. Галичский — Северодвинск, с. ш. № 17, 11 кл.
Ю. Гуц — Ровно, с. ш. № 13, 10 кл.
А. Жук — Ровно, с. ш. № 15, 11 кл.
Ф. Ибрагимов — Баку, с. ш. № 61, 11 кл.
Ал. Карпенко — Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Ан. Карпенко — Брест, с. ш. № 1, 11 кл.

С. Кельман — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.
М. Колпаков — п. Почет Красноярского края, 10 кл.
Ю. Контиевский — Каушаны, с. ш. № 4, 11 кл.
В. Кутузов — Рига, с. ш. № 79, 11 кл.
А. Лемперт — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
Д. Массино — Ташкент, с. ш. № 110, 11 кл.
Ю. Матюнин — Вольск, с. ш. № 11, 11 кл.
Н. Мацко — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Р. Мизюк — Ровно, с. ш. № 13, 11 кл.
Е. Мищенко — Черновцы, с. ш. № 6, 11 кл.
Д. Омецинский — Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
А. Орловский — Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
С. Польшин — Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
А. Распереза — Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Х. Рахимов — Шават, ФМШ, 11 кл.
А. Скабелин — Барановичи, с. ш. № 22, 11 кл.
И. Сысоев — Семипалатинск, с. ш. № 3, 11 кл.
В. Тамошюнас — Вильнюс, с. ш. № 45, 11 кл.
А. Тутов — Рига, с. ш. № 79, 11 кл.
Г. Хачатрян — с. Бердик АрмССР, 10 кл.
Е. Чашечкина — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
Л. Чернышев — Москва, ФМШ № 542, 11 кл.
Е. Шагаров — Грозный, с. ш. № 10, 9 кл.
А. Шехтер — Бельцы, с. ш. № 7, 11 кл.

Награждаются свидетельством и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

А. Акимов — Евпатория, с. ш. № 6, 11 кл.
Д. Андриенко — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. Ахмедов — Баку, с. ш. № 2, 10 кл.
В. Барановский — Омск, с. ш. № 115, 11 кл.
А. Бородин — Донецк, с. ш. № 17, 9 кл.
Ю. Великина — Днепропетровск, с. ш. № 45, 11 кл.
А. Гурман — Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
Ю. Ерошенко — п. Приютово БашАССР, с. ш. № 16, 11 кл.
И. Кириллов — Усть-Каменогорск, с. ш. № 25, 10 кл.
А. Козачко — Винница, с. ш. № 6, 10 кл.
К. Мишачев — Липецк, с. ш. № 14, 10 кл.
А. Морозова — Одесса, с. ш. № 100, 11 кл.

(Окончание см. на с. 36)

Задачник „Кванта"

Задачи

М1211 — М1215, Ф1218 — Ф1222

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 мая 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1211» или «Ф1218». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1211 — М1215 предлагались осенью прошлого года на математической олимпиаде «Турнир городов».

М1211. Можно ли расположить в пространстве тетраэдр, шар и плоскость таким образом, чтобы площади сечений тетраэдра и сферы любой плоскостью, параллельной выбранной, были равны?

А. Анджанс

М1212. Множество всех целых чисел разбито на попарно непересекающиеся бесконечные арифметические прогрессии с положительными разностями d_1, d_2, d_3,... Может ли случиться, что

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}+\ldots<0{,}9? \qquad (*)$$

Рассмотрите два случая:

а) число прогрессий конечно;

б) число прогрессий бесконечно (при этом условие (*) означает, что сумма любого конечного числа слагаемых в левой части (*) меньше 0,9).

А. Толпыго

М1213. Докажите, что если некоторый выпуклый шестиугольник можно разрезать на N параллелограммов равной площади, то

а) он имеет центр симметрии;

б) число N делится на 3.

В. Произволов

М1214*. В некоторых клетках прямоугольной таблицы из n строк и $m>n$ столбцов расставлены звездочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что найдется такая звездочка, что в ее строке звездочек больше, чем в ее столбце.

А. Разборов

М1215*. Число 15 можно тремя способами разложить в сумму трех натуральных чисел так, что все 9 чисел различны:

$$15=1+6+8=2+4+9=3+5+7.$$

Для каждого натурального n обозначим через $k(n)$ наибольшее число троек натуральных чисел, дающих в сумме n и состоящих из $3k(n)$ различных чисел. Докажите, что

а) $k(n)>n/6-1$;

б) $k(n)<2n/9$;

в) $k(100)=21$;

г) $k(500)=110$.

Л. Курляндчик

Ф1218. Цилиндр массой m находится между подвижной горизонтальной поверхностью и закрепленной под углом α наклонной плоскостью (рис. 1). Коэффициент трения цилиндра о горизонтальную поверхность μ_1, о наклонную — μ_2. Горизонтальную поверхность равномерно двигают влево. Какую минимальную силу приходится для этого прикладывать?

М. Цыпин

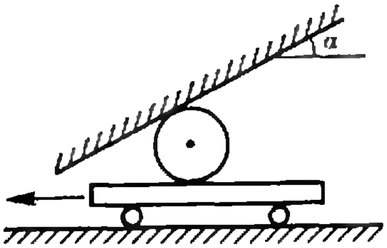


Рис. 1.

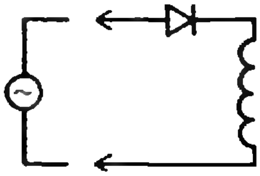


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Ф1219. Погремушка в виде полого стального шара объемом 0,2 л содержит внутри 300 стальных шариков радиусом 1 мм. Ее трясут так, что шарики внутри непрерывно сталкиваются между собой и со стенками, издавая ужасный шум. Считая скорость погремушки равной 1 м/с, оцените число соударений между шариками за 1 минуту. Излучаемая звуковая мощность равна 10 вТ, выделением тепла при ударах пренебречь.

А. Зильберман

Ф1220. Небольшой баллончик с остатками неона для пополнения подсоединяют на короткое время к большому резервуару, где давление p в два раза выше, чем в баллончике. Баллончик отсоединяют сразу после его заполнения. Каким будет окончательное давление газа в баллончике? Теплообменом газа со стенками баллончика при его заполнении пренебречь.

Е. Бутиков

Ф1221. В прошлом веке русский ученый Б. И. Срезневский исследовал испарение капель жидкости в воздухе. Пусть это испарение происходит при постоянной разности температур за счет подвода тепла к капле от окружающей среды. Считая поток тепла на единицу поверхности шаровой капли пропорциональным разности температур и обратно пропорциональным радиусу капли, найти зависимость радиуса капли от времени. За какое время окончательно испарится капля, радиус которой уменьшился в два раза за 10 минут?

А. Стасенко

Ф1222. Катушку индуктивности с $L=10$ Гн подключают к сети 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (рис. 2). Нарисовать график тока в катушке в зависимости от времени. Чему равно максимальное значение тока? Как зависит вид графика от момента подключения цепи к сети?

З. Рафаилов

Решения задач

М1186—М1190, Ф1198—Ф1202

М1186. *Будем говорить, что два четырехугольника — бумажный и картонный — подходят друг к другу, если картонный можно наложить на бумажный так, что все его вершины попадут на стороны бумажного (по одной на каждую) и при этом,*

Пусть $KLMN$ — картонный четырехугольник, вершины K, L, M, N которого лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого бумажного четырехугольника $ABCD$.

Очевидно, что углы AKN и LKB двух бумажных треугольников с вершиной K в сумме равны углу NKL в том и только в том случае, если $\angle NKL=90°$. Таким образом, если наши четырехугольники подходят друг к другу, то картонный четырехугольник $KLMN$ — обязательно прямоугольник.

если перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный четырехугольник, то они закроют весь его в один слой.

а) Докажите, что если четырехугольники подходят друг к другу, то у бумажного либо две противоположные стороны параллельны, либо диагонали перпендикулярны.

б) Докажите, что если бумажный четырехугольник — параллелограмм, то можно сделать подходящий к нему картонный.

а) Случай, когда все четыре вершины A, B, C, D после симметричного отражения совпадают (на рисунке 1 они попадают в точку O), возможен, если K, L, M и N — середины сторон четырехугольника $ABCD$. В этом случае диагонали AC и BD (пересекающиеся в точке O) взаимноперпендикулярны.

Предположим, что некоторые из этих точек не совпадают: $KB>KA$, так что после отражения A попадает в точку E, B — в точку F (E лежит на отрезке KF). При этом угол NEF должен быть покрыт при отражении треугольника NDM, так что при этом отражении D попадет в ту же точку E, что и A (а C — в ту же точку F, что и B; см рисунок 2). Следовательно,

$$\angle BKM=2\angle LKM=2\angle KMN=\angle KMD,$$

т. е. $AB\parallel CD$.

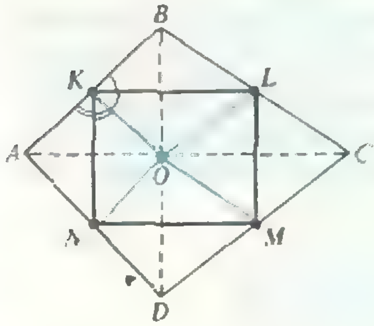


Рис. 1.

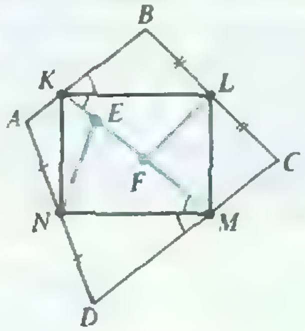


Рис. 2.

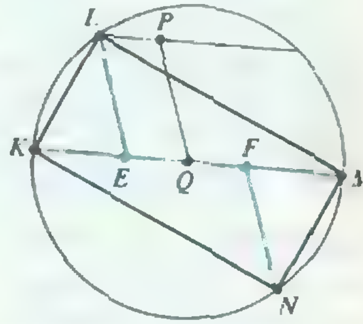


Рис. 3.

б) Покажем, как для параллелограмма со сторонами a, b ($a>b$) и углом γ между ними ($\gamma\leqslant 90^\circ$) построить подходящий прямоугольник $KLMN$ (такого типа, как изображенный на рисунке 2) с диагональю $KM=a$.

Опишем на отрезке KM как на диаметре окружность. Из ее центра Q проведем отрезок $QP=b/2$, составляющий угол $\angle PQK=\gamma$ с отрезком KM, и через точку P проведем прямую, параллельную KM. Пусть L — точка пересечения этой прямой с окружностью (ближайшая к K), LE — отрезок, равный и параллельный PQ, NF — отрезок, симметричный LE относительно Q (рис. 3). Отразив треугольники KEL, LEM, MFN и NFK относительно сторон KL, LM, ML и NK, мы получим параллелограмм со сторонами $KE+KF=ME+MF=a$, $2LE=2NF=b$ и углом γ, подходящий к картонному прямоугольнику $KLMN$.

Н. Васильев

М1187. Докажите, что если m четно, то все целые числа от 1 до $m-1$ можно выписать в таком порядке,

Числа можно расставить в таком порядке:

$$m-1,\ 2,\ m-3,\ 4,\ m-5,\ 6, \ldots,\ 1,\ m-2 \qquad (*)$$

(на нечетных местах стоят нечетные числа в порядке *что никакая сумма нескольких подряд не будет делиться на m.*

убывания, на четных местах — четные в порядке возрастания). Выпишем остатки от деления на m суммы первых k чисел ($k=1, 2, \ldots, m$) последовательности (*):

$$m-1,\ 1,\ m-2,\ 2,\ m-3,\ 3, \ldots, \frac{m}{2}-1,\ \frac{m}{2};$$

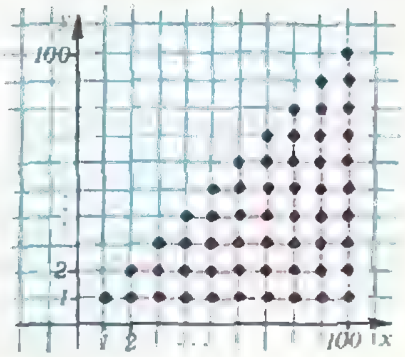
Таким образом, среди этих остатков r_k встречаются по разу все числа от 1 до $m-1$. Поскольку $r_i \neq r_k$ при любых $i<k$, сумма чисел от $i+1$ до k в указанной выше последовательности (*) не делится на m.

Н. Константинов

М1188. *а) Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превосходящими 100. Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника A, B, C, которые можно поместить друг в друга: $A \subseteq B \subseteq C$.*

б) Докажите, что среди 1989 прямоугольников с целыми сторонами, не превосходящими 100, найдутся 40 прямоугольников таких, что первый можно поместить во второй, второй — в третий, ..., 39-й — в 40-й.

Каждому прямоугольнику со сторонами a и b ($a \leqslant b$) поставим в соответствие точку (a; b) на координатной плоскости. Всевозможные точки (x; y), где x и y — натуральные, $y \leqslant x \leqslant 100$ (см. рисунок), можно включить в 50 цепочек-«уголков», показанных на рисунке красным цветом,— так, что точки в каждой цепочке будут соответствовать прямоугольникам, которые можно вложить друг в друга*).



Теперь обе задачи решаются без труда:

а) поскольку $2 \cdot 50 < 101$, по крайней мере 3 точки из 101, соответствующей прямоугольникам, лежат в одной цепочке;

б) поскольку $39 \cdot 50 = 1950 < 1989$, по крайней мере 40 точек из 1989, соответствующих прямоугольникам, лежат в одной цепочке.

Н. Седракян

---

*) Замечание. Среди всех прямоугольников (x, y), $y \leqslant x \leqslant 100$ можно указать максимум 50 попарно несравнимых: (100; 1), (99; 2),..., (51; 49), (50; 50). Существует общая теорема Дилуорта: любое конечное множество, где указан частичный порядок между некоторыми элементами, можно покрыть k упорядоченными цепями, где k — максимальное количество попарно несравнимых элементов (см. книгу «Заочные математические олимпиады». М.: Наука, 1987, с. 111).

***M1189.** На плоскости дано n прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что в каждой из частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно поставить целое число, отличное от 0 и не превосходящее по модулю n, так, что по любую сторону от любой из этих прямых сумма чисел равна 0.*

Приведем самое короткое решение задачи. Оно опирается на такой факт: каждую из частей, на которые данные прямые делят плоскость, можно покрасить черной или белой краской так, чтобы области, имеющие общий участок грани, имели разный цвет. (Эту раскраску можно получить «по индукции»: при добавлении прямой в одной из ограниченных ею полуплоскостей все цвета заменяются противоположными.)

Каждая точка пересечения прямых служит вершиной четырех углов — двух белых и двух черных. Напишем в них числа $+1$ (в белых) и -1 (в черных). Очевидно, сумма этих чисел в каждой полуплоскости, ограниченной любой их данных прямых, равна 0.

Теперь для каждой области просуммируем числа, которые написаны в углах,— это будут нужные целые числа, отличные от нуля: поскольку у каждой выпуклой области не больше чем n сторон, то у нее не больше чем n углов.

Тем самым, мы доказали такую теорему: если в каждой области, на которые n прямых делят плоскость, написано целое число, равное по модулю числу ее углов, причем знаки чисел в соседних (по отрезку или лучу) областях различны, то по каждую сторону от любой из n прямых сумма этих чисел равна 0.

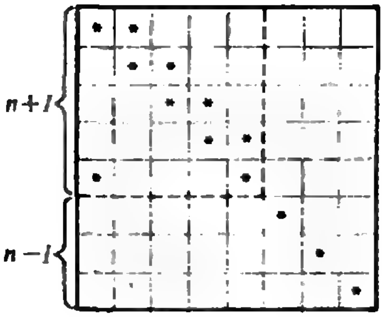
Н. Константинов

***M1190*.** а) Докажите, что если в таблице $2n \times 2n$ клеток стоят $3n$ звездочек, то можно вычеркнуть n строк и n столбцов так, что все звездочки будут вычеркнуты.*

б) Докажите, что в таблице $2n \times 2n$ клеток можно расставить $3n+1$ звездочку так, что после вычеркивания любых n строк и n столбцов останется по крайней мере одна звездочка.

а) Вычеркнем n строк с наибольшим количеством звездочек. Менее $2n$ звездочек в них быть не может — это означало бы, что в одной из этих n строк не более одной звездочки, тогда и в оставшихся n строках не более чем по одной звездочке, так что всего звездочек меньше $2n+n=3n$. Итак, вычеркнуто не менее $2n$ звездочек; оставшиеся (не более n) звездочки можно убрать, вычеркнув соответствующие столбцы.

б) Расставим звездочки так, как показано на рисунке: $2n$ — по диагонали, еще n — на пересечении i-й строки с $(i+1)$-м столбцом ($i=1, 2, \ldots, n$) и последнюю — на пересечении $(n+1)$-й строки с 1-м столбцом. Предположим, что удалось убрать все эти звездочки, вычеркнув n строк и n столбцов. Пусть из них $k \leqslant n-1$ строк (и тем самым $n-1-k$ столбцов) приходятся на нижние $(n-1)$ звездочки, т. е. на последние $n-1$ строк и столбцов. Тогда среди первых $n+1$ строк вычеркнуто $n-k$. Остальные строки разбиваются на несколько зон: из $p_1, \ldots, p_r$ строк ($r \geqslant 1$), $p_1+\ldots+p_r=(n+1)-(n-k)=k+1$. (Мы считаем здесь, что вслед за $(n+1)$-й строкой идет первая). В этих зонах останется $(p_1+1)+(p_2+1)+\ldots+(p_r+1)=k+r+1>k+1$ звездочек, стоящих в разных столбцах. Столбцов же останется $n-(n-1-k)=k+1$. Таким образом, вычеркивая столбцы, все звездочки убрать нельзя.



Эта задача — частный случай такой проблемы Циранкевича: для заданных чисел m, l, p, q, ($p<m$, $q<l$) найти наибольшее число k такое, что любые k звездочек, расставленные в клетки таблицы из m строк и l столбцов, можно убрать, вычеркнув некоторые p строк и q столбцов. (В нашей задаче доказано, что при $m=l=2n$, $p=q=n$ ответ $k=3n$.)

К. Кохась

Ф1198. Труба радиусом R заполнена песком до высоты H ($H>200R$). Плотность песка ρ. Найти минимальную силу давления песка на дно трубы. Известно, что этот песок на горизонтальной поверхности образует горку с предельным углом при основании γ_0 (рис. 1), причем этот угол мал ($\gamma_0\sim 0{,}1$ рад). Коэффициент трения покоя песка о материал трубы равен μ.

Найдем сначала коэффициент трения песка о песок μ'. Рассмотрим песчинку на склоне горки с углом при основании γ (рис. 2). На нее действуют три силы: сила тяжести mg, сила нормальной реакции склона N и сила трения покоя $F_{\text{тр}}$. Из условия равенства нулю векторной суммы этих сил (условие равновесия) легко находим

$$N=mg\cos\gamma,\ F_{\text{тр}}=mg\sin\gamma=N\operatorname{tg}\gamma.$$

С другой стороны, $F_{\text{тр}\max}=\mu'N$. Следовательно,

$$\mu'=(F_{\text{тр}}/N)_{\max}=\operatorname{tg}\gamma_0\approx\gamma_0,$$

где $\gamma_0\ll 1$ — предельный (максимальный) угол при основании.

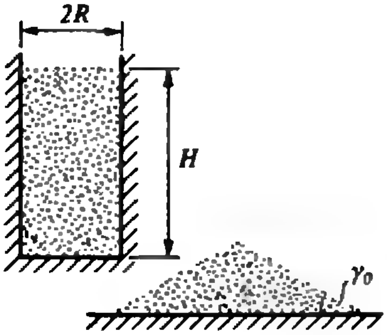


Рис. 1.

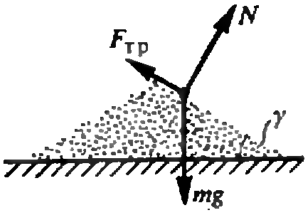


Рис. 2.

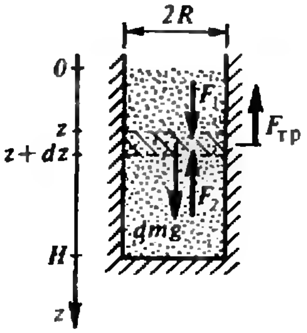


Рис. 3.

Рассмотрим теперь трубу, заполненную песком. Выделим тонкий слой песка толщиной dz (рис. 3; здесь ось Z направлена вниз, $z=H$ соответствует дну трубы). На этот слой действуют сила тяжести $dm\cdot g$, сила трения со стороны стенок $F_{\text{тр}}$, сила давления со стороны верхней части песка $F_1=\pi R^2p(z)$ и сила давления со стороны нижней его части $F_2=\pi R^2p(z+dz)$. Здесь $dm=\rho\pi R^2dz$ — масса рассматриваемого слоя, $p(z)$ — давление песка на уровне z, $p(z+dz)$ — давление на уровне $z+dz$. Очевидно, что давление на дно будет минимальным, если сила трения направлена вверх и максимальна по величине.

Предположим, что $\mu<\mu'$. В этом случае максимальная сила трения, приходящаяся на единицу площади

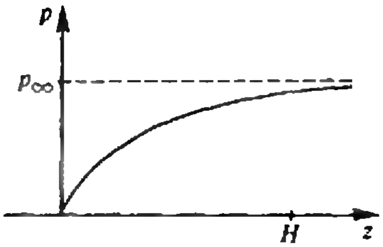


Рис. 4.

боковой поверхности, равна μp; следовательно,

$$F_{тр}=2\pi Rdz\cdot\mu p.$$

Слой находится в покое, поэтому сумма проекций всех сил на ось Z равна нулю:

$$\rho g\pi R^2dz+\pi R^2p(z)-\pi R^2p(z+dz)-2\pi Rdz\cdot\mu p=0.$$

Обозначив $dp=p(z+dz)-p(z)$, получаем

$$dp/dz=-(2\mu/R)(p-p_\infty),$$

где $p_\infty=\rho gR/(2\mu)$.

Таким образом, если $p<p_\infty$, то с увеличением «глубины» z давление возрастает ($dp/dz>0$). По мере приближения p к p_∞ скорость возрастания уменьшается, так что давление асимптотически приближается к p_∞. График функции $p(z)$ с учетом граничного условия $p(0)=0$ изображен на рисунке 4. При $\mu H/(2R)\gg1$ давление на дно $p(H)$ можно считать почти равным p_∞, т. е.

$$p(H)\approx\rho gR/(2\mu) \text{ и } F(H)\approx\rho\pi gR^3/(2\mu) \text{ при } \mu<\mu'.$$

Вернемся к предположению о том, что $\mu<\mu'$. Легко понять, что если это условие нарушается (т. е. если $\mu>\mu'$), то монослой песчинок прилипнет к стенкам трубы и остальной песок будет тереться уже об этот монослой с коэффициентом трения μ'. Следовательно, в этом случае давление на дно будет определяться именно этим коэффициентом трения:

$$p(H)\approx\rho gR/(2\mu')\approx\rho gR/(2\gamma_0) \text{ и } F(H)\approx\rho\pi gR^3/(2\gamma_0)$$
$$\text{при } \mu>\mu'\approx\gamma_0.$$

А. Семенов

***Ф1199.** Из опыта известно, что скорость волн на поверхности океана, длина которых $\lambda=10$ м, равна $v=4$ м/с. Предположим, что в океане на большой глубине есть граница раздела, выше которой находится менее соленая вода, а ниже — более соленая, так что разность плотностей воды $\Delta\rho=1$ кг/м^3. По этой границе могут бежать волны (так называемые внутренние волны). Найти скорость таких волн с длиной $\lambda=10$ м. Амплитуду волн считать малой.*

Движение жидкости и в поверхностных, и во внутренних волнах вызывается гравитационными силами. Эти силы, естественно, пропорциональны разности плотностей на границе раздела, т. е. $\Delta\rho$ для внутренних волн и ρ для поверхностных ($\rho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды в верхних слоях океана). Кроме того, в случае внутренних волн в движение приводится вдвое большая масса воды, поскольку движется вода, находящаяся по обе стороны от границы раздела. Тогда для ускорений одинаково расположенных частиц жидкости в обеих волнах получаем

$$\frac{a_{пов}}{a_{вн}}=\frac{F_{пов}/m_{пов}}{F_{вн}/m_{вн}}=\frac{2\rho}{\Delta\rho}\approx2000.$$

С другой стороны, если движение в поверхностной волне происходит, например, в k раз быстрее, то все скорости в ней будут в k раз больше, а любое изменение движения займет в k раз меньше времени. Это означает, что ускорение, которое является отношением изменения скорости ко времени этого изменения, будет больше в k^2 раз. Отсюда

$$k=\sqrt{\frac{a_{пов}}{a_{вн}}}=\sqrt{\frac{2\rho}{\Delta\rho}}.$$

Окончательно

$$v_{\text{вн}}=\frac{v_{\text{пов}}}{k}=v\cdot\sqrt{\frac{\Delta\rho}{2\rho}}\approx 0{,}09\ \text{м/с}.$$

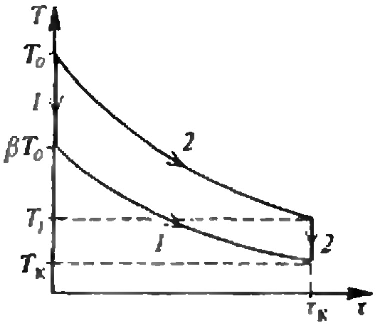
В. Геогджаев

***Ф1200.** На столе стоят два одинаковых стакана, в один из которых налит горячий чай. Температура чая t_0. Чай требуется охладить до температуры $t_к$. Это можно сделать двумя способами:*

1) сразу перелить чай во второй стакан и ждать, пока он остынет до температуры $t_к$;

2) ожидать, пока чай остынет до некоторой температуры t_1 такой, что после переливания во второй стакан температура чая сразу окажется равной $t_к$.

Какой способ быстрее? Известно, что теплоотдача стакана с чаем пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды, теплообмен между чаем и стаканом происходит очень быстро. Теплоемкость стакана C_0, теплоемкость чая C.



Обозначим разность температур чая и окружающей среды через T:

$$T=t_{\text{чая}}-t_{\text{окр.ср.}}$$

и для краткости будем называть T температурой. Тогда уравнение изменения температуры T чая со временем τ, согласно условию задачи, можно записать в виде

$$dT/d\tau=-\alpha T, \qquad (*)$$

где $\alpha>0$ — постоянный коэффициент пропорциональности. Из условия задачи также следует, что если до переливания чая из одного стакана в другой температура была T, то после переливания она станет $CT/(C+C_0)=\beta T$, где β — постоянный коэффициент.

Теперь рассмотрим процессы 1) и 2). Для первого процесса запишем начальное условие:

$$T^{(1)}(0)=\beta T_0 \text{ (сразу после переливания)}$$

и уравнение изменения температуры со временем:

$$dT^{(1)}/d\tau=-\alpha T^{(1)}.$$

Для второго процесса введем новую переменную $T'=\beta T^{(2)}$ и запишем соответствующие равенства:

$$T'(0)=\beta T_0,$$

$$dT'/d\tau=\beta dT^{(2)}/d\tau=\beta(-\alpha T^{(2)})=-\alpha T'.$$

Одинаковым уравнениям и одинаковым начальным условиям соответствуют одинаковые решения. Поэтому в произвольный момент времени τ

$$T'(\tau)=T^{(1)}(\tau).$$

Пусть в некоторый момент времени $\tau_к$ температура чая в первом процессе достигла значения $T_к$, т. е.

$$T^{(1)}(\tau_к)=T_к.$$

Найдем, какой станет температура во втором процессе, если в момент времени $\tau_к$ перелить чай из одного стакана в другой:

$$T^{(2)}(\tau_к)_{\text{после}}=\beta T^{(2)}(\tau_к)_{\text{до}}=$$

$$=\beta T'(\tau_к)/\beta=T'(\tau_к)=T^{(1)}(\tau_к)=T_к.$$

Итак, мы получили, что для обоих способов охлаждения чая требуется одно и то же время. Следовательно, переливать чай из одного стакана в другой можно в любой момент времени в промежутке от 0 до $\tau_к$ (см. рисунок).

Замечание. Этот результат можно получить несколько по-другому. Переписав основное уравнение (*)

в виде $dT/T=-\alpha d\tau$ (или решив его), легко увидеть, что отношение $T(\tau+\Delta\tau)/T(\tau)$ не зависит от $T(\tau)$. Обозначим это отношение через $B\ (\Delta\tau)$ и запишем

$$T^{(1)}(\tau_к)=B(\tau_к)\beta T_0=\beta B(\tau_к)T_0=T^{(2)}(\tau_к).$$

К. Бедов

Ф1201. Имеется нелинейный электронный прибор $\tilde{R}$. На рисунке 1 приведен график зависимости тока через прибор от напряжения на нем (на участках 1—2 и 3—4 наклон графика очень велик). Собрали цепь, состоящую из $\tilde{R}$, катушки с индуктивностью L и батарейки с ЭДС, равной U_0 (прибор включают с «правильной» полярностью, соответствующей графику). Построить график зависимости тока в цепи от времени и найти период колебаний тока.

После замыкания цепи электронный прибор начнет работать на участке 1—2 его характеристики. Уравнение изменения тока в цепи со временем будет иметь вид

$$L dI/dt=U_0,$$

или

$$LI=U_0t.$$

Начиная с момента $t_1=LI_2/U_0$, когда состояние прибора изобразится точкой 2, дальнейшее увеличение тока через прибор станет невозможным. При этом напряжение на катушке будет падать, а на приборе расти. В результате прибор очень быстро совершит переход $2\to3\to2'$, так как состояние системы на участке 2—3 неустойчивое. Поскольку ток в катушке мгновенно измениться не может, $I_{2'}=I_2$ (во время перехода ток поддерживается постоянным за счет так называемых паразитных емкостей системы).

После того как система окажется в состоянии 2′, уравнение изменения тока в катушке со временем примет вид

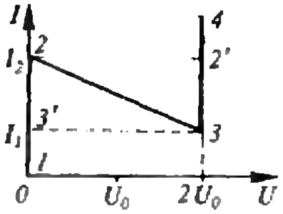


Рис. 1.

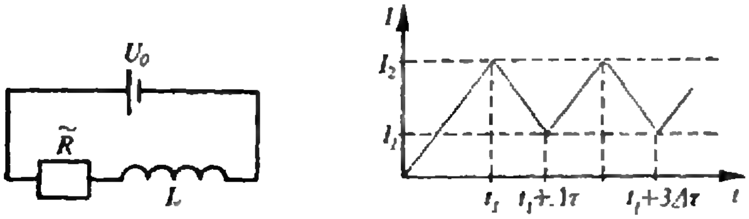


Рис. 2.

$$L dI/dt=U_0-2U_0=-U_0,$$

или

$$L\Delta I=-U_0\Delta t.$$

Через время $\Delta t=L(I_2-I_1)/U_0$ система окажется в состоянии 3, из которого она очень быстро перейдет в состояние 3′, после чего через тот же промежуток Δt она придет в состояние 2, и процесс повторится.

Период повторения процесса будет равен

$$T=2\Delta t=2L(I_2-I_1)/U_0.$$

График зависимости тока в цепи от времени приведен на рисунке 2.

К. Бедов

Ф1202. *При электрическом разряде в разреженном неоне (Ne) при комнатной температуре очень небольшая часть атомов неона распадается на электроны и ионы (масса M атома неона в 4×10^4 раз больше массы m электрона). Длина свободного пробега электронов (т. е. среднее расстояние, которое электрон проходит без соударений) $l=0{,}1$ мм. Газ находится в электрическом поле с напряженностью $E=10$ В/см. Оценить «температуру» электронов, соответствующую их средней кинетической энергии. Постоянная Больцмана $k=1{,}38\times10^{-23}$ Дж/К, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.*

Поскольку, по условию задачи, ионизируется лишь незначительная часть атомов неона, можно считать, что подавляющее большинство столкновений электронов с атомами являются упругими. Из законов сохранения энергии и импульса легко получить, что при лобовом упругом соударении с покоящимся атомом неона электрон теряет энергию

$$\Delta W_1 = \frac{4m}{M}\,\frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость электрона перед столкновением (мы учли, что $m \ll M$). При косом упругом ударе потеря энергии электрона будет того же порядка.

Предположим, что между каждыми двумя ударами электрон под действием электрического поля движется равноускоренно с ускорением $a=eE/m$ в течение времени $\tau=l/v$, причем непосредственно после первого соударения направление его скорости может оказаться любым. Тогда за время между ударами электрон приобретает энергию

$$\Delta W_2 = eE\,\frac{a\tau^2}{2} = \frac{(eEl)^2}{2mv^2}.$$

Скорость электрона, а значит, и его кинетическая энергия, не будет изменяться, если $\Delta W_1=\Delta W_2$, или

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{eEl}{4}\sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Соответствующая «температура» электронов

$$T=\frac{mv^2}{3k}=\frac{eEl}{6k}\sqrt{\frac{M}{m}}\approx 4\cdot10^4 \text{ К}.$$

Д. Купцов

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 26)

Д. Поперечный — Хабаровск, с. ш. № 2, 10 кл.
Л. Порохня — Павлодар, с. ш. № 3, 11 кл.
И. Селищев — п. Манченки Харьковской обл., 11 кл.
А. Скороход — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
В. Слюсарчук — Ровно, с. ш. № 11, 10 кл.
А. Эгамов — Гороховец, с. ш. № 1, 11 кл.

По физике

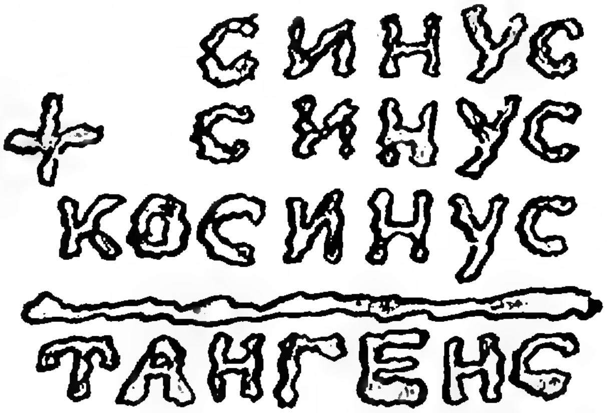
С. Антипин — Северодвинск, с. ш. № 17, 11 кл.
Р. Баскаков — Красноярск, с. ш. № 161, 11 кл.
В. Бакулин — Новосибирск, ФМШ при НГУ, 10 кл.
И. Башук — Великие Мосты Львовской обл., 11 кл.
Р. Бучко — Черновцы, с. ш. № 23, 10 кл.
Г. Важенин — Свердловск, с. ш. № 9, 11 кл.
В. Высоцкий — Киев, с. ш. № 77, 11 кл.
Е. Гендин — Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
А. Гринчук — д. Мохро Брестской обл., 11 кл.
Д. Грязных — Челябинск, с. ш. № 127, 11 кл.
С. Демба — Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Н. Демчук — Здолбунов, с. ш. № 1, 11 кл.
М. Дорохова — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
М. Зеленфройнд — Бобруйск, с. ш. № 2, 11 кл.
К. Кладько — Харьков, с. ш. № 11, 11 кл.
Е. Климчук — Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.
А. Мытько — Минск, с. ш. № 156, 8 кл.
И. Пилюгин — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.
В. Полищук — Канев, с. ш. № 4, 11 кл.
С. Поторочин — Ижевск, с. ш. № 41, 11 кл.
Е. Призант — Одесса, с. ш. № 36, 11 кл.
Н. Рябова — Харьков, с. ш. № 27, 11 кл.
В. Силаев — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
С. Тимощук — с. Черница Ровенской обл., 9 кл.
А. Усинский — с. Птичья Ровенской обл., Вербская с. ш., 11 кл.
А. Фридлянд — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Д. Чокин — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.
С. Шинкевич — Березники, с. ш. № 3, 11 кл.
И. Шуляк — Киев, ФМШ при КГУ, 10 кл.
К. Шурунов — Куйбышев, с. ш. № 63, 10 кл.
М. Энтин — Тула, с. ш. № 73, 11 кл.

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Из A в B вышел путник. Одновременно с ним из B в A вышел второй путник. Они шли равномерно, но с разными скоростями. В момент встречи первому оставалось идти еще 16 часов, а второму — 9 часов. Через сколько часов после выхода они встретились?

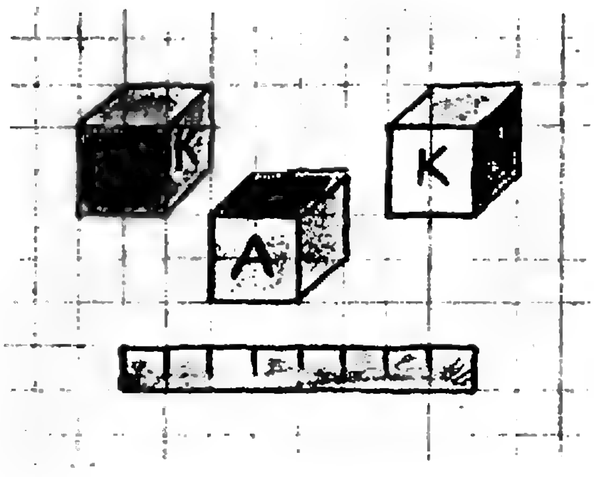
2. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



3. Выпишем цифры от 0 до 9 подряд: 0, 1, 2, 3, ..., 9 и рассмотрим последовательность сумм двух соседних цифр: 1, 3, 5, 7, ..., 17. В этой последовательности числа увеличиваются на 2. Расположите цифры 0, ..., 9 таким образом, чтобы в образовавшейся последовательности сумм соседние числа увеличивались на 1.

4. Найдите все двузначные числа, равные сумме куба числа единиц и квадрата числа десятков.

5. Имеется три одинаковых детских кубика и линейка. Как без всяких вычислений измерить большую диагональ кубика?



Первая задача принадлежит известному английскому популяризатору математики Льюису Кэрроллу; остальные задачи нам предложили А. Савин, Н. Авилов, Н. Антонович, И. Нагель.

ЭЛЕКТРИЗАЦИЯ ЧЕРЕЗ ВЛИЯНИЕ

В. ТИХОМИРОВА

Могут ли два одноименно заряженных тела притягиваться друг к другу? Можно ли с помощью одного заряженного тела зарядить другое тело так, чтобы его заряд был больше заряда первого тела?

Чтобы ответить на эти вопросы, давайте разберемся в одном интересном физическом явлении — явлении электростатической индукции, или, другими словами, электризации тел через влияние.

Рассмотрим такой опыт. К шарику A, заряженному положительным зарядом q_A, подносится незаряженный металлический шар B (рис. 1). При этом на поверхности шара B появля-

---

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 1 за 1975 год.

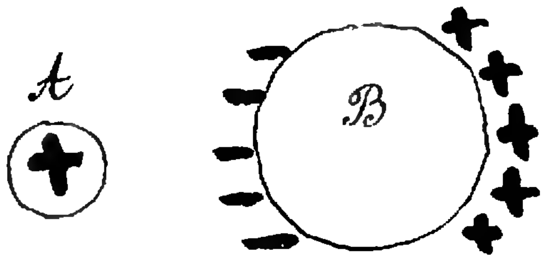


Рис. 1.

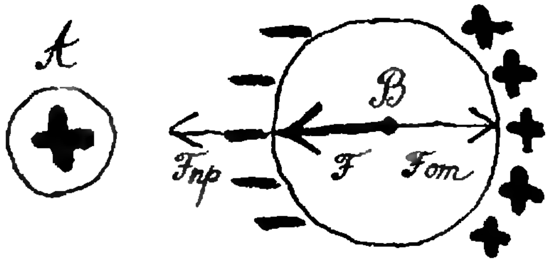


Рис. 2.

ются заряды: на ближней к шарику *A* стороне отрицательные, а на дальней — положительные. В этом можно наглядно убедиться, если шариком электроскопа касаться соответствующих участков поверхности шара *B*. Объяснить такое распределение зарядов нетрудно. Дело в том, что свободные электроны, которые раньше были равномерно распределены по всему шару *B*, под влиянием зарядов шарика *A* приходят в движение и перераспределяются по шару так, что слева их оказывается больше, чем справа. Таким образом, в левой части шара индуцируется, т. е. наводится, отрицательный заряд $-q_B$, а в правой части — положительный заряд $+q_B$. В этом и заключается явление электростатической индукции. Заметим кстати, что в нашем случае величина наведенного заряда q_B, конечно, меньше величины наводящего заряда q_A, поскольку влияние наводящего заряда распространяется и на другие окружающие его тела, где тоже индуцируются электрические заряды.

Между заряженными телами всегда действует электрическая сила. Так будет и с шарами *A* и *B*. Точнее сказать, в этом случае возникают две силы — сила притяжения $F_{пр}$ между шариком *A* и левой частью шара *B* и сила отталкивания $F_{от}$ между шариком *A* и правой частью шара *B* (рис. 2). Поскольку отрицательно заряженная часть находится ближе к шарику *A*, сила $F_{пр}$ больше силы $F_{от}$, и в результате шары будут притягиваться друг к другу под действием результирующей силы $F=F_{пр}-F_{от}$.

Что изменится, если шар *B* предварительно зарядить некоторым зарядом q'_B, причем тоже положительным? Конечно, все прежние рассуждения о наведении зарядов остаются в силе, но теперь надо учесть еще взаимодействие зарядов q_A и q'_B. Появляется еще одна сила $F'_{от}$ — сила отталкивания зарядов q_A и q'_B. Окончательный результат будет зависеть от соотношения между величинами сил F и $F'_{от}$, вернее, от соотношения между величинами зарядов q_B и q'_B, так как чем больше величина заряда, тем больше сила электрического взаимодействия.

Если величина наведенного заряда q_B окажется больше величины имеющегося на шаре заряда q'_B, то в итоге одноименно заряженные шары все-таки будут притягиваться. Когда это возможно? Мы уже говорили о том, что величина наведенного заряда на проводнике меньше величины влияющего заряда. Поэтому только если заряд q_A намного больше заряда q'_B, может оказаться, что величина заряда q_B будет больше заряда q'_B.

Итак, два одноименно заряженных тела могут притягиваться друг к другу, но для этого заряд одного из них должен быть намного больше, чем заряд другого.

Мы показали, что под влиянием заряженного тела на проводнике

(Окончание см. на с. 42)

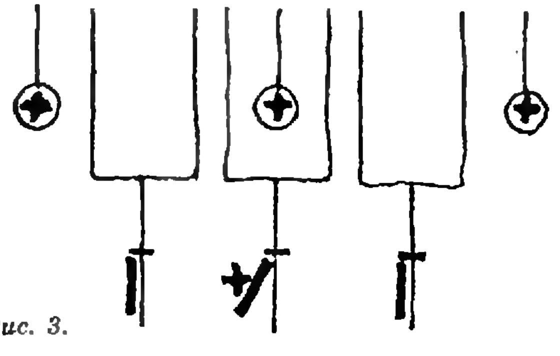
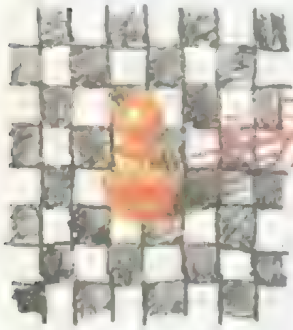


Рис. 3.

Калейдоскоп „Кванта"

Геометрическая прогрессия

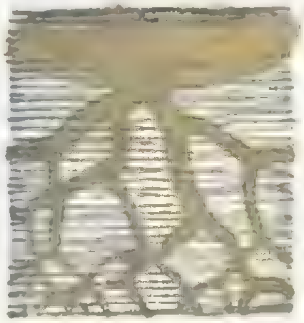
Геометрической прогрессией называется последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на постоянное число $q \neq 0$. Это число называют знаменателем прогрессии. Таким образом, всякая геометрическая прогрессия имеет вид:

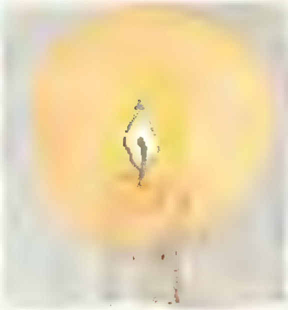


$$b_1, b_1q, b_1q^2, \ldots, b_1q^n, \ldots$$

Одна из самых старых задач на геометрическую прогрессию — задача о зернах на шахматной доске. По преданию, индийский царь Шерам повелел выдать изобретателю шахмат Сете следующее количество зерен: 1 — за первую клетку, 2 — за вторую, 4 — за третью и т. д. За каждую следующую клетку — вдвое больше, чем за предыдущую. Напомним, что на шахматной доске 64 клетки.

Эту задачу решал в своей книге «Памятники минувших поколений» среднеазиатский математик аль-Бируни (973—1048). Он заметил, что в условиях задачи количество зерен на k-м поле на единицу больше количества зерен на всех $k-1$ предыдущих клетках. Аль-Бируни получил верный ответ: 18 446 744 073 709 551 615 зерен.





Другой знаменитой задачей на геометрическую прогрессию является задача, известная еще в Древнем Египте, появившаяся в русском фольклоре в следующем виде:

«Шли семь старцев,
У каждого старца
по семи костылей,
На каждом костыле
по семи сучков,
На каждом сучке
по семи кошелей,
В каждом кошеле
по семи пирогов,
А в каждом пироге
по семи воробьев.
Сколько всего?».

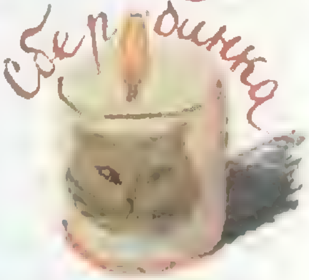
Под словом «всего» подразумевается количество старцев, костылей, сучков, кошелей, пирогов и воробьев вместе.

Общая формула нахождения суммы n членов геометрической прогрессии —

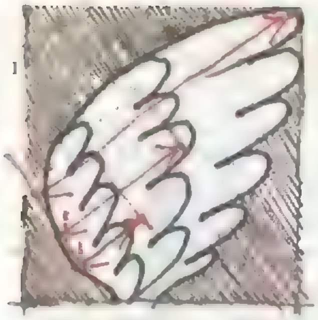
$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

— содержится в девятой книге знаменитых «Начал» древнегреческого математика Евклида. Там приведен и вывод этой формулы.

В рассмотренных примерах знаменатель геометрической прогрессии больше единицы и ее члены стремительно возрастают с возрастанием номера. Если же знаменатель по модулю меньше единицы, то члены прогрессии, взятые по модулю, будут убывать, причем сумма всех членов такой бесконечной прогрессии будет конечным числом.



Вот как считал сумму убывающей геометри-



ческой прогрессии Архимед. Пусть

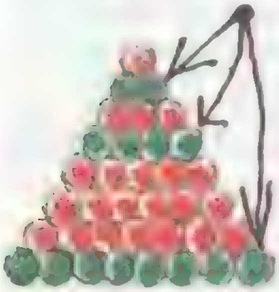
$x=b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots$

Тогда $x=b_1+q(b_1+b_1q+b_1q^2+\ldots)=b_1+qx.$

Отсюда

$$x=\frac{b_1}{1-q}.$$

В жизненной практике геометрическая прогрессия появляется в первую очередь в задаче об исчислении так называемых «сложных процентов». Если положить деньги на срочный вклад в сберегательный банк, то через год вклад увеличится

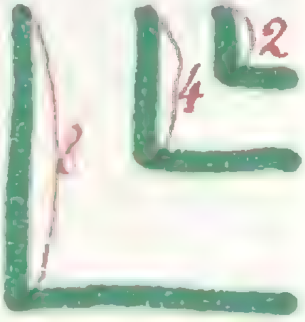


на 3 % от исходной суммы, т. е. новая сумма будет равна вкладу, умноженному на 1,03. Еще через год уже эта сумма увеличится на 3 %, т. е. вновь умножится на 1,03. За 20 лет сумма на сберкнижке увеличится в $(1{,}03)^{20}\approx$ $\approx 1{,}8$ раза.

Если процент будет больше, то и результат будет резко расти. Так при 50 % годовом увеличении за 10 лет сумма увеличится в $(1{,}5)^{10}\approx 55{,}7$ раза. Под такой процент давали деньги ростовщики в Англии в XIII веке.

Это вызывало страшное недовольство. Издавались законы, ограничивающие процент. Король Генрих VII даже совсем отменил взимание процентов, что привело в упадок как банковское дело, так и

промышленность, лишившуюся возможности получения кредитов. В конце концов взимание процентов было разрешено, но не должно было быть большим 10 %.



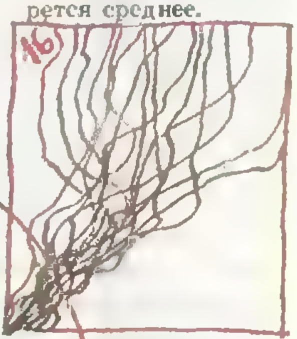
Еще один пример геометрической прогрессии — изменение массы радиоактивного вещества со временем. Известно, что за единицу времени такое вещество теряет определенную часть своей массы (она переходит

в другое вещество и энергию). Для каждого радиоактивного вещества определяется величина T — время периода полураспада. Ясно, что массы нераспавшегося вещества в моменты 0, T, $2T$, $3T$,... будут образовы-

вать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Почему геометрическая прогрессия названа «геометрической»? Видимо потому, что каждый ее член, кроме первого, равен среднему геометрическому соседних с ним членов: $b_n=\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$. А та-

кое среднее названо геометрическим, поскольку оно является стороной квадрата, равновеликого прямоугольнику, стороны которого имеют длины, равные тем величинам, от которых берется среднее.



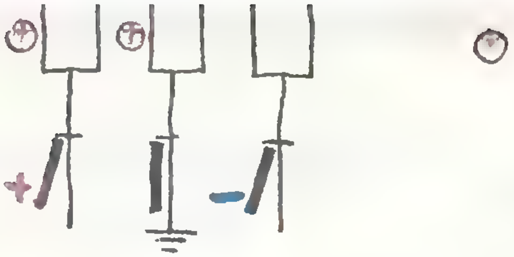


Рис. 4.

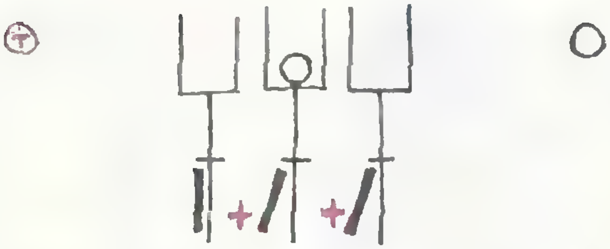


Рис. 5.

можно навести электрические заряды, но при этом проводник в целом остается электрически нейтральным (рис. 3). А нельзя ли его зарядить по-настоящему, так чтобы суммарный заряд не был равен нулю? Оказывается, можно, и даже совсем просто. Для этого достаточно проводник в присутствии заряженного тела заземлить на некоторое время, а затем убрать и заземление, и заряженное тело (рис. 4). *При* этом знак заряда проводника будет противоположен знаку заряда тела. *Действительно*, при заземлении свободные электроны под влиянием положительного заряда на теле приходят из земли и остаются на проводнике, заряжая его в целом отрицательно.

Величину наведенного заряда можно существенно увеличить, практически приблизив ее к величине наводящего заряда, если заряженное тело поместить внутрь длинного металлического цилиндра (или шара) с небольшим отверстием. В этом случае влияние на другие тела почти исключено, поэтому на внутренней поверхности цилиндра (или шара) наведется заряд, по величине практически равный заряду шарика, но противоположный по знаку, а *на на*ружной поверхности — такой же и по величине, и по знаку. Если заряженным телом коснуться внутренней стенки цилиндра, противоположные по знаку заряды нейтрализуются, и на цилиндре *останутся заряды того же знака*, что были на заряженном теле (рис. 5). Таким образом можно практически целиком передавать заряд с одного тела на другое.

Теперь попробуем ответить и на второй вопрос, поставленный в самом начале. Пусть у нас имеются: заряженный шарик *А*, незаряженный шарик *В*, *полый металлический шар* и электроскоп, на котором мы хотим накопить заряд бо́льший, чем заряд шарика *А*.

Прежде всего зарядим по индукции шарик *В* (естественно, зарядом противоположного знака). Внесем на некоторое время шарик *В* внутрь заземленного шара, а затем уберем и заземление, *и шарик В*. На шаре останется заряд, равный по величине заряду шарика *В*, но противоположный ему по знаку, т. е. совпадающий со знаком заряда шарика *А*. Теперь передадим этот заряд электроскопу. Если проделать такую операцию многократно, то на электроскопе, действительно, можно будет получить *заряд того же знака*, что и исходный, но значительно бо́льший по величине.

В заключение попробуйте ответить еще на два вопроса.

1. Незаряженный проводящий шарик *С* с помощью длинного гибкого проводника присоединили к левой части шара *В* (см. рис. 2). В результате на шарике появились *положительные заряды. Почему?*

2. На электроскопе имеется небольшой положительный заряд. Если к шарику электроскопа приближать сильно наэлектризованную палочку, несущую большой отрицательный заряд, то листочки электроскопа будут сначала опадать, а потом опять расходиться. Как это можно объяснить?

Человек за бортом

(Начало см. на с. 25)

после имитации невесомости на самолете-тренажере: «... У меня внезапно возникло ощущение стремительного падения вниз, и мне показалось, что все кругом рушится, разваливается и разлетается в стороны. Меня охватило чувство ужаса, и я не понимал, что вокруг происходит». А ведь вокруг были всего лишь борта салона самолета...

Пять раз удалялся Леонов от корабля и вновь возвращался к нему. Самолетные тренировки сыграли свою роль: движения выполнялись легко, хотя и не сразу ему удалось стабилизировать положение тела. Какое-то время его разворачивало вбок и назад. Да с возвратом в ШК произошла заминка — никак не удавалось войти, мешала кинокамера, которая все время пыталась улететь в космос.

Выход Леонова в открытое пространство стал хорошей наукой для всех последующих подобных операций. Стало ясно, что для работы нужна опора, перемещаться можно и с помощью рук, а лучше — приспособлений (впоследствии на «Джемини» использовали специальный пистолет, а затем пришло и время «такси»).

... Вот так благополучно начался полет Беляева и Леонова на орбите, так он и продолжился. И ничто не предвещало драматического окончания. Однако, когда космонавты приступили к заключительным операциям, выяснилось, что вышла из строя автоматика, отвечающая за ориентацию корабля. Это был первый случай, когда космонавтам пришлось вручную осуществлять сход с орбиты. П. Беляев блестяще справился с задачей, но из-за лишнего витка корабль приземлился далеко от намеченного места посадки, в тайге. Была зима, и пробиться к нему оказалось не так-то просто. Только еще через двое суток закончилась эта космическо-земная одиссея.

В. Николаев

Слово, буква, число

По-видимому, нет человека, который бы не слышал высказываний «Математика — язык науки», «Математика — язык человеческой культуры». Действительно, математика имеет некоторые языковые черты. В то же время и наука о языках — лингвистика — использует в своих исследованиях математические методы. Разумеется, лингвистика не сводится к математике: у нее свой предмет исследования, и подходы к исследованию во многом отличны от математических, тем не менее начать знакомство с различными лингвистическими явлениями и методами лингвистического анализа можно почти что с нуля.

Попробуйте решить три задачи по лингвистике. Задачи подобного типа предлагаются на олимпиадах по лингвистике и математике, проводимых Московским университетом с 1965 года.

Решения задач — в одном из следующих номеров.

Язык конго

Даны записи некоторых дат на языке конго. (Конго — один из основных языков Народной Республики Конго. Относится к группе языков банту.)

3 января	kilumbu ya tatu ya ngonda mosi
8 марта	kilumbu ya nana ya ngonda tatu
18 октября	kilumbu ya kumi na nana ya ngonda kumi
1 ноября	kilumbu ya mosi ya ngonda kumi na mosi

Переведите на русский язык:

kilumbu ya kumi na tatu ya ngonda nana

и на язык конго:

10 марта.

Русские буквы

Даны некоторые числа в системе записи, которая использовалась в русской письменности до начала XVIII века:

ФЛВ — 532, ТЛЕ — 335, РКВ — 122,
ФМД — 544, ХМЕ — 645.

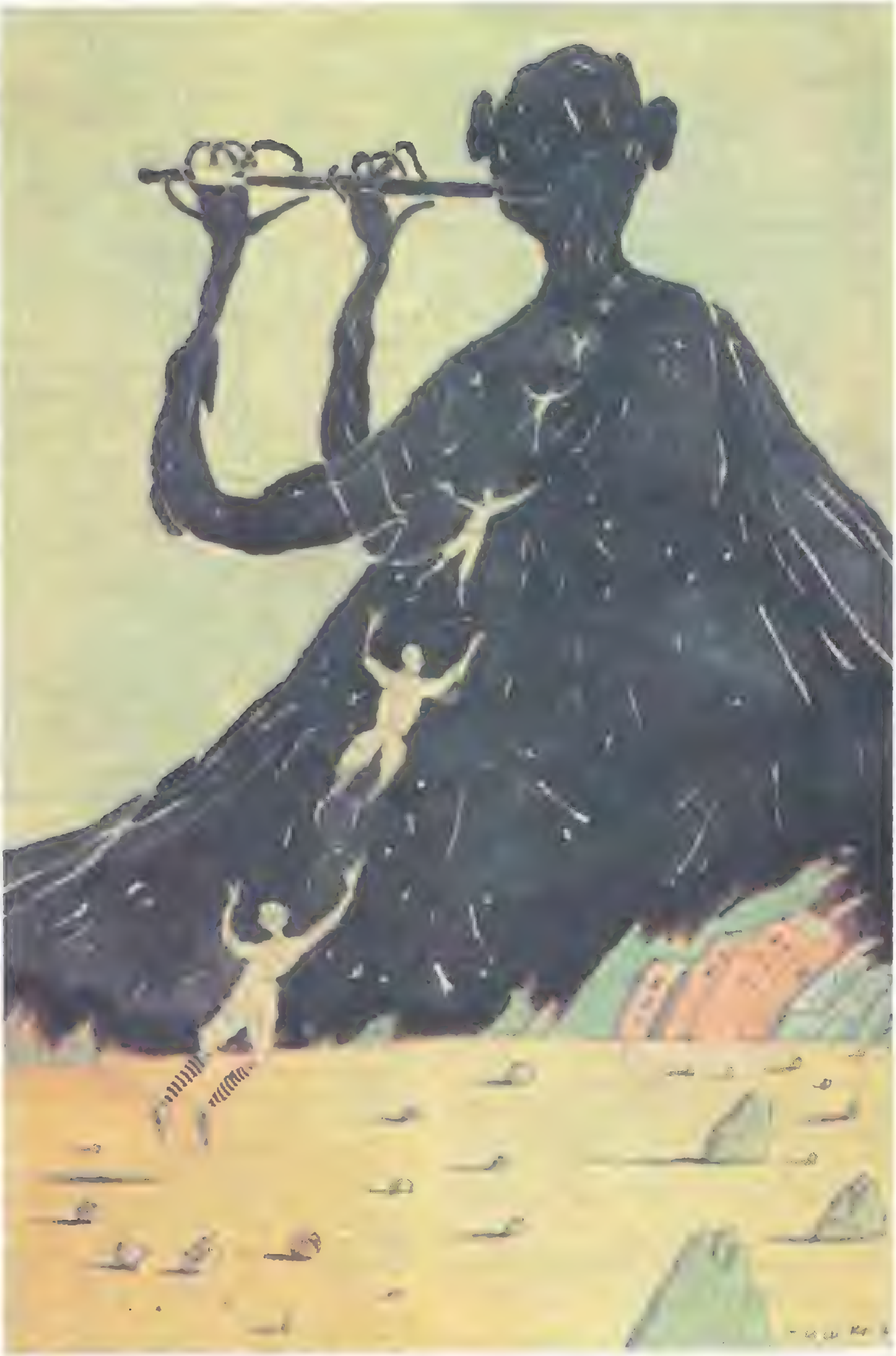
Определите, каким числам соответствовали записи: ХКД, СЛВ, ТЛГ.

Мартовские иды

Даны некоторые даты и их древнеримские обозначения:

1 мая	KAL·MAI
16 сентября	A·D·XVI·KAL·OCT
1 декабря	KAL·DEC
?	A·D·III·KAL·APR
28 сентября	A·D·IV·KAL·OCT
23 октября	A·D·X·KAL·NOV
20 апреля	?
?	A·D·XIII·KAL·NOV
27 июля	A·D·VI·KAL·AVG
29 ноября	A·D·III·KAL·DEC

Заполните пропуски.



ЦИФЕРТОН

С. Сайкс (США)

Хейес потыкал пальцем в клавиши — никакого результата.

— Не знаю, стоит ли тебе показывать... Представь — все в стране справились с четвертым уровнем и ходят, как лунатики, с остекленелыми глазами.

— У твоего сына остекленелые глаза?

Дэн потянулся и включил игру. Вспыхнул красный огонек — раздался мелодичный звук. Хейес нажал на красную клавишу.

— Не могу сказать, что остекленелые, но глаза у него... какие-то другие. Такое чувство, будто оттуда выглядывает кто-то чужой — кто гораздо старше и куда разумнее меня. Прямо в дрожь бросает.

— Не мешай. Я должен сосредоточиться,— сказал Хейес.

Подошел контролер.

— А, «Цифертон»,— ухмыльнулся он.— У моего парня тоже есть. Самая распроклятая игра из всех, что я видел. Малыш бьется над четвертым уровнем, а ведь ему всего семь лет. До того смышленый, что меня порой оторопь берет.

Дэна неожиданно прошиб холодный пот. Где-то в глубинах памяти вертелись обрывки стихотворения... Что-то о музыке и детях... О разноцветной одежде и...

— Сделано! — возликовал Хейес.— Одиннадцать подряд! Теперь второй уровень.

— Флейтист из Гаммельна! — громко сказал Дэн.

— Что?

— Электронный Крысолов. «Цифертон» — это...— Он замолчал. Чушь. Абсолютная, несомненная чушь.— Ларри, я сегодня опоздаю. Предупреди Уилсона. Мне нужно зайти в библиотеку, хочу кое-что выяснить.

Вот оно:

И плащ его странный, как платье шута,
Раскрашен был в желтый и красный цвета...
...Зеленые искорки в синих очах —
Так соль полыхает, коль бросить в очаг...
...Трех нот не успел он извлечь
(таких
волшебных трезвучий еще не слыхали
на этом виды видавшем свете),
Как слышит шуршанье, галдеж, щебетанье,
И визг, и толканье, и ног топотанье,
Сабо стукотню, и смешную возню,
И хлопанье рук, языков болтовню,
Словно птичник проснулся к пригожему
дню,—
Выбежали ребятишки.
И все-все мальчишки, и все-все девчонки —
Кожа — что бархат, как лен — волосенки,
Жемчужные зубки, живые глазенки —
Помчались вприпрыжку и вскачь, хохоча,
Влекомые дивной игрой трубача...*)

Дэн откинулся на спинку стула и пробежался пальцами по игре. В сущности, игра ли это? А может, нечто большее? То ли дети развлекаются обычной детской игрушкой, то ли... их обучают? И если так — то кто и зачем? Можно ли считать серии вспышек и звуков безобидными случайными комбинациями, или это некий код, который, начав с азов, поднимается к высшим ступеням передачи бесконечно сложной информации? Дэн снял с полок несколько книг по медитации и гипнозу и записал их на себя.

— «Медитация и карма»,— читал вслух Хейес, перебирая стопку книг на столе Дэна.— «Формы сознания. Программирование и метапрограммирование человеческого биокомпьютера»... Что, Морган, решил переключиться с романов ужасов на чтиво полегче?

Окончание. Начало см. в № 2.

*) Отрывок из стихотворения английского поэта Роберта Браунинга (1812—1889) «Дудочник из Гаммельна», где в поэтической форме излагается легенда о Крысолове. (*Примеч. перев.*)

— Может быть, есть смысл порыться в научной фантастике...— пробормотал Дэн, оторвавшись от книги «Гипноз и альфа-волны».— А еще лучше — сказки. Бред какой-то!..

Хейес отодвинул книги и присел на край стола. Посередине лежал брюхом кверху распотрошенный «Цифертон», отдельно валялись батарейки.

— Зачем ты его раскурочил? — спросил Хейес.— Решил содрать пиратскую копию? Не выйдет. Эта штука запатентована.

— Я не могу залезть внутрь.

— Внутрь чего?

— Этой... штуки.— Дэн ткнул в игру отверткой.— Хотел посмотреть на ее внутренности. Совершенно немыслимо ее разобрать, не испортив. Можно лишь вынуть батарейки. И все. Кажется, я скоро возьмусь за молоток.

Хейес поцокал языком.

— У тебя комплекс неполноценности, что ли?

Дэн откинулся на стуле и заложил руки за голову.

— Ларри, я связался с фабрикой игрушек, где делают эти штуки. Хотел поговорить с изобретателем, кто бы ее ни изобрел — дьяволы, бесы ли. Знаешь, что мне ответили? Ее *никто* не изобретал. Ее изобрел *компьютер.*

— Компьютер породил маленьких компьютерят? — Хейес со значительным видом склонил голову.— Что ж, этого следовало ожидать. Только дай волю — и глазом не моргнешь, как они уже помешаны на сексе.

— Главное, никто не знает, кто ввел в компьютер информацию, с тем чтобы тот выдал... игру. Похоже, спросить за это не с кого.

— Ну и что? Это чертовски занятная штуковина. Их расхватывают так быстро, что магазины не успевают делать запасы. Я обошел пять магазинов, хотел купить «Цифертон» сыну, и везде все распродано. Меня поставили на очередь, черт побери! Ты представляешь: очередь за игрой! Обещали позвонить.

Дэн наклонился и медленно поставил батарейки на место.

— *Если* это игра,— произнес он.

— Что ты имеешь в виду?

— Ларри... предположим, что ты... ну, скажем, миссионер. Твое задание — отправиться в джунгли, отыскать самых примитивных, диких, суеверных, подозрительных и гнусных язычников на Земле, извлечь их из каменного века и приобщить к веку двадцатому. Ты должен дать им образование, обучить их, ознакомить с современной технологией, столь далекой от их понимания, что само твое появление пугает их до смерти. Но это твоя работа, твой долг. Потому что в невежестве они очень скоро перебьют друг друга. Они не знают, как... выжить в их отсталом маленьком мирке. Они погрязли в собственном дерьме. Они невероятно жестоки по отношению друг к другу. Их племенные обычаи столь варварские, что они убивают себе подобных из одного лишь страха и суеверия. Схватываешь?

Хейес поднялся и пересел в кожаное кресло.

— Веселенький вышел бы у меня уик-энд!

— Пожалуйста, будь серьезней. Это всего лишь гипотеза. Предположение. Как бы ты приступил к заданию?

— Ну... по правде сказать, я бы на это не пошел.— Хейес пожал плечами.— По-моему, их лучше оставить в покое. Я признаю закон естественного отбора. Может быть, так и надо, чтобы они поубивали друг друга. Может быть, выживание не для них.

Дэн задумчиво тер «Цифертон», лежащий у него на коленях, словно это была волшебная лампа Алладина.

— Нет. Твоя личная философия в данном случае неприменима. Ты обязан спасти их от самих себя. С чего начать? Учти, завидев тебя, они убегают. Ты даже не можешь приблизиться.

— Я знаю их язык?

Дэн нахмурился.

— Ну, *кое-что* ты о них знаешь, потому что наблюдал исподтишка, тайно изучал их... годами. И тебе кое-что известно об их... способе общения. Однако словарь очень скудный, ограниченный. Больше толку, если они выучат *твой* язык. Как ты станешь учить их, если не можешь приблизиться в открытую?

Хейес обследовал заусеницу и полез в карман за ножничками.

— Дэн, зачем ты все это спрашиваешь? Хочешь сказать, что собираешься вступить в Корпус мира?

— Ну, пусть так. Я объясню после... если потребуется.

— Что ж, давай, прикинем. Мне придется общаться с ними как-то так, чтобы не пугать их.

Дэн кивнул.

— Хорошая идея. Как?

— Я бы выяснил... чем их можно заинтересовать. Что им нравится. Может, их хлебом не корми, дай только какие-нибудь безделушки... или зеркальца... или инструменты... или...

— Игрушки?

— Да. Что-то в этом роде. Я бы, пожалуй... оставил все барахло под каким-нибудь деревом, они привыкли бы к месту и начали растаскивать подарки... Оставлял бы им еду... Ну, и в том же духе.

— А сам не показался бы?

— Поначалу нет. Потом, скажем... оставил бы под деревом свою фотографию.— Хейес просиял от внезапного озарения.— Вот что я сделал бы! Фотография! Потом, позднее, покажусь и сам... На минуточку, на расстоянии. Затем появлюсь ближе. И так далее.

Дэн продолжал поглаживать «Цифертон».

— Не забывай, это дикари. Они могут убить тебя просто от страха. Тебе нужно ввести их в современный мир, а времени у тебя не так уж и много. Каждый день они убивают друг друга, деревни тонут в грязи. Их одолевают болезни.

— Не могу представить, кто станет возиться с ними,— фыркнул Хейес.— О господи! Ты хочешь навести меня на мысль. Понял! Уилсон переводит нас в филиал в Южной Америке, правильно?

— Да нет же! Пожалуйста, потерпи еще. Ты не поверишь, как мне это важно.

— Поверить трудно... Ну ладно. Думаем. Говоришь, мало времени... Тогда придется привлечь тех, кто меньше всех боится, кого легче учить, самых доверчивых, самых...

— Маленьких? — Дэн сжал «Цифертон» так, что побелели костяшки пальцев.

— Да, детей. Полагаю, так ведь и поступают миссионеры в далеких странах? Собирают детишек в школы, учат их распевать псалмы... Ну, а потом дети обучают родителей. Не успели оглянуться — вуаля! — техника: телевизионные антенны в джунглях. И все спасены. Точка. Как считаешь, я получу приз? А благодарность в приказе? Ну, хоть что-нибудь?

Дэн поднялся, пересек комнату и положил «Цифертон» на колени товарищу.

— Вот что я тебе скажу. Представь, что это вовсе не игра... Я думаю, это... инструмент. Обучающий инструмент. Придуманный специально для детей. Он предназначен для тренировки мозга таким образом, чтобы ребенок за очень короткое время усвоил приемы глубокой медитации. В считанные недели он добивается таких успехов, каких не принесут долгие годы занятий йогой. Что ты на это ответишь?

Хейес перевел взгляд на разноцветную коробку.

— Ты серьезно?

Дэн кивнул. Потянулся за книгой на столе.

— Слушай: «На высочайшей ступени медитации человек утрачивает чувство самосознания и личности, сливаясь в единое целое с богом...» Джеред пока еще по эту сторону нирваны. Когда его способность к концентрации мысли достигнет требуемой ступени.

Хейес с ужасом воззрился на игру, словно при малейшем движении она должна была ударить его током.

— Что? Что произойдет?..

— Не знаю. Я потеряю его. В каком-то смысле... я потеряю его навсегда. Ларри, я понимаю, мои слова звучат глупо, но мне кажется, эти «игрушки» нам подбросили... откуда-то издалека...

— Думаешь, русские?

— Намного дальше.

Хейес осторожно поднял «Цифертон» и поставил на стол.

— Какое же это расстояние, по-твоему?

— Может быть, несколько световых лет.

— Ого-го!..

— Думаешь, я спятил?

— Совершенно точно. Слушай, Дэн...

— Плевать! Я тоже думаю, что свихнулся. Но, черт побери, все это имеет смысл! Они используют эти штуки... как приборчики для настройки. Когда мозг ребенка испускает альфа-волны — или еще какие-нибудь — достаточно долго... достаточно *интенсивно*... это как прямой провод... Один бог знает куда. А может быть, это их средство доставки... Забираются в детские головы, наводят там порядок и готовят ребятишек к... тому, что предстоит...

— Тесные контакты странного рода,— кивнул Хейес, потирая виски.— У тебя съехал чердак, дружище. Ты сам знаешь, что это так. Думаешь, они посылают сюда «миссионеров», чтобы обучать дикарей?

— Что-то вроде этого.

— Дэн, иди домой. Возьми отпуск на недельку. Я объясню Уилсону. Все будет хорошо...

— Я не сошел с ума, Ларри.

— А я и не говорю. Ты просто переутомился.

Дэн вздохнул и потер глаза.

— Да. Я устал. Но я не псих.

— Иди домой.

Войдя в дом, Дэн услышал, как на кухне распевает Кэсс, нарезая сельдерей для салата. Телевизор в гостиной был включен, на экране бушевали спортивные страсти.

— Где Джеред? — спросил Дэн, входя в кухню.

— Ой! Ты меня напугал до смерти. Почему так рано?

— Голова болит. Где малыш?

— По-моему, в гостиной. Что хочешь — свеклу с жареной картошкой или зеленую фасоль?

— Все равно.

— Значит, фасоль. Джеред терпеть не может свеклу.— Кэсс пощупала лоб мужа.— Милый, дать тебе аспирин? Ты плохо выглядишь.

— Я в норме...

Он вернулся в гостиную и выключил телевизор. Откуда-то сверху слабо доносилось тонкое пиканье «Цифертона».

— Взял на время у приятеля с нашей улицы,— сказала Кэсс. Дэн ринулся по лестнице, шагая через две ступени.— Он сказал что-то насчет четвертого уровня. Дэн, не ругай его...

Когда он достиг двери спальни, мелодичные звуки прекратились. Голова шла кругом, в крови бушевал адреналин. Дэн толкнул дверь. Она не открывалась.

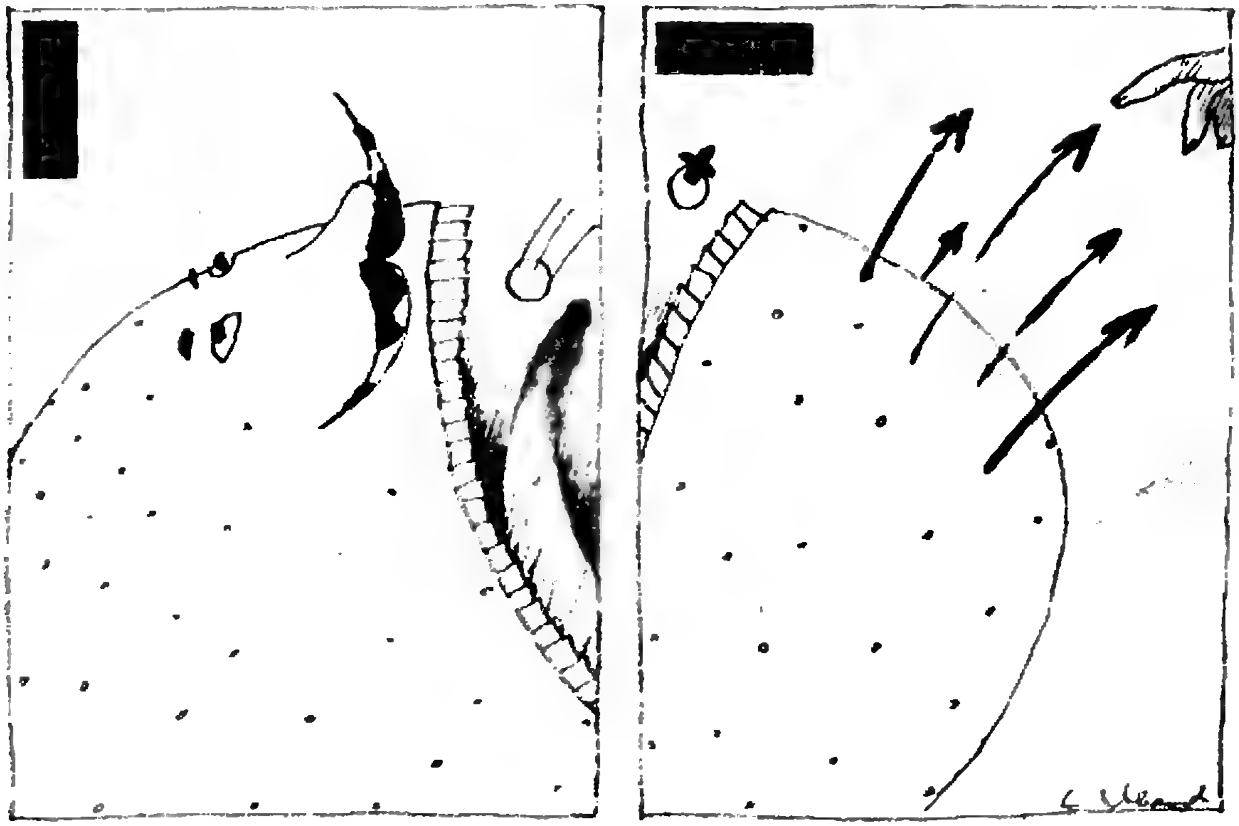
— Джеред! Джеред! — закричал он, бросаясь всем телом на преграду. Внезапно дохнуло клевером и озоном — дверь распахнулась. Спотыкаясь, Дэн бросился через комнату. Чуть выше кровати затухало бледное голубое мерцание. Дэн рванулся к «Цифертону», который только что — мгновение назад — покоился на коленях у сына. Небольшая вмятина на постели еще хранила тепло. Но ребенка не было.

Дэн присел на край кровати и осторожно взял разноцветную, словно карамелька, игру. Он выждал немного, чтобы перестали дрожать пальцы, и прошептал:

— Держись, сынок. Жди меня, Джеред. Я иду. Папа идет к тебе.

Не торопясь, он приступил к игре.

Перевод с английского
В. Бабенко, В. Баканова



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Как зависит g от глубины?» предназначена девятиклассникам, заметка «Силовые линии и теорема Гаусса» — десятиклассникам. Однако мы советуем всем старшеклассникам прочитать обе заметки, причем лучше всего — сразу одну за другой.

Как зависит g от глубины?

Вопрос: Что это — большое, зеленое, живет на глубине трех метров под землей и ест камни?
Ответ: Большой Зеленый Камнеед.

Из фольклора МФТИ

Как будет изменяться сила тяготения по мере погружения тела в воображаемую шахту, прорытую сквозь Землю по ее диаметру? Какая сила тяготения действовала бы внутри некоторой «полой» планеты? Можно ли было бы ходить по ее внутренней поверхности? Попытаемся ответить на эти и аналогичные им вопросы. И не для того, конечно, чтобы выработать инструкцию для бурильщиков сверхглубоких скважин или для астронавтов, а чтобы лучше разобраться в законе всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном, утверждает, что любые две материальные частицы (точечные массы) притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной массам этих частиц m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1)$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 — гравитационная постоянная. В произвольном случае неточечных масс для определения силы тяготения можно воспользоваться широко известным в физике принципом суперпозиции.

Пусть, например, нам нужно рассчитать силу тяготения, действующую на точечную массу m со стороны тела произвольной формы. Мысленно разобьем тело на точечные массы m_1, m_2, ..., m_n, вычислим силы, действующие на массу m со стороны всех точечных масс, а затем векторно сложим эти силы. Что же получится в итоге? Сразу бросаются в глаза два факта. Во-первых, сила, действующая на точечную массу m, пропорциональна величине этой массы. Во-вторых, сила существенно зависит от того, какое именно тело взаимодействует с нашей точечной массой — какова его форма и размеры, какой массой оно обладает.

Кто и как действует на массу m в нашем примере? Непосредственно массы m_1, ..., m_n через пустое пространство, их разделяющее? Или существует некоторый «посредник»? По современным представлениям таким материальным посредником является поле тяготения, создаваемое массами m_1, ..., m_n во всем окружающем пространстве. Именно это поле и действует на массу m, в нем находящуюся. Если, например, изменить какую-нибудь из масс или как-то сместить их, то изменится и поле.

Для количественной характеристики поля тяготения в данной точке вводится специальная физическая величина — напряженность гравитационного поля. Определим ее так. Запишем выражение для силы тяготения, действующей на точечную массу m, в виде

$$\vec{F}=m\vec{g}, \text{ или } \vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}, \qquad (2)$$

где $\vec{g}$ (величина, не зависящая от m!) и есть напряженность гравитационного поля. Она имеет простой физический смысл: с таким ускорением будет двигаться любая точечная масса, если ее поместить в данную точку поля и освободить. В частном случае, когда точечная масса взаимодействует с Землей, $\vec{g}$ — это известное вам ускорение свободного падения.

От чего и как зависит $\vec{g}$? Как и сила тяготения, напряженность поля подчиняется принципу суперпозиции:

$$\vec{g}=\vec{g}_1+\vec{g}_2+\ldots+\vec{g}_n,$$

где $\vec{g}_1$, ..., $\vec{g}_n$ — напряженности полей, создаваемых в данной точке пространства отдельными массами m_1, ..., m_n. Из выражений (1) и (2) следует, что любая точечная масса M создает вокруг себя поле, напряженность которого направлена к этой точке и зависит от расстояния r до нее по закону

$$g=G\frac{M}{r^2}. \qquad (3)$$

А какое гравитационное поле создает вокруг себя сферически симметричное тело? Ответ на этот вопрос был известен Ньютону с самого начала — сила притяжения к Земле вычисляется по той же формуле (1), где r — расстояние до центра Земли. Однако Ньютон понимал, что такое утверждение требует доказательства. Потратив очень много времени и сил, он доказал, что сила притяжения к тонкой сфере тел, расположенных вне нее, равна силе притяжения к материальной точке той же массы, расположенной в центре сферы. А поскольку шар можно разбить на тонкие сферы, такой же результат остается в силе и для шара. Переходя на язык поля, скажем, что величина напряженности поля тяготения, создаваемого тонкой сферой (или ша-

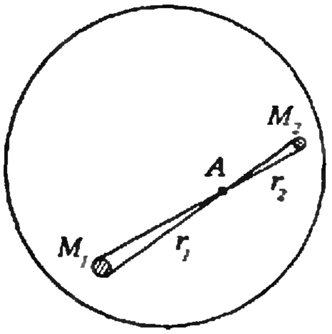


Рис. 1.

ром) радиусом R, на расстоянии $r>R$ от центра задается формулой (3).

Доказательство по принципу суперпозиции является действительно достаточно сложным. Однако его можно обойти. Как это сделать, показано в следующей заметке — «Силовые линии и теорема Гаусса» на примере электрического поля. Попробуйте прочитать эту заметку, всякий раз заменяя слово «заряд» словом «масса», а слова «электрическое поле» словами «поле тяготения». Если вам будет трудно разобраться в деталях, постарайтесь понять хотя бы общий смысл.

Выясним теперь, каково поле тяготения внутри тонкой сферы, т. е. при $r<R$. Оказывается, внутри сферы напряженность поля равна нулю. Для доказательства возьмем произвольную точку, например точку A на рисунке 1, и покажем, что вклады в g_A от двух противоположных участков поверхности сферы, отсекаемых узким конусом, взаимно уничтожаются. Действительно, из подобия следует, что линейные размеры выбранных участков относятся как r_1/r_2, следовательно, отношение их площадей S_1/S_2, равное отношению масс M_1/M_2, есть r_1^2/r_2^2. Тогда из формулы (3) получаем, что создаваемые этими участками в точке A напряженности равны по величине. А поскольку направления их противоположны, они в сумме дают ноль.

Интересный результат, не правда ли? Если бы внутри Земли, скажем, существовала концентрическая пустая полость (как, например, в случае, описанном в научно-фантастическом романе В. А. Обручева «Плутония. Необычайное путешествие в недра земли»), то в этой полости была бы полная невесомость. Оттолкнись чуть-чуть от поверхности и полетишь равномерно и прямолинейно до противоположной стенки. Так что путешествовать по такой Плутонии крайне затруднительно.

Теперь мы можем ответить и на самый первый вопрос — чему равно поле тяготения в шахте, прорытой вдоль диаметра Земли. Для простоты будем считать Землю однородным шаром с радиусом R. Рассмотрим точку на расстоянии $r<R$ от центра Земли. Проведя мысленно сферу радиусом r, разделим Землю на две части — внешнюю и внутреннюю. Как мы уже выяснили, поле, создаваемое в рассматриваемой точке всеми внешними сферическими слоями, равно нулю. Поэтому поле Земли в данной точке совпадает с полем, созданным внутренней частью, т. е. шаром радиусом r. Чтобы использовать формулу (3), надо найти массу M_r этого шара. Очевидно, что отношение массы M_r к массе $M_{\text{з}}$ всей Земли равно отношению их объемов, т. е. отношению кубов радиусов: $M_r/M_{\text{з}}=r^3/R^3$. Следовательно,

$$g_r=G\frac{M_r}{r^2}=G\frac{M_{\text{з}}}{r^2}\frac{r^3}{R^3}=g_0\frac{r}{R}, \qquad (4)$$

где g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

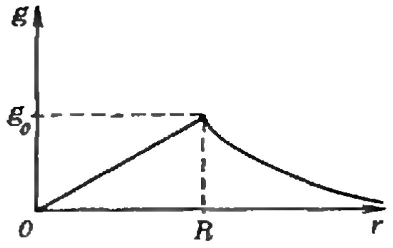


Рис. 2.

Итак, мы знаем g_r на любых расстояниях от центра Земли, как при $r>R$, так и при $r<R$. Эта зависимость изображена графически на рисунке 2. Попробуем использовать полученные результаты для ответа на вопрос, который любили задавать абитуриентам МФТИ в самом конце собеседования: «Что будет с камнем, брошенным в прорытый сквозь Землю колодец?» Ответить на этот вопрос совсем просто, если вы знакомы со свойствами гармонических колебаний. Действительно, раз сила притяжения пропорциональна r, тело будет совершать колебания относительно центра Земли (сопротивление воздуха, естественно, при этом не учитывается). Интересно, что такие же ко-

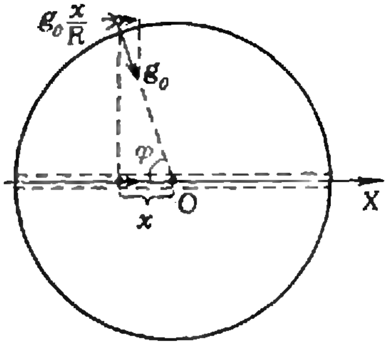


Рис. 3.

лебания (с таким же периодом) будет совершать и тело в колодце, прорытом наклонно. Существовали даже фантастические проекты межконтинентального пассажирского сообщения по прорытым каналам с помощью вагонов на воздушной подушке (подробнее об этом можно прочитать в книге Я. И. Перельмана «Занимательная физика»).

Оказывается, даже не зная ничего о колебаниях, все же можно понять, как будет двигаться камень, брошенный в прорытый колодец. Сравним между собой два движения — камня в колодце и спутника, летящего по околоземной круговой орбите. Точнее, проекции спутника на ось X, проведенную сквозь колодец (рис. 3). Легко убедиться, что проекция ускорения спутника равна $a_x = g_0 \cos\varphi = g_0 x/R$. Но именно с таким ускорением будет двигаться камень на расстоянии x от центра (см. выражение (4)). Значит, и время движения камня сквозь Землю и обратно совпадает с периодом обращения спутника вокруг Земли. Кроме того, легко определить максимальную скорость камня. Очевидно, что она будет равна скорости спутника, т. е. первой космической скорости $v_1 = \sqrt{g_0 R} \approx 8$ км/с.

А теперь представьте себе выражение лица несчастного абитуриента, когда, изложив все эти тонкие физические соображения, он вдруг слышит в ответ: «Как же так, молодой человек? Такая невнимательность! Вы что, забыли? Камень пролетит в колодце всего три метра, после чего его съест Большой Зеленый Камнеед!»

А. Черноуцан

Силовые линии и теорема Гаусса

Из школьного курса физики вы знаете, что наглядное представление об электрическом поле можно получить по картинке силовых линий (договоримся под «электрическим» полем здесь понимать электростатическое поле). Проводя касательную к силовой линии, мы узнаём направление вектора напряженности (стрелки на линиях укажут, куда именно направить этот вектор), сравнивая густоту силовых линий в разных местах (т. е. число силовых линий, проходящих через единичную площадку перпендикулярно к ней), выясняем, где и во сколько раз больше величина напряженности. Однако значение силовых линий этим не исчерпывается.

Хорошо знакомое вам свойство непрерывности линий в пустом пространстве отражает, на самом деле, важнейшее свойство электрического поля. Сформулируем его: электрическое поле устроено так, что *можно* проводить силовые линии, соблюдая правило густоты и не обрывая их при этом в пустом пространстве между зарядами; линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных; на каждом заряде начинается (или заканчивается) число линий, пропорциональное его величине.

Вы удивлены? Вам это свойство кажется очевидным, само собой разумеющимся? Это далеко не так. Будь закон Кулона чуть-чуть иным, и провести силовые линии непрерывно уже не удалось бы. Возьмем, к примеру, точечный заряд. По мере удаления от него густота силовых линий уменьшается. Так, при увеличении расстояния от заряда в 2 раза густота линий уменьшится в 4 раза (число линий не изменится, а площадь поверхности сферы увеличится в 4 раза). Во столько же раз уменьшится и напряженность электрического поля. Но только благодаря тому, что в законе Кулона стоит $1/r^2$! Если бы, например, там было $1/r^3$, то напряженность уменьшилась бы не в 4, а в 8 раз, и для соблюдения правила густоты половину силовых линий пришлось бы оборвать на пути от r до $2r$. И это в пустом пространстве!

Математически строгим выражением свойства непрерывности силовых линий электрического поля является теорема Гаусса. Для того чтобы сформулировать и доказать ее, нам надо сначала перейти от качественного языка силовых линий к точным количественным представлениям. Начнем с того, что несколько перефразируем свойство непрерывности линий.

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность. Если внутри поверхности зарядов нет, то число вышедших из нее линий в точности равно числу вошедших. Удобно входящие линии учитывать наряду с выходящими, но приписывать им знак «минус». Тогда можно сказать, что полное число выходящих из «пустой» поверхности силовых линий равно нулю. Если же внутри поверхности находится какой-нибудь заряд, то, очевидно, что *полное число линий, выходящих из поверхности, будет пропорционально величине этого заряда.* Это и есть качественная формулировка теоремы Гаусса. Но — пойдем дальше.

Введем скалярную величину Φ — ее называют потоком вектора напряженности через некоторую маленькую площадку:

$$\Phi = ES\cos\alpha. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{E}$ — напряженность поля в месте нахождения выбранной площадки (раз площадка маленькая, поле можно считать однородным), S — площадь площадки, α — угол между вектором $\vec{E}$ и вектором $\vec{n}$ нормали к площадке. Посмотрите на рисунок 1: число силовых линий, пронизывающих площадку S, равно произведению их густоты на площадь поперечной площадки $S_\perp = S\cos\alpha$. Так как густота линий пропорциональна $\mathbf{E}$, полное число силовых линий, проходящих через площадку, пропорционально потоку Φ. Всем силовым линиям, выходящим из некоторой замкнутой поверхности, соответствует поток через всю эту поверхность (т. е. сумма потоков через отдельные маленькие участки поверхности). Чтобы выходящие линии давали положительный вклад в поток, а входящие — отрицательный, договоримся, чтобы нормаль к поверхности всюду «смотрела» наружу.

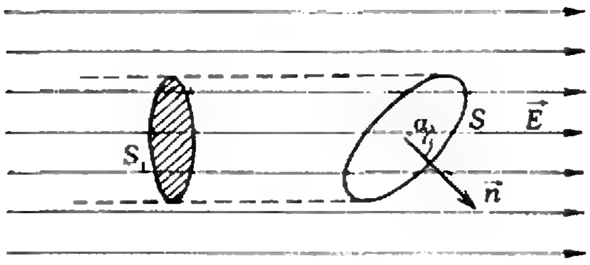


Рис. 1.

Теперь понятно, что теорему Гаусса можно сформулировать так: *поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность пропорционален полному заряду, заключенному внутри этой поверхности.* Чтобы доказать эту теорему, а заодно и вычислить коэффициент пропорциональности, рассмотрим сначала простое, но очень важное свойство величины Φ.

Запишем формулу (1) в виде $\Phi = (E\cos\alpha)S = E_n S$, где E_n — проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$. Если поле создается несколькими зарядами, то по принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k$. Но проекция суммы векторов равна сумме проекций: $E_n = E_{1n} + E_{2n} + \ldots + E_{kn}$. Отсюда получаем, что полный поток вектора напряженности равен сумме потоков, создаваемых отдельными зарядами: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_k$. Поэтому можно говорить о вкладе в полный поток от каждого отдельного заряда.

Докажем вначале, что вклад в поток от точного заряда q, находящегося вне замкнутой поверхности, равен нулю. Рассмотрим два маленьких участка поверхности, отсекаемых узким конусом (рис. 2). Имеем

$$\Phi_1 = E_1 S_1 \cos\alpha_1 = -E_1 S_{1\perp},$$
$$\Phi_2 = E_2 S_2 \cos\alpha_2 = E_2 S_{2\perp},$$

где

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r_1^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r_2^2}.$$

Из подобия следует, что

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{S_{1\perp}}{S_{2\perp}}.$$

Таким образом,

$$\Phi_1 = -\Phi_2, \text{ или } \Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

Аналогичное взаимное уничтожение потоков происходит и для любой другой пары соответствующих участков.

Вычислим теперь вклад в поток от точечного заряда, находящегося внутри замкнутой поверхности. Окружим заряд сферической поверхностью радиусом r (рис. 3). Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что в этом случае $\Phi_1 = \Phi_2$, т. е. что поток через рассматриваемую произвольную поверхность равен потоку через сферу. А поток через сферу вычислить легко:

$$\Phi = ES = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом, мы пришли к окончательной формулировке теоремы Гаусса: *поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен полному заряду, заключенному внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную*, т. е.

$$\Phi = \frac{\Sigma q_{\text{внут}}}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Перейдем теперь к самому приятному — начнем пожинать плоды. Первое применение теоремы Гаусса — это вычисление напряженности электрического поля. Сразу оговоримся, что круг задач, решаемых таким способом, не очень широк (в отличие от способа, основанного на использовании принципа суперпозиции). Но все же он существует. Если мы, например, заранее знаем направление вектора напряженности во всех интересующих нас точках пространства, если удалось выбрать замкнутую поверхность, для которой вычисление потока вектора напряженности является простым, то тогда, может быть, нас ждет успех. Но зато какой успех!

Как известно, много лет потребовалось Ньютону, чтобы доказать, что сила притяжения материальной частицы к шару (Земле) не изменится, если всю массу шара сконцентрировать в его центре. Для проведения доказательства с помощью принципа суперпозиции ему пришлось существенно развить интегральное исчисление. А теперь смотрите, как мы просто справимся с практически такой же задачей. Возьмем шар, равномерно заряженный зарядом Q, и вычислим поле вне его — на расстоянии r от его центра (рис. 4). Из соображений симметрии ясно, что вектор напряженности поля $\vec{E}$ всюду направлен по радиусу. Выразим поток вектора напряженности через сферу

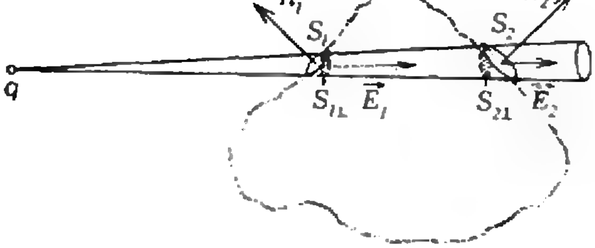


Рис. 2.

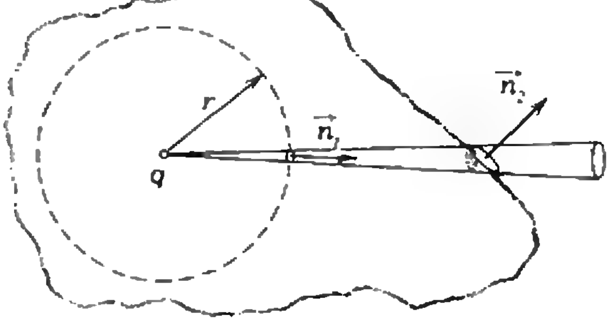


Рис. 3.

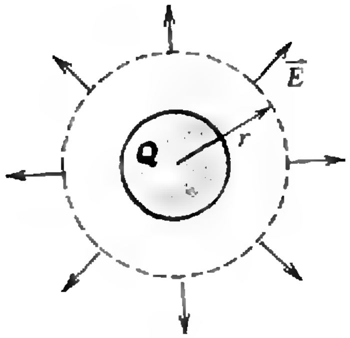


Рис. 4.

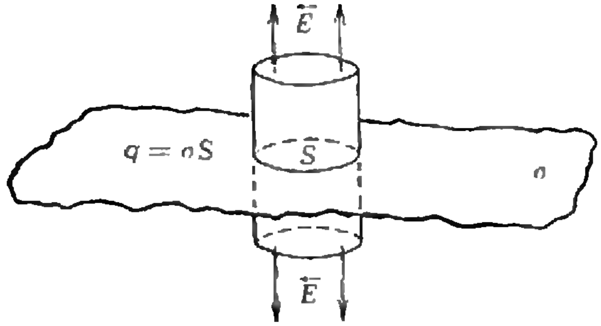


Рис. 5.

радиусом r двумя способами. По определению потока

$$\Phi = ES = 4\pi Er^2,$$

а по теореме Гаусса

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{Q}{r^2}$$

— поле заряженного шара вне его совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центр шара.

Другой пример: найдем напряженность поля бесконечной заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ (рис. 5). Из симметрии понятно, что вектор $\vec{E}$ всюду перпендикулярен плоскости. Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра, расположенного симметрично относительно плоскости. Поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а через каждое основание площадью S он равен ES, т. е.

$$\Phi = 2ES.$$

Но по теореме Гаусса

$$\Phi = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

Приравнивая правые части обоих равенств, получаем

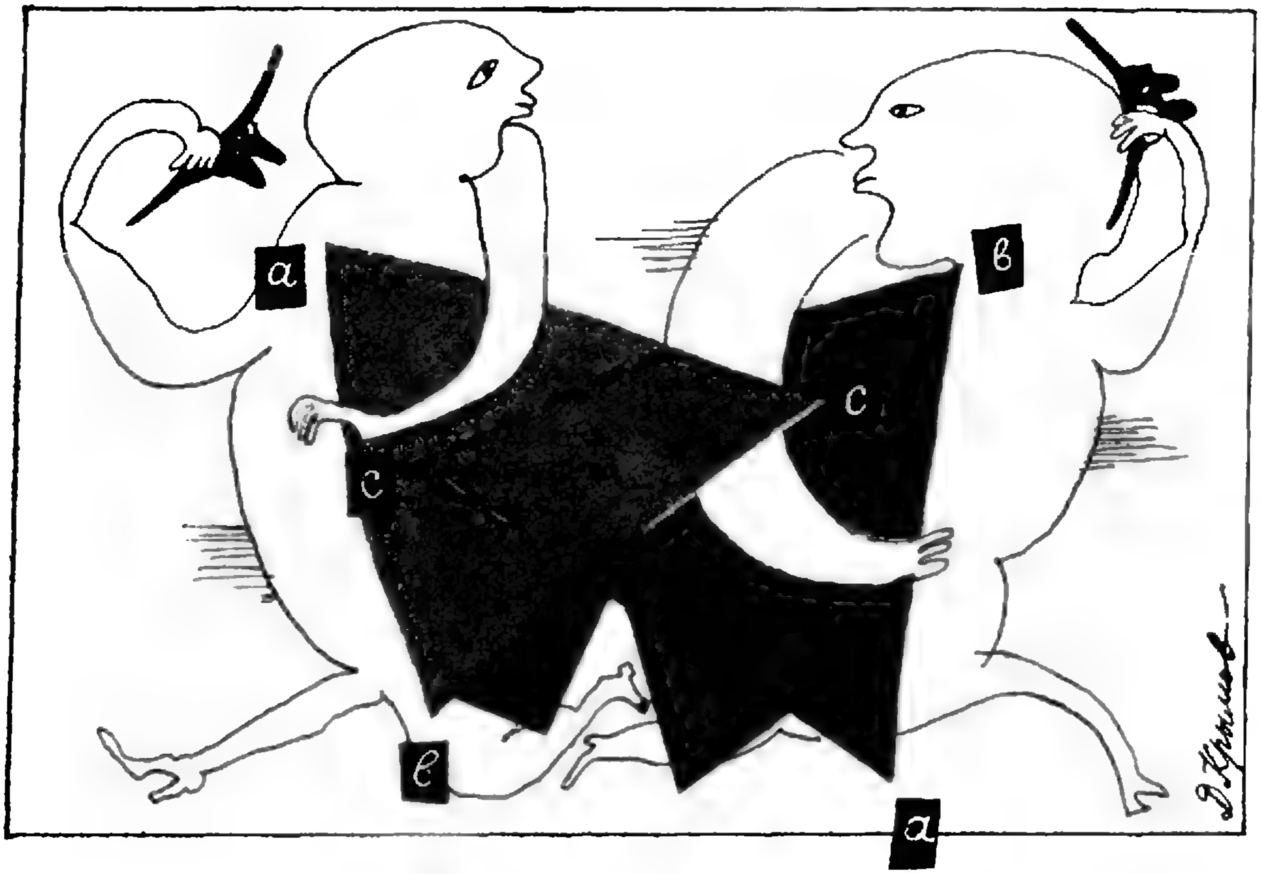
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Наконец, последний пример. Он касается одного очень важного свойства проводников. Покажем, что статические заряды проводника всегда располагаются на его поверхности. Доказательство очень простое. Раз напряженность поля внутри проводника равна нулю (иначе возникло бы движение свободных зарядов), то поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность, проведенную внутри проводника, равен нулю. А это означает, что равен нулю и заряд внутри любой сколь угодно малой поверхности в толще проводника. Следовательно, все заряды проводника действительно располагаются на его поверхности.

А теперь — важное замечание. Доказательство электронейтральности объема проводника опирается на теорему Гаусса, которая, как и свойство непрерывности силовых линий, верна только в том случае, если в законе Кулона стоит $1/r^2$. Вывод: справедливость закона Кулона можно проверить экспериментально. Для этого достаточно убедиться в электронейтральности толщи проводника.

Вот видите, как много интересного может рассказать лишь одна теорема — теорема Гаусса.

А. Черноуцан



Математический кружок

Теоремы Чевы и Менелая

Б. ЭРДНИЕВ,
Н. МАНЦАЕВ

Из школьного курса вам известны теоремы о замечательных точках в треугольнике: *три биссектрисы (медианы, высоты) пересекаются в одной точке*. Эти свойства являются следствиями теорем, которым посвящена данная статья. Итак, мы поговорим о теоремах Чевы и Менелая, а также о некоторых их обобщениях на трехмерное пространство.

Теорема Менелая

Эта теорема была доказана древнегреческим математиком Менелаем Александрийским в I веке нашей эры.

Теорема 1. *Пусть точки A_1 и C_1 лежат на сторонах BC и AB треугольника ABC (рис. 1), а точка B_1 — на продолжении стороны AC этого треугольника. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой l и $AA_0=h_1$, $BB_0=h_2$, $CC_0=h_3$ — перпендикуляры, опущенные соответственно из точек A, B, C на прямую l (см. рис. 1). Из подобия треугольников AA_0C_1 и BB_0C_1 получаем

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{h_1}{h_2}.$$

Аналогично, рассматривая другие пары подобных треугольников, получаем

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{h_2}{h_3},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{h_3}{h_1}.$$

Перемножая полученные пропорции, приходим к требуемому равенству.

Достаточность. Пусть точки A_1, B_1, C_1 (рис. 2), лежащие на прямых BC, AC, AB, таковы, что

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Проведем прямую A_1B_1 и докажем, что точка C_1 ей принадлежит.

Предположим, что это не так. Сначала заметим, что прямая A_1B_1 не параллельна прямой AB (почему?). Пусть T — точка пересечения прямых A_1B_1 и AB (см. рис. 2). Тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BT}{TA}=1. \qquad (1)$$

Из условия и равенства (1) следует, что

$$\frac{BT}{TA}=\frac{BC_1}{C_1A}.$$

Так как точки T и C_1 лежат вне отрезка AB, их совпадение легко следует из следующей леммы.

Лемма. *Пусть A и B — две различные точки. Тогда для любого $k>0$, $k\neq 1$ на прямой AB существуют две и только две точки U и V такие, что $\frac{AU}{UB}=\frac{AV}{VB}=k$, причем одна из этих точек принадлежит отрезку AB, а другая лежит вне отрезка AB.*

Доказательство. Введем на прямой AB координаты, приняв точку A за начало координат (рис. 3). Пусть для определенности $k>1$. Координата искомой точки U, лежащей внутри отрезка AB, удовлетворяет уравнению $\frac{u}{b-u}=k$, откуда $u=\frac{k}{k+1}\,b$.

Точка V вне отрезка AB находится однозначно из уравнения $\frac{v}{v-b}=k$, откуда $v=\frac{kb}{k-1}$.

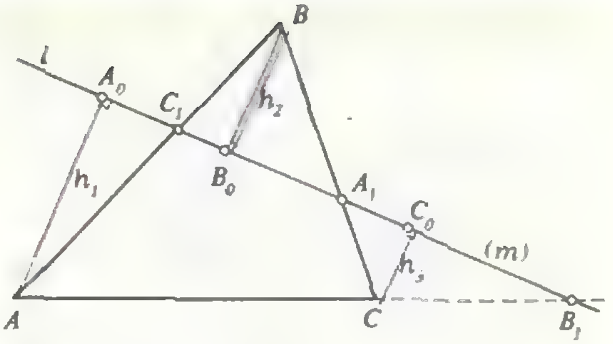


Рис. 1.

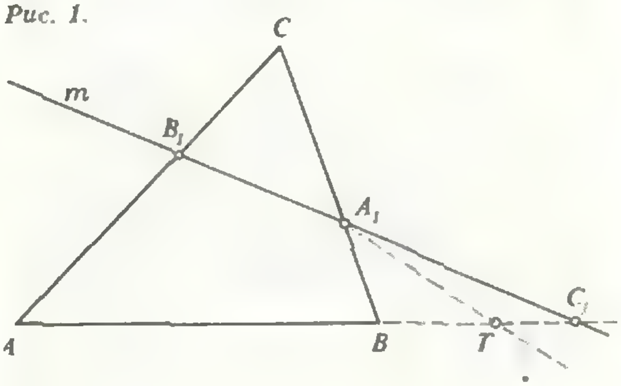


Рис. 2.

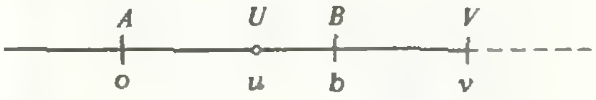


Рис. 3.

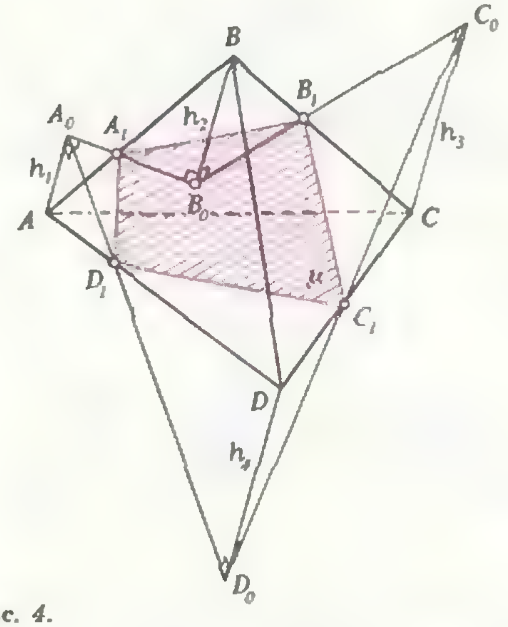


Рис. 4.

Случай $0<k<1$ отличается от рассмотренного лишь тем, что точку V следует искать левее точки A.

Часто теорему Менелая формулируют иначе, используя понятие об отношении направленных

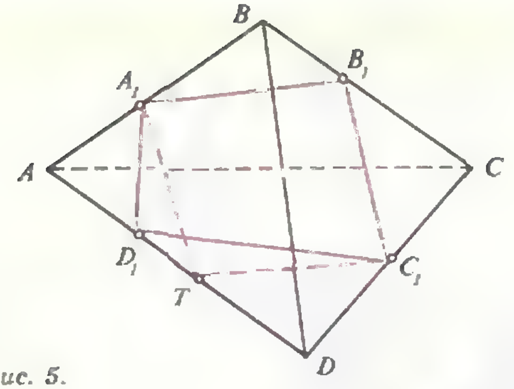


Рис. 5.

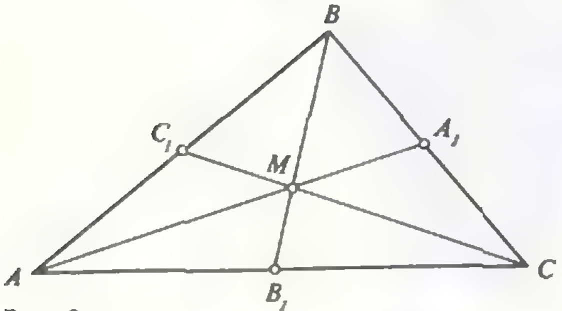


Рис. 6.

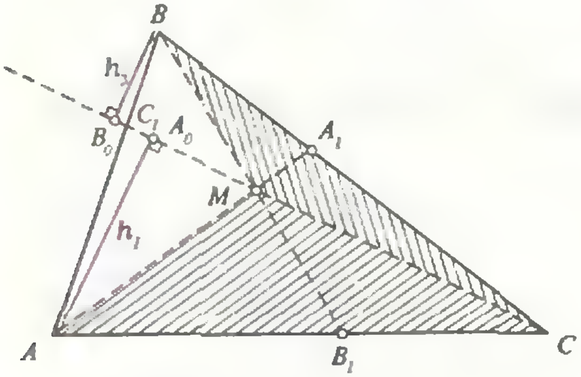


Рис. 7.

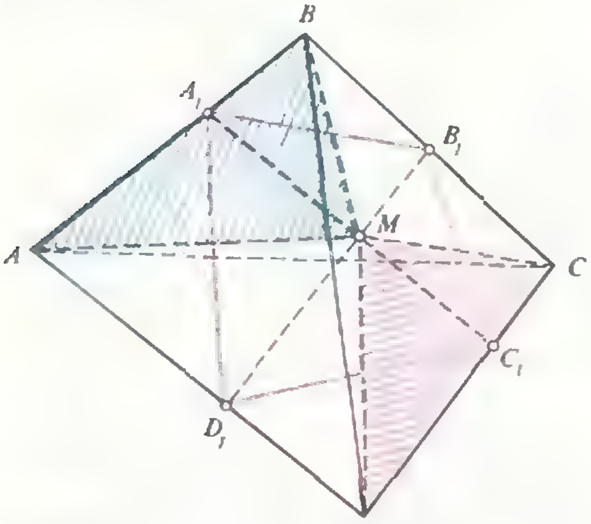


Рис. 8.

отрезков. Будем считать, что $\frac{AU}{UB}=k$, если $\overrightarrow{AU}=k\overrightarrow{UB}$. Ясно, что если векторы $\overrightarrow{AU}$ и $\overrightarrow{UB}$ одинаково направлены, то $k>0$. Если же эти векторы противоположно направлены, то $k<0$, при этом, разумеется, число $|k|$ равно отношению длин отрезков AU и UB.

При таком понимании отношения отрезков теорема Менелая формулируется так. *Пусть три точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC и AB соответственно. Для того чтобы эти точки принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

Мы рекомендуем читателям доказать эту теорему в качестве упражнения.

Теорема Менелая допускает интересное стереометрическое обобщение.

Теорема 2. *Если плоскость μ пересекает ребра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках A_1, B_1, C_1, D_1, то*

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1. \tag{2}$$

Обратно, если для четырех точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих соответственно на ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра, выполнено равенство (2), то эти четыре точки лежат в одной плоскости.

Доказательство. Пусть h_1, h_2, h_3, h_4 — расстояние от точек A, B, C, D соответственно до плоскости μ (рис. 4). Тогда

$$\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{h_1}{h_2},\quad \frac{BB_1}{B_1C}=\frac{h_2}{h_3},\quad \frac{CC_1}{C_1D}=\frac{h_3}{h_4},$$
$$\frac{DD_1}{D_1A}=\frac{h_4}{h_1}.$$

Осталось перемножить полученные отношения.

Для доказательства обратной теоремы проведем плоскость $A_1B_1C_1$. Пусть эта плоскость пересекает ребро DA в точке T (рис. 5). По доказанному

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DT}{TA}=1,$$

а по условию

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1.$$

Поэтому

$$\frac{DT}{TA}=\frac{DD_1}{D_1A},$$

и, по лемме, точки T и D_1 совпадают. Утверждение доказано.

Упражнения

1. Докажите, что, если все стороны пространственного четырехугольника касаются некоторой сферы, то четыре точки касания лежат в одной плоскости.

2. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

Теорема Чевы

Эту замечательную теорему доказал в XVII веке итальянский инженер и математик Чева.

Теорема 3. *Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и BA треугольника ABC (рис. 6). Для того чтобы отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (3)$$

(Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 иногда называют чевианами.)

Доказательство. Необходимость. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M внутри треугольника ABC (рис. 7). Обозначим через S_1, S_2, S_3 площади треугольников AMC, CMB и AMB, а через h_1, h_2 — расстояния соответственно от точек A и B до прямой MC. Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{S_1}{S_2},$$

аналогично

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_3}{S_1},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_2}{S_3}.$$

Перемножив полученные пропорции, убеждаемся в справедливости теоремы.

Достаточность. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника и выполнено соотношение (3), M — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1, а отрезок CM пересекает сторону AB в точке Q. Тогда, по уже доказанному,

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

так что

$$\frac{AQ}{QB}=\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Из леммы снова следует совпадение точек: $Q=C_1$. Достаточность доказана.

Упражнение

3. Докажите, что следующие отрезки в треугольнике пересекаются в одной точке: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью (точка Жергонна); д) отрезки, проходящие через вершины и делящие периметр пополам; е) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вневписанными окружностями.

Перейдем теперь к пространственному обобщению теоремы Чевы.

Теорема 4. *Пусть M — точка внутри тетраэдра $ABCD$, A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки пересечения плоскостей CMD, AMD, AMB и CMB с ребрами (рис. 8) AB, BC, CD и DA соответственно. Тогда*

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1. \qquad (4)$$

Обратно, если для точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих на соответствующих ребрах, выполнено соотношение (4), то плоскости ABC_1, BCD_1, CDA_1 и DAB_1 проходят через одну точку.

Доказательство необходимости легко получить, если заметить, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 (см. рис. 8) лежат в одной плоскости (это плоскость, проходящая через прямые A_1C_1 и B_1D_1, пересекающиеся в точке M), и применить теорему Менелая.

Обратная теорема доказывается так же, как и обратная теорема Менелая в пространстве: нужно провести плоскость через точки A_1, B_1, C_1 и доказать с помощью леммы, что эта плоскость пересечет ребро DA в точке D_1.

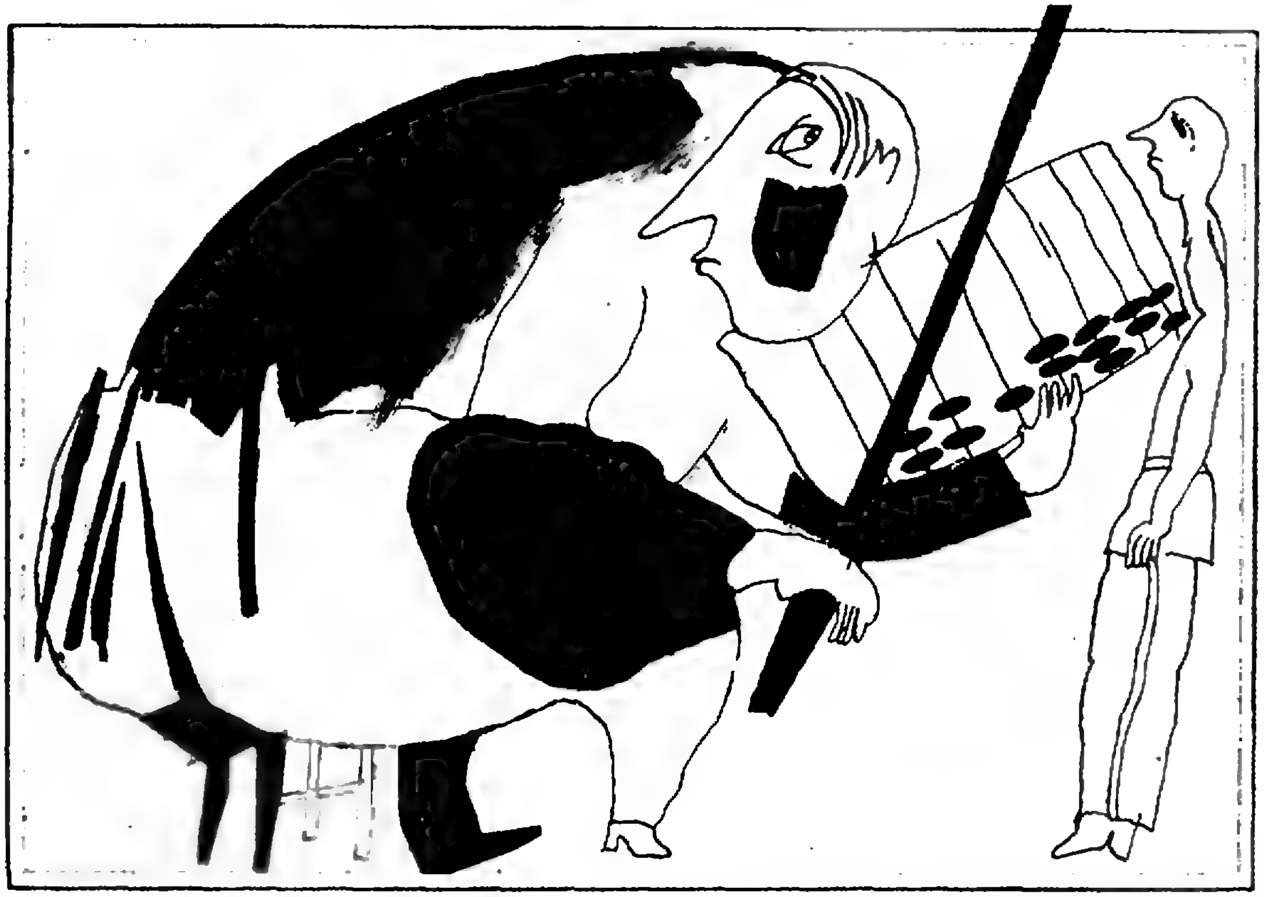
Упражнения

4. Пусть в треугольнике ABC проведены три чевианы AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке O. Тогда

$$\frac{OA_1}{A_1A}+\frac{OB_1}{B_1B}+\frac{OC_1}{C_1C}=1.$$

5. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке (медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий его вершину с центром противоположной грани).

6. В тетраэдре $ABCD$ суммы противоположных ребер равны. Докажите, что существует сфера, касающаяся всех ребер этого тетраэдра.



Практикум абитуриента

Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене

И. ШАРЫГИН

— Это задача, собственно говоря, алгебраическая,— говорит он.— Ее с иксом и игреком решить можно.

. . . .

— И без алгебры решить можно,— говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая.

. . . .

— Вот-с... по-нашему, по-неученому.

А. П. Чехов. Репетитор

Давным-давно, в доброе старое время, любили в школе текстовые арифметические задачи. Методам их решения, зачастую весьма изощренным, учили долго и тщательно, и умения эти сохранялись на всю жизнь. При этом школа не только учила методам, но и воспитывала вкус — арифметическое решение считалось более красивым, чем алгебраическое. Впрочем, и сегодня для любого мало-мальски математически воспитанного человека арифметические решения алгебраических задач, равно как и геометрические решения задач по геометрии, выглядят куда как привлекательнее алгебраических решений.

Здесь самое время вспомнить задачу, поставившую в тупик репетитора Егора Зиберова.

Задача 1. *«Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб?»*

По всей видимости, Удодов-старший решал ее следующим образом.

138 арш. черного сукна стоят $138\cdot3=414$ руб. Разница $540-414=126$ руб. получается за счет синего, каждый метр которого на 2 руб. дороже. Следовательно, синего сукна было $126:2=63$ арш., а черного — $138-63=75$ арш.

Интересно, что будет, если подобную задачу дать на конкурсном экзамене? Нет, мы не сомневаемся в том, что... впрочем, лучше сказать — мы надеемся на то, что подавляющее большинство абитуриентов успешно справится с этой задачей. Но вряд ли найдется хотя бы одно решение, подобное приведенному. У некоторых даже возникнет вопрос: а разве так можно? Вся выучка выпускника восстает против таких решений. Лучше, во всяком случае, спокойнее решать эту задачу как обычно с «иксом» и «игреком».

Тем не менее изредка на конкурсных экзаменах встречаются текстовые задачи, предполагающие именно арифметические решения. Кроме того, бывают ситуации, когда здравые арифметические соображения могут существенно упростить процесс решения. О такого рода задачах мы и расскажем в этой статье.

Задача 2. *На реке расположены пункты A и B, причем B ниже по течению на расстоянии 20 км от A. Катер направляется из A в B, затем сразу возвращается в A и снова следует в B. Одновременно с катером из A отправился плот. При возвращении из B катер встретил плот в 4 км от A. На каком расстоянии от A катер нагонит плот, следуя вторично в B?*

Решение. Заметим, что катер удаляется от плота или приближается к нему с одной и той же скоростью — своей скоростью относительно воды. Следовательно, время, которое катер плыл от A до B, удаляясь от плота, равно времени, которое катер плыл от B до встречи с плотом. Значит, отношение путей, пройденных катером от A до B и от B до плота, равно отношению его скоростей по и против течения, т. е. отношение скоростей равно $20/16=5/4$. Таким же и по тем же соображениям будет отношение путей, пройденных катером от A до второй встречи с плотом и от первой встречи до A. Таким образом, катер нагонит плот в 5 км от A.

Задача 3. *На реке расположены пункты A и B. Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отходят два одинаковых катера, которые встречаются в некотором пункте, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из A, возвращается обратно через 1 ч после выхода. Если бы катер, отправляющийся из A, вышел на 15 мин раньше катера, отправляющегося из B, то встреча произошла бы на равном расстоянии от обоих пунктов. Через сколько времени возвращается обратно катер, выходящий из пункта B?*

Решение. Заметим, что момент возвращения катера в A полностью определяется лишь моментом выхода катера из B, равно как и возвращение катера в B определяется моментом выхода катера из A. Чтобы понять это, достаточно представить себе, что в точке встречи они не обмениваются почтой, а продолжают движение в противоположный пункт. Следовательно, во второй раз катер, вышедший из A, вернулся бы обратно через 1 ч 15 мин после выхода, т. е. на полпути из A в B и обратно ему нужно 1 ч 15 мин, а на весь путь 2 ч 30 мин. Таким образом, катер, выходящий из B, возвращается обратно через 1 ч 30 мин.

Во многих сборниках конкурсных задач можно встретить следующую задачу.

Задача 4. *Имеются два слитка с массами m кг и n кг с различным процентным содержанием меди. От каждого слитка отделяется кусок, причем эти куски имеют равную массу, и сплавляются с оставшейся частью другого слитка. Какой массы куски следует отрезать от каждого слитка, чтобы процентное содержание меди в новых слитках было бы равным?*

Решение. Безусловно, эта задача легко решается стандартным образом при помощи уравнений. Правда, при этом надо не испугаться того, что число неизвестных (три) будет больше числа уравнений (одно). Как ни странно, более общим методом решения в данном случае будет арифметический. Более общим в том смысле, что он безболезненно проходит для любого числа слитков, в то время как алгебраический метод приводит к громоздким, трудно обозримым вычислениям.

На самом деле данная задача — обычная арифметическая задача «на части». В каждый из вновь образовавшихся слитков части исходных должны войти в отношении $m:n$. (Подумайте, почему?) Значит, в новом слитке массой в m кг содержится m равных частей из первого слитка (массой m кг) и n таких же частей из второго слитка. Масса одной части равна $\frac{m}{m+n}$ кг. Остаток от первого слитка в этом новом слитке равен $\frac{m}{m+n}m = \frac{m^2}{m+n}$ кг, а отрезанная часть второго — $\frac{mn}{m+n}$ кг. Такую же часть надо отрезать от первого слитка.

Рассмотрим теперь несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы.

Задача 5. *Пятеро благородных рыбаков занимались ловлей рыбы. По окончании лова первому показалось, что он поймал больше остальных, и он разделил между ними поровну 1/3 своей добычи. После этого стало ясно, что у второго оказалось больше рыбы, чем у остальных, и он разделил между всеми остальными поровну 1/3 всей оказавшейся у него рыбы. Известно, что общий улов составляет 6 кг 400 г и что в результате описанных процедур он разделился поровну. Определите первоначальный улов каждого из рыбаков.*

Решение. Данная задача — типичный пример арифметической задачи, решаемой с конца. В конце у каждого рыбака оказалось по 1 кг 280 г рыбы. Значит, у второго рыбака, перед тем, как он делился с остальными, было в 3/2 раза больше рыбы, а именно — 1 кг 920 г. Значит, у каждого из четырех оставшихся рыбаков в это время было по 1 кг 280 г — — 640 г : 4 = 1 кг 120 г. Рассуждая таким же образом, найдем, что улов первого рыбака равнялся 1 кг 680 г, второго — 1 кг 780 г, а у каждого из трех оставшихся — по 980 г.

Задача 6. *В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму — 400 тонн, по третьему — 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.*

Решение. Очевидно, что более производительный трубопровод следует подключить к танкеру с большей вместимостью. Поскольку один из двух танкеров был заполнен ровно за 12 часов, то либо меньший вмещает $12 \cdot 300 = 3600$ тонн нефти, либо больший $12 \cdot 400 = 4800$ тонн. Первый случай невозможен, так как при удвоении вместимости меньшего танкера получаем 7200 тонн, а для заполнения такого танкера даже третьим трубопроводом требуется более 14 часов. Следовательно, больший танкер вмещает 4800 тонн и заполняется вторым и, тем более, третьим трубопроводом быстрее, чем за 14 часов. Значит, меньший танкер вмещает $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 500 = 3500$ тонн.

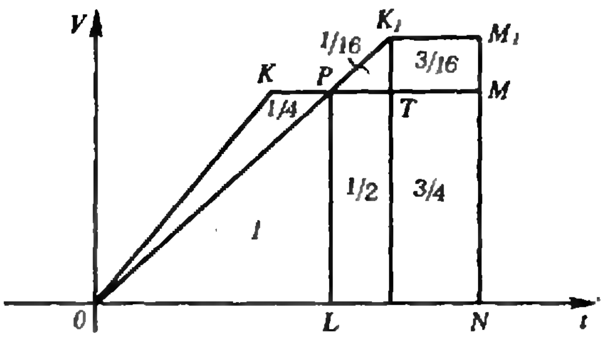
Самое главное в этой задаче — не испугаться громоздкого условия, подойти к ней с позиции обычного здравого смысла. Минимальный здравый смысл и понимание, что такое «процент» — вот все необходимое для решения следующей задачи.

Задача 7. *В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8 % до 97,2 %. Определите минимально возможное число членов такой группы.*

Решение. Процент не участвовавших в кроссе заключен в пределах от 2,8 % до 3,2 %. Если бы в кроссе не участвовал 1 человек (меньше уже нельзя), то число членов группы заключалось бы в пределах от $1\cdot\frac{100}{2,8}=35,7\ldots$ до $1\cdot\frac{100}{3,2}=31,2\ldots$, т. е. минимальное число членов группы будет 32 человека. Понятно, что при меньшем числе членов группы 3,2 % от этого числа будет меньше 1, а по условию в кроссе не участвовал по крайней мере один человек.

Следующая задача не совсем соответствует теме статьи, поскольку при ее решении больше используются геометрические, чем арифметические методы. Мы включили ее по двум причинам. Во-первых, при ее решении не используются ни уравнения, ни другие соотношения, содержащие неизвестные. Во-вторых, иллюстрируется один весьма полезный метод решения задач на движение — графическая интерпретация.

Задача 8. *Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости,— равномерно. Отношения скоростей равномерного движения поездов равно 5/4. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в 5/4 раза больше, чем другой. В пункты B и A поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными?*



Решение. Рассмотрим графики, изображающие зависимость скорости от времени для каждого поезда. При этом можно считать, что оба поезда вышли из одного пункта. Для одного поезда графиком является ломаная OKM, для другого — OK_1M_1 (см. рисунок). Длина пройденного пути к определенному моменту времени одним из поездов равна площади фигуры, ограниченной снизу отрезком оси t и соответствующей частью графика его скорости сверху. По условию площади трапеций $OKMN$ и OK_1M_1N равны, значит, равновелики и фигуры OKP и PK_1M_1M. Площадь $OKPL$ равна 5/4 площади OPL (по условию). Если площадь OPL равна 1, то площадь OKP есть 1/4; площадь PK_1T равна 1/16, поскольку $K_1T=\frac{1}{4}PL$ (по условию отношение скоростей равномерного движения равно 5/4, т. е. $M_1N=\frac{5}{4}PL$), а треугольники OPL и PK_1T подобны. Далее из равновеликости OKP и PK_1M_1M находим площадь прямоугольника TK_1M_1M. Она равна $\frac{3}{16}$. Затем находим площади двух оставшихся прямоугольников. Весь путь (равен площади $OKMN$ или OK_1M_1N) равен $2\frac{1}{2}$. Поскольку площади трапеции $OKPL$ и треугольника OPL соответственно равны $\frac{5}{4}$ и 1, то в момент равенства скоростей (точка P) один поезд прошел $\frac{1}{2}$ пути, а другой — $\frac{2}{5}$.

И в заключение рассмотрим задачу, которая, по существу, является арифметической, поскольку решение основано на свойствах делимости натуральных чисел, хотя для удобства мы все же введем неизвестные. По содержанию эта задача скорее олимпиадная, чем конкурсная.

Задача 9. *У восьми школьников в сумме имеется 7 руб. 19 коп. Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, но у одного из них в целое число раз больше денег, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника?*

Решение. Пусть x_1 — наименьшая сумма, x_1x_2 — вторая по величине, ..., $x_1x_2...x_8$ — наибольшая сумма. По условию $x_i \neq 1$ при $i > 1$, $x_1 + x_1x_2 + ... + x_1x_2...x_8 = 719$. 719 — число простое, следовательно, $x_1 = 1$. Далее имеем $x_2 + x_2x_3 + ... + x_2x_3...x_8 = 718 = 2 \cdot 359$. Таким образом, $x_2 = 2$. Затем получим $x_3 = x_4 = 2$ и $x_5 + x_5x_6 + x_5x_6x_7 + x_5x_6x_7x_8 = 88$. x_5 — делитель 88. Если $x_5 = 2$, то $x_6 + x_6x_7 + x_6x_7x_8 = 43$. 43 — число простое, а $x_6 \neq 1$, значит, $x_5 \neq 2$. При $x_5 = 4$ найдем $x_6 = 3$, $x_7 = x_8 = 2$. Другие значения x_5 не подойдут.

Итак, школьники имели соответственно 1, 2, 4, 8, 32, 96 коп., 1 руб. 92 коп., 3 руб. 84 коп.

Задачи для самостоятельного решения

1. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99 %. За время хранения его влажность уменьшилась на 1 % (стала 98 %). На сколько процентов уменьшилась масса хранившегося на базе крыжовника?

2. Автомобиль проезжает путь от A до B за 1 час. Автомобиль выехал из A и одновременно из B вышел пешеход. Автомобиль встретил пешехода, довез его до A и затем прибыл в B, затратив на весь путь 2 ч 40 мин. За какое время может пройти весь путь от B до A пешеход?

3. Теплоход проходит путь от A до B по течению за 3 часа, а возвращается обратно за 4 часа. За какое время преодолеют путь от A до B плывущие со скоростью течения плоты?

4. Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути несколько остановок. На первой остановке в поезд садится 5 пассажиров, а на каждой следующей — на 10 пассажиров больше. На каждой остановке 50 пассажиров выходит из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт B прибывает менее 336 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462?

5. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа участников кросса, не уложившихся в норматив, заключен от 94,2 % до 94,4 %. Каково наименьшее число участников кросса?

6. Автобус на пути из A в B делает 5 остановок по 10 мин через каждые 16 км (расстояние от A до B равно 96 км), скорость автобуса равна 65 км/ч. Одновременно с автобусом из B навстречу ему выезжает велосипедист со скоростью 21 км/ч. На каком расстоянии от A автобус встретится с велосипедистом?

7. Пассажирский поезд проходит мимо столба за 6 секунд. За какое время пройдут друг мимо друга скорый и пассажирский поезда, если скорость скорого поезда в 3/2 раза больше скорости пассажирского, а длина пассажирского в 4/3 раза больше длины скорого?

8. Работа началась между 9 и 10 часами утра, а закончилась между 15 и 16 часами того же дня. Определите продолжительность работы, если в момент начала и в момент окончания работы минутная и часовая стрелки были перпендикулярны.

9. Один рабочий может изготовить партию деталей за 12 часов. Работу начал один рабочий, через 1 час к нему присоединился второй, еще через час — третий и т. д., пока работа не была выполнена. Сколько времени проработал первый рабочий? (Производительность труда всех рабочих одинакова.)

10. Имеются три слитка массой 2, 3 и 5 кг сразличным содержанием меди. Каждый слиток разделен на три части, и из девяти получившихся кусков получены три слитка массой 2, 3 и 5 кг с равным содержанием меди. На какие части следует разделить исходные слитки, чтобы гарантировать равное процентное содержание меди в получившихся слитках независимо от содержания ее в исходных слитках?

11. Три школьника делят между собой орехи. Сначала первый школьник дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем второй дал каждому из двух других по одной четверти оказавшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем тоже сделал третий школьник. В результате у каждого оказалось по 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника первоначально?

12. Имеются два сосуда. В одном содержится 3 л 100 % кислоты, а в другом 2 л воды. Из первого сосуда во второй перелили один стакан кислоты, а затем из второго в первый — один стакан смеси. Эту операцию повторили еще три раза. В результате во втором сосуде оказалась кислота крепостью 42 %. Сколько процентов кислоты содержится теперь в первом сосуде?

13. Пункт B находится выше по течению, чем пункт A, на расстоянии 4,5 км от A. Скорость течения реки 3 км/ч. Двигаясь в стоячей воде, гребец идет со скоростью 5 км/ч. Гребец вышел из A, доплыл до B и вернулся в A. Через равные промежутки времени гребец отдыхал в течение 10 мин (в это время лодка плывет по течению), а всего таких перерывов оказалось 8. Через сколько времени гребец вернулся обратно в A?

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический и экономический факультеты)

1. Из пункта A в пункт B выехал скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A выехал товарный поезд. Через 5 часов 20 минут они встретились. В пункт B скорый поезд прибыл на 8 часов раньше, чем товарный в A. Сколько времени находился в пути каждый поезд?

2. Решите уравнение

$$2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=3\operatorname{tg}2x+5.$$

3. Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно равны 9 и 3. Точка E — середина боковой стороны AB, точка F — середина CD. Биссектриса угла BAD пересекает среднюю линию EF в точке P, а биссектриса угла ADC — в точке Q. Длины отрезков EQ, PQ и PF равны. Найдите площадь трапеции.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|a-2x|+1=|x+3|$$

имеет единственное решение.

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Длина ребра куба равна единице. Через прямую $B'C$ проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол 60° с прямой $A'B$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

Вариант 2

(физический факультет)

1. Найдите все пятизначные числа вида $67m\,1n$ (m и n — цифры), которые делятся на 36.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin x=\sqrt{5\cos x-1}.$$

3. Один из углов треугольника равен 60°, радиус описанной около него окружности равен $7/\sqrt{3}$, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.

4. Решите неравенство

$$\log_{|\sin x|}(x^2-14x+73)>\frac{2}{\log_5|\sin x|}.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. Длины всех ребер куба равны единице. Точки M и N — середины CD и CC' соответственно. Найдите расстояние между прямыми AN и BM.

Вариант 3

(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)

1. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 20 %, а в другом — 30 % олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы составить из них 10 кг нового сплава, содержащего 27 % олова?

2. Решите уравнение

$$4\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x=\frac{5}{\cos x}.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC длины медиан BM, CN и высоты AH равны соответственно 4, 5 и 6. Найдите площадь треугольника.

4. Решите неравенство

$$\sqrt{21x+16}-\sqrt{x-4}<20.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$, $BC=2$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M — середина AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определите величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. В цилиндре без трения движутся три поршня с массами m, M и m. Между поршнями находится газ, масса которого пренебрежимо

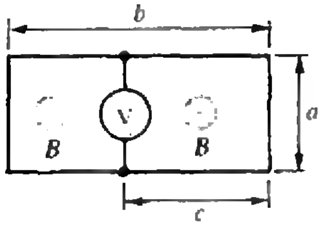


Рис. 1.

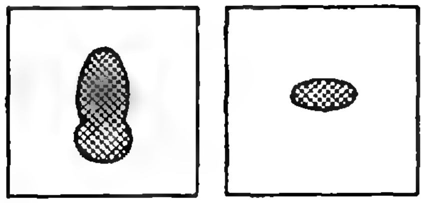


Рис. 2.

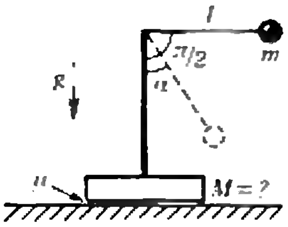


Рис. 3.

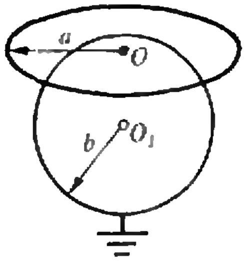


Рис. 4.

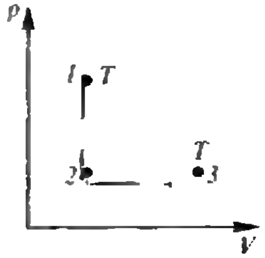


Рис. 5.

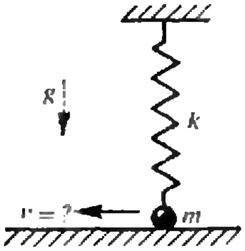


Рис. 6.

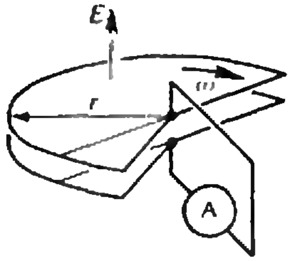


Рис. 7.

мала по сравнению с массами поршней. Внешнее давление равно нулю. Найдите ускорение среднего поршня массой M в тот момент, когда крайние поршни имеют ускорения a_1 и a_2 соответственно. (74 %)

2. Два одинаковых проводящих диска радиусом R каждый, один из которых несет заряд $+q_1$, а другой — заряд $-q_2$, сначала соединяют так, что их оси совпадают, а потом слегка раздвигают вдоль осей. С какой силой взаимодействуют диски после разведения? (63 %)

3. Из однородной проволоки, обладающей заметным сопротивлением, сделан прямоугольник размером $a \times b$ (рис. 1). Перпендикулярно плоскости прямоугольника создается магнитное поле, индукция которого B линейно растет со временем по закону $B = \alpha t$. На расстоянии c от одной из сторон длиной a подключен вольтметр, сопротивление которого очень велико. Какое напряжение покажет этот вольтметр? (33 %)

4. Оцените плотность пламени свечи. (56 %)

5. Если шарик положить на горизонтальное плоское зеркало и осветить сбоку, то на экране видны две тени от шарика, а если положить тонкую шайбу вместо шарика, то видна только одна тень (рис. 2). Объясните явление. (82 %)

Вариант 2

1. В сосуд сечением S, частично заполненный жидкостью с плотностью ρ, положили кубик с ребром a и плотностью $\rho_1 < \rho$. На сколько поднимется уровень жидкости в сосуде? (74 %)

2. На бруске, находящемся на горизонтальной плоскости, установлен подвес с нитью длиной l и грузом массой m (рис. 3). Груз отклонили на угол $\pi/2$ и отпустили. Определите массу бруска, если он сдвинулся, когда угол между нитью и вертикалью был равным α. Коэффициент трения бруска о плоскость μ. (34 %)

3. В центре уединенного проволочного заряженного кольца радиусом a потенциал равен φ_0. Это кольцо поднесли к заземленному шару радиусом b так, что только центр O кольца оказался на поверхности шара (рис. 4). Найдите индуцированный на шаре заряд. (22 %)

4. Оцените скорость молекул водорода, входящего в состав воздуха в комнате. (62 %)

5. Около одного из торцов пластмассового прозрачного стержня с гладкими поверхностями расположен источник света, около другого — экран. На экране в отсутствие стержня наблюдается монотонная освещенность, а стержень вызывает появление яркого светлого пятна. Объясните явление. (77 %)

Вариант 3

1. Газ, имеющий в начальном состоянии 1 температуру T (рис. 5), охлаждают при постоянном объеме (участок 1—2), пока давление не уменьшится в n раз. После чего газ нагревают при постоянном давлении до первоначальной температуры T (на участке 2—3). Найдите совершенную газом работу, если его масса m, а молярная масса M. (68 %)

2. Верхняя точка недеформированной пружины жесткостью k и длиной l прикреплена к потолку, а к нижнему концу пружины прикреплено тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости прямо под точкой подвеса (рис. 6). Какую наименьшую скорость нужно сообщить этому телу вдоль плоскости, чтобы оно оторвалось от плоскости? (61 %)

3. У переменного конденсатора обкладки состоят из двух пар соприкасающихся полудисков одинакового радиуса r (рис. 7). Подвижные полудиски верхней и нижней обкладок вращаются с угловой скоростью ω, то полностью перекрывая неподвижные, то образуя с ними полные диски. Конденсатор помещен во внешнее электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярной обкладкам. Конденсатор замкнут проводом с нулевым сопротивлением. Какой ток идет по нему? Построй-

те график зависимости тока от времени. Зазор между обкладками мал по сравнению с их радиусом. (25 %)

4. В горизонтальной бетонной дорожке образовался глубокий провал метровой ширины (из-за убранной когда-то плиты). Оцените, с какой скоростью должен двигаться футбольный мяч, чтобы он все-таки преодолел этот провал. (50 %)

5. В жидкий азот опущены две пластины: металлическая и пенопластовая. Смоченная водой тряпка крепко примерзает к вынутой промороженной металлической пластине и очень плохо — к пенопластовой. Объясните явление. (34 %)

Публикацию подготовили В. Белоносов, М. Вишневский, Г. Меледин, В. Чуркин

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Шестой член арифметической прогрессии равен 10, а сумма первых шестнадцати членов этой прогрессии равна 200. Найдите двенадцатый член прогрессии.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения площади параллелограмма, произведение длин двух неравных высот которого равно 9, а величина острого угла параллелограмма не меньше 30° и не больше 45°.

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2}\leqslant 1.$$

5. Найдите все рациональные значения параметра a, при которых функции

$$\sin\left(\frac{2ax}{a^2+\sqrt{12}}\right) \text{ и } \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{1-2a+\sqrt{108}}\right)$$

имеют одинаковые периоды.

6. Вершина конуса лежит в плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, а окружность основания конуса вписана в четырехугольник, получившийся в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AD и BC основания пирамиды и делящей ребро SC в отношении 3:1, считая от вершины S. Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.

Вариант 2

1. На отрезке $[-2;\ 2]$ найдите наименьшее значение производной функции

$$y=-\frac{1}{3}x^3+x+1.$$

2. Дано число a. Найдите $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\times\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$, если известно, что $\sin\alpha\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=a$.

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\leqslant 1.$$

4. Боковые стороны AB и CD трапеции продолжены до пересечения в точке E. Точка O — центр описанной около треугольника ADE окружности. Найдите величину острого угла A трапеции, если известно, что точки A, B, C, D, O лежат на окружности, радиус которой в $\sqrt{3}$ раз меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ADE.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5.$$

6. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписана сфера. Отношение площади основания ABC пирамиды к площади поверхности сферы равно q. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, касается сферы и отсекает от пирамиды $SABC$ пирамиду $SA_1B_1C_1$. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Материальная точка на плоскости совершает движение, которое может быть представлено в виде

$$x=a\cos\omega t,$$
$$y=b\cos(\omega t+\varphi_0),$$

где x и y — координаты точки в момент времени t. $a=4$ м, $b=8$ м, $\varphi_0=\pi$, $\omega=\pi$ с$^{-1}$. Определите траекторию движения точки.

2. На наклонной плоскости, образующей с горизонтальной плоскостью угол α, лежит брусок массой M, который упором удерживается от соскальзывания. В брусок попадает и застревает в нем пуля массой m, летевшая со скоростью v снизу вверх вдоль наклонной плоскости. Через какое время брусок вернется в исходное положение? Коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью μ.

3. Идеальный газ медленно переводят из состояния с объемом $V_1=32$ л и давлением $p_1=4{,}1\cdot 10^5$ Па в состояние с объемом $V_2=9$ л и давлением $p_2=15{,}5\cdot 10^5$ Па так, что во время сжатия давление изменяется в зависимости от объема по линейному закону $p=aV+b$, где a и b — постоянные. При каком объеме температура газа в этом процессе будет наибольшей?

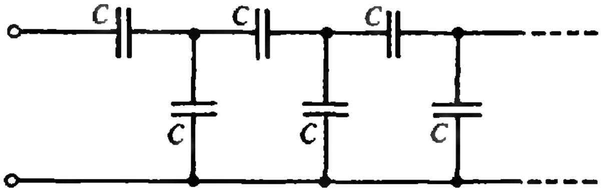


Рис. 1.

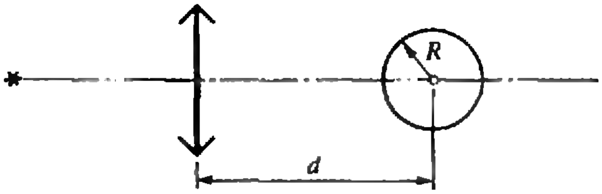


Рис. 2.

4. Пластины плоского конденсатора присоединены к источнику с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В. Одна из пластин движется навстречу другой таким образом, что расстояние между ними меняется по закону $d(t)=0{,}1-20\,t$ (d — в метрах, t — в секундах). Определите направление тока и зависимость силы тока, текущего по цепи, от времени. Площадь пластин конденсатора $S=7{,}2\cdot10^{-3}$ м^2.

5. Определите емкость бесконечно длинной системы одинаковых конденсаторов емкостью C каждый, соединенных друг с другом, как показано на рисунке 1.

6. Оптическая система состоит из линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шарика радиусом R (рис. 2). Определите расстояние от линзы до источника, если изображение источника совпадает с ним самим. Расстояние между линзой и шариком d.

Вариант 2

1. Найдите максимальный коэффициент полезного действия винтового домкрата, у которого силы трения не позволяют грузу опускаться.

2. На горизонтальной поверхности стола стоит широкий сосуд с водой. Высота уровня воды в сосуде h, масса сосуда вместе с водой M. В боковой поверхности сосуда у дна имеется круглое отверстие площадью S, закрытое пробкой. При каком значении коэффициента трения между дном сосуда и столом сосуд придет в движение, если вынуть пробку?

3. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре T находится насыщенный пар. Определите массу сконденсировавшегося пара при изотермическом вдвигании поршня, если при этом совершена работа A. Молярная масса пара М.

4. Элемент с ЭДС $\mathscr{E}=6$ В дает максимальный ток $I_{\max}=3$ А (при коротком замыкании). Какова наибольшая мощность, которая может быть выделена на внешнем сопротивлении?

5. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью S, расположенный перпендикулярно магнитным линиям. Какой ток потечет по витку, если поле будет убывать с постоянной скоростью υ? Сопротивление витка R.

6. Луч лазера мощностью $W=50$ мВт падает на поглощающую поверхность. Оцените силу светового давления луча на эту поверхность.

Публикацию подготовили А. Бортаковский, О. Суров

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin^3 x-\cos^3 x}=\sqrt{-\cos x}.$$

2. Сумма всех трехзначных чисел, составленных из трех различных отличных от нуля цифр k, l и m, больше 2700, но не превосходит 2900. Каждая из указанных цифр встречается в записи числа один раз. Найдите число $\overline{klm}$, если известно, что оно четное и наибольшее из всех трехзначных чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

3. Решите уравнение

$$\log_3(31-|x^2-6x+5|)=c,\ c\in R.$$

4. Через сторону PQ нижнего основания правильной треугольной призмы $PQRP_1Q_1R_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая ребро RR_1 и разбивающая призму на два многогранника. Отношение объема многогранника, одной из граней которого является нижнее основание PQR призмы, к объему отсеченного многогранника, одной из граней которого является грань QQ_1P_1P, равно q. Найдите величину угла наклона секущей плоскости к плоскости нижнего основания, если известно, что величина угла между прямыми PQ_1 и RR_1 равна φ.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}5x=\sin^2 x\cdot\operatorname{tg}5x.$$

2. Имеются два сплава, состоящие из железа, никеля и хрома. Процентное содержание хрома в первом сплаве в 5 раз больше процентного содержания никеля во втором сплаве. Кусок первого сплава массой 200 г сплавили с куском второго сплава массой 400 г и получили сплав, содержащий q % никеля. Сколько граммов железа содержит новый сплав, если известно, что первый сплав содержит 30 % никеля, а второй сплав содержит 40 % железа?

3. Решите уравнение

$$-\log_b(2-|x-b|)=\log_{0{,}2}(5-x),\ b\in R.$$

4. Правильная треугольная пирамида $SKLM$ пересечена плоскостью π, параллельной стороне ML основания пирамиды и ребру SK, причем точки S и K удалены от этой плоскости на расстояние, вдвое меньшее (каждая), чем пря-

мая ML. Длина высоты SP боковой грани MSK равна d, а боковое ребро SL образует с высотой SO пирамиды угол величиной β. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью π.

Публикацию подготовили А. Иванов, Н. Мирошин

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt{(x-1)y}=y\left(2+\sqrt{\dfrac{y}{x-1}}\right), \\ y^2+xy-5x+7=0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sin 2x+\sin x-1\geqslant\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

3. Решите уравнение

$$\log_2\left(\frac{x-1}{4x+3}\right)=3+\log_{16}x^4-\log_4(x-3)^2.$$

4. В треугольнике ABC точка E принадлежит медиане BD, причем $|BE|=3|ED|$. Прямая AE пересекает сторону BC в точке M. Найдите отношение площадей треугольников AMC и ABC.

5. При каких положительных значениях параметров a, b системы уравнений

$$\begin{cases} \log_9 x^2=b-\log_3 y, \\ (y+x)^2=a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ x^2+y^2=2x+2y+a^2 \end{cases}$$

имеют одинаковое число решений?

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ 2|x-1|+3|y+2|=17. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$1+\sin 4x-\cos 4x=2\sin 5x\cdot\cos x.$$

3. Две окружности с радиусами R и r касаются друг друга внешним образом в точке A. Общие касательные AD и BC к окружностям пересекаются в точке D. Докажите, что $|AD|^2=R\cdot r$.

4. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(4-x)+\log_{(8+2x-x^2)}(x+2)^2\leqslant 2.$$

5. Определите, при каких значениях параметра a все действительные решения уравнения

$$x^4+(x+1)[(3a-2)x^2+(2a^2-a-3)(x+1)]=0$$

принадлежат отрезку $[-3;\ 0]$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с трамплина высотой H, нижняя часть которого горизонтальна и находится на высоте h над землей. Пренебрегая силами сопротивления, определите дальность полета тела. При каком значении h, считая $H=\text{const}$, дальность полета будет максимальной и чему она будет равна при этом?

2. Искусственный спутник запускается на околоземную орбиту с космодрома, находящегося на экваторе. Какую скорость относительно поверхности Земли нужно сообщить спутнику при запуске в направлении полюса? в западном направлении? в восточном?

3. Тело массой m, движущееся со скоростью v, налетает на покоящееся тело и после упругого столкновения отскакивает от него под углом 90° к первоначальному направлению движения со скоростью $2/3v$. Определите массу второго тела.

4. От груза массой M, висящего на пружине жесткостью k, отделилась его часть массой m. На какую максимальную высоту после этого поднимется оставшаяся часть груза?

5. Шарик подвешен на длинной нити. Первый раз его поднимают до точки подвеса и отпускают, второй раз его отклоняют на небольшой угол и тоже отпускают. В каком случае и во сколько раз быстрее шарик возвратится в начальное положение?

6. Оболочка воздушного шара объемом $V=1000$ м^3 наполнена гелием при температуре окружающего воздуха $t=27$ °С. Суммарная масса оболочки, тросов и корзины с аэронавтами $m=500$ кг. Определите силу сопротивления воздуха, если шар поднимается вверх с ускорением $a=2{,}2$ м/с^2. Относительные молекулярные массы гелия и воздуха равны соответственно 4 и 29. Давление гелия равно атмосферному давлению $p=10^5$ Па.

7. В сосуде объемом $V=20$ л, разделенном тонкой подвижной перегородкой на две части, поддерживается постоянная температура $t=100$ °С. В левой части сосуда находится $m_в=18$ г воды, в правой — $m_а=14$ г азота. Определите объем правой части сосуда, если давление насыщенных паров воды $p_н=10^5$ Па. Какой объем заняла бы вода, если бы она испарилась полностью?

8. Точечный источник света находится на дне сосуда с жидкостью, показатель преломления которой $n=1{,}8$. Во сколько раз максимальное время, затрачиваемое светом на прохождение слоя жидкости с последующим выходом в воздух, больше минимального времени?

9. Одна из пластин плоского воздушного конденсатора освещается светом с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкм. Выбитые светом электроны попадают на другую пластину конденсатора. Определите максимальную величину заряда, которую можно получить таким способом, если площадь пластин $S=1000$ см^2, расстояние между пластинами $d=2$ см, работа выхода электронов из металла $A=3\cdot 10^{-19}$ Дж, заряд электрона $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

10. Сила тока, характеризующая поток электронов в электронно-лучевой трубке, $I=$

$=400$ мкА, ускоряющее напряжение $U=10$ кВ, отношение заряда электрона к его массе $\gamma=1{,}7\cdot 10^{11}$ Кл/кг. Найдите силу давления электронного пучка на экран трубки, полагая, что все электроны поглощаются экраном.

Публикацию подготовили М. Данилычева, М. Красненков, И. Матусевич, Е. Новикова, Л. Ромаскевич

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите без таблиц

$$(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})\cdot(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16}).$$

2. Упростите и вычислите при $a=9$ и $b=\sqrt{2}$

$$a\cdot\frac{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})^2+(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})^2}{a+\sqrt{ab}}.$$

3. Вычислите $(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$, если $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{3}{4}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

4. Вычислите без таблиц

$$\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{2}}.$$

5. Решите уравнение

$$2x-\sqrt{x^2-x+4}=4.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Раствор содержит 40 г соли. После того, как в него добавили 200 г воды, концентрация соли уменьшилась в 1,5 раза. Найти первоначальную массу раствора в граммах.

7. Решите неравенство

$$\frac{1}{x+2}\geqslant\frac{3}{x-3}.$$

В ответе запишите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

8. Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к высоте конуса. Вычислите площадь сечения (в см²), если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания равен 5.

9. Определите значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases}ax-4y=a+1,\\ 2x+(a+6)y=a+3\end{cases}$$

не имеет решения.

10. Решите уравнение

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1).$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

11. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x=0.$$

В ответе запишите сумму (в градусах) корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0;\pi]$.

12. В прямоугольной системе координат точка M имеет координаты x, y и z, равные длинам медиан прямоугольного треугольника. Найдите расстояние точки M от начала координат, если диаметр, описанной около треугольника окружности, равен $\sqrt{6}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело, двигаясь равноускоренно и имея начальную скорость $v_0=2$ м/с, прошло за пятую секунду путь $l=4{,}5$ м. Определите путь, пройденный телом за $t=10$ с.*)

2. Полый шар из чугуна плавает в воде, погрузившись в нее ровно наполовину. Найдите объем внутренней полости шара. Масса шара $m=5$ кг, плотность чугуна $\rho_ч=7{,}8\times\times10^3$ кг/м³, ускорение силы тяжести $g=9{,}8$ м/с², плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м³.

3. Период колебаний математического маятника на Земле $T_З=1$ с. Чему будет равен период колебаний этого маятника на Луне? Масса Луны $M_Л$ в 81 раз меньше массы Земли $M_З$, а радиус Земли $R_З$ в 3,7 раза больше радиуса Луны $R_Л$.

4. Человек массой $m_1=60$ кг равномерно переходит в лодке с носа на корму. Длина лодки $l=3$ м. Определите массу лодки, если во время движения человека лодка переместилась на расстояние $s=1$ м. Лодка первоначально покоилась. Сопротивление воды не учитывать.

5. Стальной шар, падая свободно, достиг скорости $v=41$ м/с и, ударившись о землю, подскочил на высоту $h=1{,}6$ м. Определите изменение температуры шара при ударе, считая, что при ударе меняется только внутренняя энергия шара. Удельная теплоемкость стали $c=460$ Дж/(кг·К). Сопротивлением воздуха пренебречь.

6. Тепловой двигатель получает от нагревателя каждую секунду количество теплоты $Q_1=8200$ кДж и отдает холодильнику $Q_2=6200$ кДж. Найдите КПД двигателя. Ответ дайте в процентах.

7. Плоский конденсатор имеет площадь пластин $S=2000$ см². Расстояние между пластинами $d=0{,}5$ мм. К одной из обкладок прилегает пластина диэлектрика толщиной $d_1=0{,}3$ мм с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=7$. Остальное пространство внутри конденсатора заполнено воздухом. Определите емкость конденсатора. Ответ дайте, умножив результат на 10^9.

8. Определите падение напряжения на подводящих проводах, если на зажимах лампочки сопротивлением $R_1=10$ Ом напряжение $U_1=1$ В. ЭДС источника $\mathscr{E}=1{,}25$ В, его внутреннее сопротивление $r=0{,}4$ Ом.

---

*) Во всех задачах, где нет специальных указаний, ответ надо дать в СИ.

9. Электрон с массой $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг и зарядом $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}015$ Тл со скоростью $v=10^3$ км/с под углом $\alpha=30^\circ$ к направлению вектора индукции магнитного поля. Определите шаг винтовой линии, по которой движется электрон. Ответ дайте в сантиметрах.

10. Найдите абсолютный показатель преломления среды, в которой свет с энергией фотона $E=3\cdot 10^{-19}$ Дж имеет длину волны $\lambda=0{,}44\cdot 10^{-6}$ м. Постоянная Планка $h=6{,}6\times10^{-34}$ Дж·с.

Вариант 2

1. Снаряд вылетел из орудия со скоростью $v_0=200$ м/с под углом $\alpha=60^\circ$ к горизонту. Через какое минимальное время вектор скорости снаряда будет составлять с горизонтом угол $\beta=45^\circ$? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. На тело массой $m=5$ кг действуют две силы, равные $F_1=3$ Н и $F_2=4$ Н и направленные под углом $\alpha=90^\circ$ друг к другу. Найдите величину ускорения тела.

3. Камень падает с высоты $h=20$ м без начальной скорости. Какова будет скорость камня в тот момент, когда его потенциальная энергия уменьшится в $n=2$ раза по сравнению с первоначальным ее значением? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2.

4. Каким должен быть наибольший объем льдины, плавающей в воде, если известно, что алюминиевый брусок объемом $V_а=0{,}1$ м^3, примерзший к льдине снизу, заставляет ее тонуть? Плотность льда $\rho_л=0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho_а=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м^3.

5. Два соединенных тонкой трубкой баллона, объемы которых $V_1=7$ дм^3 и $V_2=12$ дм^3, содержат некоторое количество газа. Первый баллон имеет неизменную температуру $t_1=0\,^\circ$С. До какой температуры надо нагреть второй баллон, чтобы в нем осталось $n=1/3$ общего количества газа?

6. С какой скоростью должна вылететь из ружья свинцовая дробинка при выстреле, сделанном вертикально вниз с высоты $h=100$ м, чтобы при ударе о неупругое тело дробинка расплавилась? Начальная температура дробинки $T=500$ К, температура плавления $T_{пл}=600$ К, удельная теплоемкость свинца $c=0{,}13$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления $\lambda=25$ кДж/кг. Считать, что при ударе все тепло пошло на плавление дробинки.

7. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно в батарею. Во сколько раз увеличится емкость батареи, если один из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$?

8. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них чайник вскипает за $\tau_1=10$ мин, а при включении только второй — за $\tau_2=15$ мин. За какое время (в минутах) вскипит чайник, если включить обе обмотки, соединив их параллельно?

9. Короткозамкнутая катушка, состоящая из $n=1000$ витков, помещена в магнитное поле, линии индукции которого направлены вдоль оси катушки. Индукция магнитного поля меняется со скоростью $\Delta B/\Delta t=5\times10^{-3}$ Тл/с. Площадь поперечного сечения катушки $S=40$ см^2, сопротивление катушки $R=160$ Ом. Найдите мощность тепловых потерь. Ответ дайте в мкВт (1 мкВт$=10^{-6}$ Вт).

10. Плоское зеркало поворачивают на угол $\alpha=35^\circ$. На какой угол повернется при этом отраженный от зеркала луч? Ответ дайте в градусах.

Публикацию подготовили В. Докучаева, Б. Каширин, И. Поволоцкая

Реклама

КООПЕРАТИВ «ЭЛЕКТРОН»

предлагает владельцам и пользователям ПЭВМ типов ДВК, УКНЦ, ИБМ XT/AT, «Синклер Спектрум», «Атари», «Коммодор», «Агат», «Специалист», «РК-86» 32К, «РК-86» 64К, «Микроша», БК-0010.01, «Львов», «Партнер», «Вектор», «Правец-8Д» широкий выбор системных, прикладных, игровых, учебных программ.

Предлагает учебные программы для классов УКНЦ, КУВТ-86, «Ямаха».

Заключает с авторами договоры на тиражирование разработанного ими программного обеспечения с выплатой процентов от реализации, возможен обмен программами.

Продает программно-аппаратные комплексы и игротеки на базе компьютеров «Синклер Спектрум», «РК-86», «Специалист», ДВК, электронные диски (64К—256К, с операционной системой, для всех типов бытовых компьютеров).

Адрес для справок и запроса каталогов: 103489, г. Москва, Зеленоград, корп. 705, кооператив «Электрон».

Телефон: 536-12-81.

Журнал — читатель — журнал

Прежде всего мы хотим сказать большое спасибо всем читателям, которые прислали ответы на вопросы нашей анкеты. Конечно, у нас большие и очень представительные редакционная коллегия и редакционный совет, куда входят люди, связанные с большой наукой и со школой, со студенчеством и с педагогикой. Но без обратной связи, без живого отклика читателя и знания его сегодняшнего интереса нам не обойтись.

О чем же говорят анкеты?

Наибольшая часть нашей читательской аудитории — десятиклассники (по новой «нумерации»). Правда, у нас есть подозрение, что читатели-выпускники не очень активно откликнулись на нашу анкету (скорее всего, по причине занятости). Если так, то жаль — нам бы очень хотелось знать, какую еще помощь мы могли бы оказывать будущим абитуриентам. Вместе с тем довольно много откликов мы получили от школьников 5—7 классов, есть письма от четвероклассников и даже от... первоклассника Алеши Романова из Ярославля).

Конечно, за каждой анкетой — отдельный человек, со своими интересами, мнением, оценкой. Но из общей массы откликов складывается достаточно объективный анализ журнала и, как нам кажется, довольно объективный образ нашего читателя. Так что же нравится и что не нравится читателю в «Кванте»? Что, по его мнению, нужно изменить, что необходимо внести нового?

Круг интересов читателей охватывает все темы, которые мы считаем нашими: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика. Среди рубрик наибольшим спросом пользуется «Школа в «Кванте», потом идут «Задачник Кванта», и «Калейдоскоп», затем — «Варианты вступительных экзаменов» и «Математический кружок» и т. д.

Среди статей, напечатанных в журнале в 1989 году, наиболее интересными признаны:

«Пузыри в луже» (автор А. Митрофанов, № 6),
«XX лет спустя. Беседа с К. П. Феоктистовым» (№ 7),
«У попа была собака...» (С. Табачников, № 6),
«От нуля до декаллиона» (Н. Виленкин, № 3),
«Раз челнок, два челнок...» (В. Николаев, № 4),
«Криминальная геометрия, или Дело принципа» (Д. Фомин, № 8),
«Счастливые числа» (Р. Фейнман, № 7),
«Как индейцы бросают томагавк?» (В. Давыдов, № 11).

Лучшими обложками прошлого года большинство читателей назвали обложки номеров 9, 1 и 6. Очень много положительных откликов было на 2-ю страницу обложки номера 2 (репродукция картины С. Дали «Солнечный стол») и номера 6 («Арлекин» В. Вазарели).

Нас несколько озадачили встречающиеся в письмах довольно резкие отрицательные отзывы о рисунках в журнале. Многие пишут, что они «формальные, абстрактные». Конечно, мы не считаем оформление журнала идеальным, да и вообще это во многом дело вкуса. Но в одном и авторы, и художники, и редакция, как правило, сходятся: иллюстрации к статьям (те, что называются заставками) несут смысловую нагрузку, являются как бы художественным отображением со-

Из писем читателей

Уроки даже в специализированном физмат-классе слишком просты, чтобы для них можно было использовать ваши статьи. (10 кл., п. Краснореченск Дальнегорского р-на Приморского кр.)

Считаю, что этот журнал очень нужен учащимся школ, а также их учителям. Благодаря этому журналу в свое время закончил Красноярский филиал ЗФТШ при МФТИ, поступил на мех-мат. Самаркандского университета. (подписчик с 1972 года, математик-программист, преподаватель, г. Самарканд)

...все это для аспирантов, и не для школьников... В девяти случаях из десяти летит в макулатуру все, кроме вариантов. (учитель, г. Москва)

Избранные вопросы по элементарной математике и физике и приложение вопросов в задачах превращают журнал в энциклопедию для повседневной работы учителя в любом уголке нашей Родины. (учитель математики, физики и ИЗО, п. Якокут Алданского р-на Якутской АССР)

Не публиковать статей по информатике... Не публиковать фантастики. (9 кл., г. Тула)

Дорогой Квант! Пожалуйста, пиши побольше фантастических рассказов, желательно с космическими приключениями. (7 кл., г. Дербент Дагестанской АССР) держания. И мы вам советуем: прочитав статью, вернитесь к ее началу, вглядитесь в заставку, и, может быть, вы увидите ее новыми глазами.

Очень многие читатели жалуются на то, что журнал приходит с большим опозданием, некоторые подписчики в прошлом году получили не все номера. Нас это расстраивает, но, к сожалению, помочь вам в этом вопросе мы не можем, подобные срывы происходят не по нашей вине. Большая нагрузка, с которой работает Чеховский полиграфкомбинат, печатающий наш журнал, нередко приводит к срыву графика выпуска номеров; Министерство связи не всегда обеспечивает своевременную доставку журнала подписчикам. Мы неоднократно взывали к соответствующим инстанциям, однако ситуация не меняется. Остается лишь надеяться, что со временем она улучшится.

Судя по анкетам, круг вопросов, интересующих наших читателей, необычайно широк. Публиковать больше статей, рассказывающих о современных достижениях науки, о сегодняшних проблемах физики, математики и информатики, о замечательных ученых; шире освещать работу ВАКО; печатать научную фантастику; давать больше материалов для учащихся 5—8 классов (в частности, в «Школе в «Кванте» и в «Кванте» для младших школьников»); помещать в журнале кроссворды, головоломки, занимательные материалы; рассказывать о научных обществах учащихся;... — вот далеко не полный перечень пожеланий, высказанных читателями.

Надо сказать, что многие из этих предложений нами уже учтены. Так, мы планируем с нового учебного года ввести раздел, который пока условно называем «Для самых младших школьников». В нем будут помещаться занимательные задачи, требующие для решения сообразительности, смекалки и «житейской» логики, небольшие заметки, в самой доступной форме рассказывающие про интересные вопросы математики и физики. Мы будем продолжать раздел «Игры и головоломки» и надеемся на ваше активное участие (с интересом ждем, какие складные конструкции пришлют

Из писем читателей

Неужели нельзя найти хороших художников, которые будут делать красивые рисунки! (11 кл., г. Днепропетровск)

Хочу поблагодарить художников за иллюстрации; до чего остроумно, мастерски и мило оживляют они страницы журнала. (студентка художественно-графического факультета Удмуртского ГУ, г. Ижевск)

Журнал, по-моему, скучен, и задачи не очень интересны... Я надеялась на лучшее. (10 кл., г. Тбилиси)

Меня журнал вполне устраивает, всегда есть материал для раздумий. (9 кл., г. Аркалык Кустанайской обл. Казахской ССР)

В последние годы слишком большое внимание приобрел раздел, связанный с программированием... тем более что во многих школах страны нет вычислительных машин. (подписчик с 1979 года, г. Верхняя Тура Свердловской обл.)

АНКЕТА 3 — 90

Сегодня мы начинаем новый раунд «прямых переговоров» с читателем.
Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 3 — 90».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______________________________

Ваша профессия (если Вы работаете): ______________________________

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______________________________

____

3. Какие статьи и задачи из номеров 1—3 (номер укажите) Вам понравились? ______________________________

____

____

читатели на конкурс, объявленный в этом номере журнала; см. 4-ю страницу обложки). Мы планируем регулярно печатать фантастические рассказы, и не только с космическими приключениями. Так, в майском номере начнется публикация рассказа американского писателя и педагога Д. Киза «Цветы для Элджернона». В следующем номере мы открываем новый цикл материалов, который можно условно назвать «Письма о физике». Это будут статьи, написанные учеными, физиками-профессионалами, в которых, мы надеемся, будут ответы на «глобальные» вопросы, интересующие многих наших читателей: в каких направлениях развивается современная физика? что такое современный физический эксперимент? чем занимаются ученые в физических институтах? как стать физиком?... В этом году (скорее всего, с начала учебного года) будет расширен раздел «Избранные школьные задачи» — там появятся задачи по физике. Больше внимания мы постараемся уделять вопросам астрономии, космонавтики...

Как видите, планы у нас обширные. Насколько удачна будет их реализация — покажут будущие номера. А мы сможем узнать об этом из ваших ответов на вопросы анкеты, которая, как и прежде, будет помещаться в каждом последнем номере квартала (в 3, 6, 9 и 12). Очень надеемся на обратную связь!

Напоминаем, что подписаться на наш журнал можно, начиная с любого номера (но — до первого числа предподписного месяца). Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 45 копеек.

Из писем читателей

Вследствие того, что по программированию очень мало литературы и ее очень трудно достать, полезно было бы печатать учебные статьи на разных языках в отделе «Информатика и программирование». (11 кл., г. Москва)

Давайте больше нужных для школы статей, не занимайте страницы журнала разными головоломками и несерьезными материалами». (8 кл. г. Курган)

Хочу, чтобы в каждом номере хоть одна страничка была смешной и развлекательной. (5 кл., г. Каменка Пензенской обл.)

АНКЕТА 3 — 90

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?
Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 1—3 Вам больше всего понравилась?
Какая иллюстрация из номеров 1—3 (укажите номер и страницу) Вам больше всего понравилась?

6. Ваши общие замечания и пожелания:

Ответы, указания, решения

[illegible]сибирский государственный [illegible]ерситет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. 8 ч, 16 ч.

2. $\operatorname{arctg}\dfrac{5\pm\sqrt{46}}{7}+\pi n,\ n\in Z$. **Указание.** Выполните замену $y=\operatorname{tg}x$.

3. $6\sqrt{55}$. **Указание.** Так как $\angle PAE=\angle APE$, то $AE=PE$. Аналогично, $DF=QF$. Следовательно, данная трапеция — равнобедренная.

4. -4, -8. **Указание.** Минимум функции $y=|a-2x|-|x+3|$ достигается в точке $x=\dfrac{a}{2}$, при этом $y=-\left|\dfrac{a}{2}+3\right|$. Исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $y=-1$.

5. 1:1. **Указание.** Пусть E и F — точки пересечения данной плоскости с AB и $A'B$ соответственно; BO — перпендикуляр к плоскости $CB'E$. Треугольник BFO — прямоугольный, причем $\angle BFO=60°$. Пусть $BE=x$. Тогда $BF=\dfrac{x\sqrt{2}}{x+1}$, $BO=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$. Из равенства $BO=BF\cdot\sin 60°$ получаем уравнение относительно x.

Вариант 2

1. 67 212, 67 716. **Указание.** Число делится на 36, если оно делится на 4 и на 9. Из признака делимости на 9 следует, что $14+m+n$ делится на 9, а число $10+n$ делится на 4.

2. $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\quad n\in Z$. **Указание.** Уравнение равносильно системе $2\sin^2x=5\cos x-1$, $\sin x\geqslant 0$.

3. $10\sqrt{3}$. **Указание.** Пусть L, M, N—точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами AB, BC и AC соответственно. Тогда $BC=2\cdot\dfrac{7}{\sqrt{3}}\cos 60°=7$, $AL=AK=\sqrt{3}\operatorname{ctg}30°=3$. Полупериметр треугольника ABC равен

$$\frac{AL+BL+BM+MC+CK+KA}{2}=AL+BC=10.$$

4. $6<x<8$, $x\neq 2\pi$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi$. **Указание.** Данное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}x^2-14x+73>0,\\ x^2-14x+73<32,\\ x\neq k\pi,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ k,n\in Z.\end{cases}$$

откуда $6<x<8$, $x\neq 2\pi$, $x\neq\dfrac{\pi}{2}+2\pi$.

5. $\dfrac{2}{\sqrt{41}}$. **Указание.** Прямая, параллельная BM и проходящая через точку A, пересекает продолжения сторон CB и CD в точках L и K соответственно. Прямая LN пересекает ребро BB' в точке P, отрезок BQ перпендикулярен KL. Высота BH прямоугольного треугольника PBQ перпендикулярна прямым AN и BM. Находим $PB=\dfrac{1}{3}$, $BQ=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, откуда $BH=\dfrac{2}{\sqrt{41}}$.

Вариант 3

1. 3 кг, 7 кг.

2. $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$.

3. $8+2\sqrt{7}$. **Указание.** В треугольнике BOC, где O — точка пересечения медиан, последовательно находим $BO=\dfrac{2}{3}BM$, $CO=\dfrac{2}{3}CN$. Далее, $OH'=\dfrac{1}{3}AH$, после чего находим отрезки BH', CH' и сторону BC.

4. $4\leqslant x<29$. **Указание.** Выполните замену $y=\sqrt{x-4}$, после чего решите относительно y полученное неравенство.

5. $\operatorname{arctg}\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. **Указание.** Пусть точка N задана условием $MN\parallel BC$, $CN\parallel BM$, K — проекция точки N на плоскость $ABCD$, L — проекция точки K на прямую AC. Искомый угол равен углу KNL и вычисляется по катетам $KN=1$, $KL=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Физика

Вариант 1

1. При отсутствии внешних сил имеем: $-ma_1+Ma+ma_2=0$, откуда

$$a=(a_1-a_2)m/M.$$

2. После соединения на внешней поверхности каждого диска окажется один и тот же заряд $q=(q_1-q_2)/2$, распределенный с поверхностной плотностью $\sigma=(q_1-q_2)/(2\pi R^2)$. На соприкасающихся поверхностях зарядов не будет. После небольшого разведения распределение зарядов практически не изменится. Напряженность поля, создаваемая одним диском,

$$E=\sigma/(2\varepsilon_0)=(q_1-q_2)/(4\pi\varepsilon_0R^2).$$

Поле одного диска действует на заряд другого с силой

$$F=qE=(q_1-q_2)^2/(8\pi\varepsilon_0R^2).$$

3. Согласно закону Фарадея, из-за изменения магнитного потока через всю площадь прямоугольника возникает ЭДС $\mathscr{E}=\Delta\Phi/\Delta t=\alpha ab$. По закону Ома $\mathscr{E}=IR=I\cdot 2\rho(a+b)$, где ρ — сопротивление единицы длины провода. Отсюда

$$I=\frac{\alpha ab}{2\rho(a+b)}.$$

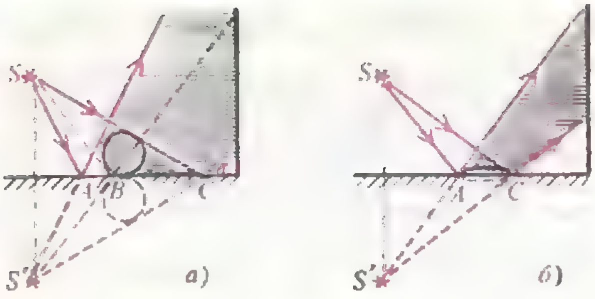


Рис. 1.

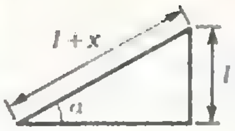


Рис. 2.

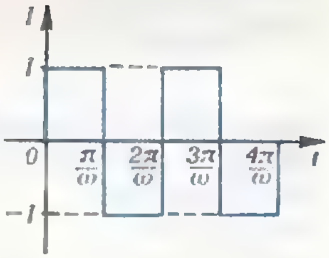


Рис. 3.

В контуре, образуемом вольтметром и участком провода с сопротивлением $R_1=\rho(2c+a)$, создается ЭДС $\mathscr{E}_1=\alpha ac$. По закону Ома $\mathscr{E}_1=U+IR_1$. Отсюда показание вольтметра

$$U=\mathscr{E}_1-IR_1=\frac{\alpha a^2(2c-b)}{2(a+b)}.$$

4. Из закона Менделеева—Клапейрона имеем $\rho=pM/(RT)$. Оценивая грубо $M\sim M_{CO_2}\sim 40\cdot 10^{-3}$ кг/моль, $p\sim 10^5$ Па, $R\approx 8$ Дж/(моль·К), $T\sim 10^3$ К, получаем

$$\rho\sim 0{,}5 \text{ кг/м}^3 \lesssim \rho_{\text{возд}}.$$

5. Шарик стоит на пути AB (рис. 1, *а*) части светового потока, отраженного от зеркала, создавая при этом тень на экране. Вторая тень получается из-за того, что шарик загораживает от источника часть зеркала BC, куда свет не попадает и соответственно не отражается на экран. Во втором случае (рис. 1, *б*) свет на экран отражает все зеркало, кроме участка AC, занятого тонкой шайбой.

Вариант 2

1. Плавая, кубик вытесняет массу жидкости $\rho S\Delta h$, равную собственной массе $\rho_1 a^3$. Отсюда

$$\Delta h=\rho_1 a^3/(\rho S).$$

2. По второму закону Ньютона

$$mv^2/l=T-mg\cos\alpha,$$

где T — натяжение нити в момент сдвига бруска, а v — скорость груза; по закону сохранения энергии

$$mv^2/2=mgl\cos\alpha.$$

Отсюда

$$T=3mg\cos\alpha.$$

Сдвиг получается при условии

$$T\sin\alpha\geqslant\mu(Mg+T\cos\alpha),$$

откуда

$$M=\frac{3m}{\mu}\cos\alpha(\mu\sin\alpha-\cos\alpha) \text{ при } \mu>\operatorname{tg}\alpha.$$

3. Используя принцип суперпозиции, легко найти связь между значениями заряда на кольце (или на сфере) и потенциала в его центре:

$$\varphi_0=k\left(\frac{\Delta q_1}{R}+\frac{\Delta q_2}{R}+\ldots+\frac{\Delta q_N}{R}\right),$$

где R — радиус, а $\Delta q_1, \ldots, \Delta q_N$ — доли зарядов, на которые разбит весь заряд так, чтобы для каждого участка, занятого долей заряда, можно было использовать выражение потенциала точечного заряда $\Delta\varphi=k\Delta q/R$. Отсюда заряд на кольце

$$q=\varphi_0 R/k.$$

В заземленном проводящем шаре заряд, как известно, расположен на поверхности, напряженность поля внутри шара равна нулю, а потенциал всюду одинаков и равен нулю, в том числе — и в центре шара. Суммируя вклады от распределенных по кольцу и по шару зарядов, получаем

$$0=k\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2}}+k\frac{Q}{b},$$

откуда находим искомый заряд шара

$$Q=-\varphi_0\frac{ab}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+b^2}}.$$

4. Кинетическая энергия молекулы водорода $mv^2/2=5/2kT$, т. е. квадраты скоростей молекул, находящихся при одинаковой температуре, обратно пропорциональны их массам. Таким образом, $v_{H_2}\sim v_{\text{возд}}/\sqrt{m/M}\sim 300\sqrt{14}$ м/с ~ 1200 м/с. (Скорость молекул воздуха принята близкой к скорости звука.)

5. Главный эффект, не дающий свету уйти через боковые поверхности стержня,— полное внутреннее отражение, превращающее стержень в световод. Свет, попавший в стержень, в значительной доле выходит через торец у экрана и создает на нем яркое пятно.

Вариант 3

1. Искомая работа

$$A=p_2(V_3-V_2)=\frac{m}{M}R(T-T/n).$$

2. Пусть удлинение пружины к моменту отрыва тела равно x. Тогда (рис. 2) $\sin\alpha=l/(l+x)$. В момент отрыва сила тяжести mg уравновешивается вертикальной составляющей силы натяжения пружины $kx\sin\alpha$, откуда

$$x=mgl/(kl-mg).$$

По закону сохранения энергии

$$mv^2/2=kx^2/2.$$

Отсюда находим

$$v=x\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{mgl}{kl-mg}\sqrt{\frac{k}{m}} \text{ при } kl>mg.$$

3. Обкладки конденсатора закорочены, значит, внутри поле равно нулю. Поэтому на обкладках должны индуцироваться заряды $\pm q$, создающие поле, точно компенсирующее внутри конденсатора внешнее поле, т. е. $q = \sigma S = E\varepsilon_0 S$. Площадь обкладок из-за вращения полудисков меняется. За время Δt прирост площади $\Delta S = r^2\Delta\alpha/2 = r^2\omega\Delta t/2$. Отсюда ток

$$I = \Delta q/\Delta t = E\varepsilon_0\Delta S/\Delta t = \varepsilon_0 E r^2\omega/2.$$

График зависимости тока от времени (с учетом малости зазора) изображен на рисунке 3.

4. За время полета $t \sim l/v$ мяч опустится на глубину $h = gt^2/2 \sim (g/2)(l/v)^2$. В соответствии с правилом упругого отскока (когда угол падения равен углу отражения), если радиус, проведенный из центра опустившегося мяча в вершину прямого угла плиты, образует с вертикалью угол $\alpha \geqslant 45°$, то мяч преодолеет препятствие. В противном случае произойдет отскок назад. Таким образом, в критическом случае глубина опускания мяча $h = R(1 - 1/\sqrt{2}) \approx \approx 0{,}3R$. Отсюда

$$v \sim l\sqrt{g/(2h)} \sim 13 \text{ м/с при } R \approx 0{,}1 \text{ м}, \quad g = 10 \text{ м/с}^2,\ l = 1 \text{ м}.$$

5. Теплопроводность металла много выше, чем пенопласта. Это легко почувствовать, взяв в руки кусок металла и пенопласта: металл кажется холодным (хорошо отводит тепло), а пенопласт — теплым (тепло отводится плохо). В тряпке, прикоснувшейся к промерзшему металлу, вода сразу же замерзает, и тряпка прилипает к нему. А через пенопласт отбор тепла от тряпки практически не происходит, и она не примораживается.

[redacted]овский авиационный институт
Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. 16.

2. $\dfrac{\pi(4n+1)}{4}$, $\pi k - \operatorname{arctg} 2$, $k, n \in Z$.

3. $18, 9\sqrt{2}$. Указание. Пусть h_a и h_b — высоты параллелограмма, опущенные на стороны a и b соответственно. Тогда $S = ab\sin\alpha = \dfrac{S}{h_a}\cdot\dfrac{S}{h_b}\sin\alpha$, откуда $S = \dfrac{h_a h_b}{\sin\alpha}$, т. е. $S = \dfrac{9}{\sin\alpha}$. Из условия следует, что $9\sqrt{2} \leqslant S \leqslant 18$.

4. $\left(-\dfrac{1}{5};\ 0\right) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{7}\right) \cup \left(\dfrac{1}{7};\ \dfrac{2}{7}\right) \cup \left[\dfrac{19}{49};\ \infty\right]$.

Указание. Неравенство равносильно такому: $\log_{(7x-1)^2}(5x+1) \leqslant 1$. В свою очередь, неравенство $\log_{a^2} b \leqslant 1$ равносильно системе $(a^2-1)(b-a^2) \leqslant 0$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, $b > 0$.

5. $0;\ -1;\ 1/3$. Указание. Прежде всего, $a = 0$ удовлетворяет условию. При $a \neq 0$ числа $T_n = \dfrac{2\pi n(a^2 + \sqrt{12})}{2a}$ и $S_k = \dfrac{\pi k(1 - 2a + \sqrt{108})}{2}$ при любых целых n и k являются периодами первой и второй функций соответственно. Для равенства $T_n = S_k$ необходимо, чтобы число

$$\frac{a(1-2a+\sqrt{108})}{2(a^2+\sqrt{12})} = \frac{a(a^2(1-2a)-36) + 2a(3a^2+2a-1)\sqrt{3}}{2(a^4-12)}$$

было рациональным. А это возможно лишь при таких рациональных a, для которых $a(3a^2+2a-1) = 0$.

6. $\dfrac{\pi\sqrt{3}}{32}$. Указание. Пусть $KLMN$ — равнобедренная трапеция, в которую вписано основание конуса (рис. 4), причем $AB = 1$. Тогда $MN = 3/4$, а высота FO трапеции равна $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Проведем сечение через высоту SO и апофему SE пирамиды $SABCD$ (рис. 5). Из подобия треугольников FEG и SEO находим $EG = 1/8$. По теореме Пифагора $FG = \dfrac{\sqrt{39}}{8}$, а затем и $SO = \dfrac{\sqrt{39}}{2}$. Далее, из подобия треугольников FGO и PQO находим высоту конуса $PQ = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Вариант 2

1. $y'_{\min} = y'(-2) = y'(2) = -3$.

2. $a + \dfrac{1}{2}$. Указание. $a = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{\sin 2\alpha + 1}{2}$.

3. $\left(0;\ \dfrac{1}{2}\right] \cup (1;\ \sqrt{2}] \cup (2;\ \infty)$. Указание. Выполните замену $y = \log_2 x$.

4. 75°. Указание. Из условия следует, что трапеция $ABCD$ и треугольник ADE (рис. 6) —

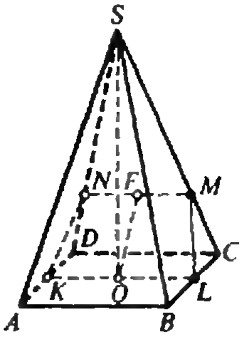


Рис. 4.

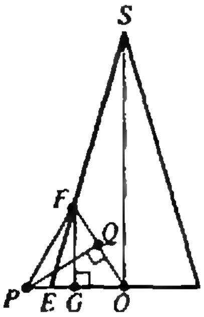


Рис. 5.

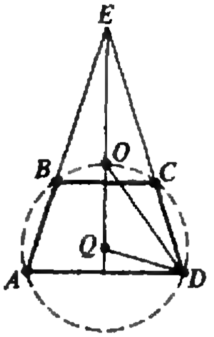


Рис. 6.

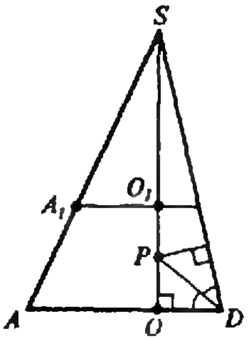


Рис. 7.

равнобедренные. Пусть O и Q — центры окружностей, описанных около треугольника AED и трапеции $ABCD$ соответственно. Тогда $\angle QOD = 30^\circ$, а $\angle DEQ = 15^\circ$.

5. 10. Указание. Пусть $y = x-5$, $z = \sqrt{45-2x}$. Тогда

$$\begin{cases} y^2 = 35-2z, \\ z^2 = 35-2y. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, приходим к соотношению $(y-z)(y+z-2)=0$. Дальнейшее ясно.

6. $16\pi^2q^2/27$. Указание. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту SO и апофему SD грани SBC (рис. 7). Пусть P — центр вписанной сферы, $OD=1$, $\angle SDO = \alpha$. Тогда $OP = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi q}}$, но $SO = \operatorname{tg}\alpha$, причем $SO_1 = SO - 2PO$. Искомое отношение поверхностей пирамид равно k^2, где $k = \frac{SO_1}{SO} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Физика

Вариант 1

1. Точка движется по отрезку прямой $y = -2x$, концы отрезка имеют координаты $(-4;\ 8)$ и $(4;\ -8)$.

2. $t = \frac{mv}{g(m+M)}\left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}\right)$; если $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, брусок не вернется в исходное положение.

3. $V(T_{\max}) = (p_2V_1 - p_1V_2)/(2(p_2-p_1)) = 20{,}1$ л.

4. $I(t) = 1{,}53\cdot10^{-11}/(0{,}1-20t)^2$; ток заряжает конденсатор.

5. $C_{\text{общ}} = (\sqrt{5}-1)C/2$.

6. Возможны два варианта: $l = Fd/(d-F)$ или $l = F(d-R)/(d-R-F)$.

Вариант 2

1. $\eta_{\max} = 50\ \%$.

2. $\mu < 2\rho hS/M$, где ρ — плотность воды.

3. $m = AM/(RT)$, где R — универсальная газовая постоянная.

4. $P_{\max} = \mathscr{E}I_{\max}/4 = 4{,}5$ Вт.

5. $I = vS/R$.

6. $F = W/c \approx 1{,}7\cdot 10^{-10}$ Н, где c — скорость света.

[redacted]ковский инженерно-физический институт

[redacted]тематика

Вариант 1

1. $\pi(2n+1)$, $2\pi n - \frac{\pi}{4}$, $n \in Z$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 x(\sin x + \cos x) = 0, \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

2. 832. Указание. Сумма всех трехзначных чисел, составленных из цифр k, l, m, равна $222(k+l+m)$. Из условия следует, что $12\frac{36}{222} < k+l+m < 13\frac{14}{222}$, т. е. $k+l+m = 13$. Пусть k — цифра сотен. При $k=9$ требуемого числа нет, а при $k=8$, $l=3$ и $m=2$ все условия выполняются.

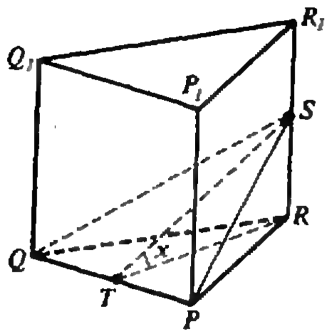


Рис. 8.

3. $3\pm\sqrt{35-3^c}$ при $c<3$; $3\pm\sqrt{35-3^c}$, $3\pm\sqrt{3^c-27}$ при $3\leqslant c\leqslant \log_3 31$; при $c>\log_3 31$ корней нет. Указание. Исходное уравнение равносильно уравнению $|x^2-6x+5| = 31-3^c$, из которого, в свою очередь, получаем совокупность из двух уравнений $x^2-6x+3^c-26=0$ и $x^2-6x+36-3^c=0$ при условии $c\leqslant\log_3 31$. Осталось решить полученные уравнения.

4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}q}{1+q}\operatorname{ctg}\varphi\right)$ при $0<q\leqslant\frac{1}{2}$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Указание. Пусть секущая плоскость пересекает боковое ребро $RR_1 = l$ в точке S (рис. 8). T — середина QP. Тогда $PQ = l\operatorname{tg}\varphi$, $RT = l\operatorname{tg}\varphi\frac{\sqrt{3}}{2}$, $V = V_{SPQR} = \frac{1}{4}l^3\times\operatorname{tg}^3\varphi\cdot\operatorname{tg}x$, $V_1 = V_{PQRP_1Q_1R_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^3\operatorname{tg}^2\varphi$. Поскольку $\frac{V-V_1}{V_1} = \frac{1}{q}$, то после несложных преобразований приходим к уравнению

$$\frac{2\sqrt{3}q}{1+q}\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{tg}x,$$

откуда $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}q}{1+q}\operatorname{ctg}\varphi\right)$, причем задача имеет решение при $0<q\leqslant\frac{1}{2}$, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

Вариант 2

1. $\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$.

2. $15(30-q)$ при $10<q<\frac{58}{3}$.

3. $[3;\ 5)$ при $b=3$, $\frac{(b+3)}{2}$ при $3<b<7$. При остальных значениях b решений нет.

4. $\frac{8d^2\sqrt{3}\sin\beta}{1+3\cos^2\beta}$.

[redacted]ковский институт радиотехники, электро[redacted]и и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $(1{,}4;\ 0)$, $(2;\ 1)$.

2. $\pi+2\pi k$, $[\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5}{6}\pi+2\pi k]$, $k\in Z$.

3. -1.

4. 2:5. Указание. Площади треугольников с одинаковыми высотами и разными основаниями относятся как длины оснований.

5. При $2\cdot 3^{b}<a<\sqrt{2\pi(\pi-2)}$ системы имеют по 4 решения. Указание. Воспользуйтесь графической интерпретацией решений системы уравнений.

Вариант 2

1. $(2;\ 3)$, $\left(\frac{23}{4};\ -\frac{9}{2}\right)$.

2. $\frac{\pi}{2}k$, $\frac{1}{2}\left((-1)^{k}\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)+\pi k\right)$, $k\in Z$.

3. Указание. Ясно, что $AD=BD=CD$, а $BC=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$.

4. $(1-2\sqrt{2};\ -1[1\cup 1;\ 3]\cup(1+2\sqrt{2};\ 4)$.

5. $a\in\left[3;\ \frac{7}{2}\right]$. Указание. Уравнение является квадратным относительно $t=\frac{x^2}{x+1}$. Далее используйте расположение корней квадратных уравнений $x^2-t_1x-t_1=0$, $x^2-t_2x-t_2=0$.

Физика

1. $l=2\sqrt{(H-h)h}$; $h(l_{\max})=H/2$; $l_{\max}=H$.

2. $v_{\text{п}}=v_{\text{I}}=7900$ м/с; $v_{\text{з}}=v_{\text{I}}+v=8365$ м/с; $v_{\text{в}}=v_{\text{I}}-v=7435$ м/с; здесь $v_{\text{I}}=\sqrt{gR_{\text{З}}}=7900$ м/с — *первая космическая* скорость, $v=2\pi R_{\text{З}}/T=465$ м/с — линейная скорость точек экватора ($R_{\text{З}}=6,4\cdot10^{6}$ м — радиус Земли, $T=24$ ч — период обращения Земли вокруг собственной оси).

3. $M=13/5\ m$.

4. $h_{\max}=2mg/k$.

5. $t_2/t_1=\pi/2\sqrt{2}=1,1$.

6. $F_{\text{с}}=\frac{pM_2gV}{RT}-\left(\frac{pM_1V}{RT}+m\right)(g-a)=3,9\times$ $\times10^{2}$ Н; здесь $M_1=4\cdot10^{-3}$ кг/моль и $M_2=29\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярные массы гелия и воздуха соответственно, $R=8,31$ Дж/(моль$\times$$\times$К) — *универсальная газовая постоянная*.

7. $V_{\text{а}}=m_{\text{а}}RT/(M_{\text{а}}p_{\text{н}})=15,5$ л, где $R=8,31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая *постоянная*, $M_{\text{а}}=28\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса азота; $V'_{\text{в}}=m_{\text{в}}RT/(M_{\text{в}}p_{\text{н}})=31$ л, где $M_{\text{в}}=18\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды.

8. $t_{\max}/t_{\min}=n/\sqrt{n^2-1}=1,2$.

9. $q_{\max}=\frac{\varepsilon_0S}{ed}\left(\frac{hc}{\lambda}-A\right)=2,7\cdot10^{-11}$ Кл; здесь $\varepsilon_0=8,85\cdot10^{-12}$ Ф/м — *электрическая* постоянная, $h=6,62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot10^{8}$ м/с — скорость света.

10. $F_{\text{д}}=I\sqrt{2U/\gamma}=13,7\cdot10^{-7}$ Н.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. 3. 2. 6. 3. 0,8. 4. —3. 5. 4. 6. 400. 7. 2. 8. 24. 9. —4. 10. 3. 11. 360. 12. 3.

Физика

Вариант 1

1. $l_t=v_0t+at^2/2=47,8$ м, где $a=2(l-v_0(t_5-t_4))/(t_5^2-t_4^2)$ (здесь $t_4=4$ с, $t_5=5$ с).

2. $V_{\text{вн}}=m(2/\rho_{\text{в}}-1/\rho_{\text{ч}})=9,4\cdot10^{-3}$ м^3.

3. $T_{\text{Л}}=T_{\text{З}}\frac{R_{\text{Л}}}{R_{\text{З}}}\sqrt{\frac{M_{\text{З}}}{M_{\text{Л}}}}=2,4$ с.

4. $m_2=m_1(l-s)/s=120$ кг.

5. $\Delta t=(v^2-2gh)/(2c)=1,8$ К.

6. $\eta=(1-Q_2/Q_1)100\ \%=24\ \%$.

7. $C=\varepsilon_0\varepsilon S/(d_1+\varepsilon(d-d_1))=7,3\cdot10^{-9}$ Ф (здесь $\varepsilon_0=8,85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная); ответ: 7,3.

8. $U_2=\mathscr{E}-U_1(1+r/R_1)=0,21$ В.

9. $h=(2\pi mv\cos\alpha)/(eB)=0,2$ см.

10. $n=hc/(E\lambda)=1,5$ (здесь $c=3\cdot10^{8}$ м/с — скорость света в вакууме).

Вариант 2

1. $t_{\min}=v_0(\sin\alpha-\cos\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta)/g=7,3$ с.

2. $a=\sqrt{F_1^2+F_2^2}/m=1$ м/с^2.

3. $v=\sqrt{gh}=14$ м/с.

4. $V_{\text{л}}=V_{\text{а}}(\rho_{\text{а}}-\rho_{\text{в}})/(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{л}})=1,7$ м^3.

5. $T_2=T_1(1-n)V_2/(nV_1)=936$ К.

6. $v=\sqrt{2(c(T_{\text{пл}}-T)+\lambda-gh)}=272$ м/с.

7. $C_2/C_1=2\varepsilon/(\varepsilon+1)=1,33$.

8. $\tau_3=\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)=6$ мин.

9. $P=(nS\,\Delta B/\Delta t)^2/R=2,5$ мкВт.

10. $\beta=2\alpha=70°$.

«Квант» для младших школьников

(см. *«Квант»* № 2)

1. Пусть на дереве a веток. Тогда $3a+1=4(a-1)$. Отсюда $a=5$; веток на дереве 5, значит, птиц — 16.

2. Если номер оканчивается на 0, то, очевидно, единственным ответом будет номер 50—50. Если же номер *не оканчивается* на 0, то последние цифры его двузначных составляющих имеют одинаковую четность, а первые — разную. Поскольку сумма двух цифр одной четности не может быть равна сумме *четной* и нечетной цифр, счастливых номеров в таких двух смыслах не существует.

3. БАОБАБ=910919.

4. Нет. В первой последовательности все числа, кроме первого,— четные, а во второй — нечетные.

5. Заметим сначала, что у любой *пятиугольной* звезды сумма углов при синих вершинах равна 180°. Действительно (см. рис. 9),

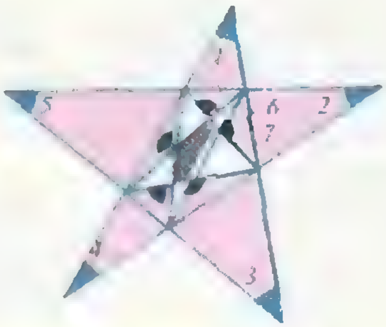


Рис. 9.

∠6=∠5+∠3 и ∠7=∠1+∠4 как внешние углы треугольников, но ∠6+∠7+∠2=180°, следовательно, ∠1+∠2+∠3+∠4+∠5=180°. А сумма углов при черных вершинах равна сумме внутренних углов пятиугольника и равна 540°. Во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°, следовательно, в пяти таких четырехугольниках эта сумма равна 900°. Но эта сумма равна сумме черных и синих углов, т. е. 540°+180°=720°. Значит, все красные четырехугольники не могут быть вписанными.

[redacted]ейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Оконное стекло можно представить как плоскопараллельную пластинку, состоящую из двух одинаковых призм (рис. 10), одна из которых разлагает, а другая — восстанавливает белый свет.
2. Сперва появится красная часть спектра, а за ней по мере нагревания — все остальные.
3. От синего, так как оно полнее, чем красное стекло, поглощает длинноволновое излучение и, следовательно, быстрее нагреется.
4. Желтую или черную.
5. Чем больше поглощательная способность тела, тем больше его излучательная способность.

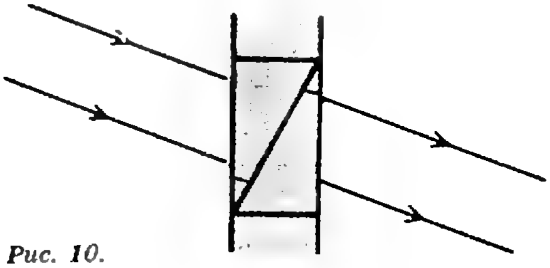


Рис. 10.

6. Поглощаются практически все лучи видимого света.
7. Спектр сжат в красной части и растянут в фиолетовой.
8. Спектр смещается в сторону красного цвета.
9. Синие: их излучение в большей степени рассеивается воздухом.
10. Днем рассеянный небом голубой свет добавляется к желтоватому свету самой Луны, и это смешение воспринимается глазом как белый свет.
11. Нет, для этого нужны излучения с более короткой длиной волны.
12. На декорации, покрытые люминофором, направляют ультрафиолетовые лучи.
13. Нельзя. Изменение знака зарядов не приведет к изменению частот излучения, соответствующих спектральным линиям.

Микроопыт

Свет в молоке рассеивается на очень малых частицах. Синяя компонента рассеивается сильнее красной, поэтому жидкость со стороны источника света или сбоку кажется синей. Если же смотреть на просвет, она становится желтой или красной.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов,
Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, М. Башмаков,
В. Белонучкин, В. Болтянский,
А. Боровой, Ю. Брук, В. Вавилов,
Н. Васильев, С. Воронин, Б. Гнеденко,
Н. Долбилин, В. Дубровский,
А. Земляков, А. Зильберман, С. Козел,
С. Кротов, Л. Кудрявцев, А. Леонович,
В. Лешковцев, С. Новиков, Т. Петрова,
М. Потапов, В. Разумовский, Н. Родина,
Н. Розов, А. Савин, Я. Смородинский,
А. Сосинский, В. Уроев, В. Фабрикант

Редакционный совет:
А. Балдин, С. Беляев, Е. Велихов,
И. Верченко, Б. Воздвиженский,
Г. Дорофеев, Н. Ермолаева,
Ю. Иванов, В. Кириллин, Г. Коткин,
Р. Кузьмин, А. Логунов, В. Можаев,
В. Орлов, Н. Патрикеева, Р. Сагдеев,
А. Стасенко, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Л. Кардасевич,
И. Клумова, Т. Петрова, С. Табачников,
В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов,
Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров,
И. Смирнова, Л. Тишков,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов
Художественный редактор Т. Макарова
Заведующая редакцией Л. Чернова
Корректор Н. Румянцева

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 21.12.89. Подписано к печати 12.02.90
Т-06718. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,93
Тираж 171 690 экз. Заказ 2885. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ИСТОРИЧЕСКИЙ МАТЧ

Этот матч можно назвать историческим, можно — сенсационным. 22 октября 1989 года в Нью-Йорке по инициативе американской фирмы «Эй-джи-эс» состоялся шахматный поединок из двух партий между двумя чемпионами мира — Г. Каспаровым (среди людей) и «Дип сот» (среди компьютеров).

«Дип сот» — Г. Каспаров
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. c3 e6 3. d4 d5. Сравнительно редкий вариант сицилианской защиты Каспаров сводит к французской защите. После 4. e5 с перестановкой ходов получалась система Нимцовича 1. e4 e6 2. d4 d5 3. e5 c5 4. c3, но «Дип сот» добровольно сходит с теоретической тропинки. **4. ed ed 5. Kf3 Cd6 6. Ce3.** Белые отказываются от размена на c5, создавая у противника классический «изолятор» d5.

6...c4 7. b3 cb 8. ab Ke7 9. Ka3 Kbc6 10. Kb5. Логичнее было закончить развитие и лишь затем решать, как поступать с этим конем. **10...Cb8 11. Cd3 Cf5.** Черные уже избавились от всех дебютных неудобств и теперь рассчитывают захватить инициативу.

12. c4 0—0 13. Лa4. Таким экстравагантным способом белые прикрывают поле b4 от появления на нем коня, но тот, кажется, туда и не собирался **13...Фd7 14. Kc3.** Наконец окольным путем конь компьютера занял человеческое место... **14...Cc7 15. C:f5 Ф:f5 16. Kh4 Фd7 17. 0—0 Лad8 18. Лe1.** Взяв под обстрел коня e7, белые косвенно защищают пешку d4. **18...Лfe8.** Все фигуры черных централизованы, и следующий ход машины вынужден. **19. c5 Ca5.** Начало стратегической операции, обеспечивающей черным заметный перевес. **20. Фd3 a6 21. h3 C:c3 22. Ф:c3 Kf5 23. K:f5 Ф:f5.** Интересно, как оценивала машина эту позицию. Черный конь явно превосходит слона, но учитывается ли этот позиционный фактор каким-нибудь числом, увеличивающим оценочную функцию для черных?

24. Лa2 Лe6 25. Лae2 Лde8 26. Фd2. Возможно 26. f3, 27. Kpf1 и 28. Cf2, стремясь к упрощениям. Но данная пешечная структура малопривлекательна для белых даже при размене всех тяжелых фигур.

26...f6 27. Фc3 h5 28. b4 Л8e7 29. Kph1 g5 30. Kpg1 g4 31. h4 Лe4 32. Фb2 Ka7 33. Фd2 Л4e6 34. Фc1 Kb5 35. Фd2 Ka3 36. Фd1 Kpf7 37. Фb3 Kc4 38. Kph2 Лe4 39. g3 Фf3 40. b5. Безуспешная попытка отвлечь силы черных на другой конец доски. **40...a5 41. c6 f5 42. cb.** Избегая красивого варианта: 42. b6 f4!! 43. c7 K:e3 44. Л:e3 Ф:f2+ 45. Kph1 Ф:e1+ 46. Л:e1 Л:e1+ 47. Kpg2 Л7e2×.

42...Л:b7 43. Kpg1 f4! 44. gf g3 45. Фd1 Лbe7 46. b6 gf 47. Л:f2 Ф:d1 48. Л:d1 Л:e3 49. Лg2 K:b6 50. Лg5 a4 51. Л:h5 a3 52. Лd2 Лe2. Белые сдались.

Г. Каспаров — «Дип сот»
Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. e4 Kc6 4. Kf3 Cg4 5. d5 Ke5 6. Kc3. В данной партии Каспаров применяет новинку уже на шестом ходу. **6...c6 7. Cf4 Kg6 8. Ce3 cd 9. ed Ke5 10. Фd4!** Белые заметно опередили соперника в развитии и теперь используют это обстоятельство для создания решающего перевеса. **10...K:f3+.** *После* 10...C:f3 11. Ф:e5 Cg4 12. C:c4 черные могут сгореть, не успев ввести в бой свои фигуры. **11. gf C:f3 12. C:c4!** Промежуточный ход (12...C:h1 13. Cb5+), позволяющий белым создать неотразимую атаку. **12...Фd6 13. Kb5 Фf6 14. Фc5 Фb6 15. Фa3 e6.** Рассчитав варианты, «Дип сот» наверняка обнаружил, что этот ход пешкой ведет к потере ферзя, но, видно, все остальные пути привели машину к еще меньшему значению оценочной функции.

16. Kc7+ Ф:c7 17. Cb5+ Фc6 18. C:c6+bc 19. Cc5 C:c5 20. Ф:f3 Cb4+ 21. Kpe2 cd 22. Фg4 Ce7 23. Лhc1. Материальное соотношение сил вполне терпимо для черных, но белые ладьи по единственной открытой линии «c» быстро проникают в неприятельский лагерь, что и решает дело. **23...Kpf8 24. Лc7 Cd6 25. Лb7 Kf6 26. Фa4 a5 27. Лc1 h6 28. Лc6 Ke8 29. b4! C:h2 30. ba Kpg8 31. Фb4 Cd6.** На пару ходов затягивает сопротивление, грозило 32. Фe7.

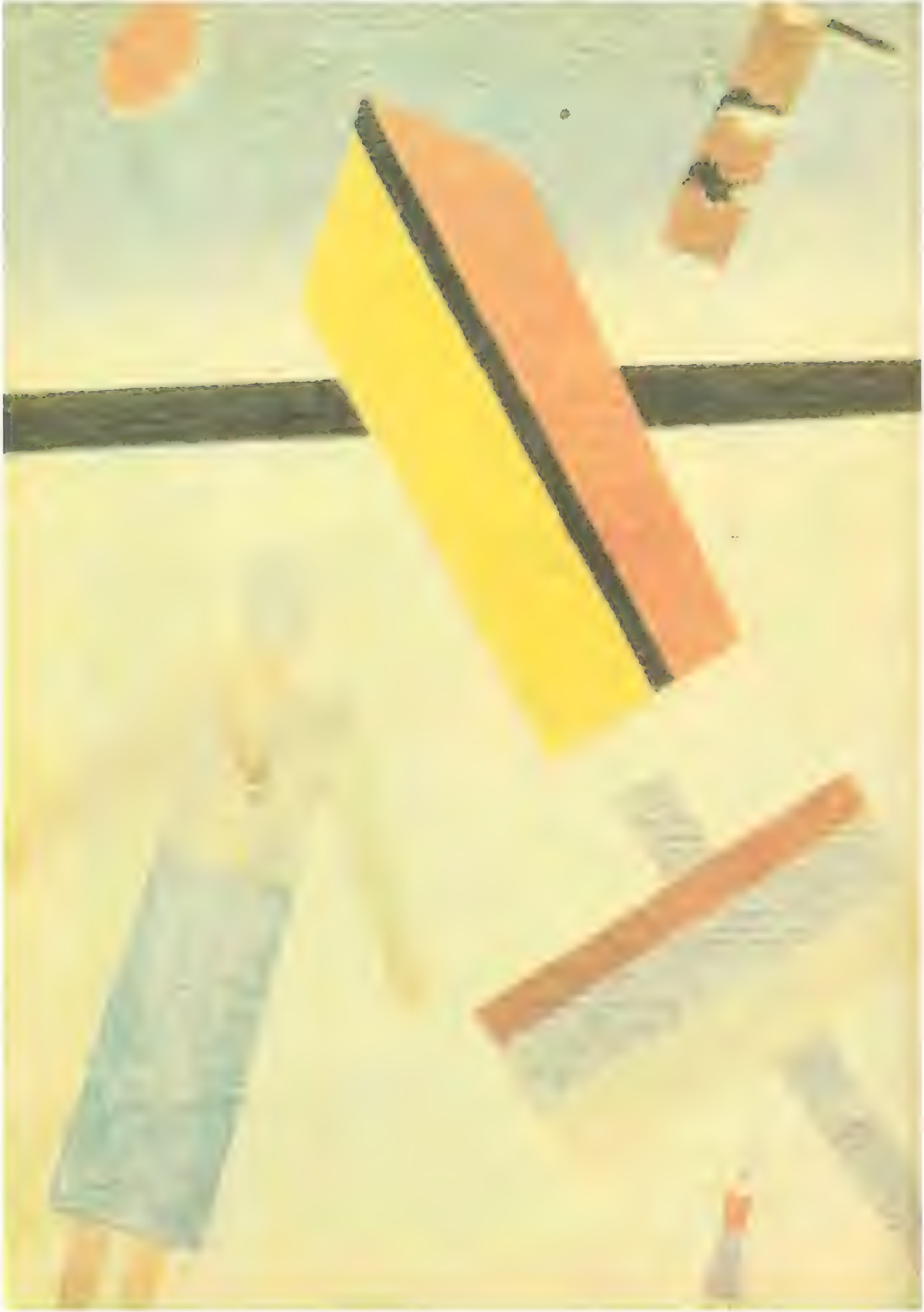
32. Л:d6 K:d6 33. Лb8+ Л:b8 34. Ф:b8+Kph7 35. Ф:d6 Лc8 36. a4 Лc4 37. Фd7. Черные сдались.

Если в первой партии Каспаров переиграл машину в позиционной борьбе, то во второй продемонстрировал явное превосходство в тактике.

В беседе с журналистами Г. Каспаров заметил, что его партнер не делал грубых *ошибок*, хотя и часто избирал не лучшие продолжения. Рейтинг машины, по его мнению, колеблется в пределах 2450—2500, то есть соответствует уровню среднего гроссмейстера.

Есть ли у машины шансы когда-нибудь справиться с чемпионом мира? Вот что сказал по этому поводу Гарри Каспаров после матча: «Шахматы шире, чем простой расчет, шире даже логики. Они требуют фантазии и интуиции. Это не только передвижение фигур, это — психология, это — драка, это — борьба. Не могу представить себе, что может существовать нечто более сильное, чем человеческий ум. Если компьютер сможет превзойти в шахматах лучшего из лучших, это будет означать, что ЭВМ в состоянии сочинять самую лучшую музыку, писать самые лучшие книги. Не могу в это поверить. Если будет создан компьютер с рейтингом 2800, то есть равным моему, я сам сочту своим долгом вызвать его на матч, чтобы защитить человеческую расу».

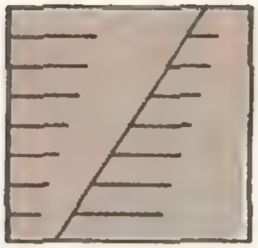
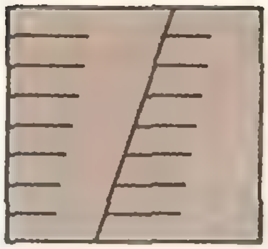
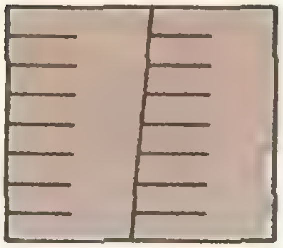
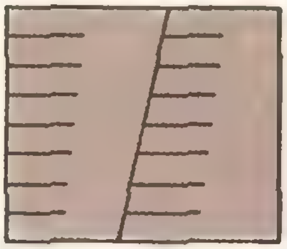
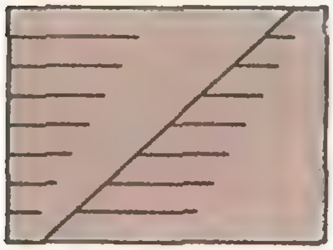
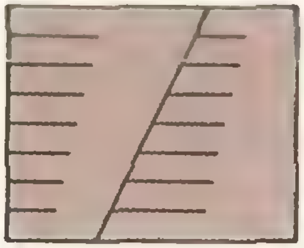
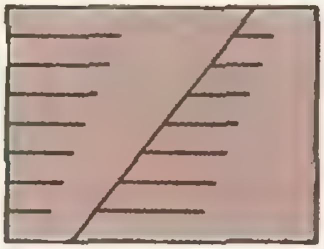
Е. Гик



45 коп.

Индекс 70465

В прошлом году мы познакомили читателей с несколькими моделями многогранников, которые изготавливались по классическим законам японского искусства оригами — т. е. из одного квадратного листа бумаги без ножниц и клея (см. 4-ю с. обложки «Кванта» №№ 7, 8, 9). Если ослабить эти ограничения, то можно моделировать гораздо более замысловатые фигуры и даже кривые поверхности. На этой странице показано, как сделать модель «гиперболического параболоида», общий вид которой представлен на 1-й с. обложки. Это седловидная поверхность, образуемая, как ни удивительно, двумя пересекающимися семействами прямых. Более того, решетка образующих прямых подвижна, причем можно шарнирно скрепить прямые друг с другом в их точках пересечения так, чтобы в этих точках они могли вращаться, но не скользить, и все равно решетка останется изгибаемой. Это замечательное свойство хорошо видно на нашей модели: ее можно складывать и расправлять, а если вклеить ее внутрь картонной обложки, получится красивая раскладная игрушка. Подробнее о гиперболическом параболоиде можно прочитать в книге Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия» (М., «Наука», 1981, с. 23). Наша модель собирается из 7 пар прямоугольных трапеций 4-х видов с надрезами, параллельными основаниям; у двух парных трапеций надрезаются противоположные стороны. Можно придумать множество подобных складных конструкций, и мы объявляем конкурс среди читателей на самую интересную. Победители получат призы «Кванта» и оригинальные головоломки. Работы присылайте до 1 августа 1990 г. На конверте напишите: «Складная конструкция».

Д. К.

НОМЕР
4

Квант

4 1990

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва. «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *М. Каганов.* Письма о физике
6 *А. Белов, М. Сапир.* «И возвращается ветер...», или Периодичность в математике
11 *А. Веденов, О. Иванов.* С какой скоростью растет зеленый лист?
19 *В. Вайнин, Г. Горелик.* Пятно Пауссона и Шерлок Холмс
23 *Ю. Соловьев.* Инверсоры

Задачник «Кванта»

30 Задачи М1216—М1220, Ф1223—Ф1227
31 Решение задач М1191—М1195, Ф1203—Ф1207
39 Список читателей, приславших правильные решения
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *А. Савин.* Проволока, магнитофон, пишущая машинка и математика

Лаборатория «Кванта»

47 *В. Майер.* Зеленый туман

Р — значит ракета

52 *В. Николаев.* Космический полет — это так просто!?..

Математический кружок

57 *О. Ижболдин, Л. Курляндчик.* Неравенство Иенсена

Информация

62 Заочная физическая школа при МГУ

Практикум абитуриента

64 *В. Можаев.* Переходные процессы в электрических цепях
71 **Варианты вступительных экзаменов**
75 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(42)*

Наша обложка

1 *Наверное, каждому из вас хотя бы однажды довелось наблюдать разноцветные венцы вокруг Луны или Солнца, на оконном стекле или над чашкой чая. Как возникают такие венцы? Можно ли их получить в лабораторных условиях? На эти и многие другие аналогичные вопросы вы найдете ответы в статье «Зеленый туман».*
2 *«Ракета» — так назвал свой знаменитый паровоз Р. Стефенсон. Важный элемент конструкции — устройство, преобразующее поступательное движение поршня во вращательное движение колеса. О математике подобных устройств вы можете прочитать в статье «Инверсоры».*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Новая головоломка: «часы Рубика».*

© Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1990

ПИСЬМА О ФИЗИКЕ

Редакция получает массу писем с самыми разными вопросами. Мы стараемся отвечать каждому нашему читателю. Но есть такие, можно сказать, глобальные вопросы, на которые трудно ответить в индивидуальном письме: в каких направлениях развивается современная физика? чем занимаются ученые в физических институтах? как стать физиком?..

В ответ на такие письма мы начинаем сегодня новый цикл публикаций, который можно условно назвать «Письма о физике». Сколько будет этих писем — покажет будущее. Физика необыкновенно многолика, и почти не существует ученых, одинаково хорошо разбирающихся во всех ее областях. А возможно, их и вовсе нет. Физик, случайно заглянувший на «не свою» конференцию, как правило, не много понимает. Поэтому письма нашим читателям будут писать разные авторы. И мы постараемся привлекать настоящих профессионалов, чтобы вы получали ответы, что называется, из первых рук.

Автор первого письма — известный физик-теоретик, крупный специалист в области физики твердого тела, доктор физико-математических наук, профессор Моисей Исаакович Каганов. Предоставляем ему слово.

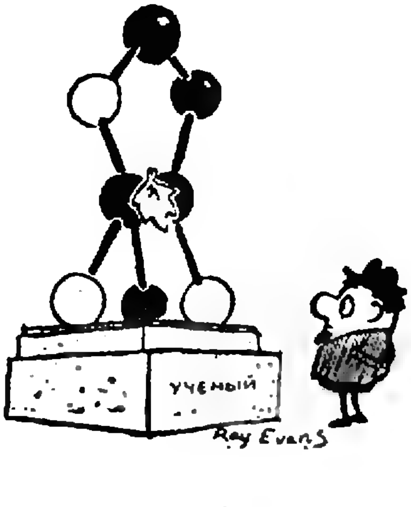
Дорогой коллега!

Думаю, я могу так обратиться к читателю. Журнал «Квант», как правило, читают те, кто решил стать физиком или математиком. Я обращаюсь к тем, кто в будущем видит себя физиком.

Не знаю, занимался ли кто-нибудь анализом выбора специальности. Конечно, каждый взрослый человек помнит, как складывалась его жизнь и почему он стал физиком, или инженером, или рабочим... Помню и я. В нашей семье не было представителей точных наук. Но было много книг. И я рано начал читать научно-популярную литературу по физике. Теперь мне ясно: понимал я мало (особенно при первом знакомстве с новой — тогда — квантовой физикой). Но было ощущение какого-то удивительного приключения, участие в котором принимают Резерфорд, Бор, Эйнштейн, Гейзенберг, Шредингер...— переживание отводило особое место «суперзвездам», актеры второго ряда уже не оставляли следа. И если в приключенческом фильме восхищает умение вскочить на коня с места или, мгновенно вытащив пистолет, метко поразить противника, то в научных приключениях меня восхищала удивительная сила ума, способность выйти за рамки старых теорий, построить новую систему представлений, адекватную новым экспериментальным данным. Надо думать, книги, которые я читал, были хорошо написаны, потому что я понял (а возможно, мне сегодня кажется, что я тогда понял): замена фундаментальной теории, прекрасно описывающей огромную совокупность фактов, новой теорией — только потому, что старая с чем-то не справляется,— мучительно трудное дело. Ведь в наследство остаются все ранее известные факты, и они по-прежнему требуют объяснения...

Вот какие проблемы волновали меня, когда я принимал решение стать физиком.

Что такое физика, чем реально занимаются физики — об этом в книгах, которые я читал, ничего не говорилось. Иногда упоминались названия научных учреждений, в которых работали «суперзвезды»: Мондовская лаборатория в Кембридже, созданный для Бора институт в Копенгагене... Конечно, я знал, что в Советском Союзе есть научные институты, в ко-



На выставке современной скульптуры.

торых работают физики, знал, что есть физические или физико-механические, физико-математические факультеты, где обучают будущих физиков. Чему и как — об этом никогда не говорилось...

Обо всем этом я думал, решив рассказать будущим физикам, что из себя представляет наука, которой они собираются себя посвятить. Рассказать, по возможности, без романтики, без преувеличений, но не пытаясь выглядеть безразличным объективным комментатором. Выбрав специальность, я в ней не только не разочаровался, но по-настоящему полюбил ее. И свою любовь не собираюсь скрывать.

* * *

Официальное определение физики таково: «...Наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы ее движения» (БСЭ, т. 27, с. 337). Конечно, чтобы наполнить это определение конкретным содержанием, надо дополнить его, указав, что значит «простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности» явления, да и неплохо бы объяснить, что́ движется, ведь материя — понятие столь всеобъемлющее...

Физика воспринимается всеми (и самими физиками, и учеными других специальностей) как фундаментальная наука, лежащая в основе всех других естественно-научных дисциплин.*) А ее конкретное содержание зависит от уровня наших знаний. Сегодня объектами исследовательской деятельности, которую принято относить к физике, являются и мельчайшие частицы вещества (вплоть до кварков), и конденсированные тела, и удаленные от нас на тысячи световых лет таинственные квазары, и — самое удивительное — Мир в целом, в его развитии от момента Большого взрыва до современности; физика изучает и объекты, которые на сегодняшний день она предполагает бесструктурными (электроны, мюоны, нейтрино...), и наиболее сложно организованную материю — мозг, в деятельности которого именно физики обнаружили много не известных биологам фактов, а главное, привнесли в исследование свои специфические физические методы...

Именно разнообразие объектов исследования привело к фактическому разделению физики на сравнительно разобщенные науки, каждая из которых имеет набор основных представлений и моделей, свой, иногда очень изощренный, математический аппарат, свои апробированные практикой экспериментальные методики. И все же, при всем многообразии объектов исследования, всех физиков можно разделить на два класса (отряда, семейства — применимо любое из подобных слов):

физиков-теоретиков и
физиков-экспериментаторов.

Что делают физики-экспериментаторы, наверное, более или менее понятно. Но это письмо — о физиках-теоретиках.

Физики-теоретики изучают Природу с помощью математических методов исследования. Эйнштейн считал величайшей загадкой то, что математика — создание человеческого ума — применима при описании явлений Природы. Не углубляясь в размышления над этой загадкой, примем как общеизвестный факт: физические явления могут быть описаны математическими уравнениями, решения которых имеют предсказательную силу. Вот что это значит. Невозможно наперед вывести все математические соотношения, которые могут понадобиться при описании физических явлений. Физики-теоретики (в данном случае речь идет о гениях) формулируют основные уравнения, причем они формулируются в столь общей форме, что применимы практически в бесконечном количестве случаев. В процессе постижения законов природы основные уравнения изменялись. Формулировка новых уравнений открывает новую эпоху в физике.

---

*) Прекрасный образец шуточного определения физики дал Дж. Орир: «Физика — это то, чем занимаются физики». Если вдуматься, это — содержательное утверждение...

Современная физика началась (в XVII веке) с формулировки Ньютоном основных уравнений механики. В XIX веке Максвелл сформулировал уравнения электромагнетизма. Прослеживая путь основных уравнений, надо назвать имена А. Эйнштейна, Н. Бора, Э. Шредингера, В. Гейзенберга и П. А. М. Дирака. Эйнштейн сформулировал уравнения механики, позволяющие исследовать движения со скоростями, близкими к скорости света, и построил теорию гравитации. Бор, Шредингер, Гейзенберг и Дирак создали квантовую (или волновую) механику.*)

Открытие, формулировка новых уравнений не исчерпывает деятельности физика-теоретика. Более того, подавляющее большинство физиков-теоретиков не претендует на пересмотр существующих основных уравнений (читай: основных представлений), а довольствуется решением задач на основе этих уравнений. Глагол «довольствоваться» не несет на себе какого-либо уничижительного смысла.

Задачи в теоретической физике возникают двумя способами.

Первый способ. Эксперимент обнаруживает нечто такое, что именуют новым явлением или свойством. Выбор слова (явление, свойство) зависит от ощущения важности обнаруженного. Иногда экспериментатор, хорошо понимая природу обнаруженного явления, самостоятельно дает полную интерпретацию того, что он обнаружил. Но чаще, даже зная в общих чертах, чем обусловлено открытое им явление, он не может, используя известные уравнения (представления), вычислить необходимые для объяснения величины и/или соотношения. Вычисления требуют специалиста — физика-теоретика. Возможно, что даже при детальном и подробном изучении открытого явления его природа не становится яснее. Выяснение природы явления, т. е. выяснение, какими из основных уравнений физики до́лжно пользоваться для объяснения,— одна из важнейших задач, решаемых физиками-теоретиками. Бывает, что от возникновения задачи до ее решения проходит много лет, причем эксперимент все это время добавляет новые сведения об открытом явлении, а теория, развиваясь, скрытым образом подготавливает себя к решению задачи. Сверхпроводимость была открыта в 1911 году, а получила объяснение в 1956. Сорок пять лет понадобилось для выяснения природы этого удивительного явления. Причем объяснение не затронуло основных уравнений физики. Оно было найдено в пределах существовавших представлений.

— Генерал особенно хотел бы посмотреть, как бомбардируют атомные ядра.

Второй способ. Логика развития какой-либо области физики подсказывает возможность расчета явления или свойства, которые раньше либо не поддавались расчету, либо не представляли интереса (находились вне поля зрения физиков). Особое место среди этих задач занимают задачи, решения которых совершенствуют математический аппарат теории. Вообще между математикой и теоретической физикой существует непростая связь. Во многих случаях физик-теоретик использует готовый математический аппарат, обнаружив предварительно, что сформулированная им задача принадлежит классу задач, изученных математиками. Но нередко физик-теоретик, сформулировав, как ему представляется, строго и полно физическую задачу, обнаруживает, что математики подобных задач не решали вовсе или им (математикам) известна только принципиальная разрешимость подобных задач, а не метод получения решения. Тогда за создание метода приходится приниматься физику-теоретику... При таком (как в этом письме) абстрактном изложении все выглядит слишком «разложенным по полочкам». В действительности чаще всего ситуация промежуточная: в математике, вроде бы, есть нужный метод, но он чуть-чуть не подходит, его требуется немного усовершенствовать. А небольшое усовершенствование оборачивается сложной, требующей большого напряжения ума работой.

---

*) Чтобы подчеркнуть важность открытия новых уравнений, приведем цитату из курса лекций замечательного физика-теоретика и великолепного педагога Р. Фейнмана: «В истории человечества (если посмотреть на нее, скажем, через десять тысяч лет) самым значительным событием XIX столетия, несомненно, будет открытие Максвеллом законов электродинамики. На фоне этого важного научного открытия гражданская война в Америке в том же десятилетии будет выглядеть мелким провинциальным происшествием». («Фейнмановские лекции по физике», том [illegible] «Электричество и магнетизм», с. 27. М.: Мир, 1966.)

Чаще всего первые свои работы будущие физики-теоретики делают под руководством. Опытный физик-теоретик всегда имеет «на примете» либо конкретные задачи, которые, как ему кажется, следует решить, либо область физики, познакомившись с которой, молодой физик-теоретик сможет найти себе посильную задачу. В этой фразе важно отметить слова «посильная задача». Хороший педагог всегда представляет себе, какой сложности задачу можно дать ученику... Я хорошо помню то свое состояние (в конце обучения в Университете), когда все задачи, казалось, делятся на два класса: решенные и нерешаемые. И до сих пор благодарен своим учителям, с помощью которых понял, что из нерешенных задач может быть выделен подкласс решаемых задач.

Конечно, работа физика-теоретика состоит в решении задач, т. е. в получении ответа, результата. Но радость доставляет не только результат — итог работы. Сам процесс решения, преодоление возникающих во время решения трудностей, обход их, знакомство с новыми методами, овладение ими — все это доставляет радость...

Детская ИГРА
ЛУЧИ СМЕРТИ
Bland

— *Ты что-нибудь чувствуешь, папочка?*

Хочется предостеречь будущего физика-теоретика. Один мой друг — очень опытный и талантливый физик-теоретик — сказал, что главное качество, которым должен обладать физик-теоретик,— оптимизм, вера в то, что ответ получить удастся. В процессе работы эта вера предельно конкретизируется. Надо надеяться: все, что надо, взаимно уничтожится при приведении подобных членов, паразитические особенности сократятся и т. д., и т. п. Но (и в этом — предупреждение!) нельзя принимать желаемое за действительное: нельзя заранее отбрасывать слагаемые, потому что они должны взаимно уничтожиться, сокращать паразитические особенности и вообще разрешать себе действовать не так, как на обычной контрольной или при решении задач из задачника. Надо с первых самостоятельных работ воспитывать в себе предельный критицизм. Автор — самый строгий критик своей работы. Надо всегда помнить: получая новый результат, необходимо обрести уверенность в его правильности. Отсутствие готового (как в задачнике) ответа заставляет создавать специальные методы проверки полученного результата.

Большое место в жизни физика-теоретика сегодня занимает ЭВМ. Но это — отдельная тема.

В заключение — о том, где учатся «на физика-теоретика». Практически во всех крупных университетах страны, а также в Московском физико-техническом институте, в Московском инженерно-физическом, в Ленинград-

(Окончание см. на с. 29)

«И ВОЗВРАЩАЕТСЯ ВЕТЕР...», ИЛИ ПЕРИОДИЧНОСТЬ В МАТЕМАТИКЕ

А. БЕЛОВ,
кандидат физико-математических наук
М. САПИР

> ***Идет ветер к югу, и переходит к северу, кружится, кружится на ходу своем, и возвращается ветер на круги свои.***
>
> Екклезиаст, гл. 1, ст. 6

Быть может, наибольшая привлекательность математики в том, что одни и те же идеи возникают при решении самых разнообразных задач, казалось бы не имеющих ничего общего.

В этой статье мы постараемся проследить за одной из общематических идей — идеей повторяемости, цикличности, возвращаемости, которая обсуждалась в Кировской летней математической школе 1986—1988 годов, а также в Зимней школе юного математика 1988 года при Свердловском пединституте.

Многие идеи, сформулированные в «чистом виде», выглядят тривиальными, например принцип Дирихле. Но — удивительный факт — зачастую одно упоминание о такой «тривиальности» делает трудную до того задачу прозрачной. В чем здесь дело? Вы, наверное, встречали рисунки для детей, где надо найти, скажем, зайца в лесных зарослях. Мы хорошо знаем, как выглядит заяц, но где он сидит, сразу не видно. А если не сказать, что сидит именно заяц, то увидеть его очень трудно. Так и в математике полезно знать заранее, какие простые, но важные идеи скрываются в дебрях возможных рассуждений. В дальнейшем ваш опыт будет подсказывать вам, какие «звери» могут водиться в том или ином лесу. А теперь вернемся «на круги своя».

Цикличность в природе встречается повсюду: карусели и вращение планет, времена года и цифры в десятичной записи дробей — практически все сущее участвует в каком-то циклическом движении, «хороводе». Оказывается, есть общая причина, вызывающая периодичность.

В чем секрет периодичности? Так же, как при изучении живой ткани рассматривают под микроскопом одну ее клетку, рассмотрим вначале простую «одноклеточную» задачу.

Задача 1. *Найдите последнюю цифру числа 2^{1000}.*

Давайте поставим более общий вопрос: как выглядит последовательность окончаний степеней двойки? Для начала выпишем несколько членов:

$$1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, 4, \ldots$$

Первой повторилась двойка, затем начали повторяться цифры 4, 8, 6 и почти очевидно, что так будет до бесконечности. Но все же почему? Да потому, что только последняя цифра каждой степени определяет последнюю цифру следующей степени, а остальные цифры не влияют, так что

повторение одной цифры вызывает повторение следующей, а значит, и всех последующих.

Так возникает период — отрезок ряда между двумя повторениями. Теперь уже легко определить, что последняя цифра числа 2^{1000} равна 6 (проверьте).

Следующая задача является уже «двуклеточной»: ее решение аналогично решению задачи 1, если суметь сначала доказать, что произойдет повторение.

Задача 2. *Докажите, что последовательность остатков от деления на 1990 степеней числа 7 — периодическая, причем длина периода не больше 1990.*

Вам хорошо известно, что рациональное число разлагается в периодическую десятичную дробь. Рассмотрим последовательность цифр этой периодической дроби. Как мы устанавливаем периодичность? При делении «уголком» мы работаем с последовательностью остатков (умножаем, вычитаем, берем остаток; сносим цифру, находим неполное частное, умножаем, вычитаем, берем остаток; и т. д.). Итак, каждый остаток однозначно определяет неполное частное (цифру десятичной дроби) и следующий остаток.

Остатки начнут повторяться (их конечное число), значит, начнут повторяться и десятичные знаки.

Итак, периодичность десятичных знаков рационального числа получается как следствие периодичности соответствующих остатков. Теперь можно приступить к «многоклеточной» задаче.

Задача 3. *Жители Лавайских островов гордятся тем, что у них с незапамятных времен существует президентская форма правления. Каждые 4 года президентом избирается либо республиканец, либо демократ. Местные социологи обнаружили строгий закон, по которому определяется партийность очередного президента. Хотя этот закон засекречен, в печать просочились сведения, что партийность очередного президента полностью определяется партийностью предыдущих десяти. Последние три срока на Лаваях правит республиканец. Докажите, что всегда будут периоды правления трех республиканцев подряд.*

Нам достаточно показать, что партийности президентов периодически повторяются. Назовем «предвыборным состоянием», или просто «состоянием», последовательность партий, к которым принадлежали последние 10 президентов. Каждое состояние определяет партийность следующего президента, а значит, и следующее предвыборное состояние. Состояний конечное число (не больше чем 2^{10}), следовательно, по принципу Дирихле, какое-то из них повторится. Повторение одного состояния вызовет повторение следующих состояний, и с этого момента состояния начнут периодически повторяться, а значит, и последовательность правящих партий будет периодической. Но поскольку президентская форма правления на Лаваях существует с незапамятных времен, повторение двух состояний уже произошло, и состояния давно повторяются.

Как видите, во всех разобранных задачах присутствует одно и то же рассуждение, устанавливающее периодичность. Сформулируем его в общем виде.

Рассуждение 1. *Если нечто может находиться только в конечном числе состояний, и состояние в данный момент времени однозначно определяет состояние в следующий момент времени, то, начиная с некоторого момента, состояния начнут периодически повторяться.*

Однако в задаче про президентов надо было проверить, что в данный момент мы находимся в периоде — только тогда можно утверждать, что всегда будут моменты правления трех республиканцев подряд. Для этого и потребовались «незапамятные времена». Это важный момент: рассуждение 1 утверждает периодичность, *начиная с некоторого момента*, но при этом вовсе не обязательно, чтобы повторилось первое состояние. (Это видно уже на примере задачи 1. Другой пример — периодические дроби.) Если период начинается не сразу, то последовательность состояний, предшествующая периоду, называется *предпериодом*. Чтобы доказать, что начальное состояние когда-нибудь встретится, надо еще показать отсутствие предпериода. Для этого часто используется несколько другая идея, чем в задаче о президентах,— идея «обратного хода»:

Рассуждение 2. *Если число состояний конечно, и каждое состояние* *однозначно определяет как последующее состояние, так и предыдущее, то в последовательности состояний предпериод отсутствует.*

Это простое рассуждение не сразу становится понятным. Попробуем его пояснить. С какого-то момента появится период (рассуждение 1). Выберем состояние, например, из третьего периода. Оно однозначно определяет предыдущее состояние и т. д. Во втором периоде есть такое же состояние; оно определяет предыдущее (такое же, как в третьем периоде) и т. д. Период «переносится в прошлое», а значит, все состояния периодически повторяются.

Вот типичный пример (см. статью А. И. Орлова «Принцип Дирихле», «Квант», 1971, № 7):

Задача 4. *Докажите, что найдется член последовательности Фибоначчи, делящийся на 1990. (Напомним, что последовательность Фибоначчи начинается с двух единиц, и каждый следующий член равен сумме двух предыдущих.)*

Запишем формулу для определения очередного числа Фибоначчи:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Прежде всего изучим остатки чисел Фибоначчи при делении на 1990. Хотелось бы найти остаток, равный нулю. Ну, а как его искать? В том-то и задача. Однако обратимся к прошлому (задача о президентах показала полезность изучения истории). Заметим, что последовательность можно «продолжить в прошлое» с помощью формулы:

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1}.$$

Тогда получим, что $u_0 = 0$. Прекрасно! Ноль делится на 1990.

Осталось установить периодичность остатков, начиная с нулевого члена. Заметим: нам не нужно находить член последовательности Фибоначчи с нулевым остатком — достаточно установить его существование. Нетрудно понять, что по остатку одного числа Фибоначчи ничего нельзя сказать об остатке следующего. Тут на помощь приходит задача о президентах: ведь и там, чтобы спрогнозировать результат выборов, недостаточно знать партийность предыдущего президента — нужны результаты последних 10 выборов. Потому-то «предвыборным состоянием» мы назвали партийность последних 10 президентов. Теперь ясно, что в качестве состояния члена u_n надо взять пару остатков от деления на 1990 членов u_{n-1} и u_{n-2}. Два предыдущих остатка уже определяют следующий. Здесь ключ к решению: во-первых, «состояние» определяет остаток числа, а во-вторых, каждое «состояние» определяет следующее состояние. Теперь все ясно: состояний конечное число (оцените сколько), они начнут повторяться, а значит, повторятся остатки чисел Фибоначчи. Впрочем, радоваться рано. Почему период начинается с нулевого члена? Тут нам поможет идея «обратного хода»: состояние каждого остатка определяет состояние не только следующего, но и предыдущего (в этом нас убеждает формула $u_{n-2} = u_n - u_{n-1}$), а отсюда отсутствие предпериода.

Упражнение 1. Могут ли два соседних числа Фибоначчи делиться на 1990?

Задача 5 (на исследование — обобщение задач 1, 2, 4). *Последовательность u_n такова, что при некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_k$ справедливо равенство $u_n = a_1 \cdot u_{n-1} + a_2 \cdot u_{n-2} + \ldots + a_k \times u_{n-k}$. (Такая последовательность называется возвратной, или рекуррентной. Примеры — последовательность Фибоначчи или последовательность степеней целого числа: если $u_n = m^n$, то $u_n = m \cdot u_{n-1}$.) Пусть все a_i и u_n — целые. Докажите, что остатки чисел u_n при делении на заданное целое l периодически повторяются. В каких случаях в этой последовательности остатков будет отсутствовать предпериод? Оцените длину периода. Приведите пример, когда предпериод будет.*

Одно и то же рассуждение может появляться в различной «упаковке». Например, рассуждение 2 может выглядеть так:

Несколько точек соединены стрелками, причем из каждой точки исходит одна стрелка и входит тоже одна. Тогда все стрелки (и точки) образуют несколько циклов.

Упражнение 2. Сформулируйте рассуждение 1 в терминах точек и стрелок.

Идею цикличности можно формализовать не только на языке точек и стрелок. Другой способ — на языке функций:

Теорема о периодичности. *Пусть M — конечное множество (множество состояний). Пусть f — функция из множества M в множество M. Тогда при всех x из M последовательность состояний*

$$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \ldots,$$

начиная с некоторого момента, станет периодичной.

Кроме того, если при различных x и y состояния $f(x)$ и $f(y)$ также различны (это условие «обратного хода»! — почему?), то период начинается с первого члена.

Упражнения

3. Докажите теорему о периодичности.

4. Докажите, что сумма длин периода и предпериода в последовательности из теоремы о периодичности не превосходит числа элементов множества состояний.

Возникает вопрос: рассуждения 1 и 2 выглядят достаточно убедительными. Зачем же еще их формализовывать, да еще двумя способами? Зачем гнаться за строгостью, когда и так все ясно?

В нашем случае дело не в строгости: различные способы формализации дают возможность посмотреть на рассуждение с разных сторон, что позволяет применить его в разных ситуациях. Приведем два примера.

Упражнение 5. В некоторой компании каждый человек имеет ровно двух друзей. Докажите, что если все друзья возьмутся за руки, то они образуют один или несколько хороводов. (Здесь подходит рассуждение с точками и стрелками.)

Задача 6. *Некоторая комбинация поворотов граней вывела кубик Рубика из правильного положения. Докажите, что кубик можно снова собрать, повторив эту комбинацию еще несколько раз.* (Здесь подходит теорема о периодичности.)

Для решения задачи 6 достаточно посмотреть на исходную комбинацию поворотов кубика как на функцию, переводящую одно его состояние в другое. Поскольку все повороты можно провести в обратном порядке, каждое состояние однозначно определяет предыдущее. Убедитесь самостоятельно, что при этом разные состояния переходят в разные, после чего примените теорему о периодичности. Оба способа формализации идеи цикличности встречаются часто: стрелки — в теории конечных автоматов, функции — в теории динамических систем.

Мы познакомились только с некоторыми приложениями идеи цикличности, причем с «дискретным» случаем, когда число состояний конечно. Но и в «непрерывном» случае, при бесконечном числе состояний, часто возникает периодичность или, вернее, «почти периодичность», когда состояния повторяются не абсолютно точно, а лишь приближенно. Так, каждое лето и похоже, и непохоже на предыдущее.

Мы закончим статью возвращением к Екклезиасту: «Восходит солнце, и заходит солнце, и спешит к месту своему, где оно восходит. Идет ветер к югу, и переходит к северу, кружится, кружится на ходу своем, и возвращается ветер на круги свои. Все реки текут в море, но море не переполняется; к тому месту, откуда реки текут, они возвращаются, чтобы опять течь... Что было, то и будет; и что делалось, то и будет делаться, и нет ничего нового под солнцем» (гл. 1, ст. 5—7, 9).

Ниже мы приводим олимпиадные задачи, которые объединены идеей цикличности, однако решение каждой требует и других идей.

Задачи

1. На конкурсе по математике в институте МИМИНО предлагалось 20 задач. На закрытие пришло 20 школьников. Каждый из них решил две задачи, причем оказалось, что среди пришедших каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно так организовать разбор задач, чтобы каждый школьник рассказал одну из решенных им задач и все задачи были бы разобраны.

2. Каждый следующий член последовательности есть сумма квадратов цифр предыдущего. Докажите, что последовательность периодична.

3. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков

(Окончание см. на с. 56)

С КАКОЙ СКОРОСТЬЮ РАСТЕТ ЗЕЛЕНЫЙ ЛИСТ?

Доктор физико-математических наук
А. ВЕДЕНОВ,
кандидат физико-математических наук
О. ИВАНОВ

Вы, наверное, обращали внимание весной, как быстро покрывается новой зеленью вспаханное и засеянное поле. Некоторое время оно стоит черное или коричневое, но вот появились маленькие зеленые искры ростков, и прямо на глазах за одну-две недели поле покрывается почти сплошным зеленым ковром (все это происходит, конечно, при условии, что все посеянные семена взошли, земля достаточно влажная и хорошо удобренная и дни стоят солнечные). Интересно, что при таком быстром росте растений в течение довольно больших интервалов времени можно замечать изменение в количестве зелени на поле через небольшие одинаковые промежутки времени, практически каждый день. Не странно ли это? Ведь, казалось бы, делать это должно становиться все труднее — чем больше зелени в поле, тем сложнее заметить изменения в ее количестве.

Попробуем разобраться, при каком законе роста растений возможны такие наблюдения. Определим количество зелени в поле как суммарную площадь листьев растений (мы рассматриваем начало роста, когда листья почти не перекрываются). Будем считать, что эта величина пропорциональна средней текущей площади листьев одного растения (мы предполагаем, что все растения взошли одновременно и находятся в абсолютно одинаковых условиях).

Воспользуемся известным физиологическим законом Вебера — Фехнера. Этот закон говорит, что все органы чувств человека (слух, осязание, зрение) воспринимают изменение внешнего воздействия ΔB (силы звука, давления, яркости света) только тогда, когда относительное изменение $\Delta B/B$ больше определенного порогового значения —

$$\delta = \frac{\Delta B}{B} > \delta_{\text{п}},$$

причем $\delta_{\text{п}}$ не зависит от величины внешнего воздействия B.[*] Если же $\Delta B/B < \delta_{\text{п}}$, то изменения воздействия человек не воспринимает вообще. Приведем простой пример. Если положить на ладонь груз P_0 массой несколько граммов, а затем начать изменять массу груза, то уверенно сказать, что груз стал больше или меньше, можно только тогда, когда относительное изменение веса груза — $|P-P_0|/P_0$ — достигнет одной трети. В этом примере порог восприятия изменения силы $\delta_{\text{п}}^{P}$ равен $1/3$.

Для зрительного восприятия порог можно определить таким образом. Сделаем набор одинаковых геометрических фигур, например квадратов, разного размера и покажем один квадрат испытуемому. Потом будем показывать ему другие квадраты, немного отличающиеся от первого по размеру. Только тогда, когда относительное изменение длины стороны квадрата $|a-a_0|/a_0$ превысит пороговую величину $\delta_{\text{п}}^{a}$, испытуемый может ответить, больше или меньше данный квадрат, чем исходный. Опыт показывает, что $\delta_п^a \approx 1/10$.

---

[*] Закон назван именами немецких ученых прошлого века физиолога и анатома Э. Вебера (1795—1878) и физика (а также психолога, философа и писателя-сатирика) Г. Фехнера (1801—1887). Вебер занимался экспериментальными исследованиями осязательных ощущений и глазомера, а Фехнер обобщил опытные факты, полученные Вебером и другими психологами и физиологами, в единой математической формулировке.

В наших наблюдениях за количеством зелени в поле мы замечали изменение в количестве зелени через равные промежутки времени (пусть для простоты это будут одни сутки). Отношение изменения количества зелени ΔK_t за этот промежуток времени (за любые сутки) к имеющемуся количеству зелени K_t в эти сутки будет постоянной величиной, равной порогу восприятия изменения количества зелени:

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = \delta_п^K.$$

Из этого отношения мы можем получить уравнение для скорости изменения количества зелени

$$v_t = \frac{\Delta K_t}{\Delta t} = \frac{\delta_п^K K_t}{t_п} = CK, \qquad (1)$$

где $C = \delta_п^K / t_п$ — постоянная величина, равная отношению порога восприятия изменения количества зелени ко времени, за которое изменение количества зелени на данном поле достигает порогового (у нас это одни сутки).

Полученное выражение показывает, что скорость роста количества зелени пропорциональна количеству уже имеющейся зелени. (Подобное выражение получается при описании радиоактивного распада ядер. В этом случае скорость распада, т. е. число ядер, распадающихся в единицу времени, пропорциональна числу оставшихся ядер. Но, в отличие от роста растений, для распада ядер в правой части уравнения, аналогичного (1), стоит знак минус, так как количество первоначальных ядер уменьшается со временем.) Во всех случаях, когда скорость изменения какой-либо величины пропорциональна самой величине, зависимость рассматриваемой величины от времени имеет экспоненциальный характер. В нашем случае это означает, что к моменту времени t количество зелени может быть найдено как

$$K_t = K_0 e^{Ct}, \qquad (2)$$

где K_0 — начальная величина количества зелени при $t = 0$, а $e = 2{,}718$.

Чтобы показать, как из уравнения (1) получается экспоненциальная зависимость от времени (2), можно провести следующие нестрогие рассуждения. Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ величина количества зелени равна K_0, и нас интересует значение K_t через время t. Разобьем временной интервал $0 - t$ на N равных промежутков времени длительностью τ $(\tau = t/N)$ и будем фиксировать количество зелени в моменты времени $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$ и т. д.

Через время τ после начального момента $t_0 = 0$ количество зелени можно найти как

$$K_1 = K_0 + \Delta K_0 = K_0 + v_0\tau = \\ = K_0 + K_0 C\tau = K_0(1 + C\tau)$$

(на этом интервале времени мы приняли скорость роста постоянной и равной (см. (1)) $v_0 = CK_0$); аналогично, через время 2τ

$$K_2 = K_1 + \Delta K_1 = K_1 + v_1\tau = \\ = K_1 + CK_1\tau = K_1(1 + C\tau) = K_0(1 + C\tau)^2$$

(скорость роста постоянна и равна $v_1 = CK_1$). Интересующее нас значение K_t через время $t = N\tau$ можно найти как

$$K_t = K_N = K_0(1 + C\tau)^N = K_0\left(1 + \frac{Ct}{N}\right)^N = \\ = K_0\left(1 + \frac{1}{M}\right)^{MCt} = K_0\left(\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M\right)^{Ct},$$

где мы ввели обозначение $M = Ct/N$ (M — безразмерная величина).

Понятно, что значение K_t будет тем точнее, чем чаще мы будем проводить промежуточные вычисления, т. е. чем больше будет N (ведь скорость роста

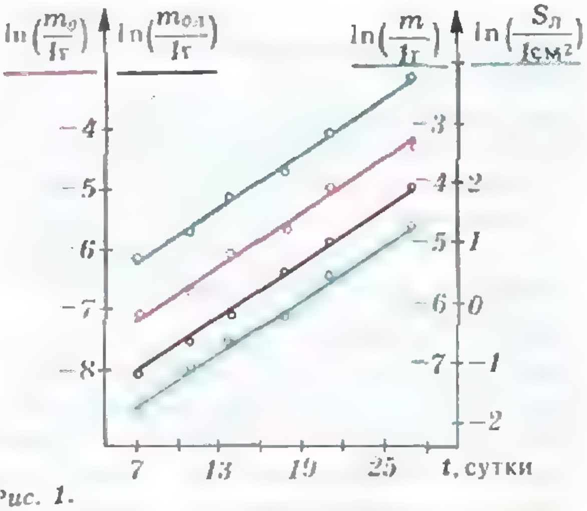


Рис. 1.

непрерывно меняется во времени, и чем меньше τ, тем ближе подставляемые нами значения v_0, v_1, ... к действительным значениям скорости). Если бесконечно увеличивать N (т. е. бесконечно уменьшать интервал времени τ), то и M будет стремиться к бесконечности, а величина $\left(1+\frac{1}{M}\right)^M$ при $M \to \infty$ стремится к постоянной, приблизительно равной 2,7182828 (например, $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}=2{,}7048$; $(1+0{,}001)^{1000}=2{,}7169$). Число 2,7182828... в математике обозначают e.

Таким образом, мы показали, что на начальной стадии рост растений в течение некоторого периода времени происходит по экспоненциальному закону. Экспериментальные исследования подтверждают, что при постоянных внешних условиях (постоянная освещенность, температура, влажность воздуха, регулярный полив, хорошо приготовленная почва) вес и размер всего растения и отдельных его частей на начальной стадии роста меняются экспоненциально во времени. На рисунке 1 приведены результаты опытов по выращиванию пшеницы в водном растворе питательных веществ. На этом графике масштаб по оси абсцисс линейный, а по оси ординат — логарифмический, т. е. на горизонтальной оси на равных расстояниях нанесены дни, прошедшие с начала роста, а на вертикальной оси нанесены не значения измерявшихся величин, а логарифмы этих значений.

Использование логарифмического масштаба в тех случаях, когда зависимость величин от аргумента близка к экспоненциальной $y=Ae^{Cx}$, приводит к тому, что график принимает вид прямой линии. Действительно, откладываемая на графике по оси ординат величина $\ln y$ является линейной функцией аргумента x —

$$\ln y = \ln A + Cx,$$

а график линейной функции — прямая линия. По этому графику легко определить константу C — она равна отношению приращения $\Delta(\ln y)$ к приращению аргумента Δx.

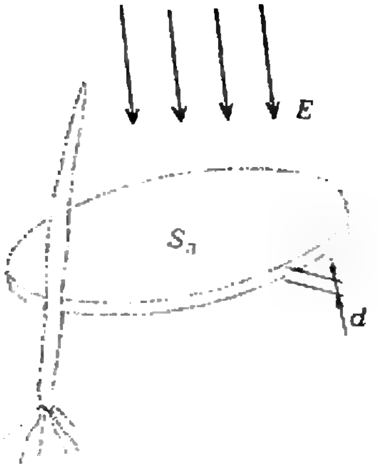


Рис. 2.

Итак, из рисунка 1 видно, что начиная с седьмого дня после появления всходов на протяжении трех недель общий вес растения m, сухой вес растения m_0 (т. е. вес органического вещества, остающегося после высушивания), сухой вес листьев $m_{0л}$, площадь листьев $S_л$ меняются экспоненциально со временем. В природе экспоненциальный рост является распространенным явлением. Примером может служить рост числа бактерий или одноклеточных организмов в сосуде при достаточном питании. В этом случае экспоненциальный рост имеет простое объяснение. Бактерия или отдельная клетка делятся на две через определенное время τ. Поэтому их число меняется со временем следующим образом: $n_t = n_0 \cdot 2^{t/\tau} = n_0 e^{Ct}$, где $C=\frac{\ln 2}{\tau}$.

Давайте найдем физическое объяснение экспоненциального роста растений и определим константу C скорости роста из законов сохранения вещества и энергии. Сначала надо построить модель растения, близкую к действительности и удобную для наших исследований. Задача выбора модели всегда возникает при физическом описании окружающих нас явлений. Модель должна выделять основные черты предмета или явления, которых достаточно для описания интересующих нас процессов. Возьмем такую модель растения. Будем считать, что оно состоит из одного листа (площадь которого равна площади всех его листьев), стебля и корня (рис. 2) и отношение полной массы к сухой массе как для всего растения, так и для отдельных его частей — величина постоянная:

$$\frac{m}{m_0}=\frac{m_л}{m_{0л}}=\alpha$$

($m_л$, $m_{0л}$ — полная и сухая масса листа). Кроме того, будем считать постоянными величинами толщину листа d и отношение сухой массы листа к сухой массе всего растения:

$$\frac{m_{0л}}{m_0}=\varepsilon.$$

(Такие предположения можно сделать из количественных наблюдений на стадии экспоненциального роста травянистых растений. Конечно, такую модель нельзя использовать для описания роста других растений. Например, у деревьев отношение массы листьев к массе всего растения — величина переменная.)

Из курса биологии вы знаете, что растение увеличивает свою массу благодаря процессу фотосинтеза — образованию органических веществ из углекислого газа, содержащегося в воздухе, и воды, содержащейся в растении при поглощении листьями растения световой энергии. Количество образующегося сухого органического вещества Δm_0 пропорционально поглощенной световой энергии ΔE:

$$\Delta m_0=\gamma\cdot\Delta E. \qquad (3)$$

Если интенсивность светового потока I (световая энергия, падающая на единицу площади в единицу времени) постоянная, то

$$\Delta E=IS_л\cdot\Delta t. \qquad (4)$$

Пользуясь нашей моделью растения, выразим площадь листа через сухую массу растения m_0. Площадь листа равна объему листа, деленному на его толщину,— $S_л=V_л/d$. Объем находим через сырую массу листа и его плотность — $V_л=m_л/\rho$ ($\rho\approx1$ г/см^3), а сырой вес листа выражаем через m_0 с помощью формул для коэффициентов α и ε: $m_л=\alpha\varepsilon m_0$. В результате получаем:

$$S_л=\frac{m_0\varepsilon\alpha}{\rho\alpha}. \qquad (5)$$

Теперь, объединяя выражения (3)—(5), запишем уравнение для скорости изменения количества сухого органического вещества:

$$\frac{\Delta m_0}{\Delta t}=\frac{\gamma\varepsilon\alpha I}{\rho d}m_0.$$

Следовательно, масса сухого вещества меняется со временем как

$$m_{0t}=m_0e^{\gamma\varepsilon\alpha I/\rho d},$$

и константа скорости роста равна

$$C=\frac{\gamma\varepsilon\alpha I}{\rho d}. \qquad (6)$$

Итак, константа скорости роста пропорциональна интенсивности падающего на растение света и зависит от параметров α, ε, d и γ. Для пшеницы α, ε и d можно определить с помощью графика на рисунке 1, взяв значение m, m_0, $m_{0л}$ и $S_л$ для какого-то дня. Например, на 13-й день $m=0{,}026$ г, $m_0=0{,}0043$ г, $m_{0л}=0{,}0021$ г, $S_л=1$ см^2 (эти значения мы вычислили с помощью калькулятора), и

$$\alpha=\frac{m}{m_0}=6,\ \varepsilon=\frac{m_{0л}}{m_0}=0{,}48,$$

а толщину листа определим с помощью этих же величин из отношения объема листа $V_л=m_{0л}\alpha/\rho$ к его площади:

$$d=\frac{m_{0л}\alpha}{\rho S_л}=0{,}012\ \text{см}.$$

Величина «фотосинтетического эквивалента» света γ определяет, на сколько увеличивается сухая масса растения при поглощении определенного количества световой энергии. Чтобы лучше понять смысл этой величины, выведем ее, рассматривая энергетику процессов, происходящих в растительной клетке.

Суммарно процесс фотосинтеза может быть представлен в виде уравнения

$$H_2O+CO_2\xrightarrow{свет}(CH_2O)+O_2.$$

В левой части уравнения — знакомые вам молекулы воды и углекислого газа, а в правой — молекула кислорода и минимальная структурная группа углеводов CH_2O, которая получается при «усвоении» одной молекулы углекислого газа. Молекула фруктового сахара — фруктоза $C_6H_{12}O_6$ —

состоит из 6 таких групп ($C_6H_{12}O_6 = 6(CH_2O)$), а молекула обычного сахара — сахароза $C_{12}H_{24}O_{12}$ — из 12. Слово «свет» над стрелкой означает, что для того, чтобы такое превращение веществ могло произойти, необходимо поглощение световой энергии.

В написанном уравнении представлены только начальные и конечные продукты. А весь процесс фотосинтеза включает в себя много промежуточных веществ и реакций. В растительной клетке, точнее в расположенных внутри нее хлоропластах, работают настоящие молекулярные заводы, станки которых — белковые молекулы (ферменты) — могут, используя энергию света, вырабатывать электроэнергию, осуществлять электролиз, перераспределять атомы и группы атомов в молекулах.

Свет в хлоропластах поглощают молекулы хлорофилла. При поглощении молекулой одного фотона один из электронов молекулы переходит на более высокий энергетический уровень. В конечном итоге энергия этих возбужденных электронов идет на работу по переносу заряда по электрической цепи, составленной в основном из белковых молекул. (Молекулы хлорофилла и связанные с ними белки играют роль фотоэлементов клетки.) Текущий по цепи ток осуществляет электролиз ионов, образующихся при диссоциации молекул воды (OH^- и H^+), и ионов вещества, которое является переносчиком атомов водорода от молекул воды к молекуле углекислого газа.

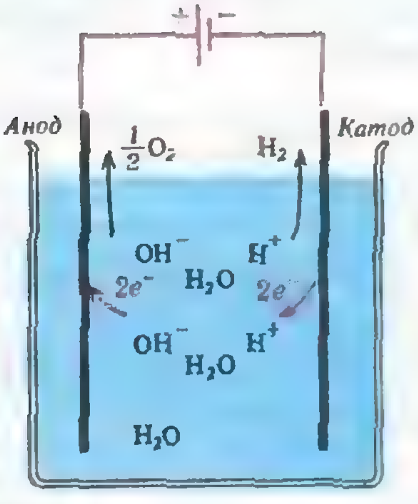


Рис. 3.

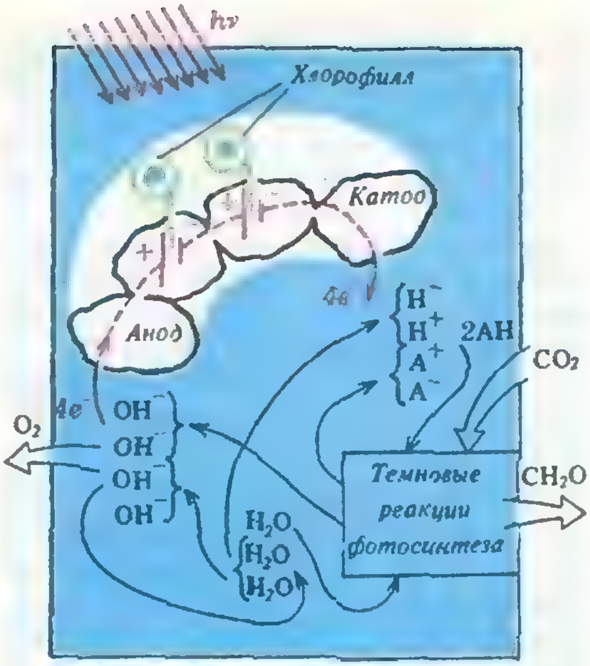


Рис. 4.

Молекулу этого вещества-переносчика и ее ион будем обозначать соответственно A и A^+.

Этот электролиз можно сравнить с электролизом чистой воды, в котором на катоде образуется водород, а на аноде — кислород. Правда, в случае электролиза чистой воды и в обычном электролизе других электролитов источник ЭДС и подводящие провода цепи находятся снаружи, вне электролита, а в электролит погружены только электроды (рис. 3). В клетке же вся цепь электролиза погружена в электролит — заполняющий клетку раствор ионов (рис. 4). Ее можно представить себе как трубку, внутри которой находятся изолированные от электролита источники ЭДС — соединенные с белками молекулы хлорофилла (клеточные фотоэлементы) и подводящие провода — белки и другие органические молекулы. На краях трубки в контакте с электролитом находятся электроды — также органические молекулы. Для совершения работы по переносу одного электрона по всей цепи электролиза требуется энергия двух возбужденных молекул хлорофилла, поэтому необходимое для электролиза напряжение на электродах создается двумя включенными последовательно клеточными фотоэлементами. На электродах происходят следующие процессы:

на катоде — $2H^+ + 2A^+ + 4e^- = 2AH$,

на аноде — $4OH^- = O_2 + 2H_2O + 4e^-$

Теперь можно подсчитать, сколько квантов света требуется для получения одной углеводной группы.

По уравнению фотосинтеза к молекуле углекислого газа нужно присоединить 2 атома водорода. Следовательно, для проведения превращения нужно подвергнуть электролизу 2 иона A^+. Для этого надо перенести по цепи 4 электрона, а для этого нужно 8 фотонов. (Напомним, что для переноса каждого электрона требуется возбуждение двух молекул хлорофилла.) Энергия каждого фотона должна быть больше, чем 1,8 эВ — такова минимальная энергия, необходимая для возбуждения молекулы хлорофилла. Ток электролиза, происходящего под действием света в зеленых листьях, имеет значительную величину. При полной интенсивности солнечного света 400 Вт/м^2 суммарный ток электролиза во всех хлоропластах всех клеток одного квадратного сантиметра листа составляет примерно 0,005 А. Значит, в листочке площадью 30 см^2 течет ток 0,15 А, как в лампочке карманного фонаря. Правда, пока не изобретен способ для непосредственного использования этого тока.

На следующей стадии фотосинтеза — она называется темновой, потому что для нее не требуется энергия света,— атомы водорода от AH переносятся к молекуле углекислого газа и образуются углеводы, а молекула-переносчик в виде иона A^+ опять готова к электролизу.

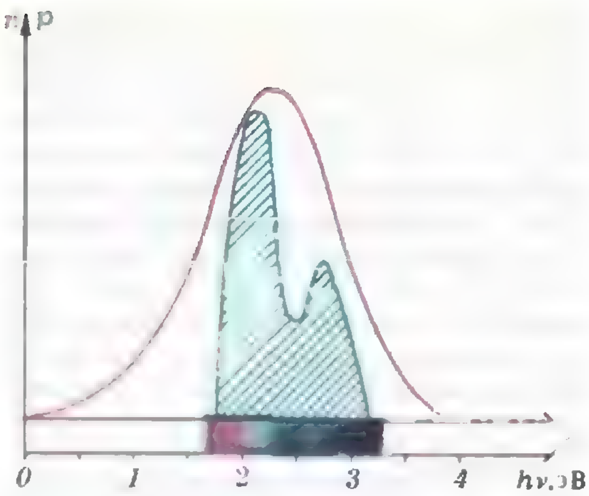


Рис. 5.

Обычно растение освещается не монохроматическим светом. Та часть светового излучения, которая представлена квантами, способными возбуждать хлорофилл, называется фотосинтетической активной радиацией (ФАР). Эффективность возбуждения молекул хлорофилла зависит от энергии квантов. На рисунке 5 показаны распределение фотонов по энергиям в потоке солнечного излучения (красная кривая $n(h\nu)$) и кривая эффективности возбуждения молекул хлорофилла в зависимости от энергии квантов (зеленая кривая $p(h\nu)$). С помощью этих кривых можно рассчитать среднюю энергию кванта ФАР в солнечном свете; она равна ~2,1 эВ. А полная энергия ФАР составляет примерно половину всей энергии падающего на Землю солнечного излучения. (Заметим, что у разных источников света доля ФАР в общей излучаемой энергии разная.)

Теперь по уравнению (3) определим фотосинтетический эквивалент для ФАР. Для увеличения количества углеводов на один моль ($\Delta m_0 = \mu_{CH_2O} \times$ × моль) требуется $8 \cdot N_A$ квантов излучения со средней энергией $h\nu_\Phi$, т. е. $\Delta E = 8h\nu_\Phi N_A$ (N_A — число Авогадро); поэтому

$$\gamma = \frac{\mu_{CH_2O} \cdot 1\ \text{моль}}{8h\nu_\Phi N_A} = 18\ \text{г/МДж}.$$

Рассчитанная величина γ может наблюдаться только при особых экспериментальных условиях, когда в атмосфере, окружающей растение, отсутствует кислород. В обычной атмосфере часть промежуточных продуктов в цепи реакций фотосинтеза окисляется кислородом воздуха, что уменьшает образование углеводов вдвое. Этот процесс называется фотодыханием. Примерно 30 % синтезированных углеводов в дальнейшем используется растением как источник энергии при синтезе необходимых для роста веществ и в других процессах. Из-за этого γ обычно меньше максимального значения по крайней мере в три раза. Мы будем считать, что $\gamma = 6$ г/МДж.

Теперь мы знаем все необходимое, чтобы вычислить константу скорости роста C. В опытах, результаты которых приведены на рисунке 1, интенсивность ФАР, создаваемой при искусственном освещении, составляла $\Gamma = 30$ Вт/м^2. Каждые сутки растения освещались в течение 16 часов, а затем 8 часов находились в темноте. При этом средняя суточная интенсивность была $\bar{I} = 1{,}7$ МДж/(м$^2\cdot$сут). Подставляя численные значения всех величин в формулу (6), получаем, что $C = 0{,}21$ сут$^{-1}$. На рисунке 6 приведена зависимость C от интенсивности ФАР, полученная экспериментальным путем. Как видим, вычисленное нами значение C хорошо совпадает с данными эксперимента.

В ясный весенний день интенсивность ФАР в полдень достигает 200 Вт/м^2, а средняя суточная интенсивность $\bar{I} \approx 3{,}5$ МДж/(м$^2\cdot$сут). Согласно формуле (6) константа скорости роста при таких условиях должна быть в 2 раза больше. Но при более высоких интенсивностях света уменьшается ε, так как относительный вес корней возрастает — нужно обеспечивать возросшую потребность растений в минеральных солях; поэтому C увеличивается с ростом I не линейно, а медленнее, и при $I = 3{,}5$ МДж/(м$^2\cdot$сут) составляет 0,3 сут$^{-1}$.

Из проведенных нами расчетов следует, что в идеальных условиях растение каждый день (каждые сутки) может увеличиваться в размерах в $e^{0,3} = 1\frac{1}{3}$ раза, т. е. на 1/3, а такое изменение легко заметить на глаз. Если растение растет в менее благоприятных условиях и, например, $C = 0{,}1$ сут$^{-1}$, то заметное изменение будет происходить через двое суток ($e^{0,1\cdot 2} = 1{,}24$), т. е. действительно возможные скорости роста позволяют замечать изменение в размерах растения практически каждый день.

Мы рассматривали такой период роста растений, когда поступление веществ идет только за счет фотосинтеза. При прорастании, когда используется энергия, запасенная в семени, и при росте новых листьев, когда к растущему листу поступают продукты фотосинтеза от других листьев, скорость роста может быть больше, чем та, которая получается из наших расчетов.

Решенная нами задача о нахождении константы скорости роста растения — это простой пример задач, решаемых агрофизикой. Агрофизика — довольно молодая наука, находящаяся на стыке физики атмосферы и физики почвы, биофизики и физиологии растений, прикладной математики. Она решает задачи по описанию роста и развития отдельных растений и целых посевов, о влиянии на них внешних физических условий — интенсивности света, температуры, влажности почвы и воздуха, скорости ветра.

Задачи эти сложные и содержат в себе несколько самостоятельных задач. Одна из них — создание модели растения более точной, чем та, что мы рассмотрели. Модель должна описывать те характерные особенности взаимодействия растения с окружающей средой, которые требуется изучить. Например, если бы мы хотели узнать, как будет расти наше растение в посеве, когда на каждое растение приходится площадь S_0, то нашу модель пришлось бы дополнить зависимостью

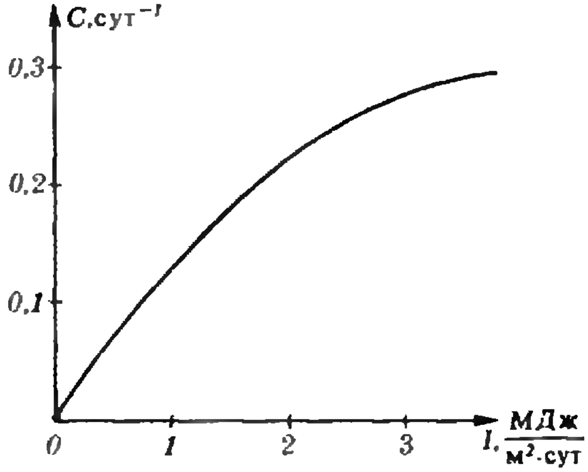


Рис. 6.

эффективной площади поглощения света листьями $S_{эф}$ от стадии развития растения. Эта эффективная площадь должна входить вместо площади листьев в формулу (4), когда листья начнут перекрываться, т. е. когда площадь листьев будет сравнима с S_0. Эту зависимость можно взять, например, в виде $S_{эф}=S_л/(1+S_л/S_0)$. Такая формула хорошо описывает изменение эффективной поглощающей площади растения с увеличением площади листьев. Действительно, если $S_л \ll S_0$, то дробь в знаменателе формулы мала, и $S_{эф} \approx S_л$, как и должно быть, когда листья не перекрываются. Когда $S_л \gg S_0$, в знаменателе можно пренебречь единицей, и тогда $S_{эф} \approx S_0$. В более сложных моделях учитывают зависимость введенных нами параметров a, ε, d, γ от внешних условий, от стадии развития растения, от других параметров.

Другие задачи связаны с описанием процессов, влияющих на рост растений,— например, диффузии углекислого газа и водяного пара в приземном слое атмосферы и в пространстве между листьями, течения воды и растворов питательных веществ в пористой почве. Цель агрофизических исследований — научиться «исправлять» внешние физические параметры среды обитания растения так, чтобы растение всегда находилось в оптимальных для своего роста условиях. Сейчас уже существуют экспериментальные поля, на которых на основе моделей развития растения и его взаимодействия с окружающей средой производят полив и подкормку посевов по показаниям установленных в поле датчиков.

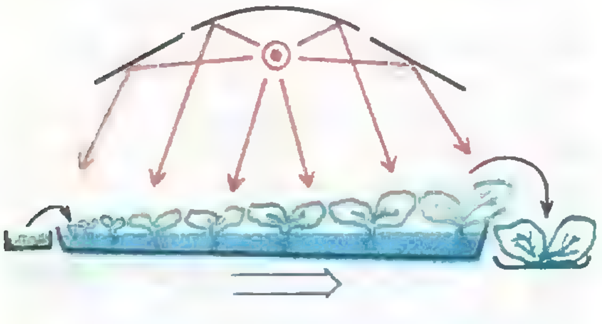


Рис. 7.

Зная об экспоненциальном росте растений, вы можете решить одну агрофизическую задачу. Но сначала познакомимся с конвейерным методом выращивания растений.

На некоторых судах и полярных метеостанциях сейчас применяются установки конвейерного выращивания зелени для экипажей, которые имеют запоминающееся название «Самород — Арктика». Установки эти устроены просто. В ванне размером 0,5×1,5 м автоматически поддерживается постоянный уровень раствора необходимых для роста растений веществ. Над ванной под зеркальным отражателем расположена мощная электрическая лампа. Вдоль ванны в пластмассовых кассетах перемещаются выращиваемые растения, корни которых слегка касаются питательных веществ. Кассеты «заряжаются» семенами и устанавливаются на один край ванны. По мере развития растений их перемещают к другому краю ванны, постепенно раздвигая таким образом, чтобы листья растений все время образовывали сплошной зеленый покров, но сильно не перекрывались (рис. 7). Такой конвейер с раздвигающимися кассетами обладает двумя достоинствами. Во-первых, свет не теряется напрасно, так как он падает только на листья растений. Во-вторых, осуществляется непрерывное производство зелени.

Применение больших конвейеров (а в лаборатории уже испытываются конвейеры длиной 10, 20 и более метров), конечно, требует автоматизации перемещения кассет. А за маленьким полем «Самород», скажем на судне, следит кок. Он заряжает кассеты, передвигает их нужным образом и собирает урожай.

Имея модель, которая хорошо описывает рост растения в зависимости от внешних условий (и характеристик самого растения), можно получить закон перемещения кассеты вдоль конвейера $l=l(t)$, при котором между листьями нет промежутков, и определить время между установкой кассет τ. Вот эту агрофизическую задачу мы и предлагаем вам решить самостоятельно.

ПЯТНО ПУАССОНА И ШЕРЛОК ХОЛМС

(из новых рассказов о знаменитом сыщике)

В. ВАЙНИН,
кандидат физико-математических наук
Г. ГОРЕЛИК

Доктор Уотсон, на правах друга ворвавшийся без доклада, застал Холмса играющим на скрипке. Уот-

сон нетерпеливо кашлянул. Знаменитый сыщик слегка поморщился.

— Как поживаете, Холмс? — не выдержал Уотсон.

Холмс вздохнул и опустил смычок:

— Скверно, доктор. Замучили посетители...

— Посетители? — рассеянно переспросил Уотсон и тут же с жаром воскликнул: — Должен вам сообщить, Холмс, жизнь полна удивительных совпадений!

— Не могу с вами не согласиться.— Холмс искоса посмотрел на друга.— Всякий раз, когда я беру в руки скрипку, приходите вы и начинаете кашлять. Поразительное совпадение!

— Да что вы! — отмахнулся Уотсон.— Мой случай гораздо интересней! Только вчера вечером я вернулся из-за океана...

— ...где блестяще распутали замысловатое преступление,— невозмутимо продолжил Холмс.

— А вы полагаете, что это совершенно невозможно? — спросил несколько обескураженно Уотсон, опускаясь в кресло.

— Ну что вы! Я уверен, что ваша история весьма занимательна.

— О да! — воспрянул духом Уотсон.— Думаю, что даже вам она покажется любопытной.

— Надеюсь,— Холмс пошуровал кочергой в камине и, устроившись в кресле, принялся набивать трубку.

— Как вы знаете, недавно меня пригласили в Лос-Анджелес, на Всемирный конгресс по судебной медицине,— начал свой рассказ доктор.— Я провел там с неделю и каждый день обедал в одном и том же ресторанчике. Там собиралась довольно занятная публика, наблюдать за которой — одно удовольствие, особенно для судебного врача и криминалиста. И вот однажды я стал свидетелем такой сценки.

Трое подвыпивших парней решили, видимо, поразвлечься. По-своему, конечно, по-американски: к огромной колонне, около трех футов в диаметре, они прилепили с помощью жевательной резинки серебряный доллар, вытащили свои кольты и начали соревноваться в меткости. А за колонной какая-то парочка невозмутимо потягивала коктейль. Лица девушки я не видел — она сидела ко мне спиной, но обратил внимание на ее удивительно красивые иссиня-черные волосы. Для парочки такие переделки были, наверное, не в диковинку, да и чувствовали они себя за колонной как за крепостной стеной. А поскольку публика не обращала особого внимания на пальбу, то и мне пришлось делать вид, будто ничего особенного не происходит. Но вдруг брюнетка за колонной вскрикнула и стала сползать под столик; ее белое платье было в крови. Как из-под земли появились полицейские, схватили парней, а я поспешил на помощь пострадавшей. К счастью, она оказалась всего лишь в обмороке: пуля разбила ее бокал, содержимое которого и приняли сначала за кровь. А когда девица — некая мисс Крэзифил — очнулась, выяснилось, что один из стрелявших парней — Том Найс — был отвергнутым ее поклонником.

— Простите, Уотсон,— Холмс подбросил полено в угасающий камин и сунул в трубку раскаленный уголек,— так в чем же, собственно, сложность этого... происшествия?

— Как? Вы еще можете об этом спрашивать? — изумился доктор.— Ведь полиция совершенно растерялась, и если бы не я... Парни, развлекавшиеся стрельбой в доллар, единодушно утверждали, что и понятия не имели, кто находится за колонной. При этом они особенно напирали на то обстоятельство, что при всем желании не могли подстрелить эту пташку, даже рикошетом. И если бы не я, полиция отпустила бы с миром всю эту бандитскую компанию...

— Так к какому же выводу вы пришли, дорогой доктор? — полюбопытствовал Холмс.

— Дорогой Холмс! — торжественно произнес доктор.— Я отдаю должное вашему проницательному уму, вашим познаниям в химии и криминалистике. Но есть одна область знания, которой вы почему-то не уделили должного внимания. Это физика. И я, признаться, давно ею увлекаюсь.

— Вот как? — Холмс попытался выразить на своем лице удивление.

— Ну... если говорить точнее, я занимаюсь историей физики, которая требует меньших математических познаний, а увлекает, пожалуй, еще более, чем сама физика... Да! На чем я остановился? Так вот, полиция уже совсем было собралась отпустить Тома Найса и его дружков, как вдруг я вспомнил о пятне Пуассона, и это сразу же позволило предъявить задержанным обвинение в покушении на убийство!

— А где же, доктор, «удивительные совпадения», которыми так «полна жизнь»?

— Ну разве не удивительно то, что как раз накануне вечером я закончил читать книгу по истории оптики, в которой, в частности, подробно рассказывалось о пятне Пуассона?!

— Напомните, пожалуйста, и мне,— попросил знаменитый сыщик,— что это за пятно.

— Как, вы не знаете? — изумился Уотсон.

— Дорогой друг,— улыбнулся Холмс,— вы уже не раз объясняли мне довольно простые вещи. Будьте же снисходительны и сегодня!

Доктор Уотсон прокашлялся.

— Еще в те далекие времена, когда в физике безраздельно господствовала корпускулярная теория света, Френель выдвинул волновую гипотезу. Великий Пуассон, ознакомившись с этой работой, запротестовал: «Если дело обстоит так, как утверждает месье Френель,— заявил он,— то в центре тени, которую отбрасывает на экран непрозрачный диск, должно находиться светлое пятно. Как вы понимаете, господа, это абсурд!» Однако поставили эксперимент. И что же выяснилось? В центре тени оказалось светлое пятнышко! По иронии судьбы оно было названо пятном Пуассона.

— Занятно,— сказал Холмс.— Я и не знал, что эта штука так называется. Но какое, собственно, отношение имеет этот феномен к делу, о котором вы рассказываете?

Польщенный доктор снисходительно улыбнулся:

— Вам следовало бы знать, дорогой Холмс, что согласно законам квантовой механики не только свет, но и каждое материальное тело в какой-то степени обладает волновыми свойствами. Следовательно, даже пули подвластны эффекту Пуассона. И преступнику это было известно — он сознался, что читал научно-популярные книжки. Стреляя в колонну, Том Найс рассчитывал попасть в центр «тени» и прикончить коварную мисс Крэзифил, имея, в то же время, бесспорное алиби. Он нисколько не сомневался, что собьет невежественных полицейских с толку. И это ему удалось бы, если бы не ваш покорный слуга...

— Ловко, Уотсон. Однако,— вздохнул Холмс,— ваша версия грешит чрезмерной стройностью.

—???

— Вот вы утверждаете, например, что даже пули подвластны эффекту Пуассона. Неплохо сказано. Для поэта. Но не для криминалиста. Давайте прикинем, какова власть этого эффекта над пулями...

Холмс на мгновенье задумался. Доктор недоуменно смотрел на него.

— Ну вот, Уотсон,— проговорил Холмс,— так я и думал, приблизительно десять в минус тридцать четвертой степени.

— Ради бога, Холмс! — голос доктора дрогнул.— Что это значит?

— Это значит, во-первых, что эрудиция в области истории физики без знания самой физики вряд ли принесет вам мировую славу, а во-вторых, для того чтобы, как вы говорите, прикончить свою неверную возлюбленную, бравому парню понадобилось бы палить в колонну без отдыха на протяжение десяти... э... в двадцать седьмой степени лет. То есть в миллиарды миллиардов раз дольше, чем существует наша Вселенная. Полагаю, что за это время он наверняка придумал бы что-нибудь поостроумней. Да и бедная колонна рухнула бы за это время от усталости.

— Холмс, умоляю!.. Откуда вы взяли эти фантастические числа? Миллиарды миллиардов...

— В том-то и дело, дорогой доктор, что физика уже несколько сотен лет как стала количественной наукой. Это во времена Аристотеля можно было слыть знатоком физики, употребляя лишь слова, а не числа. Теперь о пятне Пуассона. Действительно, по корпускулярной теории света тень от круглого непрозрачного предмета — идеальный круг идеально черного цвета. Правильно и то, что согласно волновой теории тень из-за дифракции может быть «испорчена» светлым пятнышком в центре. Светло должно быть всюду на экране, куда световые волны, идущие по разным путям, приходят в фазе. Центр тени — как раз такое место. Но каков размер этого светлого пятнышка? Нетрудно убедиться, что он пропорционален длине волны. А для пули длина волны Де Бройля — которую вы, вероятно, имели в виду, упомянув о волновых свойствах пуль,— ничтожна. Ибо она равна чрезвычайно малой константе Планка, деленной на вполне ощутимые величины массы пули и ее скорости. Так что пятно Пуассона для пуль (если, конечно, не говорить о когерентности источника «пулевых волн») тоже чрезвычайно мало. Соответственно ничтожна и вероятность попадания пули в центр тени. Если подставить надлежащие численные значения величин, нетрудно получить количественный ответ, который вам и показался фантастическим.

— Хм... Вероятность мала, но все же... все же не равна нулю! А ведь убийце могло и просто повезти?! — в отчаянии воскликнул Уотсон.

— Теоретически не исключено. Однако наша Вселенная слишком молода, чтобы хоть раз обеспечить подобное везенье,— невозмутимо заметил Холмс.

— А как же бокал? — все еще не сдавался доктор.

Холмс неторопливо поднялся с кресла, положил трубку на каминную полку и снова взял в руки скрипку.

— Готов побиться об заклад,— улыбнулся он,— что среди посетителей ресторана находилась еще одна девица — назовем ее, скажем, мисс Мэдлав. Она сгорала от ревности. И, судя по всему, именно мисс Крэзифил стояла на ее пути...

— Я все понял! — воскликнул доктор Уотсон.— Мисс Мэдлав, которой колонна отнюдь не мешала, под шум чужой пальбы незаметно выстрелила в соперницу. Не так ли?

Вздохнув, Шерлок Холмс прижал подбородком скрипку.

— К счастью, она промахнулась, и благодаря общей суматохе ей удалось скрыться,— воодушевленно продолжал доктор.

В ответ ему зазвучала прелюдия си-бемоль минор с ее переплетением двух тем. Доктору Уотсону вдруг почудилось, что высоким чистым голосом наука воспевает свою историю, а та мудро и бережно задает ей вопросы...

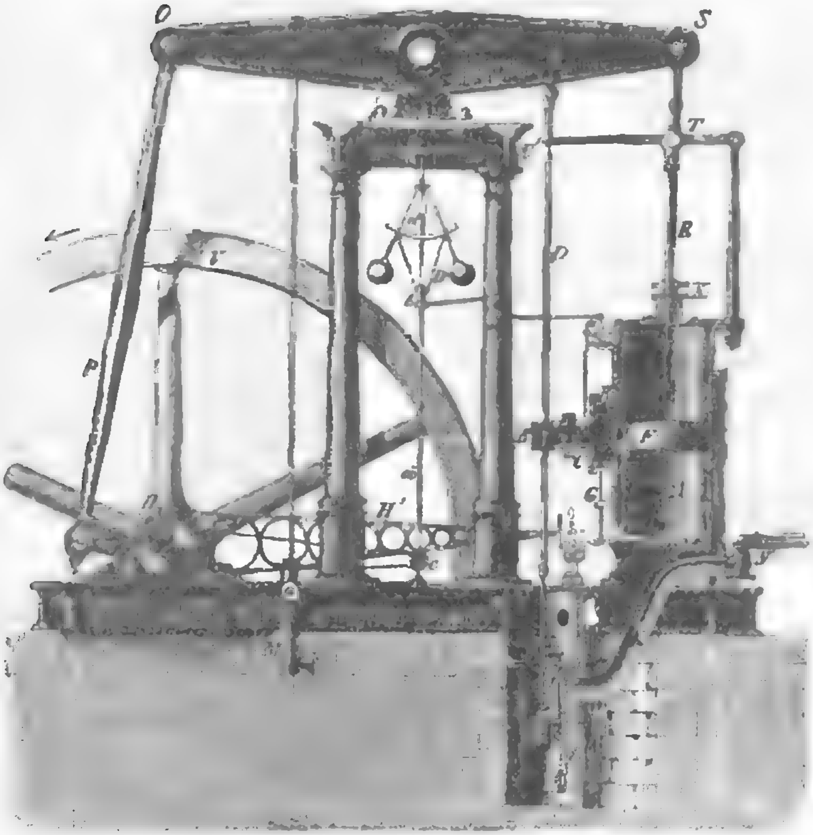
Дорогие читатели!

Напоминаем вам, что журнал «Квант» распространяется только по подписке. Подписка принимается без ограничений во всех агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.

Подписаться на наш журнал можно начиная с любого номера, но оформить подписку нужно до первого числа предподписного месяца. Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 45 копеек.

ИНВЕРСОРЫ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ



С изобретением паровой машины и паровых насосов начала бурно развиваться теория *шарнирных механизмов* — систем, составленных из твердых звеньев, соединенных между собой шарнирами и предназначенных для преобразования движения одного или нескольких звеньев в требуемые движения других звеньев. Около ста лет развитие теории шарнирных механизмов определялось стремлением наиболее удовлетворительным образом решить задачу, с которой столкнулся английский механик Джеймс Уатт при усовершенствовании паровой машины.

Уатт задумал устроить паровую машину следующим образом (рис. 1). В паровой цилиндр *AB* он поместил поршень, который двигался внутри цилиндра взад и вперед. От поршня шел поршневый шток *CD*, проходящий сквозь крышку цилиндра. Так как поршневой шток составлял с цилиндром единое целое, то головка *D* поршневого штока совершала *прямолинейное* движение взад и вперед. На колонку *HK* при помощи шарнирного соединения *K* было насажено коромысло *EF*, с которым посредством шарнира *F* был соединен шатун *FM*,

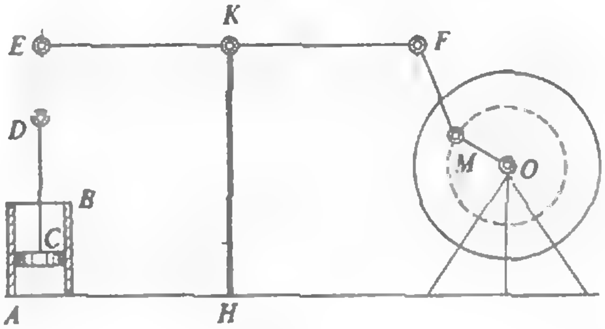


Рис. 1.

соединенный, в свою очередь, шарниром *M* с кривошипом *OM*. На кривошип *OM* насаживался маховик.

Если бы можно было соединить головку *D* поршневого штока с коромыслом *EF*, то движение поршня преобразовывалось бы во вращение маховика. Но точка *D* совершает прямолинейное движение, а точка *E* описывает дугу окружности радиусом *KE* с центром в *K*. Следовательно, соединить точки *D* и *E* жестко нельзя: машина сломается.

Таким образом, возникла проблема: создать спрямляющий механизм, который вел бы точку *D* по прямой, а точку *E* — по дуге окружности. Уатт решил ее, придумав шарнирный механизм, который вел точку *D* по кривой, очень мало уклоняющейся от прямой.

Впоследствии многие ученые разрабатывали устройства, которые вели точку *D* с меньшим, чем в механизме Уатта, уклонением от прямой, и лишь в 60-е годы XIX столетия был изобретен способ точного ведения точки *D* по прямой.

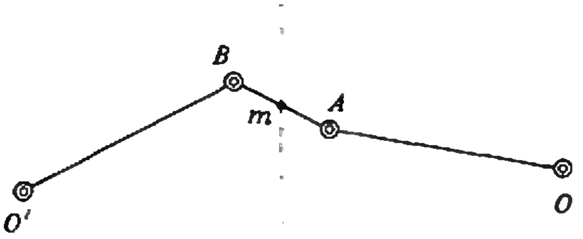


Рис. 2.

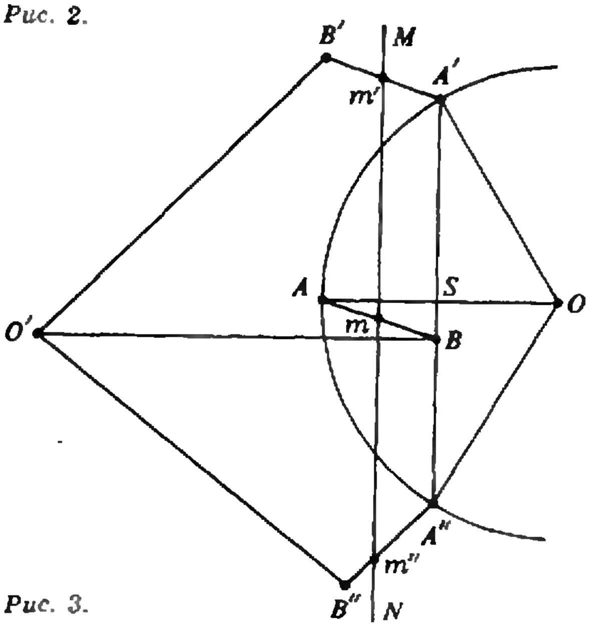


Рис. 3.

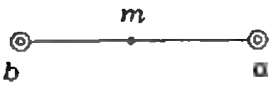


Рис. 4.

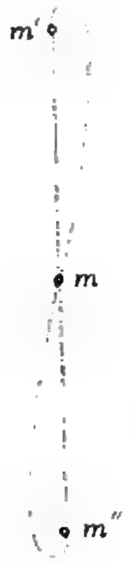


Рис. 5.

Простой спрямляющий механизм Уатта

Уатт рассуждал следующим образом. Рассмотрим два коромысла *AO* и *BO'*, вращающихся вокруг неподвижных центров *O* и *O'*. Если шарнирно соединить концы *A* и *B* коромысел *AO* и *BO'* отрезком *AB* — Уатт называл его серьгой,— то какая-нибудь точка серьги будет совершать движение, мало уклоняющееся от прямолинейного (рис. 2). Для определения наиболее подходящих для этой цели положения неподвижного центра *O'* и длины коромысла *BO'* рассмотрим три положения коромысла *OA* (рис. 3): среднее *OA* и два крайних *OA'* и *OA''* и потребуем, чтобы при этих трех положениях коромысла точка *m* серьги находилась на некоторой прямой *MN*. За такую прямую Уатт принял перпендикуляр к среднему положению коромысла *OA*, проходящий через середину стрелки *SA* (стрелкой называется часть радиуса, перпендикулярного к хорде *A'A''*, заключенная между хордой и дугой).

Возьмем серьгу *ab* определенной длины и выберем на ней точку *m* (рис. 4). Описав радиусом *am* дуги из точек *A'*, *A* и *A''*, получим три положения точки *m* серьги на пересечениях *m'*, *m* и *m''* этих дуг с прямой *MN* (рис. 3). Продолжая прямые *A'm'*, *Am* и *A''m''* и откладывая на их продолжениях отрезки, равные *mb*, мы получим три положения *B'*, *B*

Джеймс Уатт (1736—1819).

и B'' конца серьги, или, что то же самое, конца коромысла BO'. Тремя точками полностью определяется проходящая через них окружность. Для определения центра O' этой окружности восстановим к прямым $B'B$ и BB'' в их серединах перпендикуляры, на пересечении которых и будет лежать искомый центр O'. Раз известно положение центра O', то определилась и длина коромысла BO': она равна $BO'=B'O'=B''O'$.

Теперь, если мы соединим шарниром конец B серьги с концом B коромысла, насаженного на шарнир O', то можем быть уверены, что при среднем и двух крайних положениях коромысла OA, точка m серьги окажется на прямой MN.

Уатт надеялся, что при переходе от m' к m'' точка m серьги мало отклонится от прямой. Надежда эта оправдалась: оказалось, что траектория $m'm''$ точки m весьма хорошо приближается прямой. Можно показать, что точка m в механизме Уатта движется по кривой шестого порядка, имеющей вид удлиненной восьмерки (рис. 5), но часть $m'm''$ этой кривой очень мало отклоняется от прямой линии.

Параллелограмм Уатта

В паровой машине Уатта приходилось вести по прямой линии не только головку штока, соединенного с поршнем парового цилиндра, но еще и головку штока, соединенного с поршнем насоса, который качает воду в холодильник (рис. 6). Поэтому Уатт изменил свой механизм так, что в нем оказались две точки, приближенно направляемые по прямым. Для этого Уатт продолжил звено OA своего механизма (рис. 7) и достроил параллелограмм $ABCD$.

Проводя через точки O и m прямую и обозначая через n точку пересечения этой прямой со звеном CD, мы получим, что точка n звена CD будет описывать кривую, подобную той, которую описывает точка m. Следовательно, точка n также движется по линии, мало уклоняющейся от пря-

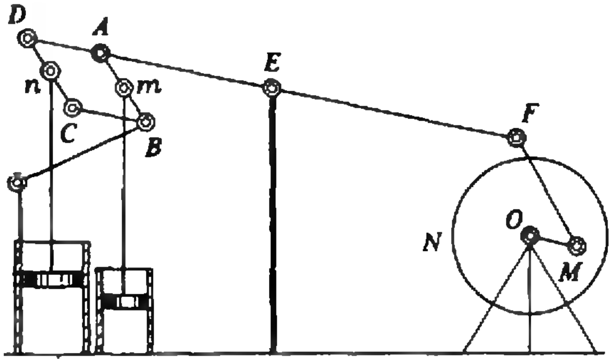


Рис. 6.

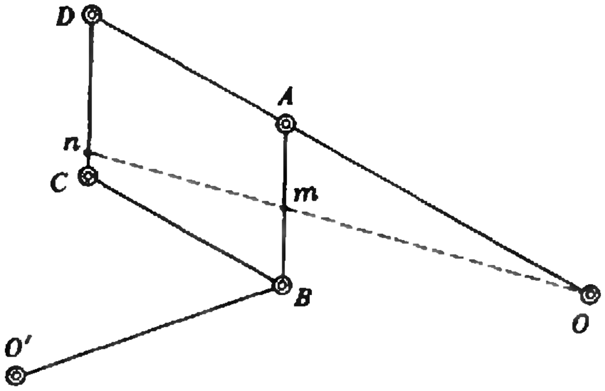


Рис. 7.

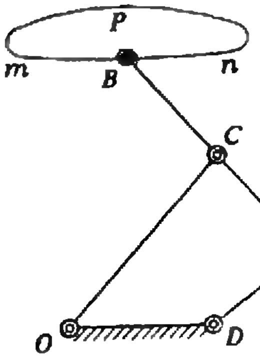


Рис. 8.

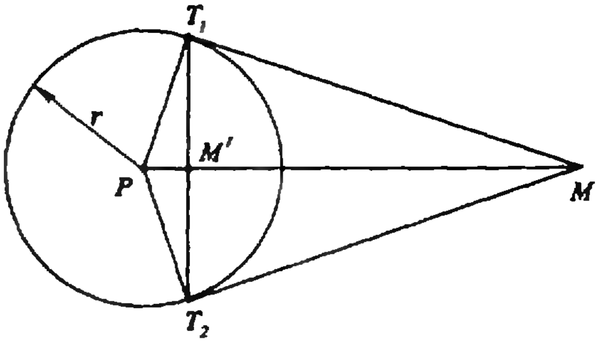


Рис. 10.

мой. Так как высота парового цилиндра больше высоты насосного цилиндра и вследствие этого ход поршневого штока парового цилиндра больше хода поршневого штока насосного цилиндра, Уатт укрепил головку парового штока в точке n, имеющей большую амплитуду, головка же насосного штока была укреплена в точке m.

Общий вид паровой машины с параллелограммом Уатта изображен на рисунке 6. В таком виде она появилась в 1784 году.

Сам Уатт считал своим высшим научным достижением изобретение спрямляющих механизмов, а отнюдь не регулятор, который носит теперь его имя и является краеугольным камнем теории автоматического управления.

Спрямляющий механизм Чебышева

Знаменитый русский математик и механик академик П. Чебышев изобрел несколько замечательных приближенных спрямляющих механизмов, которые он нашел с помощью созданной им теории функций, наименее уклоняющихся от нуля (1858 год). Не имея возможности сколь-нибудь подробно изложить эту теорию, мы опишем только устройство одного из наиболее практичных механизмов Чебышева.

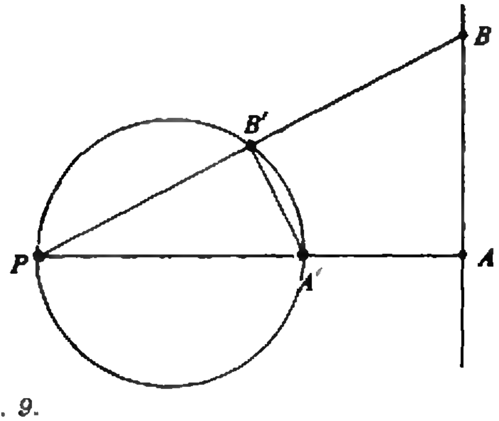


Рис. 9.

Этот механизм (рис. 8) состоит из звена AB, в середине которого устроен шарнир C. На этот шарнир надето звено OC, равное $\frac{AB}{2}$, так что $OC = AC = BC$. Другой конец O звена OC укрепляется в неподвижном шарнире O. Точка A движется по дуге окружности с помощью третьего звена DA, укрепленного в неподвижном шарнире D. При выполнении следующих соотношений между размерами звеньев:

$$OD = \frac{OC + CA + AD}{3}, \quad OC = AC = BC$$

точка B механизма Чебышева описывает кривую mPn, часть которой mn очень мало отличается от прямой. Чебышев показал, что наибольшее отклонение δ отрезка кривой mn от прямолинейного направления, параллельного OD, вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a) + \frac{(4a-r)^3 r}{12(2r+a)^2}} - \sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a)}\right),$$

где $r = AB$, $a = 2AD$. Это очень маленькая величина. Скажем, при $AC = OC = BC = 32$ дюйма (81,3 см), $OD = 25$ дюймов (63,5 см), $DA = 11$ дюймов (27,9 см), $\delta = 0{,}032$ дюйма (0,081 см).

Точные спрямляющие механизмы. Инверсия

Все описанные выше спрямляющие шарнирные механизмы были приближенными: прямая заменялась некоторой подходящей кривой. Теория точных спрямляющих механизмов основана на одном геометрическом преобразовании, имеющем большое значение в современной математике и физике — *инверсии*.

Пусть дана окружность с центром P и радиусом r (рис. 9). Возьмем какую-нибудь точку M, для определенности — внешнюю по отношению к этой окружности. Из точки M проведем к данной окружности касательные MT_1 и MT_2 и построим точку пересечения M' хорды T_1T_2 с прямой PM. Из прямоугольного треугольника PMT_1 находим

$$PM \cdot PM' = r^2. \qquad (1)$$

Обратно, если дана точка M', лежащая внутри окружности, то можно без труда построить внешнюю точку M.

Две точки M и M', лежащие на одном луче, выходящем из центра P окружности радиусом r, называются взаимно обратными относительно этой окружности, если расстояния от них до центра удовлетворяют соотношению (1). Очевидно, что точка, обратная точке окружности, с ней совпадает и что центр окружности не имеет точки, ему обратной.

Соответствие между взаимно обратными точками или, иначе, преобразование, посредством которого из каждой точки M получается обратная ей точка M', называется *инверсией* относительно данной окружности. Сама окружность называется *окружностью инверсии*, ее центр — *полюсом инверсии*, квадрат ее радиуса — *степенью инверсии*.

Из сказанного следует, что инверсия представляет собой взаимно однозначное (за исключением точки P) преобразование точек плоскости. Полюс инверсии обратной точки не имеет.

Соответствие между точками в инверсии взаимно: если точка M' соответствует точке M, то и точка M соответствует точке M'. Каждая точка окружности инверсии является неподвижной точкой.

Рассмотрим теперь важное для наших целей свойство инверсии.

Теорема 1. Прямой линии, не проходящей через полюс инверсии, соответствует окружность, проходящая через полюс инверсии.

Доказательство. Пусть A — проекция полюса инверсии на данную прямую (рис. 10), B — произвольная точка данной прямой, A' и B' — точки, обратные точкам A и B. Из определения инверсии следует, что $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$, или $PA : PB = PB' : PA'$. В силу этой пропорциональности треугольники PAB и $PB'A'$ подобны. Так как угол PAB — прямой, то и угол $PB'A'$ — прямой. Точка B' лежит на окружности, имеющей отрезок PA' своим диаметром, что и требовалось доказать.

В силу взаимности из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Окружность, проходящая через полюс инверсии, преобразуется в прямую, перпендикулярную прямой, соединяющей полюс инверсии с центром данной окружности.

Следовательно, если бы нам удалось получить механизм, реализующий инверсию, то удалось бы преобразовывать движение по окружности в движение по прямой и обратно.

Механизмы, реализующие инверсию, называются *инверсорами*.

Инверсор Поселлье

В 1864 году французский инженер Поселлье сконструировал следующий

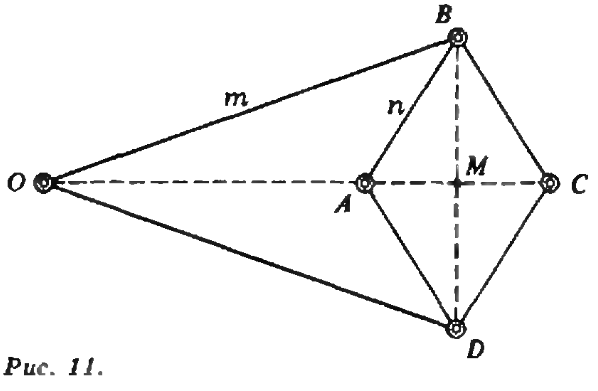


Рис. 11.

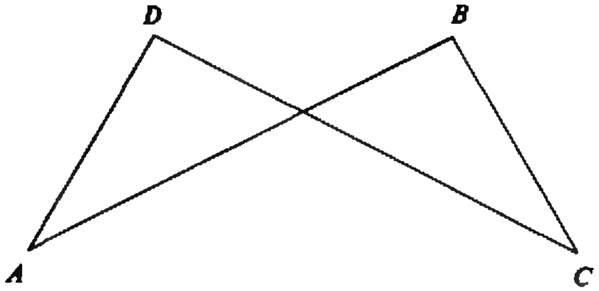


Рис. 12.

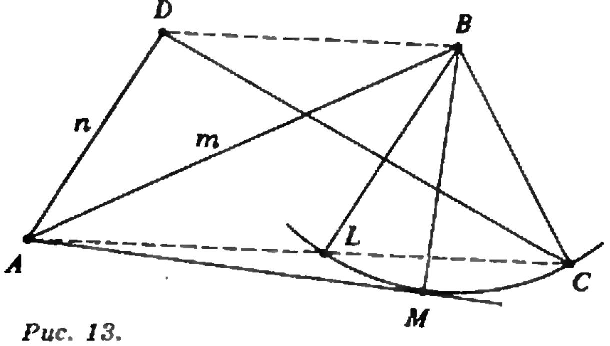


Рис. 13.

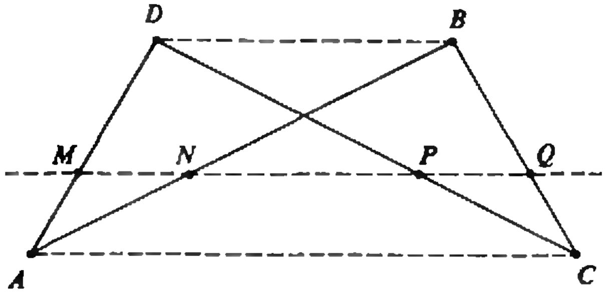


Рис. 14.

инверсор. Четыре равных между собой прямолинейных звена соединяются шарнирами в ромб $ABCD$ (рис. 11). От каких-либо двух противоположных вершин ромба проводятся два равных между собой звена BO и DO, причем каждое из них длиннее стороны ромба. В точках B, D и O помещаются шарниры. Получившийся механизм и есть инверсор Поселлье.

Теорема 3. При любом положении инверсора Поселлье произведение расстояний AO и OC есть величина постоянная.

Доказательство. Обозначим длину каждого из длинных звеньев инверсора через m, так что

$$OB=OD=m.$$

Обозначим длину каждого из коротких звеньев через n, так что

$$AB=BC=CD=DA=n.$$

Проведем диагонали ромба. Одна из них пройдет через точку O, поскольку вершины равнобедренных треугольников DOB, DAB и DCB, имеющих общее основание BD, лежат на одной прямой. Положим $OA=r$, $OC=\rho$. Из треугольника OBM имеем

$$BM^2=m^2-OM^2. \qquad (2)$$

Из треугольника BCM

$$BM^2=n^2-CM^2. \qquad (3)$$

Вычитая (3) из (2), получаем

$$m^2-n^2=OM^2-CM^2=$$
$$=(OM+CM)(OM-CM)=OC\cdot OA,$$

или

$$\rho\cdot r=m^2-n^2.$$

Итак, в инверсоре Поселлье произведение

$$\rho\cdot r=OC\cdot OA$$

остается постоянным при любых изменениях OC и OA, что и требовалось доказать.

Следовательно, если мы сделаем точку O такого инверсора неподвижной и будем двигать точку A по какой-либо кривой, то точка C опишет образ этой кривой при инверсии. В частности, если точка A движется по окружности, проходящей через полюс инверсии, то точка C будет двигаться по прямой. Отметим, что в 1872 году описанный выше инверсор независимо от Поселлье изобрел ученик Чебышева студент Петербургского университета Липкин.

Инверсор Гарта

Вскоре после появления инверсора Поселлье английский математик и механик Г. Гарт построил инверсор из антипараллелограмма. Антипараллелограммом называется четырехугольник $ABCD$ (рис. 12), в котором противоположные стороны равны и стороны AB и CD взаимно пересекаются. Тот факт, что шарнирный антипараллелограмм реализует инверсию, вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 4. Произведение диагоналей DB и AC антипараллелограмма (рис. 13) есть величина постоянная.

Доказательство. Условимся о следующих обозначениях:

$$AB = DC = m, \quad AD = BC = n.$$

Проведем отрезок BL, параллельный AD, и опишем из точки B радиусом BL дугу. Эта дуга пройдет через точку C, поскольку

$$BL = DA = BC.$$

Проведем из точки A касательную AM к этой дуге. Квадрат касательной AM равен произведению секущей на ее внешний отрезок. Следовательно,

$$AM^2 = AL \cdot AC = DB \cdot AC. \qquad (4)$$

Из треугольника ABM имеем

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = AB^2 - BC^2 = m^2 - n^2.$$

Сравнивая это равенство с (4), получаем

$$DB \cdot AC = m^2 - n^2 = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Любые три из четырех точек пересечения сторон антипараллелограмма прямой, параллельной его диагонали, образуют на этой прямой два отрезка, произведение которых при всех положениях антипараллелограмма остается постоянным.

Доказательство. Проведем какую-либо прямую, пересекающую все стороны антипараллелограмма и параллельную его диагоналям (рис. 14). Получим четыре точки пересечения M, N, P, Q его сторон с этой прямой. Из подобия треугольников AMN и ADB вытекает, что

$$MN = BD \cdot \frac{AM}{AD}.$$

Из подобия треугольников ABC и NBQ имеем

$$NQ = AC \cdot \frac{BQ}{BC}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим

$$MN \cdot NQ = BD \cdot AC \cdot \frac{AM}{AD} \cdot \frac{BQ}{BC}.$$

Но отношение $\frac{AM}{AD} \cdot \frac{BQ}{BC}$ постоянно, так как в него входят только постоянные величины. Произведение $BD \cdot AC$ постоянно согласно теореме 4. Следовательно,

$$MN \cdot NQ = \text{const}.$$

Точно таким же способом можно доказать, что

$$MP \cdot PQ = \text{const}.$$

Инверсор Гарта устроен следующим образом. Приняв какую-либо из этих четырех точек за центр инверсии, будем двигать вторую точку по окружности, проходящей через первую точку. Тогда третья точка вычертит прямую.

Письма о физике

(Начало см. на с. 2)

ском политехническом институте на инженерно-физическом факультете есть специальные группы, в которых готовят физиков-теоретиков. Выбор специальности происходит, как правило, на 3-м курсе, а первые два-два с половиной года будущие физики-экспериментаторы и физики-теоретики учатся вместе. Тех, кто рано (с первых месяцев учебы) сделал выбор, решив стать физиком-теоретиком, подстерегает опасность: считая, что главное для них математика, они «не замечают» общей физики — курса, вводящего студента в мир физики... Надо помнить: стать хорошим физиком-теоретиком можно только хорошо зная и понимая не только математику (без нее, конечно, нельзя обойтись!), но и физику, с изучением которой у многих школьников и студентов первых курсов возникают трудности. Я хотел написать «почему-то возникают трудности», но почувствовал в «почему-то» фальшь. Общая физика — труднейший предмет и для преподавания, и для усвоения.

М. Каганов

(Рисунки к статье заимствованы из книги «Физики шутят».)

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июня 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1216» или «Ф1223». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1216—М1220, Ф1223—Ф1227

М1216. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.

К. Нистореску (Румыния)

М1217. Докажите для любого натурального n равенство

$$\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1\right)^2=$$

$$=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Ю. Бурман

М1218. На отрезке AC взята точка B и построены дуги: $\overline{AC}=\alpha$ и $\overline{BC}=\beta$, сумма градусных величин которых равна $\alpha+\beta=360°$, лежащие в одной полуплоскости от прямой AC. Произвольная дуга AB пересекает их в точках K и L (рис. 1). Докажите, что всевозможные прямые KL пересекают прямую AC в одной и той же точке.

Б. Михайлов (Болгария)

М1219*. Докажите, что для любых n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n>1)$ справедливо неравенство

$$(x_2+\ldots+x_n)^{x_1}+\ldots+(x_1+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n)^{x_i}+\ldots$$

$$\ldots+(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{x_n}>n-1.$$

Например, для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x+y)^z+(y+z)^x+(z+x)^y>2.$$

А. Михайлов

М1220*. Определим последовательность b_n условиями: $b_1=0$, $b_2=2$, $b_3=3$, $b_{n+1}=b_{n-1}+b_{n-2}$ при $n\geqslant 3$. Докажите, что при простом p число b_p делится на p.

Д. Фомин

Ф1223. Горизонтальная поверхность вибротранспортера приводится в движение эксцентриками, синхронно вращающимися вокруг неподвижных горизонтальных осей O и O' (рис. 2). При какой угловой скорости вращения эксцентриков лежащие на поверхности детали начнут перемещаться? В каком направлении они будут перемещаться при вращении эксцентриков по часовой стрелке? Коэффициент трения деталей о поверхность k, радиус эксцентриков r.

Е. Бутиков

Ф1224. В горизонтальном дне цилиндрического сосуда сделано круглое отверстие диаметром $d=10$ см для слива воды. Если отверстие открыть, то не вся вода выльется, часть ее останется на дне. Оцените массу этой оставшейся воды, если дно сосуда плохо смачи-

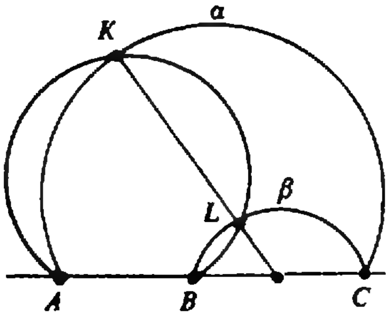


Рис. 1.

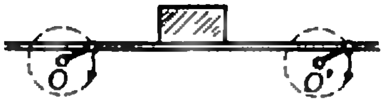


Рис. 2.

вается водой. Диаметр сосуда $D=50$ см. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}07$ Н/м.

В. Можаев

Ф1225. Свинцовая проволочка диаметром $d_1=0{,}3$ мм плавится при пропускании через нее тока $I_1=1{,}8$ А, а проволочка диаметром $d_2=0{,}6$ мм — при токе $I_2=5$ А. При каком токе разорвет цепь предохранитель, составленный из двух этих проволочек, соединенных параллельно? А из двадцати тонких и одной толстой? Длины всех проволочек одинаковы.

А. Ходулев

Ф1226. На ленте магнитофона записан синусоидальный сигнал частотой 5 кГц при скорости ленты 19,05 см/с. При воспроизведении на этой скорости амплитуда сигнала воспроизводящей головки составила 1 мВ. Какой станет частота и амплитуда этого сигнала, если увеличить скорость ленты при воспроизведении до 38,1 см/с? А если уменьшить при записи и воспроизведении до 4,75 см/с? Ширину переднего зазора воспроизводящей головки принять равной 5 мкм. Максимальную намагниченность ленты после записи в обоих случаях считать одинаковой.

Р. Александров

Ф1227. Нелинейность вольт-амперной характеристики лампы накаливания связана с тем, что сопротивление нити увеличивается с ее нагревом. Получите зависимость тока через лампу от приложенного к ней напряжения при следующих упрощающих предположениях: теплоотдачу считать связанной с излучением ($P_{\text{изл}}\sim T^4$, где T — температура нити); сопротивление нити $R\sim T$. Лампа 60 Вт, 220 В.

Снизим напряжение до 200 В. Какой будет мощность лампы? Сильно ли упадет световой поток?

А. Зильберман

Решения задач

М1191—М1195, Ф1203—Ф1207

М1191. *Пусть A_1, A_2, A_3, ...— некоторая последовательность точек на плоскости. Начав с некоторой точки T_0, построим последовательность T_1, T_2, T_3, ..., где T_n — точка, симметричная T_{n-1} относительно A_n ($n=1, 2, 3, \ldots$). Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять последовательность A_n, чтобы последовательность T_n получа-*

Ответ: последовательность A_n должна быть периодической с некоторым периодом p, т. е. $A_{n+p}=A_n$ при всех $n\geqslant 1$, причем при нечетном p расположение точек $A_1, \ldots, A_p$ может быть любым, а при четном p должно выполняться условие

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\ldots+\overline{A_{p-1}A_p}=\bar{0}. \qquad (*)$$

Допустим, что T_n — периодическая последовательность при каком-то T_0, тогда и последовательность отрезков $T_{n-1}T_n (n\geqslant 1)$ периодична. А поскольку A_n — середина отрезка $T_{n-1}T_n$, последовательность A_n также периодична. Ее период обозначим через p.

Точка T_p получается из T_0 в результате композиции (последовательного выполнения) центральных симмет-

лась периодической при любом выборе точки T_0 (т. е. $T_{n+p}=T_n$ для некоторого p при всех n)?

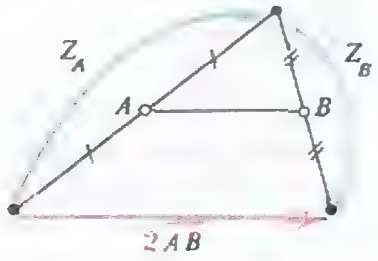


Рис. 1.

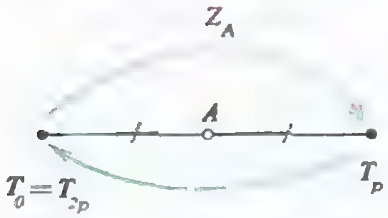


Рис. 2.

рий $Z_1, \ldots, Z_p$ с центрами $A_1, \ldots, A_p$. Как видно из рисунка 1, композиция двух центральных симметрий Z_A и Z_B с центрами A и B есть параллельный перенос Π на вектор $2\overline{AB}$: $Z_B \cdot Z_A = \Pi_{2AB}$. Отсюда же следует, что $Z_B \cdot \Pi_{2AB} = Z_A$, т. е. композиция переноса и центральной симметрии есть центральная симметрия. Поэтому при четном p композиция $Z_p \cdot \ldots \cdot Z_1 = (Z_p \times \times Z_{p-1}) \cdot \ldots \cdot (Z_2 \cdot Z_1)$ — это параллельный перенос на вектор $2A_1A_2 + 2A_3A_4 + \ldots + 2A_{p-1}A_p$. *Если этот перенос* оставляет на месте хотя бы одну точку T_0 ($T_0 = T_p$), то его вектор — нулевой, т. е. выполнено условие (*), и тогда $T_p = T_0$ при любом T_0. Итак, при *четном* p условие (*) необходимо и достаточно для периодичности.

При нечетном p композиция $Z_{p-1} \cdot \ldots \cdot Z_1$ — это некоторый перенос Π. Следовательно, $Z_p \cdot Z_{p-1} \cdot \ldots \cdot Z_1 = Z_p \cdot \Pi$ — центральная симметрия Z_A с некоторым центром A, т. е. $T_p = Z_A(T_0)$ *при любом* T_0, *а значит,* $T_{2p} = Z_A(T_p) = Z_A^2(T_0) = T_0$ (рис. 2). Итак, при нечетном p последовательность T_n периодична независимо от расположения точек $A_1, \ldots, A_p$ с периодом $2p$.

И. Акулич. В. Дубровский

М1192. *Известно, что все ребра многогранника М равны между собой и касаются некоторого шара.*
а) Пусть одна из граней М имеет нечетное число сторон. Докажите, что существует описанный вокруг М шар.
б) Обязательно ли в условиях пункта а) существует вписанный в М шар?
в) Пусть все грани М имеют одинаковое число сторон. Докажите, что существует вписанный в М шар.
г) Обязательно ли в условиях пункта в) существует описанный шар?

Пусть $A_1A_2 \ldots A_n$ — одна из граней нашего многогранника. Она описана около круга, по которому данный шар пересекает плоскость этой грани. Из равенства ее сторон и равенства касательных к кругу, проведенных из одной вершины, следует, что касательные, проведенные из двух вершин, взятых через одну (*например,* A_1 *и* A_3, A_2 *и* A_4), равны (рис. 1). Поэтому треугольники OA_1A_2, OA_2A_3, ... (где O — центр круга) также равны друг другу.

а) Обходя вершины грани $A_1 \ldots A_n$ через одну, мы при нечетном n в какой-то момент попадем в вершину, соседнюю с исходной. Следовательно, касательные к кругу, проведенные из этих двух вершин, а значит, и из любой вершины, равны. *Иначе говоря,* данный шар касается всех сторон грани $A_1 \ldots A_1$ в их серединах. Но *тогда это верно* и для любой смежной грани. А поскольку любые две грани можно соединить цепочкой смежных граней, каждое ребро многогранника касается шара в своей середине. Отсюда следует, что все вершины удалены от центра данного шара на одно и то же расстояние (равное $\sqrt{R^2+a^2/4}$, где R — радиус шара, a — длина ребра), т. е. все вершины лежат на одной сфере.

б) Ответ: необязательно. Например, в правильную треугольную призму с равными ребрами *вписать шар* нельзя, но шар, касающийся всех ее ребер, существует.

в) Из равенства треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ... (см. начало решения) следует, что все стороны грани

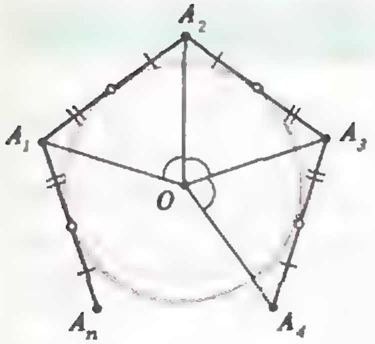


Рис. 1.

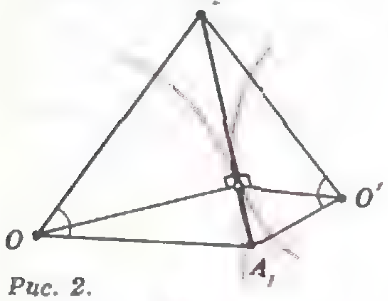


Рис. 2.

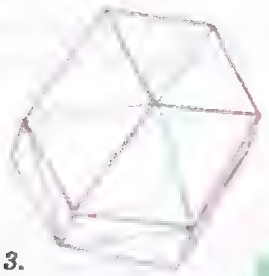


Рис. 3.

$A_1...A_n$ видны из центра вписанного в нее круга O под углом $2\pi/n$. Пусть O' — центр круга, вписанного в смежную грань, а общее ребро этих граней, скажем, A_1A_2. Треугольники OA_1A_2 и $O'A_1A_2$ имеют общее основание и равные углы при вершинах O и O' (т. к. обе грани имеют одинаковое число сторон), кроме того, совпадают основания высот, опущенных на A_1A_2 (рис. 2). Отсюда легко получить равенство этих высот, т. е. радиусов вписанных в грани окружностей. Рассматривая, как в пункте а), цепочку смежных граней, получаем, что все радиусы окружностей, вписанных в грани, равны одной и той же величине r. Поэтому все грани удалены от центра Z данного шара на одно и то же расстояние $ZO=\sqrt{R^2-r^2}$.

г) Ответ: необязательно. Построим на каждой грани куба как на основании правильную четырехугольную пирамиду с двугранным углом при основании $\pi/4$ (рис. 3). Получится многогранник, имеющий 12 граней-ромбов (ромбододекаэдр). Из соображений симметрии ясно, что все его ребра равноудалены от центра куба (т. е. касаются шара), а вершины куба и вершины пирамид находятся от центра куба на разных расстояниях.

В. Сендеров

М1193*. *Докажите (для любых чисел a, b, c, x, y, z) неравенство*

$$ax+by+cz+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqslant\frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

Будем считать, что ни одна из троек чисел $(a;\ b;\ c)$ и $(x;\ y;\ z)$ не нулевая (иначе неравенство очевидно). Рассмотрим векторы $\bar v=(a;\ b;\ c)$ и $\bar u=(x;\ y;\ z)$. Корень в левой части неравенства — это произведение их длин. Разделим обе части неравенства на это произведение и введем «единичный» вектор $\bar w=(1;\ 1;\ 1)$. Пользуясь выражением скалярного произведения в координатах, перепишем неравенство в виде

$$\frac{\bar v\cdot\bar u}{|\bar v||\bar u|}+1\geqslant 2\frac{\bar u\cdot\bar w}{|\bar v||\bar w|}\cdot\frac{\bar u\cdot\bar w}{|\bar u||\bar w|},$$

или

$$\cos\alpha+1>2\cos\beta\cos\gamma,$$

где α, β и γ — углы между векторами $\bar v$ и $\bar u$, $\bar v$ и $\bar w$, $\bar u$ и $\bar w$ (рис. 1). В силу неравенства треугольника для плоских углов трехгранного угла $\alpha\leqslant\beta+\gamma$. Поэтому

$$\cos\alpha+1\geqslant\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=2\cos\beta\cos\gamma,$$

что и требовалось доказать.

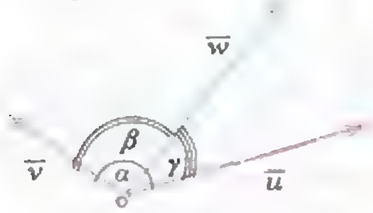


Рис. 1.

Из рассуждения видно, что неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $\beta=\gamma$, $\alpha=2\gamma$, т. е. лучи, направленные вдоль векторов $\bar v$ и $\bar u$, симметричны относительно прямой $x=y=z$ (рис. 2). Проекция вектора $\bar u=(x;\ y;\ z)$ на эту прямую имеет координаты, равные $\frac{x+y+z}{3}$. При этом координаты век-

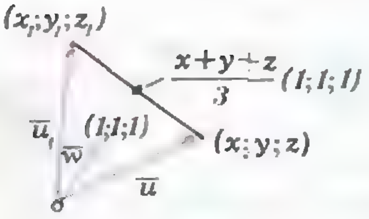


Рис. 2.

тора $\bar{u}_1$, симметричного $\bar{u}$, равны $(x_1;\ y_1;\ z_1)=$ $=\left(\frac{2(y+z)-x}{3};\ \frac{2(z+x)-y}{3};\ \frac{2(x+y)-z}{3}\right)$, а условие равенства можно записать как $x_1/a=y_1/b=z_1/c$. Кстати, эти соображения подсказывают чисто алгебраическое решение задачи: для доказательства неравенства достаточно в неравенство Коши

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}\geqslant ax_1+by_1+cz_1$$

подставить указанные выше выражения x_1, y_1, z_1 через x, y, z.

В. Дубровский, В. Кыртоаже

М1194. *а) Из точки M внутри прямоугольника $ABCD$ площади S проводятся биссектрисы ME, MF, MG, MH треугольников AMB, BMC, CMD, DMA. Докажите, что для площади S_0 четырехугольника $EFGH$ выполнены неравенства*

$$\frac{3}{8}S<S_0\leqslant\frac{1}{2}S.$$

б) Для каких точек M выполнено равенство $S_0=$ $=S/2$?

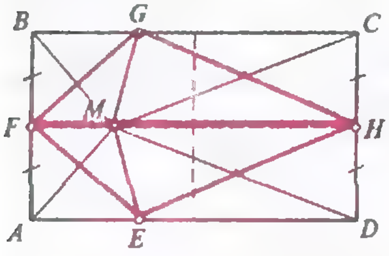


Рис. 1.

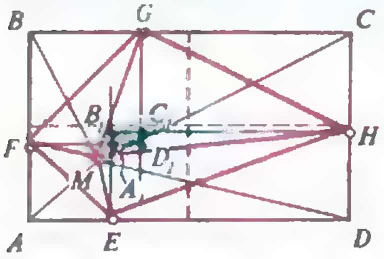


Рис. 2.

Если точка M лежит на одной из средних линий прямоугольника, то, очевидно, $S_0=S/2$ (рис. 1). Покажем, что для всех других точек M

$$\frac{3}{8}S<S_0<\frac{1}{2}S.$$

Пусть A — ближайшая к точке M вершина прямоугольника (она определяется однозначно; рис. 2). Покажем, что $AE<BG<BC/2$. Очевидно, эти неравенства эквивалентны таким: $AE^2/ED^2<BG^2/GC^2<1$. Заменяя здесь отношения, в которых биссектрисы делят отрезки AD и BC, на отношения соответствующих сторон треугольников AMD и BMC, приходим к неравенствам

$$\frac{AM^2}{MD^2}<\frac{BM^2}{MC^2}<1. \qquad (1)$$

Пусть x, x_1, y и y_1 — расстояния от точки M до сторон AD, BC, AB и CD (рис. 3), тогда

$$\frac{AM^2}{MD^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2+y_1^2}=1-\frac{y_1^2-y^2}{x^2+y_1^2},\quad \frac{BM^2}{MC^2}=1-\frac{y_1^2-y^2}{x_1^2+y_1^2}.$$

Отсюда и следуют неравенства (1), поскольку $x_1<x_1$, $y<y_1$. Аналогично доказывается, что $AF<DH<DC/2$. Проведем через точки E и G прямые, параллельные AB, а через F и H — прямые, параллельные AD. Эти прямые ограничивают прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ площадью s (см. рис. 2). Из доказанных неравенств следует, что треугольники EFA_1, FGD_1, GHC_1 и HEB_1 покрывают четырехугольник $EFGH$ в один слой, за исключением прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$, который покрывается дважды. Поэтому сумма площадей этих треугольников равна S_0+s. Добавляя к равной ей сумме площадей треугольников AEF, BFG, CGH и DHE площадь S_0, получим площадь S всего данного прямоугольника. Следовательно, $2S_0+s=S$, т. е. $S_0=(S-s)/2$. Остается заметить, что $0<s<S/4$ (правое неравенство следует из того, что $FD_1=BG<BC/2$, $EA_1=DH<DC/2$).

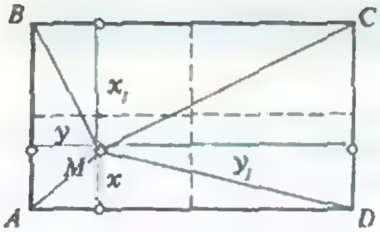


Рис. 3.

Итак, ответ к задаче б); равенство $S_0=S/2$ выполнено только для точек, лежащих на средних линиях прямоугольника.

А. Азамов

От редакции. Наш читатель *Е. Гольберг* (Ленинград) выдвинул предположение, что число $3/8$ в нижней оценке площади S_0 можно заменить на $\sqrt{2}-1=0{,}414\ldots$, причем эта оценка уже будет точной (равенство достигается, когда $ABCD$ — квадрат, а M — одна из его вершин). Правда, доказал он только неравенство $S_0>0{,}4S$ $(3/8<0{,}4<\sqrt{2}-1)$. Наметим его доказательство, оставляя читателю возможность восстановить промежуточные выкладки, а также подтвердить или опровергнуть высказанную гипотезу. Пусть расстояния от M до A, B, C, D равны a, b, c, d, тогда неравенство $S_0>0{,}4S$ можно представить в виде

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{(a+b)(d+a)}+\frac{b^2}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2}{(c+d)(b+c)}+\right.$$
$$\left.+\frac{d^2}{(d+a)(c+d)}\right)>0{,}4,$$

или

$$5(bd-ac)^2<(a+b)(b+c)(c+d)(d+a). \qquad (2)$$

Если a — наименьшее из четырех расстояний (рис. 2), то $a\leqslant b\leqslant d\leqslant c$ и $ac\leqslant bd$ (см. (1)); кроме того, $a^2+c^2=$ $=b^2+d^2$. Неравенство (2) выводится из этих соотношений чисто алгебраически.

М1195. *Последовательность x_1, x_2, ... такова, что для любых натуральных m и n*

$$|x_{m+n}-x_m-x_n|<$$
$$<1/(m+n).$$

Докажите, что эта последовательность — арифметическая прогрессия.

По условию при любых натуральных n и k

$$|(x_{n+1}-x_n)-(x_{k+1}-x_k)|=|(x_{n+k+1}-x_n-x_{k+1})-$$
$$-(x_{n+k+1}-x_{n+1}-x_k|\leqslant|x_{n+k+1}-x_n-x_{k+1}|+$$
$$+|x_{n+k+1}-x_{n+1}-x_k|<\frac{2}{n+k+1}<\frac{2}{n}.$$

Фиксируя k, а n устремляя к бесконечности, получим, что последовательность $x_{n+1}-x_n$ имеет предел, равный $x_{k+1}-x_k$.

Но k здесь можно выбрать любым, следовательно, разность $x_{k+1}-x_k$ не зависит от k, т. е. x_k — арифметическая прогрессия.

О. Ижболдин

Ф1203. *На шероховатой железнодорожной платформе стоит равномерно*

Рассмотрим силы, действующие на контейнер. Это — сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ (рис. 2). Определим N_1 из условий равновесия *заполненный контейнер высотой H и шириной L, имеющий с одной стороны маленькие колеса (рис. 1). При разгоне поезда влево контейнер начинает сползать вправо по платформе, если ускорение разгона превышает a_0. С каким минимальным ускорением должен затормозить поезд, чтобы контейнер начал сползать влево? Трением качения пренебречь.*

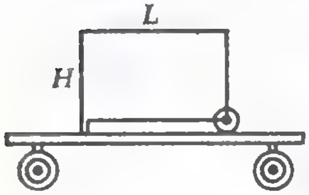


Рис. 1.

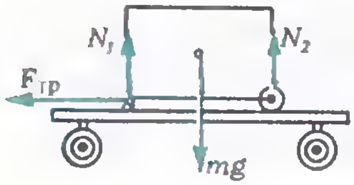


Рис. 2.

контейнера, т. е. из равенства нулю моментов всех сил относительно центра контейнера и проекций всех сил на вертикальное направление:

$$F_{тр}\frac{H}{2}+N_1\frac{L}{2}-N_2\frac{L}{2}=0,$$
$$N_1+N_2-mg=0,$$

откуда

$$N_1=\frac{1}{2}mg-\frac{H}{2L}F_{тр}.$$

При ускорении платформы $F_{тр}=ma_0$. С другой стороны, в момент начала сползания контейнера $F_{тр}=\mu N_1$, где μ — коэффициент трения. Отсюда получаем

$$ma_0=\frac{1}{2}\mu mg-\frac{H}{2L}\mu ma_0 \Rightarrow \mu=\frac{2a_0}{g-a_0H/L}.$$

При торможении платформы с ускорением a сила трения направлена вправо и равна $F_{тр}=ma$, а в момент начала сползания контейнера $F_{тр}=\mu N_1$. Аналогично предыдущему, получаем

$$ma=\frac{1}{2}\mu mg+\frac{H}{2L}\mu ma \Rightarrow \mu=\frac{2a}{g+aH/L}.$$

Из двух выражений для μ находим искомое ускорение:

$$a=\frac{a_0}{1-2a_0H/(gL)}.$$

Заметим, что при сильном трении контейнер может, не начав сползания, перевернуться. Найдем «критические» значения коэффициента трения и ускорения. При перевороте $N_2=0$ и $F_{тр}=ma_{кр}$; следовательно,

$$N_1=mg,$$
$$mg\frac{L}{2}=ma_{кр}\frac{H}{2}.$$

Отсюда

$$a_{кр}=g\frac{L}{H},\quad \mu_{кр}=\frac{L}{H}.$$

Такому значению μ соответствует ускорение при разгоне

$$a_0=g\frac{L}{3H}.$$

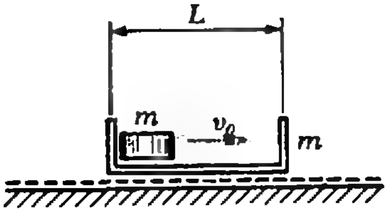
Итак,

$$a=\frac{a_0}{1-2a_0H/(gL)} \text{ при } a_0<g\frac{L}{3H}.$$

Если же $a_0>gL/(3H)$, то при достаточно интенсивном торможении контейнер перевернется не сползая.

Д. Григорьев

Ф1204. *Небольшой упругий брусок массой m может двигаться без трения внутри прямоугольной коробки такой же массы. Коробка находится на столе, покрытом тонким слоем масла (см. рисунок). Сила трения коробки о стол зависит только от скорости v движения коробки по столу и равна $F=-\gamma v$. В начальный момент времени коробка покоится, а брусок находится у ее левой стенки и имеет скорость v_0, направленную вправо. Сколько ударов о коробку совершит брусок, если длина коробки L много больше размеров бруска?*



При каждом упругом соударении бруска и коробки они обмениваются скоростями. Так, после первого соударения брусок остановится, а коробка поедет вправо, после второго — наоборот: коробка остановится, а брусок поедет вправо, но при этом скорость бруска v_1 будет меньше v_0. Таким образом, при продвижении коробки на расстояние L происходит ровно 2 удара. Найдем полный путь s, пройденный коробкой.

Заметим, что скорость движения коробки сразу после остановки бруска каждый раз в точности равна ее скорости перед остановкой, поскольку брусок движется без трения. Поэтому можно исключить из рассмотрения интервалы времени, когда коробка стоит, и считать ее движение непрерывным. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{m\Delta v}{\Delta t} = -\gamma v,$$

откуда

$$m\Delta v = -\gamma\Delta s \text{ и } mv_0 = \gamma s.$$

Следовательно, число ударов бруска о коробку

$$n = 2\frac{s}{L} = \frac{2mv_0}{\gamma L}.$$

Д. Григорьев

Ф1205. *При прочих равных условиях в какой шубе бóльшие потери тепла на излучение — в белой или в черной?*

Вопрос задачи, по существу, сводится к следующему: какое тело — белое или черное — сильнее излучает при одной и той же температуре?

Поместим мысленно оба тела в теплоизолированную полость с идеально отражающими стенками. Казалось бы, черное тело, поглощающее падающее на него излучение намного эффективнее, чем белое, должно нагреваться, а белое — охлаждаться. Другими словами, должен происходить самопроизвольный переход тепла от более холодного тела к горячему. Это, однако, противоречит второму закону термодинамики. Как же разрешается этот парадокс?

Ответ состоит в том, что черное тело не только сильнее, чем белое, поглощает, но и сильнее излучает. А тогда никакой разности температур между черным и белым телами в полости не появится, и противоречия с законами термодинамики не возникнет.

Итак, раз черное тело излучает сильнее белого, в белой шубе будет теплее. Заметим, кстати, что хорошие радиаторы, предназначенные излучать тепло, лучше красить в черный цвет.

О. Никишина

Ф1206. *Две длинные и широкие полосы равномерно заряжены с плотностью зарядов $+\sigma$ (верхняя) и $-\sigma$ (нижняя). Найти величину и направление напряженности электрического поля в точке M, которая находится на высоте h над краем полос на оси, лежащей в их плоскости симметрии (рис. 1). Расстояние между полосами d мало по сравнению с h.*

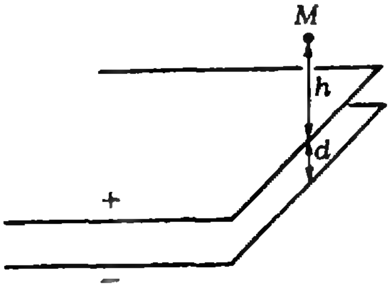


Рис. 1.

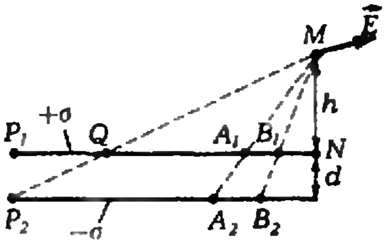


Рис. 2.

Изобразим поперечный разрез системы плоскостью ее симметрии, проходящей через данную точку M (рис. 2; заряженные полосы бесконечно продолжаются по обе стороны от плоскости рисунка). Проведем два близких луча MA_1A_2 и MB_1B_2. Заметим, что очень узкая полоска шириной A_1B_1 эквивалентна нити с линейной плотностью заряда $\rho_1=\sigma\cdot A_1B_1$, находящейся от точки M на расстоянии $r_1 \approx A_1M$. Напряженность $\Delta\vec{E}_1$ создаваемого этой нитью в точке M электрического поля направлена по линии A_1M и равна

$$\Delta E_1=\frac{\rho_1}{2\pi\varepsilon_0 r_1}=\frac{\sigma\cdot A_1B_1}{2\pi\varepsilon_0\cdot A_1M},$$

где ε_0 — электрическая постоянная.*)

Аналогичен вклад соответствующей нижней полоски A_2B_2:

$$\Delta E_2=\frac{\rho_2}{2\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{-\sigma\cdot A_2B_2}{2\pi\varepsilon_0\cdot A_2M}.$$

Из подобия треугольников MA_1B_1 и MA_2B_2 вытекает, что $\Delta E_2=-\Delta E_1$, т. е. полоски A_1B_1 и A_2B_2 (вернее — созданные ими электрические поля) в точности компенсируют друг друга. В конечном итоге нескомпенсированной остается только полоска P_1Q (см. рис. 2). Поскольку общая ширина полос велика ($P_1N \gg h$), напряженность $\vec{E}$ электрического поля, создаваемого полоской P_1Q, направлена практически горизонтально (вправо). Так как треугольники MQN и P_1QP_2 подобны, $P_1Q/QN=d/h \ll 1$, т. е. ширина полоски P_1Q мала по сравнению с расстоянием от нее до точки M. Значит, эту полоску опять можно заменить нитью с линейной плотностью заряда $\rho=\sigma\cdot P_1Q$, находящуюся на расстоянии $r\approx QM\approx QN$ от точки M.

Таким образом, искомая напряженность электрического поля направлена почти горизонтально вправо и равна приблизительно

$$E=\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 r}\approx\frac{\sigma\cdot P_1Q}{2\pi\varepsilon_0\cdot QN}=\frac{\sigma d}{2\pi\varepsilon_0 h}.$$

А. Семенов

Ф1207. *Раствор электролита налит в цилиндрический сосуд, помещенный в вертикальное магнитное поле. Между электродом, проходящим вдоль оси цилиндра, и вторым электродом, которым является боковая поверхность сосуда, все время поддерживается разность потенциалов (рис. 1). Что вы можете*

Проходящий через электролит ток радиально расходится от центрального электрода. Ток через электролит связан с движением ионов. Действующая на каждый ион сила Лоренца направлена перпендикулярно току,

---

[*] Направление электрического поля заряженной нити легко определяется из соображений симметрии, а его величину проще всего найти с помощью теоремы Гаусса. О том, как это сделать, можно прочитать, например, в заметке А. Черноуцана «Силовые линии и теорема Гаусса», опубликованной в предыдущем номере журнала. *(Примеч. ред.)*

сказать о поведении раствора в описанной ситуации?

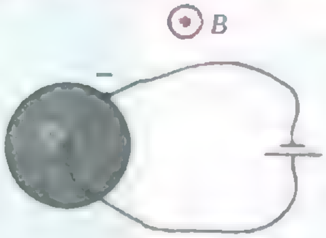


Рис. 1.

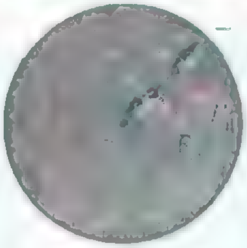


Рис. 2.

т. е. перпендикулярно радиусу, что и вызывает вращение электролита.

Заметим, что силы Лоренца, действующие на разноименно заряженные ионы, направлены в одну сторону — ведь направления движения этих ионов противоположны (рис. 2).

А. Буздин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1171—М1185, Ф1178—Ф1192, справились с задачами М1172, М1173, М1174, М1176, М1177, М1180, М1181, М1182, М1183, Ф1183, Ф1184.

Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

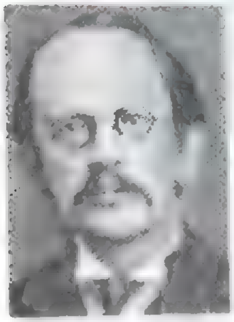
Математика

А. Абрамян (Кировакан) 71; *А. Акопян* (Ереван) 71, 79; *А. Алексеев* (Донецк) 71, 78, 79; *В. Барановский* (Омск) 71, 75, 78, 79, 85; *А. Бородин* (Донецк) 71, 78, 79; *П. Бородин* (Киров) 71; *И. Брагина* (Челябинск) 79; *В. Ванчурин* (Москва) 84; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 71, 79; *В. Верзаков* (Рудный Кустанайской обл.) 71; *К. Волченко* (Донецк) 71, 78, 79, 85; *Е. Гендин* (Киев) 71; *Ю. Гринфельд* (Москва) 84; *А. Грич* (Киев) 71; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 71; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 71, 78, 79; *С. Дошлн* (Ереван) 71, 75; *И. Егорова* (Ленинград) 71; *Г. Еськов* (Ленинград) 71; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 78, 79, 85; *С. Иноземцев* (Омск) 71, 75; *С. Кимбар* (д. Дягильно БССР) 75, 85; *Д. Коваль* (Киев) 71; *С. Коваценко* (Винница) 71, 75, 78, 79; *А. Козачко* (Винница) 71, 75, 78, 79, 84; *Д. Козлов* (Ленинград) 71, 78, 79; *А. Кудымов* (Ленинград) 71; *И. Левин* (Москва) 71; *П. Макулев* (Пловдив, НРБ) 79; *Н. Маркарян* (Баку) 85; *М. Марченко* (Гайворон) 71, 78; *Н. Мацко* (Киев) 71; *К. Мишачев* (Липецк) 75, 85; *Р. Мучник* (Винница) 71, 75, 78, 79, 84, 85; *А. Насыров* (Обнинск) 71, 78, 79, 85; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 84, 85; *А. Ненашев* (Хабаровск) 71, 79; *Г. Ониани* (Кутаиси) 71; *В. Острик* (Мариуполь) 75, 79, 85; *С. Пальшин* (Харьков) 71; *Т. Панов* (Киев) 71, 78, 79; *Е. Парилов* (Усть-Каменогорск) 71; *Е. Перельман* (Ленинград) 75; *Б. Петренко* (Днепропетровск) 71, 75; *Д. Поперечный* (Хабаровск) 71, 79; *Л. Порохня* (Павлодар) 75, 79; *И. Селищев* (п. Манченки Харьковской обл.) 79; *А. Скороход* (Киев) 71; *В. Слюсарчук* (Ровно) 71, 75, 79, 85; *В. Стакаускас* (с. Вокс ЛитССР) 71, 79; *В. Темкин* (Москва) 84; *А. Тимофеев* (Павлодар) 79; *С. Тихонов* (Воронеж) 71, 79, 85; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 71; *Ю. Фенюк* (Киев) 71; *Л. Харченко* (Киев) 71; *М. Хасин* (Донецк) 78, 79; *Ю. Хорошилов* (Челябинск) 79; *А. Шиндлер* (Феодосия) 79; *А. Эгамов* (Гороховец) 71, 79, 84; *А. Юдаев* (Павлодар) 79.

Физика

Н. Абдираимов (с. Момбеково Ошской обл.) 81; *М. Абдулаев* (с. Советское ДагАССР) 89; *Н. Абдуллаев* (пгт Язъяван Ферганской обл.) 79; *А. Абжанов* (Алма-Ата) 88; *В. Александров* (Киев) 78, 79, 82; *О. Андрухов* (Ровно) 79, 82; *С. Антипин* (Северодвинск) 78, 79, 81, 82, 85, 87—92; *А. Байдаков* (Киев) 79, 82; *Т. Бакеев* (Алма-Ата) 78—82, 85, 86, 88—90, 92; *В. Бакулин* (Новосибирск) 78—80, 85, 88—90, 92; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 78—80, 82, 86, 88—90, 92; *С. Бардина* (Старый Оскол) 88, 89, 91; *Р. Баскаков* (Красноярск) 78—82, 85—92; *Д. Баско* (Москва) 78, 80, 81; *И. Башук* (Великие Мосты) 78, 80—82, 86, 87; *М. Беднюк* (Аша) 80, 87—89; *М. Беломытцев* (Москва) 79; *М. Белоус* (Люберцы) 82; *С. Бобровник* (Чер-

(Продолжение см. на с. 70)



Исследования, которые привели к открытию электрона, начались с попыток объяснить расхождение в поведении катодных лучей под действием магнитных и электрических сил.

Дж. Дж. Томсон

А так ли хорошо вы знаете,

как движутся заряженные частицы ?

В опытах, связанных с открытием электрона, на его движение воздействовали уже хорошо знакомые ученым и практикам электрическое и магнитное поля. И особенности взаимодействия заряженных частиц с этими полями открыли новые сферы их широчайшего применения: в электронике, неузнаваемо преобразившей мир информации и связи, в действующих и проектируемых энергетических установках, например, МГД-генераторах и токамаках, в масс-спектрометрии, позволяющей «взвешивать» атомы электрическим и магнитным полями. Изучение поведения заряженных частиц в полях привело ученых к объяснению явлений космических масштабов — от полярных сияний до процессов, идущих в звездах, дало возможность заглянуть в тайны микромира с помощью гигантских «микроскопов» — ускорителей элементарных частиц.

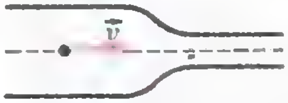
Этот выпуск «Калейдоскопа» — попытка прояснить картину порой замысловатых движений заряженных частиц, опираясь лишь на школьные знания.

Вопросы и задачи

1. Совпадает ли траектория движения заряженной частицы в электрическом поле и силовой линией этого поля?

2. Протон и α-частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Как различаются отклонения частиц полем конденсатора?

3. В металлической трубе переменного сечения движется электрон. Изменится ли его скорость при прохождении сужения?



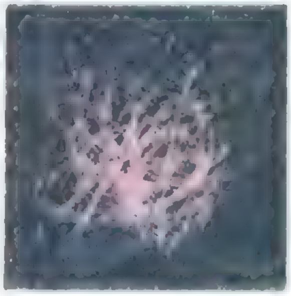
4. В центре равномерно заряженного кольца находится точечный заряд противоположного знака, которому сообщают начальную скорость вдоль оси кольца. Каков характер движения заряда?

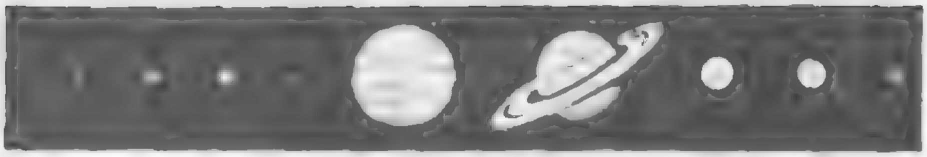
5. Может ли потенциальная энергия заряженной частицы в электростатическом поле оставаться неизменной при движении частицы?

6. Мгновенное значение магнитной индукции в распространяющейся вправо электромагнитной волне изображается в некоторой точке вектором, идущим от нас. В какую сторону направлено ускорение электрона, оказавшегося в этой точке?

7. Какие из частиц катодных лучей отклоняются на больший угол одним и тем же магнитным полем: более быстрые или медленные?

8. Пучок одинаково заряженных частиц, сперва двигавшихся параллельно, под влиянием кулоновских сил постепенно расходится. Как зависит этот эффект от скорости частиц?





9. Представьте, что на стол, обращающийся по орбите вокруг Солнца, «положили» Землю. С какой силой она будет давить на стол?

10. Как изменяется линейная скорость спутника, движущегося по орбите в разреженной атмосфере Земли, из-за сопротивления воздуха?

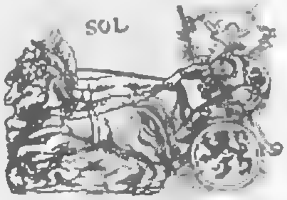
Мысленный микроопыт

Вообразите себя на месте космонавта, возвращающегося на космический корабль с *«избытком»* скорости. Можно ли набить шишку, стукнувшись о корабль? Ведь дело происходит в невесомости...

Любопытно, что...

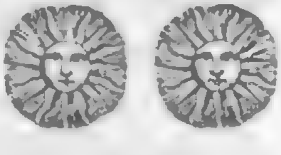
...Марк Твен родился через две недели после появления кометы Галлея в 1835 году, а умер на следующий день после ее максимального сближения с Солнцем в 1910 году. Незадолго до этого Твен в шутку заявил приятелям, что поскольку он родился в год очередного появления кометы Галлея, то он и умрет сразу после ее следующего возвращения.

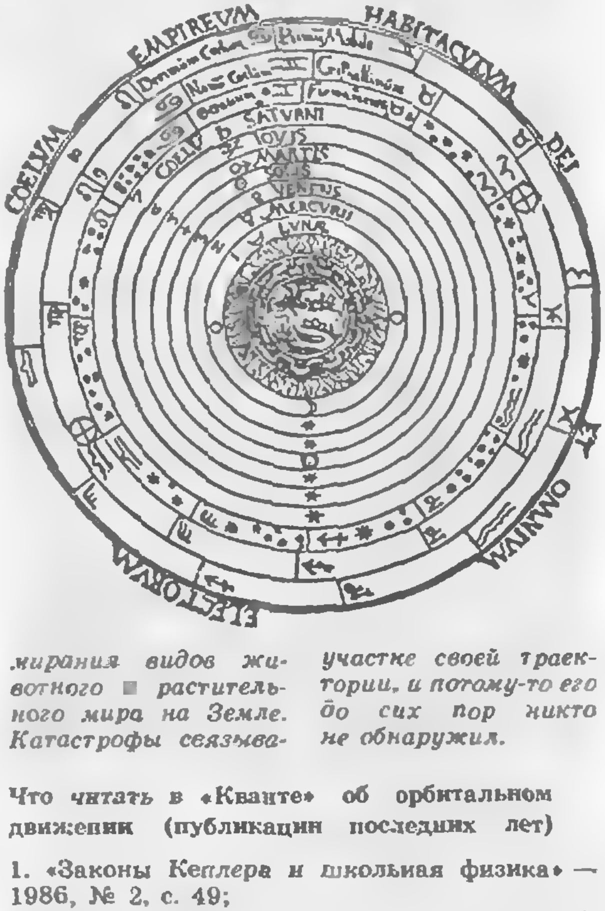
...несмотря на свою принципиальную порочность, система



Птолемея позволяет предсказывать небесные явления с любой степенью точности. С ее помощью, как это ни парадоксально, можно было бы решать некоторые задачи современной космонавтики, например вычислять видимые на небе траектории космических аппаратов.

...среди астрономов в последние годы распространилась гипотеза: у Солнца есть «напарник», который может обращаться вокруг общего с Солнцем центра масс по весьма вытянутой эллиптической орбите. Это предположение получило поддержку палеонтологов, установивших определенную цикличность вымирания видов животного и растительного мира на Земле. Катастрофы связывают с падением «дождя» комет, вызванного сближением «напарника» с Солнцем. Весь путь по орбите отнимает у солнечного «собрата» не менее 26 миллионов лет, причем сейчас он находится на весьма удаленном от нас участке своей траектории, и потому-то его до сих пор никто не обнаружил.



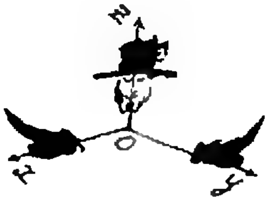


Что читать в «Кванте» об орбитальном движении (публикации последних лет)

1. «Законы Кеплера и школьная физика» — 1986, № 2, с. 49;
2. «Вторая космическая скорость» — 1986, № 3, с. 21;
3. «Как движется Луна?» — 1986, № 4;
4. «Полет к Солнцу» — 1986, № 4, с. 18;
5. «Парадокс спутника» — 1986, № 5, с. 14;
6. «Маневрирование в космосе» — 1987, № 2, с. 48;
7. «Закон всемирного тяготения» — 1987, № 11, с. 36;
8. «Калейдоскоп «Кванта» — 1987, № 11.

„Квант" улыбается

Английский математик Джон Литлвуд (1885—1977) прожил долгую жизнь, наполненную интенсивным математическим творчеством. Он всегда ценил своеобразный математический юмор. В этом апрельском номере «Кванта» мы публикуем несколько шуток, заимствованных из его книги «Математическая смесь». Говорят, что в каждой шутке есть доля истины. Математическому юмору Литлвуда больше подходит переделанная поговорка: «в каждой шутке есть доля шутки».



О математических условностях

В одной книге по механике Литлвуд прочитал: «Оси *Ox* и *Oy* — как в двух измерениях, ось *Oz* — вертикальна». Для него это было совершенно неверно, так как он, Литлвуд, всегда работал, откинувшись в кресле и подняв ноги.

«Как читатель изобразил бы замкнутую кривую (например, окружность), лежащую целиком по одну сторону от одной из своих касательных? Существуют 4 школы; я принадлежу к той, для которой кривая лежит справа от вертикальной касательной; однажды мне пришлось описывать эту конфигурацию без чертежа, но то, что я говорил, оказалось непонятным для представителей 3 остальных школ.»

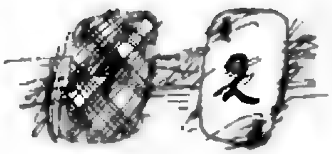
Литлвуд много лет сотрудничал с великим английским математиком Г. Харди. Однажды Литлвуд предложил ему найти опечатку на одной странице их совместной работы. Харди не смог ее обнаружить. Опечатка была в его собственном имени: «G. H. Hardy».

Одна из статей Литлвуда заканчивалась фразой: «Таким образом, ε следует сделать сколь возможно малым». В печатном тексте статьи этой фразы не было, зато стояла едва заметная точка. Наборщики восприняли фразу буквально и напечатали, вероятно, самую маленькую букву ε в истории книгопечатания.

Классификация углов из книги по альпинизму, изданной около 1900 года:

> «перпендикулярно — 60°;
> Мой дорогой сэр, абсолютно перпендикулярно — 65°;
> нависающе — 70°».

«О книгах Жордана говорили, что если ему нужно было ввести четыре аналогичные или родственные величины (такие, как, например, *a*, *b*, *c*, *d*), то они у него получали обозначения a, M'_3, ε_2, $\Pi''_{1,2}$.»



Парадоксальная игра

Имеется бесконечное количество карт, на обеих сторонах которых написано по натуральному числу. На первой карте написаны цифры 1 и 2, на второй — 2 и 3, на третьей — 3 и 4 и так далее. Игра состоит в следующем: берут произвольную карту и держат ее между двумя игроками так, что один видит одну сторону, а другой — другую. Каждый игрок имеет право спасовать, т. е. отказаться от игры. Если же оба хотят играть, то выигрывает тот, кто видит большее число.

В этой странной игре каждый раз один из игроков должен пасовать. Вот математическое доказательство этого утверждения. Если игрок *A* видит 1, то на обратной стороне карты стоит 2; поэтому *A* должен пасовать. Если *A* видит 2, то на обратной стороне стоит или 1, или 3. Если там 1, то пасовать должен *B* (см. выше), если же *B* не пасует, то он видит 3 и пасовать должен *A*. Далее рассуждение проводится по индукции.

Доказательство, как будто, убедительное. А может быть, нет? Поразмыслите-ка над этим...

Парадокс бесконечности

Шары, занумерованные числами 1, 2, 3,..., кладутся в ящик следующим образом. За одну минуту до полудня кладутся шары с номерами от 1 до 10, а шар с номером 1 вынимается обратно. За полминуты до полудня кладутся номера от 11 до 20, а номер 2 вынимается обратно. За треть минуты до полудня в ящик кладутся номера от 21 до 30, а шар с номером 3 вынимается обратно. И так далее. Сколько шаров останется в ящике в полдень?

Ответ, может быть, вас разочарует: ни одного. Какой бы номер мы ни назвали (например, 106), он отсутствует в ящике (так как вынимается на 106-й операции).

Задачи

1. Какой может быть последняя цифра квадрата целого числа, если предпоследняя цифра — нечетное число?

2. В студенческом шахматном турнире приняли участие два школьника. Они вместе набрали 6,5 очков, а все студенты — *поровну.* Сколько студентов участвовало в турнире? (В *турнире* каждый участник играет с каждым по одному разу, за выигрыш дается 1 очко, за ничью 0,5 очка, за поражение — 0 очков.)

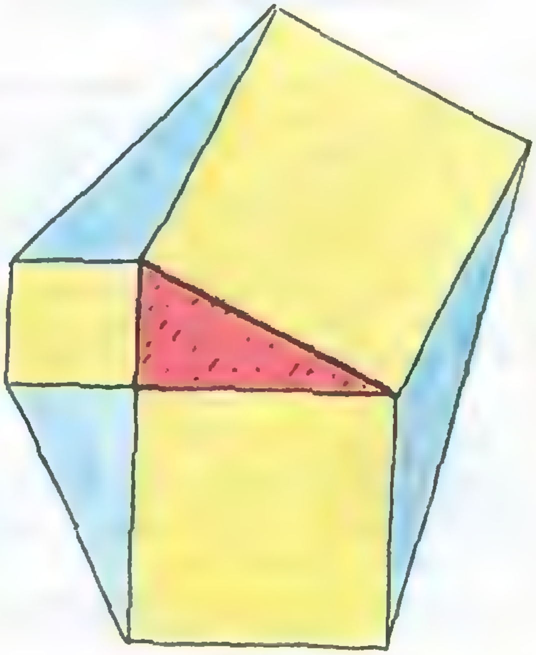
3. *Решите* арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

4. Докажите *признак делимости* на 13: число делится на 13 в том и только в *том* случае, если сумма числа, полученного отбрасыванием последней цифры, и учетверенной последней цифры делится на 13.

5. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты («*пифагоровы* штаны»). Их вершины соединены так, как показано на рисунке. Покажите, что образовавшиеся треугольники имеют одинаковые площади.

Эти задачи нам предложили Р. Рустамов, А. Маркосян, Х. Жалолов, Б. Гончаренко, Н. Авилов.

$$\begin{array}{r} \text{КВАНТ} \\ +\ \text{КВАНТ} \\ \text{КВАНТ} \\ \hline \text{ЖУРНАЛ} \end{array}$$



Проволока, магнитофон, пишущая машинка и математика

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Существует простой способ довольно точно измерить диаметр тонкой проволоки с помощью обычной линейки. Для этого проволоку наматывают на карандаш, плотно прижимая виток к витку; считая количество витков, измеряют длину получившегося цилиндра (рис. 1), а затем делят эту длину на количество витков. Если, скажем, вы сделали 20 витков, а длина оказалась равной 5 мм, то диаметр проволоки равен 0,25 мм.

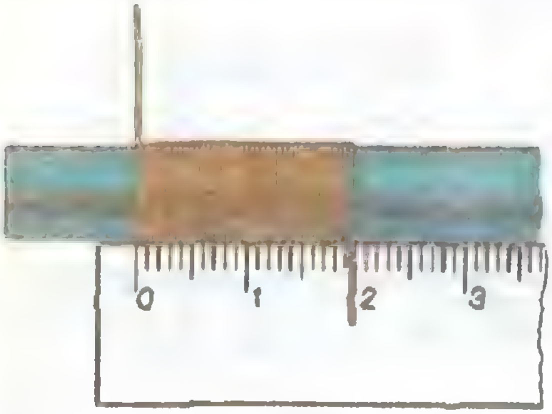


Рис. 1.

А можно ли так же измерять толщину магнитофонной ленты? Конечно же! Возьмем круглый карандаш и будем на него наматывать ленту. Разделив толщину слоя на количество сделанных витков (рис. 2), мы получим толщину ленты.

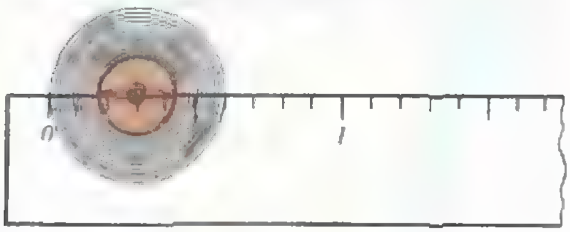


Рис. 2.

Теперь уже несложно найти число витков в катушке магнитофонной ленты*). Измерим диаметр катушки лентой — D (рис. 3) и измерим диаметр катушки, на которую намотана лента — d. Тогда $(D-d):2$ — это толщина слоя ленты, и если l — найденная нами выше толщина ленты, то $\frac{D-d}{2l}$ — количество витков.

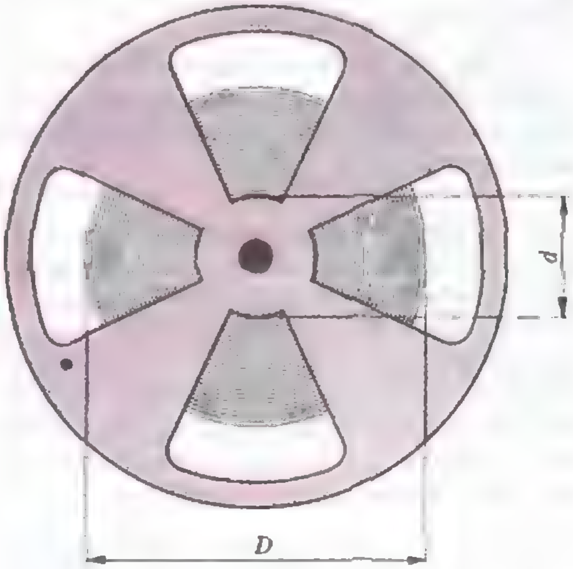


Рис. 3.

Еще проще найти длину магнитофонной ленты. Намотанная на катушку лента имеет форму кольца, площадь которого равна $\frac{\pi D^2}{4}-\frac{\pi d^2}{4}=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$. Найдем эту площадь иначе. Если толщина пленки l, а длина — L, то площадь кольца равняется lL. Отсюда $lL=\frac{\pi}{4}(D^2-d^2)$ и $L=\frac{\pi}{4l}(D^2-d^2)$. Для стандартной бобины имеем $D=170$ мм, $d=58$ мм, $l=0{,}038$ мм и $L=527590$.

Поставим катушку на магнитофон и закрепим ее второй конец на другой бобине. Теперь включим магнитофон и понаблюдаем за скоростя-

---

*) Читатель, возможно, думает, что бывают только кассетные магнитофоны; автор же имеет в виду катушечный. Во всех случаях устройство катушки с лентой должно быть читателю ясно из рисунка 3.

ми вращения обеих катушек. Большая катушка начала вращение постепенно ускоряясь, а маленькая, наоборот, начала свое вращение довольно быстро, а затем стала замедлять ход. Это может показаться удивительным: казалось бы, та катушка, на которую наматывается пленка, должна вращаться с постоянной угловой скоростью. Оказывается, пленка перемещается специальным устройством, обеспечивающим постоянную скорость движения пленки вдоль считывающей головки магнитофона. Конечно же, есть и моторы, вращающие кассеты, но они связаны с ними фрикционно (с проскальзыванием) и призваны поддерживать пленку в натянутом состоянии. Вот при перемотке пленки работают именно они.

Представьте себе, что катушка — это просто сердечник диаметром d, на который намотана пленка. Предположим, что диаметр этого сердечника с намотанной лентой равен D. В начальный момент пленка выглядит, как показано на рисунке 4, но после включения магнитофона левый диск будет уменьшаться, а правый — увеличиваться (рис. 5). Понятно, что увеличение правого диска будет происходить быстрее, чем уменьшение левого (один виток левой катушки соответствует нескольким виткам правой), так что возникает опасение — не столкнутся ли они (рис. 6)? *Посмотрим.*

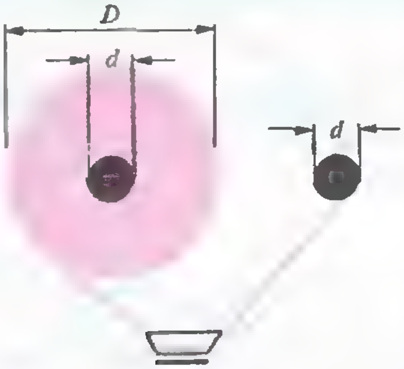


Рис. 4.

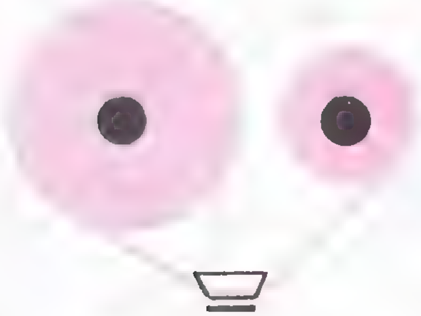


Рис. 5.

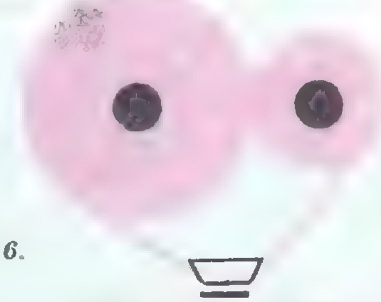


Рис. 6.

Пусть расстояние между осями катушек равно R. В начале расстояние между катушками равно $\left(R-\frac{D+d}{2}\right)$ — (см. рис. 4). Пусть длина перемотанной пленки равна x. Посчитаем расстояние между катушками теперь. Площадь большой катушки уменьшилась на xl (l — толщина пленки) и стала равной $\frac{\pi D^2}{4}-xl$, отсюда радиус этой катушки станет равным $r_1=\sqrt{\frac{D^2}{4}-\frac{xl}{\pi}}$. Соответственно радиус второй катушки увеличится, ее площадь станет равной $\frac{\pi d^2}{4}+xl$, а радиус — $r_2=\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{xl}{\pi}}$. Теперь расстояние между катушками будет равным

$$R-\left(\sqrt{\frac{D^2}{4}-\frac{xl}{\pi}}+\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{xl}{\pi}}\right).$$

Старшеклассники *могли бы найти* то значение x, при котором эта величина примет наименьшее значение, при помощи производной, а мы получим тот же результат, исходя просто из здравого смысла.

Взгляните на рисунок 7. Пусть некоторый слой пленки некоторой толщины h перемотан с одной катушки на другую. При этом радиус первой катушки стал равным a, а радиус второй катушки до перемотки был равен b, причем $a>b$. Ясно, что если одну и ту же пленку наматывать *сначала на более толстую* катушку, а потом на более тонкую, то количество слоев в первом случае будет меньше, чем во втором. Таким образом, при этой перемотке вторая катушка «растолстеет» больше, чем первая «похудеет». И этот процесс будет проходить до тех пор, пока обе катушки не станут одинаково «толстыми», т. е. $r_1=r_2$. В этом случае сумма r_1+r_2 будет наибольшей, а разность $R-(r_1+r_2)$ — наименьшей.

Найдем это расстояние. Так как $r_1=r_2$, то $\frac{D^2}{4}-\frac{xl}{\pi}=\frac{d^2}{4}+\frac{xl}{\pi}$. Отсюда $x=\frac{(D^2-d^2)\pi}{8l}$, $r_1=r_2=\sqrt{\frac{D^2}{4}-\frac{D^2-d^2}{8}}=$ $=\frac{\sqrt{D^2+d^2}}{2\sqrt{2}}$, $r_1+r_2=\frac{\sqrt{D^2+d^2}}{\sqrt{2}}=$ $=\sqrt{\frac{D^2+d^2}{2}}$. Значит, если R больше, чем $\sqrt{\frac{D^2+d^2}{2}}$, то пленку удается прослушать. А если нет — то увы...

Сев за пишущую машинку, чтобы перепечатать этот рассказ, я вновь увидел предмет моих размышлений — ленту, перематывающуюся с одной катушки на другую (рис. 8). Это — красящая лента, переносящая форму литеры, ударяющей по каретке, на бумагу. В отличие от магнитофонной катушки, катушка, на которую наматывается машинописная лента, вращается равномерно — на один и тот же угол α (в моей машинке на 12°). При этом лента перемещается вдоль каретки на некоторую величину, и следующий удар приходится на другое место ленты.

Попробуем определить эту величину перемещения. Если обозначим радиус катушки с наматывающейся лентой через r (рис. 9), то это перемещение равно $\frac{2\pi r\alpha}{360^\circ}$, если α выражается в градусах, и αr, если α выражается в радианах. Как видим, счет углов в этом случае удобнее вести в радианах.

Но ведь величина r не постоянна! В начале намотки ленты r мало — около 5 мм, а в конце — около 25 мм, при этом величина перемещения меняется от 1 до 5 мм. Значит, по одним участкам ленты литеры бьют чаще, чем по другим участкам той же длины.

Посмотрим на просвет долго работавшую ленту — она изношена более-менее одинаково. Почему? А потому, что катушки вращаются сначала в одну сторону, а потом в другую и та часть ленты, которая была в ее начале, потом окажется в ее конце.

«На закуску» задача для самостоятельного решения: *где же лента больше изнашивается — по краям или в середине?*

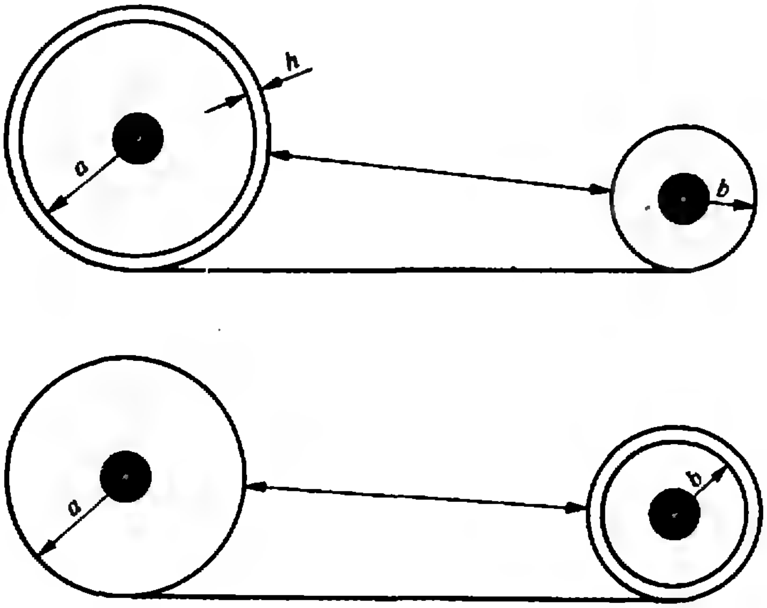


Рис. 7.

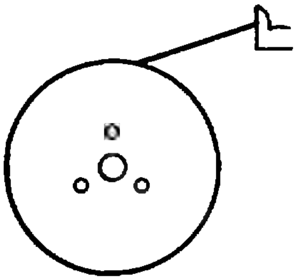


Рис. 8.

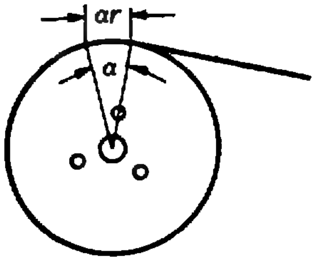
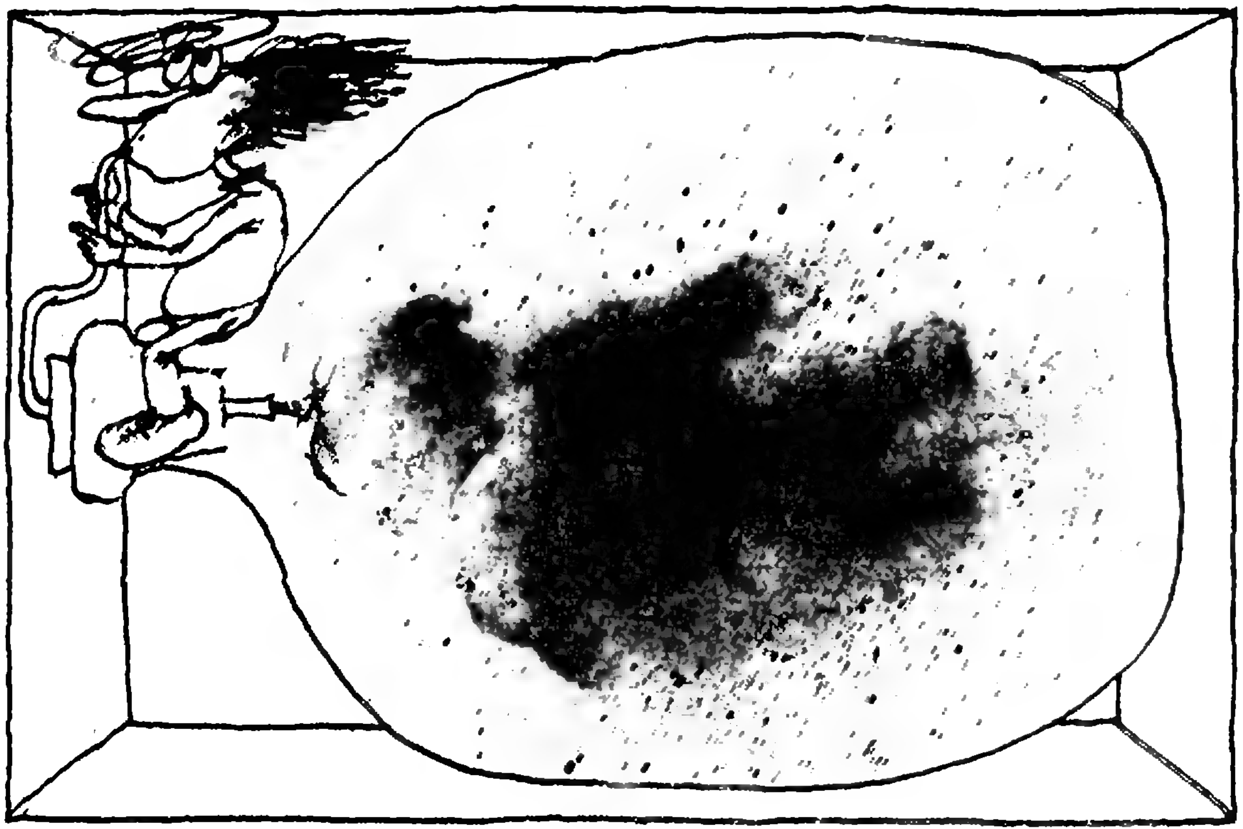


Рис. 9.



Лаборатория „Кванта"

Зеленый туман

В. МАЙЕР

Вы когда-нибудь видели зеленый туман? Нет? Не огорчайтесь, это вполне поправимо. Сейчас вы увидите сами и покажете вашим товарищам не только зеленый, но и голубой, и красный, и вообще — разноцветный туман.

Демонстрационный опыт. Удобнее всего опыт проводить в школьном физическом кабинете на демонстрационном столе. Для опыта вам понадобится прежде всего источник света. Это может быть, например, автомобильная лампочка, рассчитанная на рабочее напряжение 6 В и дающая свет силой 21 кд, или школьный осветитель для теневого проецирования (нужно только придвинуть его лампочку вплотную к собирающей линзе осветителя или линзу убрать совсем). Подойдет и любой другой источник света, лишь бы он имел небольшие размеры и не слишком ярко освещал находящиеся рядом предметы. Проще всего этого добиться, разместив источник за отверстием в большом черном экране.

Итак, установите лампочку *1* (рис. 1) и на расстоянии 20—40 см от нее расположите стеклянную бутыль *2* емкостью 20 л. (Такие бутыли диаметром примерно 25 см и высотой около 45 см с горлышком, имеющим отверстие диаметром 3,5—4,5 см, продаются в хозяйственных магазинах.) Бутыль нужно тщательно вымыть, непосредственно перед опытом ополоснуть холодной водой и внешнюю поверхность насухо протереть. На стенках бутылки ни снаружи, ни изнутри не должно оставаться капель воды.

Бутыль закройте резиновой пробкой *3*, сквозь отверстие которой пропущена стеклянная или металлическая трубка *4*. Трубку резиновым шлангом *5* соедините с нагнетающим насосом *6*. На рисунке показано также положение глаза наблюдателя *7*, расстояние от которого до бутыли может быть произвольным в пределах от 1 до 6 м.

Включите лампочку, в кабинете создайте темноту или полумрак и накачайте в бутыль воздух. Попросите зрителей внимательно смотреть на лампочку и после небольшой паузы быстро выньте из горлышка бутыли пробку. Тотчас же вокруг лампочки, в пределах размеров бутыли, можно будет увидеть широкие и довольно яркие разноцветные кольца.

Что происходит в бутыли? Вы накачиваете воздух, и давление в бутыли повышается. Когда вы делаете паузу, температура воздуха в бутыли становится комнатной. На дне бутыли имеется немного оставшейся после ополаскивания воды, а на стенках — тонкая водяная пленка. Поэтому помимо воздуха в бутыли находится насыщенный водяной пар.

Вы выдергиваете пробку, и сжатый в бутыли воздух быстро расширяется. При этом, так как процесс близок к адиабатическому (т. е. происходит без теплообмена с окружающей средой), температура воздуха в бутыли понижается, пар становится пересыщенным и легко конденсируется в капельки воды на пылинках, которых всегда так много в воздухе.

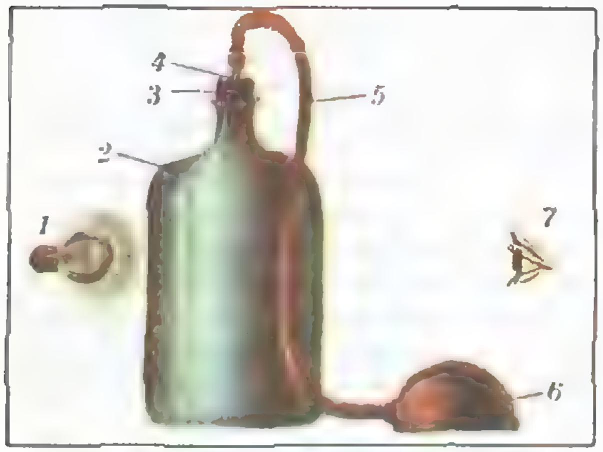


Рис. 1.

Таким образом в бутыли образуется туман. Вы его без труда обнаружите, если посмотрите на бутыль сбоку: в момент возникновения тумана идущий от лампочки световой пучок за счет рассеяния становится видимым. Сразу бросается в глаза, что туман в бутыли довольно редкий. Это свидетельствует о том, что, несмотря на значительную, по нашим субъективным оценкам, запыленность воздуха, пылинок, как центров конденсации водяного пара в бутыли, сравнительно мало.

Почему возникают кольца? В заполняющем бутыль воздухе плавают составляющие туман сферические капельки воды. Они прозрачны, значит, свет может преломляться в них, и они достаточно малы, следовательно, свет может дифрагировать на них. И преломление, и дифракция света в принципе могут дать разноцветные кольца. Какое же явление ответственно за результаты наших опытов?

Преломлением и отражением света в сферических каплях воды объясняется радуга. Но наблюдать радугу можно лишь под вполне определенными углами. Кроме того, радуга, в первом приближении, не зависит от размеров капель. В проделанных же нами опытах диаметры колец непрерывно изменялись, а это можно объяснить только изменением размеров капель тумана. Наконец, хорошая яркая радуга получается на крупных каплях воды диаметром 1—2 мм, а таких капель в бутыли заведомо нет. Итак, мы заключаем, что *наблюдаемые в описанных опытах разноцветные кольца обусловлены, скорее всего, дифракцией света на мелких каплях воды.*

А что говорит литература? Не может быть, чтобы дифракция света на множестве мелких круглых одинаковых частичек никогда раньше не обсуждалась в журнале. И действительно, полистав подшивки старых номеров «Кванта», вы обнаружите несколько соответствующих материалов. Так, в 1977 году Н. М. Ростовцев описал прекрасные опыты по дифракции света на сплющенном клубке тонкой проволоки, на множестве частичек ликоподия и даже на эритроцитах крови [1]*). Спустя пять лет Я. Е. Амстиславский вновь вернулся к этим явлениям, но описал их с несколько иных позиций [2]. Прочитав эти статьи, вы узнаете, что разноцветные кольца вокруг источника белого света называются венцами и часто наблюдаются в естественных условиях. Очень много и интересно о венцах рассказывается в книге М. Миннарта [3]. В ней, кроме того, очень удачно сформулированы основные положения теории:

«а) Дифракция на сравнительно плотном облаке, состоящем из водяных капель одинаковой величины, происходит так же, как на одной капле, лишь интенсивность дифрагировавшего света больше.

б) Дифракция на капле происходит так же, как на малом отверстии в экране...

в) Дифракция на отверстии рассчитывается согласно принципу Гюйгенса: принимается, что каждая точка отверстия излучает световые волны, и определяется, как интерферируют эти волны от всех частей отверстия, приходя в глаз».

Что касается количественных расчетов, их вы можете найти в упомянутых статьях, а также в статье Е. Е. Городецкого [4]. Нелишне, впрочем, напомнить, что чем меньшие размеры имеют препятствия, тем большими размерами при прочих равных условиях обладают соответствующие дифракционные картины.

Вообще о венцах написано немало. Удивительно, однако, что изумительные по красоте и простоте опыты с искусственным туманом даже не упоминаются! Лишь предприняв специальные поиски, мы, наконец, обнаружили в книге П. И. Броунова [5] изложение экспериментов с искусственным туманом, выполненных еще в конце прошлого века.

Самокритика. Предложенный вам демонстрационный опыт получается всегда, но яркость, контрастность, размер и длительность существования венцов от опыта к опыту меняются довольно значительно. Надо бы исследовать явление подробнее, но изображенная на рисунке 1 установка не позволяет сделать это.

В самом деле, она рассчитана на то, что опыт осуществляют минимум два человека: один создает условия эксперимента, другой проводит наблюдения. Это, конечно, крайне неудобно. Кроме того, трудно обеспечить даже примерное равенство условий опыта либо более или менее надежно проконтролировать их изменения. Наконец, частые накачивания воздуха насосом утомительны чисто физически и отвлекают от основного. Поэтому желательна другая установка, свободная от перечисленных и иных недостатков.

Еще один способ наблюдения венцов. Основной элемент рекомендуемой установки изображен на рисунке 2. Стеклянная колба *1* емкостью 0,5 л закрыта резиновой пробкой *2* со стеклянной трубкой *3*, на которую надета резиновая груша *4* диаметром около 8 см.

Вы, безусловно, и сами догадались, что в исследованиях целесообразно использовать небольшой сосуд, а насос заменить подходящим устройством, позволяющим без особых сложностей изменять давление газа в этом сосуде. Несомненно, вы уже хорошо представляете и порядок проведения опытов, но все же изложим его.

Колба должна быть чистой, снаружи сухой и без капель воды на стенках, которые так мешают наблюдениям. Перед опытами колбу ополосните холодной водой из-под крана. Небольшой источник света поместите на расстоянии 1—3 м от глаза. Перед глазом на подходящей по высоте подставке поставьте колбу и закройте ее резиновой пробкой с грушей. Теперь нажмите на грушу, сделайте небольшую паузу и, отпустив грушу, наблюдайте разноцветные венцы вокруг источника. При проведении опытов колбу лучше держать двумя пальцами вблизи пробки, чтобы зря не нагревать ее и не оставлять отпечатков пальцев на стенках.

---

*) В квадратных скобках принято обозначать номер литературного источника, библиографические сведения о котором приводятся в конце статьи.

Исследование. Собрав установку, получите венцы вокруг источника света. Медленно сжимайте и отпускайте грушу. При этом венцы сначала увеличиваются, а затем уменьшаются. Полученный результат можно объяснить только тем, что при увеличении давления капельки тумана становятся меньше, а при уменьшении — больше. Это вполне естественно, так как с адиабатическим ростом давления температура газа в колбе повышается, и вода испаряется из капелек, а по мере снижения давления — конденсируется в них.

Повторите опыт снова и снова. Вы увидите, что яркость и размеры дифракционной картины постепенно уменьшаются. Примерно через две минуты венцы исчезают совсем и не появляются, сколько бы вы ни нажимали на грушу. Попробуем объяснить это.

Мы уже говорили, что уменьшение размеров картины вызвано ростом диаметра капелек тумана. Яркость же картины может снижаться только потому, что уменьшается общее число капелек тумана в колбе. Но почему это происходит? Может быть, капельки испаряются? Если на мгновение допустить это невероятное предположение, то сразу обнаруживается противоречие: при испарении капельки должны уменьшаться, а дифракционная картина — увеличиваться, но все происходит как раз наоборот. Остается наиболее естественное объяснение — водяные капельки просто оседают на дно колбы.

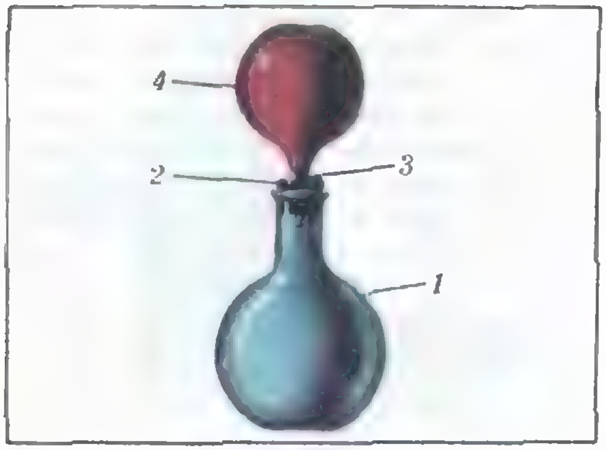


Рис. 2.

Действительно, капельки воды конденсируются на пылинках и, оседая на дно колбы, увлекают их за собой. Воздух в колбе становится все чище, центров конденсации остается все меньше, значит, капельки тумана образуются все более крупными и редкими, вследствие чего картина постепенно уменьшается и теряет яркость, пока вовсе не пропадает.

Понятно, что способность колбы давать венцы можно восстановить, если в нее ввести взвешенную в воздухе пыль. Сделайте, например, так. Откройте колбу, приблизьте конец стеклянной трубки, торчащий из пробки, к горлышку колбы и несколько раз сожмите и отпустите грушу. Тем самым вы продуете колбу комнатным воздухом, который всегда несколько запылен, и сможете снова с успехом повторять опыты по образованию венцов.

Попробуйте вводить в колбу разные «сорта» пыли, набирая ее в резиновую грушу с корешков книг, долго простоявших на полке, с ворсистой одежды и т. д. Проследите за соответствующими изменениями дифракционной картины и убедитесь в том, что пыль не позволяет существенно увеличить число центров конденсации пара в колбе. А что если воспользоваться дымом?

Напустите в колбу немного дыма от тлеющего на конце проволоки клочка ваты. Сжав и отпустив грушу, вы получите густой белый туман, сквозь который ничего хорошего не видно. Он появляется потому, что частицы дыма весьма многочисленны, на каждой из них конденсируется водяной пар, и в результате образуется очень много очень мелких капелек воды.

Попробуйте теперь уменьшать количество центров конденсации пара. Для этого откройте колбу и продуйте ее воздухом. Закрыв колбу

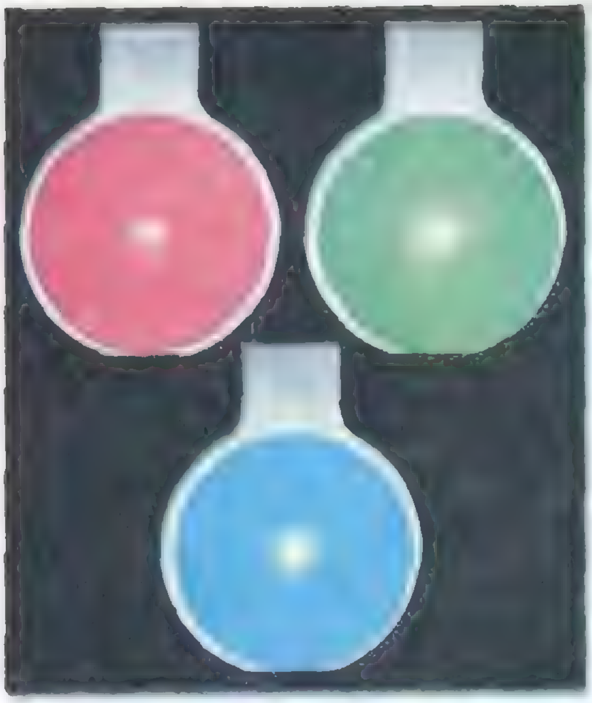


Рис. 3.

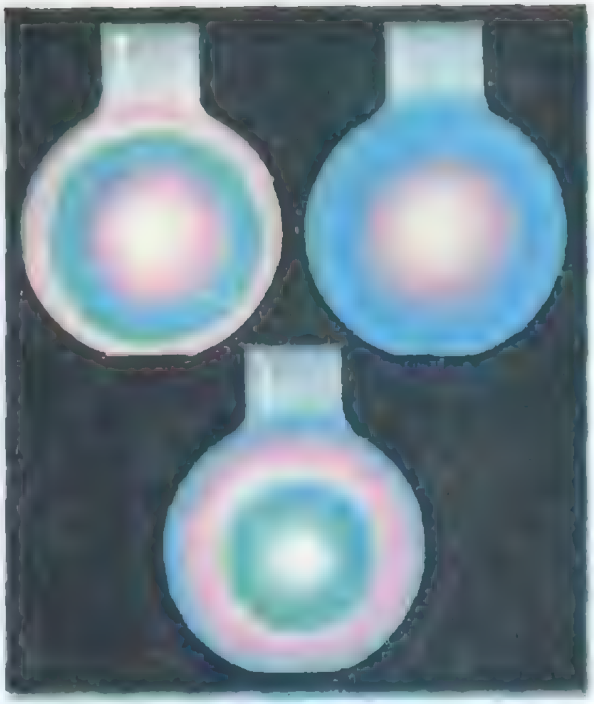


Рис. 4.

пробкой с резиновой грушей, вновь получите туман в ней. Повторяя эти операции, проводите наблюдения. Вы обнаружите, что по мере уменьшения центров конденсации пара в колбе у наблюдаемого в опыте белого круга с центром в источнике света появляется красноватая или, скорее, коричневатая кайма. Постепенно белый круг желтеет, а кайма формируется в коричневато-красное кольцо. Затем это кольцо становится красным, а за ним появляется синее. С каждым разом картина становится все более яркой и в ней появляются новые цвета: малиновый, зеленовато-голубой, сиреневый — всего не перечислить!

Напомним, что все эти явления обусловлены постепенным увеличением диаметра капелек тумана. В некоторый момент, глядя с расстояния вытянутой руки на колбу, вы вдруг заметите, что вся она почти равномерно окрашена в определенный яркий и насыщенный цвет (рис. 3). Это непривычное и чрезвычайно красивое явление можно объяснить интерференцией света, сфокусированного каплями и дифрагированного на них. При дальнейшем увеличении диаметра капелек тумана возникают широкие венцы, подобные показанным на рисунке 4.

Заключение. Вот и окончен рассказ о разноцветном тумане. Конечно, надо было бы упомянуть о роли ионов, которые легко получить в колбе с помощью пьезоэлектрической зажигалки. Хорошо бы рассказать о дифракционной картине в монохроматическом свете. Любопытно подробнее рассмотреть динамику явления. Было бы совсем неплохо немного посчитать.

Но все это мы вам предлагаем проделать самостоятельно. Желаем успеха!

Литература

1. Ростовцев Н. М. Как с помощью проволоки измерить длину световой волны. «Квант», 1977, № 8, с. 34.
2. Амстиславский Я. Е. Необычайные явления вокруг обычных источников света. «Квант», 1982, № 6, с. 15.
3. Миннарт М. Свет и цвет в природе. М.: Наука, 1969, с. 222.
4. Городецкий Е. Е. Дифракция света на круглом отверстии. «Квант», 1989, № 11, с. 46.
5. Броунов П. И. Атмосферная оптика. М.: Гостехиздат, 1924, с. 105.

Я-значит ракета

Космический полет — это так просто!?..

В. НИКОЛАЕВ

> *«...командир космического корабля майор Романов..., бортинженер Мухин... В ноль часов сорок две минуты произошла стыковка космического корабля с орбитальной научной станцией...»*
>
> *— Очередной выпуск Героев Советского Союза? — кивнув на приемник, спросил мужчина.*
>
> *— Не понял...*
>
> *— Сели, полетели, состыковались, перевыполнили запланированный объем работ, благополучно, в расчетный срок приземлились в заданном районе. И еще: самочувствие отличное. При чем же здесь звание Героя Советского Союза, а?*
>
> *— Наверное, не все там бывает гладко...*
>
> *— Так и скажите, уважаемые! — возмутился мужчина.— Свои же, поймем! Не такое понимали... Вы случайно не газетчик?..*
>
> Е. Месяцев.
> «Звездные дожди»
> (сценарий кинофильма)

22 июля 1987 года с космодрома «Байконур» стартовал очередной космический корабль. Через 10 минут его экипаж уже был на околоземной орбите. В этом событии не было бы ничего необычного — к космическим полетам мы уже начали привыкать,— если бы не одно обстоятельство. В корабле «Союз ТМ-3» на орбиту отправились космонавты, открывшие третью сотню землян, побывавших в космическом пространстве. Командиром экипажа «Союз ТМ-3» был Александр Викторенко. Пройдет одна неделя, и вместе с ним на Землю со станции «Мир» вернется другой Александр — Лавейкин, замкнувший список второй сотни.

Кто же эти люди, поднявшиеся над всеми нами, взглянувшие на наш мир с высоты сотен километров? Герои-супермены или счастливчики, которым улыбнулась судьба? Так ли уж страшен космический полет или, как пошутил один советский космонавт, летать может каждый, кто самостоятельно добирается до своего рабочего места?

...В 1875 году совершил полет воздушный шар «Зенит», на борту которого находились три французских воздухоплавателя. Пилот Тиссандье, единственный оставшийся в живых, рассказал о том, что товарищи его «уснули», не сделав даже робкой попытки спастись. Он рассказал, как постепенно делалось необычным его состояние, ослабевали разум и тело, становилось безразличным все вокруг. Полет проходил всего лишь в восьми километрах от поверхности Земли...

...Год назад недалеко от материка в результате аварии затонула советская атомная подводная лодка. Из 69 членов экипажа были спасены только 27 человек. Многие из погибших потеряли жизнь уже после эвакуации с тонущего судна...

...За двадцать лет (в пятидесятые и шестидесятые годы) военно-воздушные силы США потеряли почти восемь тысяч самолетов, во время катастроф погибло около 8600 летчиков...

Можно ли хотя бы предположить, что космическая среда, со всеми своими неизвестностями и даже тайнами, менее опасна для человека, чем земная, кажущаяся нам такой обжитой? Существуют оценки американских специалистов, в соответствии с которыми на каждую тысячу полетов пилотируемых кораблей с пребыванием в космосе в среднем 24 часа (а таких коротких полетов уже давно практически не бывает) следует ожидать не менее 95 катастроф и аварий. Из них 65 % — в начале и конце полета, т. е. на стартовом участке и при возвращении на Землю (соответственно 50 и 15 процентов), а 25 % — в полете.

Заглянем в прошлое. За 29 лет совершено 129 космических полетов.*) Большая часть из них (особенно в первые годы) сопровождалась отказами разной степени сложности и опасности для экипажей. Расскажем лишь о некоторых из них.

21 июля 1961 года майор ВВС США В. Гриссом совершил суборбитальный полет на корабле «Меркурий-4». При посадке произошел подрыв люка, и корабль Гриссома затонул. Космонавту удалось спастись.

Через четыре года нештатную посадку (из-за отказа в контуре управления) совершил экипаж «Восхода-2».

В том же году похожий отказ (в бортовой ЭВМ) произошел и на корабле «Джемини-4». Еще через два месяца — выход из строя элементов системы электропитания, и руководители полета «Джемини-5» срочно изменяют программу испытаний.

Едва не закончился катастрофой полет корабля «Джемини-8» (март 1966 г.). После того как корабль произвел стыковку со ступенью ракеты-носителя «Аджена», началось его вращение. С трудом задействовав ручное управление, космонавты вернули корабль на Землю.

1967 год оказался наиболее трагичным для советской и американской космических программ. В конце января из-за пожара внутри корабля на стартовой позиции погиб экипаж, готовившийся к первому полету по программе «Аполлон». Командиром экипажа был уже известный нам В. Гриссом, которого в США называли самым невезучим из американских космонавтов. Гриссому принадлежат слова, сказанные им после полета на «Джемини-3»: «Если бы нам пришлось погибнуть, то мы бы хотели, чтобы люди смирились с этим... Завоевание космоса стоит такого риска...»

Три месяца спустя, при завершении первого полета по программе «Союз», погиб В. Комаров. Катастрофа произошла из-за отказа парашютной системы.

Трагедии приостановили космические полеты как в СССР, так и в США. Возобновились они спустя полтора года. Поначалу все шло сравнительно удачно. Но в 1970 году — следующий удар: на космическом корабле «Аполлон-13» взорвался баллон с жидким кислородом. Осколками поврежден другой баллон. До Земли более 300 тысяч километров, к тому же корабль продолжает удаляться в сторону Луны. Недостаток электроэнергии заставляет экипаж выключить все системы, прямо не участвующие в возвращении на Землю. Температура внутри корабля опускается до отметки 5 °С. Используя двигатели и ряд систем неотработавшего пока лунного модуля, экипаж совершает облет Луны и направляет основной блок к Земле.

---

*) Данные на 10 марта 1990 г.

Через год, после завершения первой вахты на первой орбитальной станции «Салют», в результате разгерметизации кабины спускаемого аппарата на участке посадки гибнет экипаж корабля «Союз-11» — Г. Добровольский, В. Волков, В. Пацаев.

Нет нужды перечислять все аварии, произошедшие с советскими и американскими космонавтами до трагической гибели многоразового корабля «Чэлленджер» (в 1986 г.). Отметим лишь две аварии с ракетой-носителем «Союз». В первом случае (1974 г.) в результате отказа двигателей III ступени корабль (с космонавтами В. Лазаревым и О. Макаровым) по весьма крутой траектории совершил посадку в районе реки Амур. При этом перегрузка достигала 20 и более единиц.

Во втором случае (1983 г.) авария произошла на стартовой площадке. Одна-две секунды отделяли космонавтов В. Титова и Г. Стрекалова от гибели, но успела сработать система аварийного спасения (САС), буквально вырвавшая корабль с космонавтами из взрывающегося носителя.

Отсутствие САС на многоразовых кораблях «Спейс шаттл» стоила жизни семерым американским космонавтам во время злополучного старта «Чэлленджера».

Если подсчитать скрупулезно все малые и большие аварии, произошедшие за почти тридцатилетнюю историю освоения человеком космического пространства, то цифры, названные американскими специалистами, не покажутся преувеличенными.

(К сожалению, терниями покрыта не только дорога к звездам, но и приготовления к ней. Космонавты гибли на разных стадиях подготовки к космическому полету. Среди них — В. Бондаренко, входивший в первый, «гагаринский» отряд. Причиной его гибели стал пожар, произошедший во время испытаний в сурдобарокамере в 1961 году, незадолго до полета Ю. Гагарина. Последним в трагическом списке стоит имя американского астронавта С. Григгса, погибшего в прошлом году в тренировочном авиационном полете.)

До сих пор речь шла лишь об одной стороне, участвующей, или, правильнее сказать, реализующей космический полет,— о ракетно-космической технике. Но есть еще и вторая — сам человек. «Космонавт — не бесчувственный фантом, не кукла, вмонтированная в сложный космический аппарат. Он живой человек со своими слабостями,...» Прервем в этом месте цитату, чтобы вернуться к ней позже. Под этими словами стоит подпись человека, знающего профессию космонавта не понаслышке: В. Шаталов трижды командовал экипажами, осуществлял стыковки с кораблем «Союз» и станцией «Салют».

Конструкторы космических кораблей, разработчики систем, врачи и психологи уделяют большое внимание обеспечению таких условий космического полета, при которых не только не будет нанесен вред организму космонавтов, но и полностью будут реализованы достоинства человека, отсутствующие у машины.

Сейчас, когда максимальная продолжительность полета на космической орбите составила 326 суток (Ю. Романенко), могут показаться несерьезными опасения, мучившие тех, кто готовил в первый полет Юрия Гагарина. Не все, возможно, знают, что, опасаясь за его психику, конструкторы заблокировали систему управления, а число 125, позволявшее пилоту космического корабля, после его набора на пульте, снять блокировку, записали на внутренней стороне конверта. Конверт же закрепили на стенке кабины «Востока».

А опасения (не конкретно за Гагарина, конечно) были вполне серьезными. Самые мрачные прогнозы (немецкого ученого Трёбста) не исключали того, что под воздействием «космического ужаса» космонавт не только утратит способность к разумным действиям, но и причинит самому себе вред, а может, и уничтожит себя...

Были ли основания для таких опасений? Судите сами. Во время многочисленных экспериментов с имитацией условий космического полета у некоторых испытуемых появлялись такие нарушения психики, как галлюцинации, потеря способности ориентироваться, ощущение страха и прочее.

В книге Ю. Гагарина и В. Лебедева «Психология и космос» описываются реакции испытуемых в условиях одиночества. «Ситуация, казалось бы, самая безобидная. Но вот один очень квалифицированный летчик почувствовал головокружение, хотя камера не сдвинулась с места. Другому среди приборов пульта управления стали мерещиться какие-то незнакомые лица. У третьего, по профессии тоже пилота, когда «полет» подходил к концу, на его глазах приборная доска вдруг начала «таять и капать на пол». Четвертый жаловался на боль в глазах из-за расплывчатого изображения на экране телевизора, хотя экран был совершенно чист. Напрасно его пытались убедить, что ничего не произошло,— он требовал немедленного окончания опыта и, когда вышел из камеры, заявил, что, помимо зрительных иллюзий, он чувствовал, как над ним смыкаются стены помещения.» Таких случаев авторы книги приводят много. А как же быть, когда, помимо одиночества и изоляции, приходится испытывать и невесомость, и сенсорный голод, и изменение пространственной и временнóй структуры, и ограничение личностно-значимой информации, и, наконец, угрозу для жизни?..

Но, скажет читатель, выдюжил же Гагарин, как выдюжили и другие космонавты. И никто из них не сошел с ума, не подвел тех, кто их отправлял в полет... Здесь самое время привести вторую часть цитаты из высказывания В. Шаталова: «...но и со своей силой — ума, изобретательности, мужества, со своим высочайшим чувством ответственности за себя, за товарищей, за порученное дело. В любой момент пребывания в космосе может случиться так, что только он, космонавт, будет способен принять и осуществить единственно верное решение. Ибо Космос — это сумма не до конца познанного, это всегда риск, это работа на верхнем пределе человеческих возможностей...»

Именно человек делает машину надежной, способной выйти из затруднительной, а часто и аварийной ситуации. В той же книге «Психология и космос» приводятся результаты сравнения американскими специалистами надежности работы бортовых систем космических кораблей с участием и без участия оператора. В одном случае оператор должен был при получении сигналов от приборов принимать решения по управлению кораблем. В остальных же опытах действовали только автоматы, при этом надежность аппаратуры, как обычно, повышалась дублированием элементов схемы. Были обследованы четыре системы: с двойным, тройным, четырех- и пятикратным дублированием.

Сперва надежность всех пяти систем была равной. Но уже на четвертый день имитированного полета наметилась разница. Через две недели надежность систем с двух-, трех- и четырехкратным дублированием элементов стала неудовлетворительной. С пятикратным дублированием — тоже недостаточно высокой. В то же время система с участием человека свою надежность не потеряла.

В качестве примера, подтверждающего сказанное, можно вспомнить полет по окололунной орбите корабля «Аполлон-10». Когда двое космонавтов отрабатывали маневры на лунной кабине, отделившейся к тому времени от основного блока, началось ее непредвиденное вращение. В какой-то момент космонавтам даже показалось, что они падают на Луну. Только мужество и реакция командира корабля Т. Стаффорда позволили избежать падения. Переключив управление на ручное, он стабилизировал корабль.

И в следующем полете (именно тогда была совершена историческая посадка на Луну) лишь мастерство Н. Армстронга — «человека-машины», как его называли американцы,— помогло совершить благополучное прилунение в то время, когда до команды об отказе от посадки оставалось всего 10 секунд полета.

Ну и самый яркий пример — спасение станции «Салют-7» экипажем корабля «Союз Т-13» в составе В. Джанибекова и В. Савиных. Станция потеряла управление, источники питания, связанные с солнечными батареями, не давали тока, не работала радиосистема, обеспечивавшая сближение и стыковку. Несмотря на все трудности, космонавты осуществили сборку и перешли из корабля в станцию. То, что они увидели внутри, позволяло им без промедления возвращаться на Землю. Космонавты поступили иначе. День за днем, прибор за прибором восстанавливали они станцию. Горячую пищу им довелось попробовать лишь спустя две недели. Наконец, произошло «возрождение из пепла».

Значит, гимн человеку? Конечно,.. но следующий экипаж, а вернее, один из его членов, перечеркивает усилия товарищей. Его самочувствие заставляет руководителей полета свернуть программу и срочно возвратить экипаж на Землю... Эта была последняя экспедиция на «Салют-7».

Что же дальше? Заглянем на десять лет вперед, в XXI век, в третье тысячелетие. Какие физические и психические качества потребуются от космонавтов? Какими специальностями они должны будут владеть? Летными? Техническими? А может, они будут специалистами в точных науках? в биологии и медицине? астрономии, геологии, материаловедении?.. Станет ли космический полет доступным для человека, не обладающего абсолютным здоровьем?

Увидим, ведь осталось не так уж и долго ждать. А главное, космонавты будущего тысячелетия уже среди нас, среди вас.

Что же касается числа 125, того самого, что под таким секретом доставляли на борт «Востока» и о котором Ю. Гагарин должен был узнать только в полете, после вскрытия конверта, то теперь известно: по крайней мере двое из нескольких специалистов, знавших код, сообщили его Гагарину до старта, доверяя больше его силе духа, нежели бумаге, которая могла и уплыть в невесомости...

«И возвращается ветер...», или Периодичность в математике

(Начало см. на с. 6)

из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например: ...мама мыла раму мама мыла раму... (А если бы лента была ограничена слева, то мог бы наблюдаться и предпериод.)

4*). Имеется неограниченное число черных и белых кубиков. Надо построить из них сплошную башню в форме параллелепипеда так, чтобы каждый черный кубик граничил с четным числом белых, а каждый белый — с нечетным число черных. При любом ли заданном нижнем слое кубиков такую башню (конечной высоты) можно построить?

5*) (на исследование). Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей — черной. Докажите, что:

а) если через 2^n секунд исходная раскраска повторится, то она периодична с периодом $3 \cdot 2^n$;

б) исходная раскраска периодически повторяется тогда и только тогда, когда она сама периодична (периодичность во времени равносильна периодичности в пространстве).

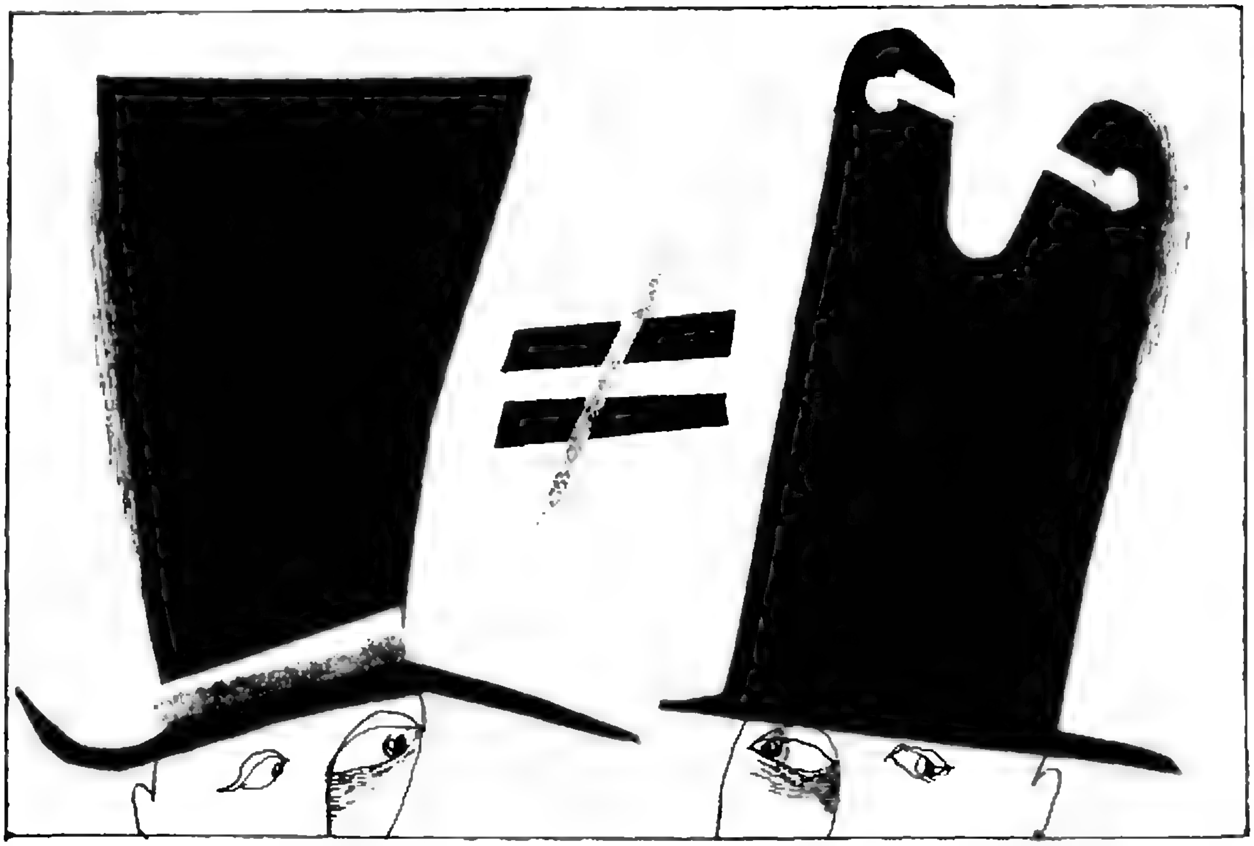
в) Что можно сказать о полосе произвольной ширины? О всей клетчатой плоскости?

6. К числу приписывают справа по одной цифре, кроме 9. Докажите, что рано или поздно получится составное число.

7*). Дан прямоугольник с отношением сторон равным $\sqrt{7}$. От него отрезают квадрат, а с оставшимся прямоугольником производят ту же процедуру. Докажите, что последовательность отношений сторон у построенных прямоугольников периодична.

---

*) Задачи 4, 7 взяты из книги В. А. Уфнаровского «Математический аквариум» (Кишинев, Штиинца, 1987).



Математический кружок

Неравенство Иенсена

О. ИЖБОЛДИН, Л. КУРЛЯНДЧИК

Искусством доказывать неравенства овладеть далеко не просто. Тут требуется большой опыт, интуиция, и, как в каждом искусстве, умение свободно применять различные «технические» приемы. Мы продемонстрируем один из таких приемов на ряде примеров. В этой статье будут доказаны и классические неравенства (Коши, Коши—Буняковского, Гельдера и Минковского), и менее знаменитые, но также весьма интересные.

Мы будем записывать формулы, как правило, коротко, с помощью обозначений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Советуем тем, кто еще не научился ими пользоваться, расписывать выкладки более подробно.

Выпуклые множества

В основе доказательств неравенств, о которых будет идти речь, лежит понятие выпуклости. Это очень важное математическое понятие, и вы с ним уже встречались в школьном курсе геометрии при изучении многоугольников. Однако в математике понятие выпуклости связано не только с многоугольниками. Фигуру называют выпуклой, если с любыми двумя своими точками она содержит весь отрезок с концами в этих точках. На рисунках 1, *а*—*г* показаны примеры выпуклых и невыпуклых фигур. Выпуклые фигуры обладают многими замечательными свойствами, но нас будет интересовать лишь одно из них. Сформулируем его.

Пусть в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ выпуклой фигуры Ф сосредоточены массы $m_1, m_2, \dots, m_n$ соответственно. Тогда центр масс этих точек также принадлежит фигуре Ф.

Из физики известно, что центр масс — это точка с координатами

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right), \qquad (1)$$

где x_i, y_i — координаты точки A_i.

Упражнения

1. Докажите, что центр масс двух точек лежит на отрезке, их соединяющем.
2. Докажите, что центр масс n точек лежит на отрезке, соединяющем любую из них с центром масс остальных.

Выпуклые функции

Нарисуем график функции $y=x^2$ (рис. 2, *а*).

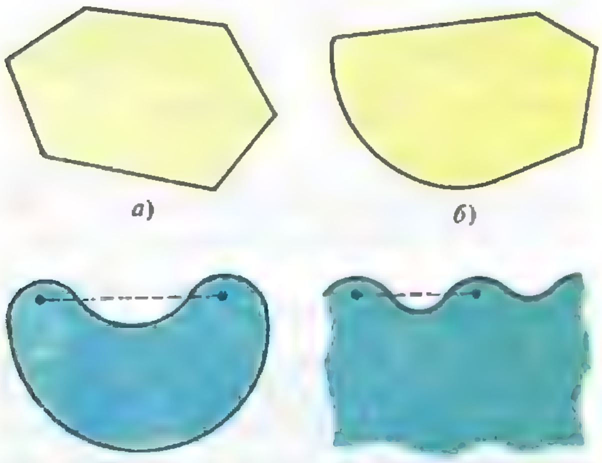
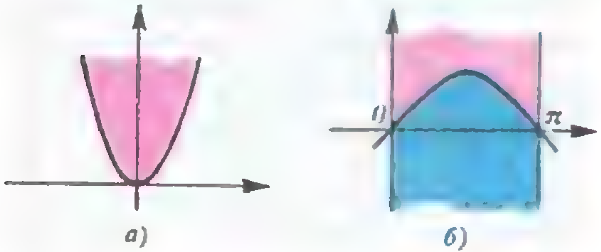

а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 1.



а) *б)*

Рис. 2.

Мы видим, что надграфик этой функции (на рисунке он закрашен красным цветом) является выпуклой фигурой. Если же рассмотреть функцию $y=\sin x$ $(x\in[0;\pi])$, то ее надграфик (на рисунке 2, *б* он закрашен красным цветом) выпуклым не является. Однако выпуклым является подграфик этой функции (на том же рисунке он закрашен синим цветом).

Эти наблюдения приводят к важному определению.

Если надграфик функции является выпуклой фигурой, то говорят, что эта функция выпуклая, а если выпуклым является подграфик, то говорят, что функция вогнутая[*].

Тем самым функция $y=x^2$ является выпуклой, а функция $y=\sin x$ $(x\in[0;\pi])$ — вогнутой.

Основное неравенство

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство Иенсена[**]. Все классические неравенства, упомянутые в начале статьи, являются его следствием.

Теорема (неравенство Иенсена). *Пусть $y=f(x)$ — функция, выпуклая на некотором интервале, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — произвольные числа из этого интервала, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда*

$$f(\alpha_1 x_1+\dots+\alpha_n x_n)\leqslant \alpha_1 f(x_1)+\dots+\alpha_n f(x_n). \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим на графике функции $y=f(x)$ точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ с абсциссами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Расположим в этих точках грузы с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Центр масс этих точек имеет координаты

$$\left(\frac{m_1x_1+\dots+m_nx_n}{m_1+\dots+m_n}; \frac{m_1f(x_1)+\dots+m_nf(x_n)}{m_1+\dots+m_n}\right).$$

---

[*] В некоторых учебниках принята другая терминология.

[**] Иенсен Иоганн Людвиг (1859—1925) — датский математик.

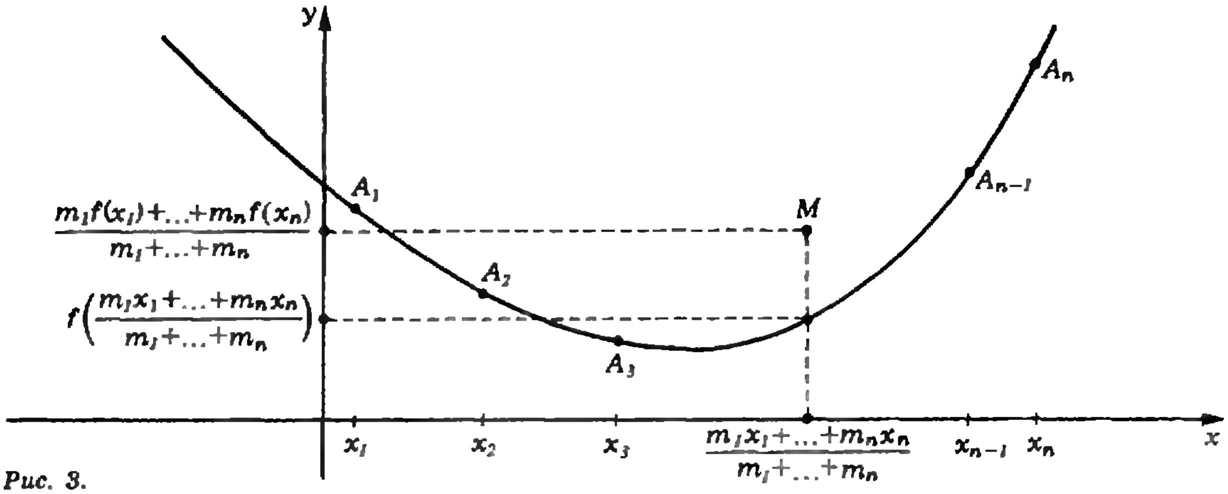

y
A_n
A_1
M
$\frac{m_1f(x_1)+\dots+m_nf(x_n)}{m_1+\dots+m_n}$
A_{n-1}
A_2
$f\left(\frac{m_1x_1+\dots+m_nx_n}{m_1+\dots+m_n}\right)$
A_3
x_1
x_2
x_3
$\frac{m_1x_1+\dots+m_nx_n}{m_1+\dots+m_n}$
x_{n-1}
x_n
x

Рис. 3.

Так как точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ принадлежат надграфику выпуклой функции, то и их центр масс также принадлежит надграфику (ибо надграфик — выпуклая фигура). А это означает, что ордината центра масс не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой (рис. 3), т. е.

$$f\left(\frac{m_1x_1+\dots+m_nx_n}{m_1+\dots+m_n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m_1f(x_1)+\dots+m_nf(x_n)}{m_1+\dots+m_n}. \qquad (3)$$

Для завершения доказательства остается положить $m_1=\alpha_1, \dots, m_n=\alpha_n$.

Этот пункт статьи мы хотим закончить двумя важными замечаниями. Во-первых, в процессе доказательства неравенства Иенсена (2) мы доказали неравенство (3). На самом деле эти неравенства равносильны. Положив в неравенстве (2) $\alpha_i=\frac{m_i}{m_1+\dots+m_n}$ $(i=1, 2, \dots, n)$, мы получаем неравенство (3). Поэтому естественно оба эти неравенства называть неравенствами Иенсена. Неравенство (2) выглядит более компактно, однако для приложений удобнее пользоваться неравенством (3). Во-вторых, если функция $f(x)$ вогнутая, то для нее неравенства Иенсена (2) и (3) меняются на противоположные. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть выпуклую функцию $f(x)$.

Неравенство Коши—Буняковского

На первый взгляд, неравенство Иенсена не производит особого впечатления: слишком общо выглядит формулировка. Прочитав эту статью до конца, вы убедитесь, что это впечатление обманчиво.

Продемонстрируем силу неравенства Иенсена на конкретном примере. А именно докажем знаменитое неравенство Коши—Буняковского:

$$(a_1^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots+b_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(a_1b_1+\dots+a_nb_n)^2,$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ — произвольные положительные числа.

Доказательство. Как мы знаем, функция $y=x^2$ — выпуклая. Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3)

$$\left(\frac{m_1x_1+\dots+m_nx_n}{m_1+\dots+m_n}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m_1x_1^2+\dots+m_nx_n^2}{m_1+\dots+m_n}\ (m_i>0).$$

Следовательно, $(m_1x_1^2+\dots+m_nx_n^2)\times\times(m_1+\dots+m_n)\geqslant(m_1x_1+\dots+m_nx_n)^2$. Положив $m_i=b_i^2$, $x_i=\frac{a_i}{b_i}$, получим требуемое неравенство.

Упражнение 3. Докажите неравенство Коши—Буняковского для произвольных вещественных чисел a_i, b_i.

Примеры выпуклых функций

Для успешного применения неравенства Иенсена необходим простой критерий, позволяющий определять, является ли данная функция выпуклой.

Теорема. *Пусть $y=f(x)$ дважды дифференцируемая функция. Если ее вторая производная положительна, то функция выпукла, а если вторая производная отрицательная, то функция вогнута.*

Мы не будем аккуратно доказывать эту теорему, поясним только ее геометрический смысл. Пусть $f''(x)>0$ для всех x. Очевидно, что надграфик окажется выпуклым, если график функции в каждой точке «поворачивает» вверх относительно касательной в этой точке. На языке формул это означает, что если $l(x)$ — линейная функция, график которой — касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(a, f(a))$, то $f(x)>l(x)$ при всех x, достаточно близких к a и отличных от a.

Чтобы вывести неравенство $f(x)>l(x)$ из неравенства $f''(a)>0$, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $g(x)$ — такая функция, что $g(a)=g'(a)=0$ и $g''(a)>0$. Тогда при всех x, достаточно близких к a и отличных от a, $g(x)>0$. Это понятно с физической точки зрения: если покоящемуся телу (скорость $g'(a)=0$) придать положительное ускорение (ускорение $g''(a)>0$), то тело начнет перемещаться в положительном направлении.

Рассмотрим теперь функцию $g(x)=f(x)-l(x)$. Поскольку графики функций $f(x)$ и $l(x)$ проходят через одну точку и имеют в ней одинаковый наклон, $g(a)=g'(a)=0$. Кроме того, $g''(x)=f''(x)$, так как вторая производная линейной функции $l(x)$ равна нулю. Значит, $g''(a)>0$ и, согласно сказанному в предыдущем абзаце, $g(x)>0$ при x, достаточно близких к a. Это и значит, что $f(x)>l(x)$. Случай $f''(x)<0$ рассматривается аналогично.

Пользуясь теоремой, мы «запасемся» несколькими выпуклыми и вогнутыми функциями. От вас при этом требуется умение вычислять производные.

Примеры

1. $y=x^{\alpha}$ $(x>0)$.

Так как $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, то при $0<\alpha<1$ функция вогнутая, а при $\alpha<0$ и $\alpha>1$ — выпуклая.

2. $y=a^{x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

Так как $y''=a^{x}\ln^{2}a>0$, то функция выпуклая.

3. $y=\log_{a}x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$.

Так как $y''=-\dfrac{1}{x^{2}\ln a}$, то при $a<1$ функция выпуклая, а при $a>1$ — вогнутая.

4. $y=\ln(1+e^{x})$.

Так как $y''=\dfrac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}>0$, то эта функция выпуклая.

5. $y=x\ln x$.

Так как $y''=\dfrac{1}{x}>0$, то функция $y=x\ln x$ — выпуклая.

6. $y=(1+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$ $(x>0)$.

Так как $y''=(\alpha-1)x^{\alpha-2}(1+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}-2}$, то при $\alpha<1$ функция вогнутая, а при $\alpha>1$ — выпуклая.

Теперь мы можем доказать несколько классических неравенств.

Неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\quad(x_i>0).$$

Доказательство. Прологарифмируем обе части этого неравенства

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1+\ldots+\frac{1}{n}x_n\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{n}\ln x_1+\ldots+\frac{1}{n}\ln x_n.$$

Полученное неравенство напоминает нам неравенство Иенсена, однако знак неравенства «смотрит не туда». Объясняется это тем, что функция $\ln x$ не выпуклая, а вогнутая (пример 3).

Неравенство Гельдера

Пусть p, q — положительные числа, причем $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\quad(a_i,\ b_i>0).$$

Доказательство. Ясно, что $p>1$, поэтому функция $y=x^{p}$ — выпуклая (пример 1). Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right)^p \leqslant \frac{\Sigma m_i x_i^p}{\Sigma m_i}.$$

Отсюда

$$\Sigma m_i x_i \leqslant (\Sigma m_i)^{\frac{p-1}{p}} \, (\Sigma m_i x_i^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}$, и поэтому

$$\Sigma m_i x_i \leqslant (\Sigma m_i x_i^p)^{\frac{1}{p}} \, (\Sigma m_i)^{\frac{1}{q}}.$$

Положив теперь $m_i = b_i^q$, $x_i = a_i b_i^{1-q}$, получаем требуемое неравенство.

Неравенство Минковского

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot \ldots \cdot b_n} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \cdot \ldots \cdot (a_n + b_n)} \; (a_i, b_i > 0).$$

Доказательство. Поделив обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$, получим

$$1 + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ясно, что дробь $\frac{b_i}{a_i}$ имеет смысл как-то обозначить. Но на самом деле удобнее ввести обозначение не для самой дроби $\frac{b_i}{a_i}$, а для ее логарифма: $x_i = \ln \frac{b_i}{a_i}$. Итак, заменив $\frac{b_i}{a_i}$ на e^{x_i}, мы запишем наше неравенство в виде

$$1 + e^{\Sigma \frac{1}{n} x_i} \leqslant \Pi (1 + e^{x_i})^{\frac{1}{n}}.$$

Прологарифмируем обе части получившегося неравенства:

$$\ln (1 + e^{\Sigma \frac{1}{n} x_i}) \leqslant \Sigma \frac{1}{n} \ln (1 + e^{x_i}).$$

В последнем неравенстве мы узнаем неравенство Иенсена для выпуклой функции $y = \ln (1 + e^x)$ (пример 4).

Несколько примеров использования неравенства Иенсена

Задача 1. *Докажите неравенство*

$$\Pi a_i^{a_i} \geqslant (\Sigma \frac{1}{n} a_i)^{\Sigma a_i} \; (a_i > 0).$$

Решение. Прологарифмировав обе части неравенства и разделив на n, получим

$$\Sigma \frac{1}{n} a_i \ln a_i \geqslant \Big(\Sigma \frac{1}{n} a_i \; \ln \Sigma \frac{1}{n} a_i.$$

А это — неравенство Иенсена для выпуклой функции $y = x \ln x$ (пример 5).

Задача 2. *Докажите неравенство:*

$$\sqrt{(\Sigma a_i)^2 + (\Sigma b_i)^2} \leqslant \Sigma \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \; (a_i, b_i > 0).$$

Решение. Напишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y = \sqrt{1 + x^2}$ (пример (6):

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right)^2} \leqslant \frac{\Sigma m_i \sqrt{1 + x_i^2}}{\Sigma m_i}.$$

Домножив обе части неравенства на Σm_i, получим

$$\sqrt{(\Sigma m_i)^2 + (\Sigma m_i x_i)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma m_i \sqrt{1 + x_i^2} = \Sigma \sqrt{m_i^2 + (m_i x_i)^2}.$$

Остается только положить $m_i = a_i$, $x_i = \frac{b_i}{a_i}$.

В заключение рассмотрим довольно трудную задачу, которую тоже можно решить при помощи неравенства Иенсена.

Задача 3. *Докажите неравенство*

$$\frac{p_1}{p_2 + p_3} + \frac{p_2}{p_3 + p_4} + \frac{p_3}{p_4 + p_5} +$$

$$+ \frac{p_4}{p_5 + p_1} + \frac{p_5}{p_1 + p_2} \geqslant \frac{5}{2} \; (p_i > 0).$$

Решение. Для удобства введем дополнительные переменные p_6 и p_7, равные p_1 и p_2 соответственно. Теперь данное неравенство можно записать коротко:

$$\sum_{i=1}^{5} \frac{p_i}{p_{i+1} + p_{i+2}} \geqslant \frac{5}{2}.$$

Выпишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y = \frac{1}{x}$ (пример 1):

$$\left(\frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}\right)^{-1} \leqslant \frac{\Sigma m_i x_i^{-1}}{\Sigma m_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma \frac{m_i}{x_i} \geqslant \frac{(\Sigma m_i)^2}{\Sigma m_i x_i}.$$

Положим теперь $m_i = p_i$, $x_i = p_{i+1} + p_{i+2}$:

$$\Sigma \frac{p_i}{p_{i+1} + p_{i+2}} \geqslant \frac{(\Sigma p_i)^2}{\Sigma p_i(p_{i+1} + p_{i+2})}.$$

Тем самым достаточно доказать неравенство

$$\frac{(\Sigma p_i)^2}{\Sigma p_i(p_{i+1} + p_{i+2})} \geqslant \frac{5}{2}.$$

Избавившись от знаменателей и раскрыв скобки, приходим к неравенству

$$2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \geqslant p_1p_2 + p_1p_3 + p_1p_4 + p_1p_5 + p_2p_3 + p_2p_4 + p_2p_5 + p_3p_4 + p_3p_5 + p_4p_5.$$

Так как правая часть равна $\frac{1}{2}((p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2))$, то неравенство можно переписать в виде

$$5(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \geqslant (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)^2.$$

Записав это в виде

$$(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2) \geqslant (1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 + 1 \cdot p_4 + 1 \cdot p_5)^2,$$

мы обнаруживаем частный случай неравенства Коши-Буняковского.

Упражнения

Доказите неравенства:

4. $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^p < n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p$ при $p > 1$, $x_i > 0$.

5. $\sum_{i=1}^{n} a_i^p \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^p \geqslant n^{2-p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^p$ при $p \geqslant 2$, $a_i, b_i > 0$.

6. $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$, где $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $a_i > 0$.

7. $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geqslant 3\sqrt{2}$ при $a, b, c > 0$.

8. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 4\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)$ при $a, b, c > 0$.

9. $\dfrac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \dfrac{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)}{\left(\sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)\right)^n}$ при $0 < x_i < \frac{1}{2}$.

10. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geqslant 2$ при $a, b, c, d > 0$.

11. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+e} + \frac{d}{e+f} + \frac{e}{f+a} + \frac{f}{a+b} \geqslant 3$ при $a, b, c, d, e, f > 0$.

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения и, в первую очередь, на физический факультет МГУ (при поступлении на физический факультет удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией).

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов по всем физическим специальностям. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, а также успешно работать в сложных областях науки и техники, где стыкуются два или несколько научных направлений. Например — биофизика и геофизика, радио-гамма-инфракрасная астрономия и создание искусственного интеллекта, химическая физика и астрофизика.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по приведенному здесь образцу.

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*11*
Профессия родителей	*мать — врач,* *отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816, г. Калуга, ул. Ленина, д. 88, кв. 99*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3*

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и возвращается обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, а поступающим в 11 класс — задачи 4—7.

1. **«Бикфордов шнур».** Из взрывчатого вещества изготовлен стержень длиной l. Скорость детонации (скорость вовлечения во взрыв новых участков взрывчатого вещества) v, а скорость разлета продуктов взрыва $u<v$. Как изменяется со временем область, занятая продуктами взрыва, если стержень подрывается с одного из концов? Сделайте рисунок.

2. **«Кумулятивный взрыв».** Из того же взрывчатого вещества (см. задачу 1) нужно изготовить тонкостенную коническую оболочку, такую, чтобы при подрыве ее с вершины продукты взрыва одновременно ударили по броневой плите. Какой угол между осью конуса и образующей нужно выбрать для этого?

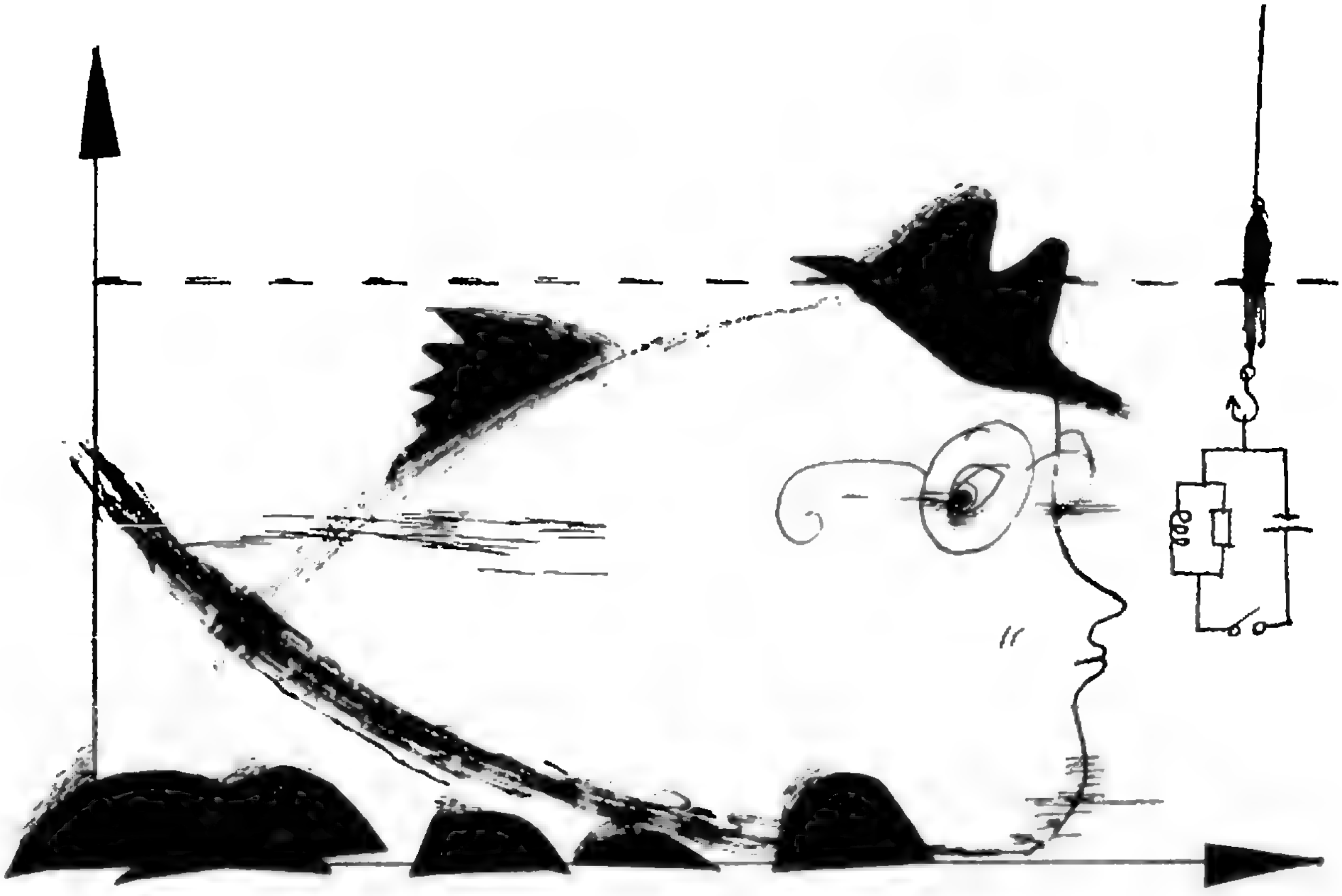
3. **«Пандус».** По деревянным сходням, образующим угол [illegible] с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом к горизонту следует тянуть веревку, чтобы втащить ящик с наименьшим усилием?

4. **«Мягкое приземление».** Оцените среднюю силу, развиваемую ногами человека при приземлении после прыжка из окна второго этажа. Считайте для определенности, что масса человека 70 кг, высота прыжка 5 м, а амортизация прыжка происходит на длине 1 м.

5. **«Противоракетная оборона».** С какой скоростью должен вылететь из пушки снаряд в момент старта ракеты, чтобы поразить ракету, летящую вертикально с ускорением a? Расстояние от пушки до места старта ракеты L, пушка стреляет под углом 45° к горизонту.

6. **«Водяная подушка».** В полусферический колокол, края которого плотно прилегают к поверхности стола, наливают через отверстие вверху жидкость. Когда жидкость доходит до отверстия, она приподнимает колокол и начинает из-под него вытекать. Найдите массу колокола, если его внутренний радиус R, а плотность жидкости ρ.

7. **«Линейный ускоритель».** Частица массой m с зарядом q влетает в плоский конденсатор сквозь его верхнюю обкладку — обкладки выполнены в виде сеток — и ускоряется в нем. Напряженность поля в конденсаторе E, расстояние между сетками d. Начальная скорость [illegible] частицы составляет угол [illegible] с плоскостью первой сетки. С какой скоростью и под каким углом к плоскости второй сетки частица вылетит из конденсатора?



Практикум абитуриента

Переходные процессы в электрических цепях

Кандидат физико-математических наук
В. МОЖАЕВ

При замыкании или размыкании электрической цепи или при изменении ее параметров система переходит из одного установившегося состояния в другое. То, что происходит в данной цепи в течение времени этого перехода, мы и будем называть переходным процессом.

Будем рассматривать электрические цепи, в которых действуют постоянные источники ЭДС.

Установившееся состояние может быть как стационарным, так и нестационарным. В первом случае токи, заряды и напряжения во всех элементах цепи остаются постоянными во времени. В случае нестационарного режима ток в цепи или, например, заряд на конденсаторе периодически изменяются со временем, т. е. система находится в колебательном режиме. Очевидно, это возможно только тогда, когда в системе нет диссипации энергии (т. е. рассеяния части энергии в виде тепла). При наличии потерь система всегда придет к стационарному установившемуся состоянию.

В большинстве задач, предлагаемых абитуриентам, речь, как правило, идет об установившихся состояниях систем. Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров.

Задача 1. *Имеется самая простая цепь: источник постоянной ЭДС $\mathscr{E}_0$ и нагрузка в виде резистора сопротивлением R (рис. 1). Найдите зависимость тока в цепи от времени после замыкания ключа K.*

Запишем закон Ома для данной цепи в произвольный момент времени после замыкания ключа:

$$\mathscr{E}_0 = I(t)R.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$I(t) = \mathscr{E}_0/R = \text{const}.$$

Ток в цепи в любой момент времени после замыкания ключа остается постоянным и равным $\mathscr{E}_0/R$, т. е. в системе мгновенно устанавливается стационарный режим. Реально даже в такой идеализированной системе (при полном отсутствии индуктивности и емкости в цепи) время выхода на стационарный режим будет хотя и очень малым, но ненулевым, что связано с конечной скоростью распространения электромагнитной волны. Но закон Ома для замкнутой цепи об этом «не знает» и не может описывать такие скоростные режимы, в которых это нужно учитывать. И мы их, естественно, рассматривать не будем.

Задача 2. *Электрическая цепь содержит резистор сопротивлением R и конденсатор емкостью C (рис. 2). Как изменяется со временем напряжение на конденсаторе?*

Запишем для этого случая закон Ома:

$$\mathscr{E}_0 = U(t) + I(t)R,$$

где $U(t)$ — напряжение на конденсаторе в произвольный момент времени (после замыкания ключа K), а $I(t)$ — ток в цепи. Используя связь $I(t) = \Delta(CU)/\Delta t$, запишем закон Ома в виде

$$RC\frac{\Delta U(t)}{\Delta t} + U(t) = \mathscr{E}_0.$$

Это уравнение описывает зависимость напряжения на конденсаторе от времени в любой момент времени после замыкания ключа K. Введем новую переменную $U^*(t) = U(t) - \mathscr{E}_0$, тогда закон Ома будет выглядеть так:

$$\frac{\Delta U^*(t)}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}U^*(t).$$

Такого вида уравнение описывает многие хорошо известные процессы, например — радиоактивный распад ядер, зависимость скорости тела от времени при действии на тело силы сопротивления, пропорциональной скорости тела, т. е. те процессы, в которых скорость изменения со временем некоторой величины пропорциональна этой величине в данный момент времени. В нашем случае скорость изменения $U^*(t)$ пропорциональна самой этой величине с коэффициентом пропорциональности — $1/(RC)$. Знак минус означает, что $U^*(t)$ убывает со временем. Мы приведем здесь решение такого уравнения, но только с познавательной целью:

$$U^*(t) = Ae^{-t/(RC)},$$

где A — некоторая константа, которая находится из начальных условий. В момент замыкания ключа K напряжение на конденсаторе было равно нулю: $U(0) = 0$, следовательно, $U^*(0) = U(0) - \mathscr{E}_0 = -\mathscr{E}_0$ и $A = -\mathscr{E}_0$. Окончательная зависимость напряжения на конденсаторе от времени будет иметь вид

$$U(t) = \mathscr{E}_0(1 - e^{-t/(RC)}).$$

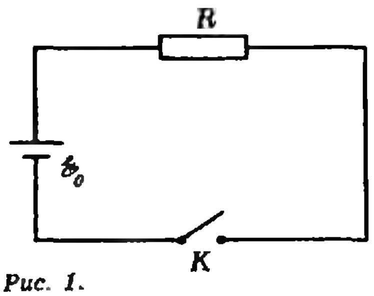


Рис. 1.

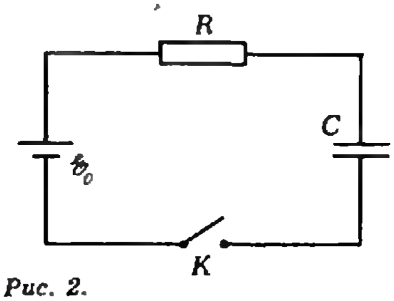


Рис. 2.

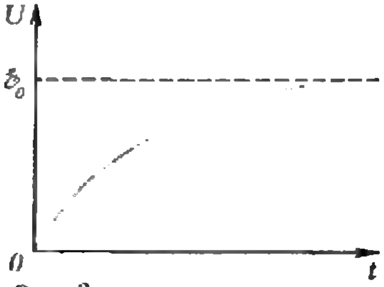


Рис. 3.

На рисунке 3 приведен соответствующий график.

Как следует из полученной зависимости, зарядка конденсатора будет происходить бесконечно долго и напряжение на конденсаторе сможет стать равным ЭДС источника $\mathcal{E}_0$ только в необозримом будущем. Но это все относится к идеализированной схеме, в которой ее параметры ($\mathcal{E}_0$, R и C) являются строго постоянными величинами и не зависят от времени. В действительности они все «дышат», т. е. меняются со временем, например из-за нестабильности окружающей температуры. Это приводит к резкому искажению полученной зависимости $U(t)$ в области больших значений $t(t \gg RC)$, т. е. когда напряжение на конденсаторе уже мало отличается от $\mathcal{E}_0$. Поэтому при всех конечных значениях R и C время зарядки всегда конечно и полностью определяется величиной RC, называемой постоянной времени. Чем меньше значение этой постоянной, тем быстрее происходит зарядка, и наоборот.

Задача 3. *Рассмотрите теперь цепь, содержащую резистор сопротивлением R и катушку индуктивностью L (рис. 4). Найдите зависимость тока в цепи от времени после замыкания ключа K.*

Закон Ома для данной цепи имеет вид

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = I(t)R.$$

Введем новую переменную $I^*(t) = I(t) - \mathcal{E}_0/R$ и получим

$$\frac{\Delta I^*(t)}{\Delta t} = -\frac{R}{L}I^*(t).$$

Это уже знакомое нам уравнение, его решение ищем в виде

$$I^*(t) = Ae^{-Rt/L},$$

где A — некоторая константа, которую находим из начальных условий. В момент замыкания ключа K ток в цепи был равен нулю: $I(0)=0$; следовательно, $I^*(0) = I(0) - \mathcal{E}_0/R = -\mathcal{E}_0/R$ и $A = -\mathcal{E}_0/R$. Тогда

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}(1 - e^{-Rt/L}).$$

Мы получили зависимость $I(t)$, совершенно аналогичную зависимости $U(t)$ в предыдущем случае. Постоянная времени выхода на стационарный режим в данном случае равна $\tau = L/R$ — чем меньше R, тем дольше система приходит в устойчивое состояние, при стремлении R к нулю τ стремится к бесконечности. При $R=0$ закон Ома имеет вид

$$\mathcal{E}_0 - L\frac{\Delta I(t)}{\Delta t} = 0,$$

а решение этого уравнения —

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L}t,$$

т. е. ток в цепи будет линейно нарастать со временем и никогда не сможет выйти на стационарный режим. В действительности же рост тока будет ограничен конечным запасом энергии источника. На рисунке 5 показан график зависимости $I(t)$ при некотором конечном значении L/R.

Задача 4. *Параллельно соединенные катушка индуктивностью L и резистор сопротивлением R подключены через ключ K к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 6). В начальный момент времени ключ K разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд протечет через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебречь. Нарисуйте*

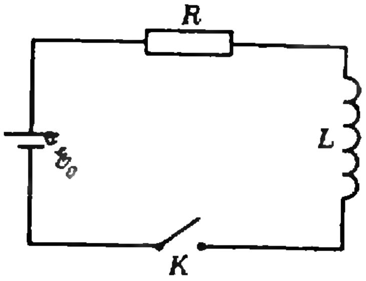


Рис. 4.

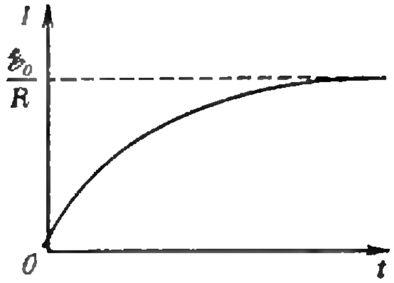


Рис. 5.

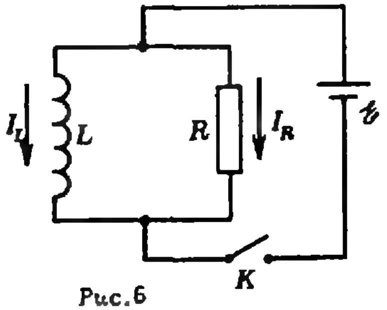


Рис.6

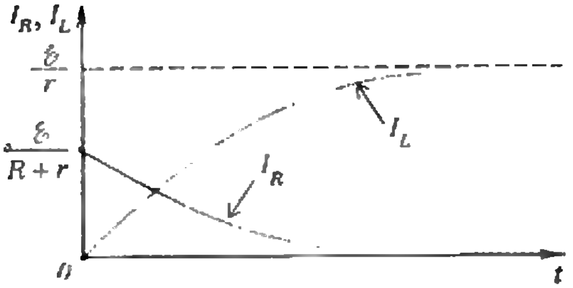


Рис. 7.

график зависимости от времени тока через резистор и тока через катушку.

Пусть в произвольный момент времени после замыкания ключа K через резистор R течет ток $I_R(t)$, а через катушку индуктивности L — ток $I_L(t)$ (см. рис. 6). Очевидно, что ток батареи равен суммарному току $I_R(t)+I_L(t)$. Выберем два замкнутых контура и запишем для каждого из них закон Ома. Для контура, охватывающего батарею и резистор, можно записать

$$\mathscr{E} = I_R(t)R + (I_R(t)+I_L(t))r. \qquad (1)$$

Аналогичное уравнение для контура, содержащего катушку и резистор, будет иметь вид

$$L\frac{\Delta I_L(t)}{\Delta t} = I_R(t)R. \qquad (2)$$

В начальный момент времени, сразу после замыкания ключа K ($t=0$), ток $I_L(0)=0$. Из первого уравнения (это уравнение справедливо и для $t=0$) следует, что ток через резистор сразу после замыкания ключа равен $I_R(0) = \mathscr{E}/(R+r)$. Зная сами токи, мы можем найти и скорости их изменения в начальный момент времени

$$\frac{\Delta I_L}{\Delta t}\Big|_{t=0} \text{ и } \frac{\Delta I_R}{\Delta t}\Big|_{t=0}.$$

Из уравнения (2) следует, что

$$L\frac{\Delta I_L}{\Delta t}\Big|_{t=0} = I_R(0)R = \frac{\mathscr{E}R}{R+r} > 0,$$

т. е. ток через катушку со временем растет. Поскольку $\mathscr{E}$ не зависит от времени, из уравнения (1) следует, что

$$\frac{\Delta I_R(t)}{\Delta t}(R+r) + \frac{\Delta I_L(t)}{\Delta t}r = 0,$$

а в момент $t=0$

$$\frac{\Delta I_R}{\Delta t}\Big|_{t=0} = -\frac{\Delta I_L}{\Delta t}\frac{r}{R+r} = -\frac{\mathscr{E}Rr}{(R+r)^2L} < 0$$

— ток через резистор уменьшается с некоторой конечной скоростью.

Система диссипативна, поэтому она стремится к некоторому стационарному состоянию. Обоим уравнениям удовлетворяет стационарное решение

$$I_R = 0,\ I_L = \mathscr{E}/r.$$

Следовательно, ток через резистор уменьшается и асимптотически стремится к нулевому значению, а ток через катушку нарастает и стремится к значению $\mathscr{E}/r$. Зависимости $I_R(t)$ и $I_L(t)$ показаны на рисунке 7.

Для нахождения суммарного заряда Q_R, протекшего через резистор, перепишем уравнение (2) в виде

$$L\Delta I_L(t) = RI_R(t)\Delta t.$$

Здесь $I_R(t)\Delta t$ — заряд ΔQ_R, протекший через резистор за малый промежуток времени Δt; следовательно,

$$L\Delta I_L(t) = R\Delta Q_R.$$

Как видно из этого уравнения, связь между изменением тока через катушку и протекшим через резистор зарядом не зависит от времени, т. е. она остается одной и той же для любого интервала времени. За весь процесс установления стационарного состояния

$$L(I_L(\infty) - I_L(0)) = RQ_R.$$

С учетом того, что $I_L(\infty) = \mathscr{E}/r$, суммарный заряд, протекший через резистор, будет равен

$$Q_R = \frac{\mathscr{E}L}{Rr}.$$

Задача 5. *Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L, конденсатора емкостью C и идеального диода D (рис. 8), через ключ K на время τ подключают к источнику постоянной ЭДС $\mathscr{E}$, а затем отключают. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени после размыкания ключа. Представьте графически эту зависимость. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением катушки пренебречь.*

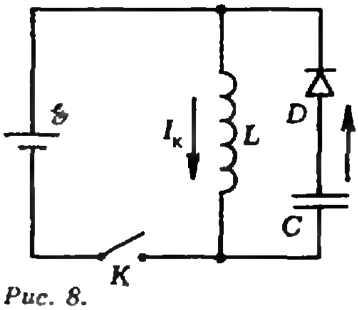


Рис. 8.

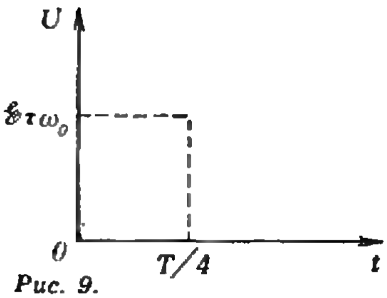


Рис. 9.

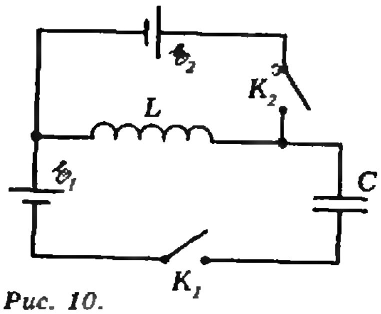


Рис. 10.

После замыкания ключа K в произвольный момент времени t для контура, содержащего источник и катушку, согласно закону Ома, можно записать

$$\mathscr{E} - L\frac{\Delta I_L(t)}{\Delta t} = 0.$$

Так как начальный ток $I_L(0)=0$, то зависимость тока $I_L(t)$ через катушку индуктивности будет иметь вид

$$I_L(t) = \frac{\mathscr{E}}{L}t,$$

т. е. ток линейно нарастает со временем и через время τ будет равен

$$I_L(\tau) = \frac{\mathscr{E}}{L}\tau.$$

Ток через диод, очевидно, все это время будет равен нулю.

Рассмотрим контур, содержащий катушку, диод и конденсатор после размыкания ключа K (через время τ). Закон Ома для данного контура выглядит так:

$$-L\frac{\Delta I_к}{\Delta t} = U(t),$$

где $I_к$ — ток в контуре (см. рис. 8), а $U(t)$ — напряжение на конденсаторе. С учетом связи $I_к=\Delta(CU)/\Delta t = CU'$ уравнение для данного контура приводится к виду

$$U'' + \frac{1}{LC}U = 0.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания в контуре, поэтому решение этого уравнения ищем в виде

$$U(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t,$$

где A и B — константы, а $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Будем отсчитывать время с момента размыкания ключа K. При $t=0$ напряжение на конденсаторе $U(0)=0$, откуда следует, что $A=0$. Из начального условия $I_к(0)=I_L(\tau)=\mathscr{E}\tau/L$, с другой стороны, $I_к(0)=C\frac{\Delta U}{\Delta t}\Big|_{t\to 0} = B\omega_0 C$; следовательно, $B=\mathscr{E}\tau/(LC\omega_0)=\mathscr{E}\tau\omega_0$. Окончательно получим

$$U(t) = \mathscr{E}\tau\omega_0\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Но это справедливо не для любого момента времени, а только в интервале $0 \leqslant t \leqslant T/4$, где $T=2\pi\sqrt{LC}$. При $t > T/4$ напряжение на конденсаторе будет оставаться постоянным и равным $\mathscr{E}\tau\omega_0$. График зависимости $U(t)$ показан на рисунке 9.

З а д а ч а 6. *В схеме, изображенной на рисунке 10, в начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор не заряжен. Сначала замыкают ключ K_1. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе оказывается равным сумме ЭДС батарей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, замыкают ключ K_2. Через какое время после замыкания ключа K_2 величина силы тока через катушку увеличится в 3 раза? Считать заданными индуктивность катушки L, емкость конденсатора C и отношение $\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1 = 0{,}8$. Всеми омическими потерями пренебречь.*

После замыкания ключа K_1 мы имеем замкнутую цепь, содержащую первый источник, катушку и конденсатор. Закон Ома для данной цепи в произвольный момент времени имеет вид

$$\mathscr{E}_1 - LCU_C'' = U_C,$$

где U_C — напряжение на конденсаторе. Введем новую переменную $U_C^* = U_C - \mathscr{E}_1$, тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$U_C^{*\prime\prime} + \frac{1}{LC}U_C^{*}=0.$$

Как уже говорилось, уравнение такого вида описывает гармонические колебания:

$$U_C^{*}=A\sin\omega_0 t+B\cos\omega_0 t,$$

где A и B — константы, которые находятся из начальных условий, а $\omega_0=1/\sqrt{LC}$. Сразу после замыкания ключа K_1 $U_C^{*}(0)=0$, $U_C^{*}(0)=-\mathscr{E}_1$. Кроме того, $U_C'(0)=U_C^{*\prime}(0)=0$ из условия равенства нулю тока в начальный момент времени. Отсюда можно найти константы A и B: $A=0$, $B=-\mathscr{E}_1$. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени будет иметь вид

$$U_C(t)=\mathscr{E}_1(1-\cos\omega_0 t).$$

Эта зависимость и зависимость тока ($I(t)$) в цепи от времени показаны на рисунке 11.

Есть два момента времени за каждый период колебаний, когда $U_C(\tau_1)=U_C(\tau_2)=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2=1{,}8\mathscr{E}_1$. Несложно найти величину силы тока в эти моменты времени — либо из зависимости

$$I(t)=CU_C'=C\mathscr{E}_1\omega_0\sin\omega_0 t=$$
$$=\mathscr{E}_1\sqrt{C/L}\sin\omega_0 t,$$

либо из закона сохранения энергии: работа источника с ЭДС $\mathscr{E}_1\cdot 1{,}8\mathscr{E}_1$ пошла на приращение энергии конденсатора $C(1{,}8\mathscr{E}_1)^2/2$ и энергии магнитного поля катушки $LI_L^2(t)/2$. В обоих случаях

$$I(\tau_1)=0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}},\text{ а } I(\tau_2)=-0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

После замыкания ключа K_2 закон Ома для замкнутого контура, содержащего второй источник и катушку, имеет вид

$$\mathscr{E}_2-L\frac{\Delta I_L}{\Delta t}=0.$$

Решение этого уравнения:

$$I_L(t)=I_L(0)+\frac{\mathscr{E}_2 t}{L},$$

где время t отсчитывается от момента *замыкания ключа* K_2. Для первого случая, когда ключ K_2 замыкается через время τ_1 после замыкания ключа K_1,

$$I_L(\tau_1)=I_L(0)=-0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Знак минус отражает тот факт, что один и тот же ток $I_L(\tau_1)$, протекаемый через катушку, для контура, содержащего первый источник и конденсатор, течет в направлении «действия» ЭДС $\mathscr{E}_1$ (от «+» к «—»), а для контура, содержащего второй источник и катушку, он течет против ЭДС $\mathscr{E}_2$. Через некоторое время t_1 после замыкания K_2

$$I_L(t_1)=3\cdot 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}=$$
$$=-0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}+0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t_1,$$

откуда

$$t_1=3\sqrt{LC}.$$

Во *втором* случае, когда ключ K_2 замыкается через время τ_2 после замыкания ключа K_1,

$$I_L(0)=I_L(\tau_2)=0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Тогда через время t_2 после замыкания K_2

$$I_L(t_2)=3\cdot 0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}=$$
$$=0{,}6\mathscr{E}_1\sqrt{\frac{C}{L}}+0{,}8\frac{\mathscr{E}_1}{L}t_2.$$

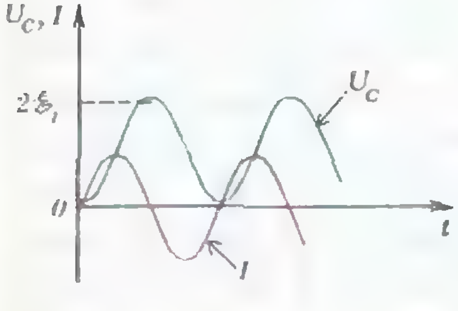


Рис. 11.

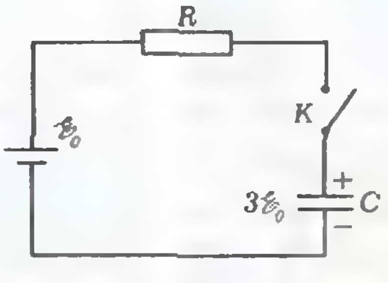


Рис. 12.

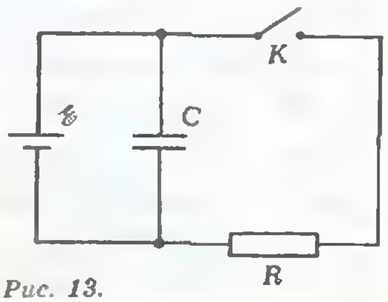


Рис. 13.

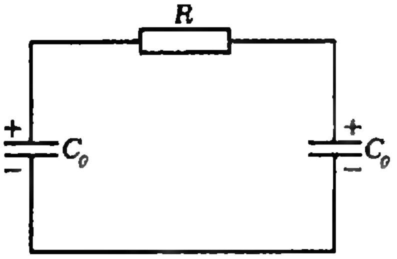


Рис. 14.

Следовательно, для второго случая увеличение величины силы тока в 3 раза произойдет через время

$$t_2 = \frac{3}{2}\sqrt{LC}.$$

Упражнения

1. В схеме, изображенной на рисунке 12, в начальный момент времени ключ K разомкнут, напряжение на конденсаторе емкостью C равно $3\mathscr{E}_0$. Используя решение задачи 2 в статье, определите зависимость напряжения на конденсаторе от времени после замыкания ключа K. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

2. После замыкания ключа K (рис. 13) заряд конденсатора емкостью C уменьшился в полтора раза. Найдите внутреннее сопротивление батареи, если $R = 10$ Ом.

3. Два конденсатора, каждый емкостью C_0, заряжены до напряжения U_0 и соединены через резистор (рис. 14). Пластины одного из конденсаторов раздвигают так, что расстояние между ними увеличивается вдвое, а заряды на пластинах за время их перемещения не меняются. Найдите количество теплоты, выделившееся на резисторе во время последовавшего затем переходного процесса.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 39)

новцы) 78, 80, 82, 85—89, 91; *П. Болотских* (Губкин) 88—90, 92; *Р. Бучко* (Черновцы) 78—82, 85, 86, 88, 89, 92; *В. Быков* (Коломна) 81, 82; *Г. Важенин* (Свердловск) 78—80, 85—87; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 78, 80, 81, 88, 89; *А. Викол* (Нерюнгри) 80, 82, 85—90; *А. Власов* (Ленинград) 88, 89; *А. Воронин* (Старый Оскол) 88, 89; *О. Воротникова* (Красноярск) 79, 86, 89; *Г. Выгон* (Москва) 78, 79, 81, 85, 86, 89, 92; *В. Высоцкий* (Киев) 79, 81, 82, 85—87, 89—91; *К. Галичский* (Северодвинск) 78—82, 85—92; *А. Гвоздев* (Рига) 89; *Е. Гендин* (Киев) 78—82, 85; *М. Грехова* (Ярославль) 81; *А. Гринчук* (д. Мохро Брестской обл.) 78—80, 82, 85, 86, 89, 91; *А. Грицан* (Новосибирск) 91; *Д. Грязных* (Челябинск) 78, 81, 85—92; *В. Губин* (Ташкент) 81, 82; *О. Гусар* (Канев) 80, 82, 85, 89, 92; *Р. Гуськов* (Шахты Ростовской обл.) 86; *Ю. Гуц* (Ровно) 78—80, 82, 85, 88—90, 92; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 79, 80, 82, 89; *А. Даниленко* (Киев) 82; *С. Демба* (Старый Оскол) 87, 89; *Н. Демчук* (Здолбунов) 78, 80, 86, 88, 91, 92; *С. Дергач* (с. Малиновка БашАССР) 81; *О. Дзюбенко* (Киев) 85; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 78—80, 82, 85, 87, 88; *А. Довгань* (Киев) 80; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 79, 80, 82; 85—87, 89, 91; *М. Дружинин* (Москва) 78—82; 85, 87; *А. Дубовик* (Брест) 78; *Д. Душамов* (Шават) 88; *Д. Егоров* (Павлово Горьковской обл.) 80; *Ю. Ерошенко* (п. Приютово БашАССР) 82; *П. Жаврид* (Минск) 79—81; *А. Жук* (Ровно) 78—80, 82, 85—90, 92; *О. Жуманиезов* (Шават) 89; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 89; *А. Зборовский* (Столин) 79; *В. Зелевинский* (Новосибирск) 88, 89; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) 78, 80—82, 85—87, 89, 92; *В. Злобов* (Старый Оскол) 88, 89; *Ф. Ибрагимов* (Баку) 78, 81, 82, 88—92; *Д. Иванов* (Смоленск) 79, 82; *Н. Ивченко* (Киев) 87; *Н. Илеть* (Черновцы) 79; *А. Калашников* (Киев) 78—80, 82; *М. Калиновский* (п. Трудовое Приморского кр.) 79, 80, 82, 85, 88, 89; *Т. Калита* (Киев) 78—80, 82, 85, 89; *К. Калюжный* (Одесса) 80; *Ал. Карпенко* (Брест) 78, 81, 82, 85; *Ан. Карпенко* (Брест) 78, 81, 82, 85, 87; *И. Кацман* (Киев) 79, 82, 89; *С. Кельман* (Алма-Ата) 78—80, 82, 85, 87—90; *Ж. Китаева* (Чернигов) 79; *К. Кладько* (Харьков) 79—82, 88; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 78, 79, 81, 82, 85, 86, 89, 92; *М. Ковалев* (Губкин) 82, 88—92; *И. Ковалец* (Ровно) 85, 90, 92; *С. Коваль* (Гомель) 78—81, 85, 88—90, 92; *В. Ковальский* (Киев) 79, 81, 82, 85; *Т. Ковальчук* (Киев) 79, 81; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 78—82, 85, 87—89, 91; *Д. Кольвах* (Орджоникидзе) 87; *Д. Комисаренко* (Винница) 78—82, 86; *Е. Коновалов* (Киев) 78, 80—82; *Ю. Контиевский* (Каушаны) 78, 79; *В. Коньшин* (Ростов) 78; *И. Корель* (Новосибирск) 89; *В. Королев* (Москва) 79; *А. Короновский* (Саратов) 80; *В. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 88, 89, 91; *С. Костюк* (Коломна) 85, 86; *С. Котковский* (Черновцы) 80; *Ю. Крвавич* (с. Княжполь Львовской обл.) 85, 86; *Н. Кронский* (Горький) 78, 79; *В. Кутузов* (Рига) 78—81, 85, 87, 89, 90, 92; *А. Лабунец* (Одесса) 85; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 79, 81, 82, 85—87, 89—92; *А. Лянин* (Москва) 78, 85, 88, 89; *В. Макаров* (Кировское) 89; *Н. Маркарян* (Баку) 81; *Д. Массино* (Ташкент) 78—82; *Ю. Матюнин* (Вольск) 80—82, 85, 87—92; *Н. Мацко* (Киев) 79—82, 88, 89, 92; *В. Меркер* (Старый Оскол) 89; *Р. Мизюк* (Ровно) 78—80, 82, 85—92; *О. Мирошниченко* (Луцк) 78—82; *А. Михович* (Могилев) 85, 87; *А. Мишенин* (Кропоткин) 82; *Е. Мищенко* (Черновцы) 78—82, 85—92; *А. Мухин* (Северодвинск) 89, 90; *В. Мытько* (Ленинград) 85, 86, 89, 90, 92; *Т. Насардинов* (Грозный) 80; *Н. Немировская* (Киев) 79, 80, 85, 89; *Д. Омецинский* (Киев) 78—82, 85—87; *А. Орловский* (Киев) 78—82, 85—87; *А. Павленко* (Краматорск) 78, 79; *К. Паламарчук*

(Окончание см. на с. 75)

Варианты вступительных экзаменов

Ленинградский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет, факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\log_{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}(x^2-4x+14-4\sqrt{6})<2.$$

2 Решите уравнение

$$\cos x=\cos\frac{1}{x}.$$

3. Решите уравнение

$$(x^2+3x-2)^2+3(x^2+3x-2)-2=x.$$

4. Два круга с одинаковыми радиусами r касаются друг друга внешним образом и касаются третьего круга с радиусом R внутренним образом. Найдите радиус круга, одновременно касающегося этих трех кругов (из двух возможных случаев рассмотрите тот, в котором центр 4-го круга и центр круга с радиусом R лежат по разные стороны от точки касания кругов с радиусом r).

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру DC, длина AB равна a, длина DC равна b. Оказалось что углы, образованные DC с гранями ACB и ABD, равны α. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

(факультет прикладной математики — процессов управления, отделение экономической кибернетики экономического факультета, отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. Найдите все x и y, для которых выполняются соотношения

$$4\log_2^2 x+1=2\log_2 y,$$
$$\log_2 x^2\geqslant\log_2 y.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x}+\sin x=0.$$

3. Решите уравнение

$$9+\sqrt{5}x^3+5x+\frac{\sqrt{5}}{x^3}=3\sqrt{5}x^2+3x+\frac{3\sqrt{5}-1}{x}+\frac{3}{x^2}.$$

4. В треугольнике ABC угол B — прямой. Точки D и E на катете CB расположены так, что отрезки AD и AE делят угол A на три равные части. $AD=a$, $AE=b$. Найдите отношение площадей треугольников ADB и AEB.

5. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник, а двугранные углы при основании равны α, α и $\frac{\pi}{2}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что ее высота равна H.

Вариант 3

(биологический и физический факультеты)

1. Найдите без таблиц $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{4}$ и $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{4-y}}\geqslant\sqrt{y-1}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy=27, \\ 2(2\log_{y^2}x+\log_{\frac{1}{x}}y)=3. \end{cases}$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2+x-4a+2<0$ следует неравенство $-2<x<0$.

5. Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, высота которой вчетверо больше диаметра шара. Найдите отношение объема шара к объему пирамиды.

Вариант 4

(географический и химический факультеты)

1. Решите неравенство

$$x-1\geqslant\sqrt{x^3-2x+1}.$$

2. Решите уравнение

$$3\sin 2x-4\cos 2x=5.$$

3. На плоскости найдите множество точек (p, q), для которых уравнение $x^2-2px+q=0$ имеет два таких вещественных корня x_1, x_2, что $x_1^2+x_2^2=2$.

4. Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a повернут вокруг вершины прямого угла на угол 30°. Найдите площадь общей части исходного и повернутого треугольников.

5. Параллельными плоскостями в трехгранном угле отсечены две пирамиды с объемами U и V $(U<V)$. Найдите объем третьей пирамиды, если ее основание совпадает с основанием меньшей, а вершина лежит на основании большей пирамиды.

Вариант 5

(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{x}{4}\right)=5\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right).$$

2. Постройте график функции

$$f(x)=|x^2+x|-x-1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x-2}(1-5x^3+x^5)<0.$$

4. Сумма длин оснований трапеции равна 9, а длины диагоналей равны 5 и $\sqrt{34}$. Уг-

лы при большем основании — острые. Найдите площадь трапеции.

5. В шар радиусом R вписана правильная треугольная призма. Высота призмы равна H. Найдите объем призмы.

Вариант 5

(отделение политэкономии и прикладной социологии экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$|y^2+3y|=1-y.$$

2. Найдите все целые положительные x и y, для которых

$$x^2+4x-y^2=1.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{1-\mathrm{ctg}\,x}\leqslant\sqrt{1+\mathrm{ctg}\,x}$$

на отрезке $[0;\ \pi]$...

4. На отрезке $\left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right]$ найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=3\sin x-\sin 3x.$$

5. Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найдите периметр другого треугольника.

Публикацию подготовили
Ю. Давыдов, Б. Семенов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Два тела равной массы движутся навстречу друг другу, при этом скорость одного тела в два раза больше скорости второго. Какая часть механической энергии этих тел перейдет во внутреннюю при центральном абсолютно неупругом соударении?

2. В процессе изобарного нагревания гелия к нему было подведено количество теплоты $Q=300$ Дж. Определите работу, совершенную газом.

3. Определите сопротивление участка AB цепи (рис. 1). Указание: используйте метод равных потенциалов.

4. Постройте изображение предмета AB в собирающей линзе (рис. 2).

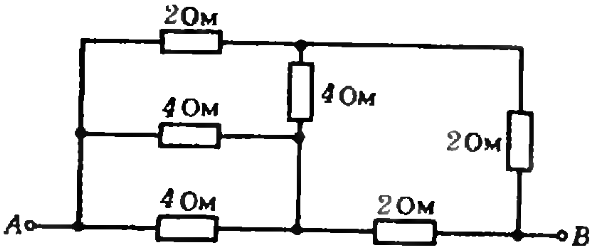


Рис. 1.

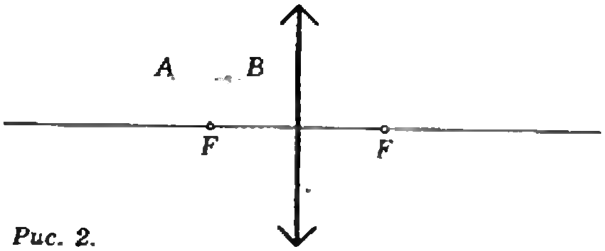


Рис. 2.

Математический факультет

1. Тело движется из состояния покоя равноускоренно. Во сколько раз путь, пройденный этим телом за восьмую секунду, больше пути, пройденного за третью секунду?

2. Тело массой $m=100$ г падает свободно. Определите изменение импульса этого тела за первые две секунды падения.

3. Источник постоянного тока с внутренним сопротивлением $r=1{,}5$ Ом замкнут на реостат, сопротивление которого может меняться от $R_1=3$ Ом до $R_2=7{,}5$ Ом. Во сколько раз при этом изменяется мощность, выделяемая на реостате?

Индустриально-педагогический факультет

1. В стакан до краев налита вода. Определите массу воды, которая выльется из стакана, если в него опустить на нити тело массой $m=20$ г, плотность которого $\rho=800$ кг/м^3.

2. Идеальная тепловая машина, работая от нагревателя с температурой $T_1=750$ К, за некоторое время совершила работу $A=300$ Дж. Какое количество теплоты за это время передано холодильнику, если его температура $T_2=300$ К?

3. Постройте изображение светящейся точки, расположенной на главной оптической оси рассеивающей линзы в одном из ее фокусов.

Публикацию подготовил Л. Бирюков

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет технической кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}9(9^y)+4\log_4^2 z=5,\\ 3(3^y)\cdot\log_4 z=1.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$5x-17(x+5)^{1/2}+31<0.$$

3. Решите уравнение

$$2\log_{9x^{-1}}\left(\frac{1}{8}\right)-3\log_{9x}3+\frac{16}{5}=0.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{5}+2x\right)=$$

$$=\cos\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(3x+\frac{\pi}{5}\right)+\frac{2}{3}.$$

5. В правильной пятиугольной пирамиде заданы G — двугранный угол при боковом ребре и H — высота пирамиды. Найдите образующую конуса, описанного около пирамиды.

Вариант 2

(физико-механический и физико-технический факультеты)

1. Решите уравнение

$$\frac{29}{2x-5}-\frac{20}{x-2}-\frac{3}{2x-1}+\frac{7}{x-1}=0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}35(64^x)+81\log_2^2 z=99,\\ -7(8^x)+9\log_2 z=1.\end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{27x^{-3}}(x^{-3})\cdot\log_{27x^{4}}(x^2)<-\frac{1}{20}.$$

4. Решите уравнение

$$8\sin^3 x\sin 3x-\cos 6x-3\cos 2x=-3\cos 4x.$$

5. В правильной треугольной пирамиде задан F — угол между высотой и боковым ребром пирамиды. Найдите отношение квадрата высоты боковой грани к боковой поверхности пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Под каким наименьшим углом к горизонту следует бросить мяч, чтобы он пролетел сквозь баскетбольное кольцо сверху, не ударившись о него? Радиус мяча r, радиус кольца $R=2r$, высота его над полом $H=3$ м. Баскетболист бросает мяч с высоты $h=2$ м, находясь на расстоянии $l=5$ м от кольца, считая по горизонтали. Изменением скорости мяча за время полета через кольцо пренебречь.

2. В сосуде, наполненном водой плотностью ϱ, с ускорением a всплывает пузырек воздуха объемом V. Найдите силу давления со стороны сосуда на опору. Масса сосуда вместе с водой M.

3. Найдите центр тяжести тонкой однородной проволоки, согнутой в виде полуокружности радиусом r.

4. Какую работу нужно совершить, чтобы за время t подняться по движущемуся вниз эскалатору метро? Высота подъема h, скорость эскалатора постоянна и равна v, угол наклона эскалатора к горизонту α.

5. На поверхности жидкости плотностью ϱ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько опустится верхняя кромка стакана, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана h, давление воздуха p_0.

6. Конец капиллярной трубки опущен в воду. Какое количество теплоты выделится при поднятии жидкости по капилляру? Коэффициент поверхностного натяжения воды σ, плотность воды ϱ.

7. Сплошной металлический цилиндр радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω. Найдите зависимость напряженности электрического поля от расстояния r до оси цилиндра и разность потенциалов между поверхностью цилиндра и осью.

8. Три одинаковых одноименно заряженных тела, заряд каждого из которых q, а масса m, соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длиной l так, что нити образуют равносторонний треугольник. Одну из нитей пережигают. Найдите максимальные скорости тел.

9. На плоскости зачерчен круг радиусом $r_0=0{,}2$ м. Стеклянный конус упирается вершиной в центр круга так, что его ось перпендикулярна плоскости. Каков видимый радиус круга, если на него смотреть с большого расстояния вдоль оси конуса? Угол при вершине конуса $2\alpha=60^\circ$, радиус основания $r=r_0=0{,}2$ м, показатель преломления стекла $n=\sqrt{2}\approx 1{,}4$.

10. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из граней посеребрена. Луч света падает нормально на другую, не посеребренную грань и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно ему. Найдите углы призмы.

Публикацию подготовили С. Преображенский, В. Романов, И. Русанов

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=1+\frac{2\sin 2x+3\sin 3x}{\sin x}.$$

а) Докажите, что при $x \neq \pi n$

$$f(x)=2(6\cos^2 x+2\cos x-1).$$

б) Решите уравнение $f(x)=3$.

в) Найдите область значений функции f.

2. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ взята точка F такая, что $FD=\frac{1}{3}AD$. Угол CAD равен α, угол CFD равен β. Положим $\gamma=\alpha+\beta$, $k=\operatorname{tg}\alpha$.

а) Докажите, что

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{4k}{1-3k^2}.$$

б) При каких значениях α величина угла γ меньше $\frac{\pi}{2}$?

в) Найдите α такое, что $\gamma=\frac{3\pi}{4}$.

г) Докажите, что $\beta<3\alpha$.

3. Дана функция

$$f(x)=\log_4(x^2-1)-\frac{1}{2}\log_4(x-4)^2.$$

а) Найдите область определения функции f.

б) Решите уравнение $f(x)=\frac{3}{2}$.

в) При каких значениях a уравнение $f(x)=\log_4 a$ имеет два корня?

Вариант 2

1. Дана функция $f(x)=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$.

а) Решите уравнение

$$f(x)=\frac{17}{4}.$$

б) При каком x функция принимает наименьшее значение?

в) Докажите, что уравнение $f(x)=a$ имеет не более трех отрицательных корней.

2. В треугольнике ABC угол A — прямой, угол C равен α. Длина гипотенузы BC равна 1. Круг радиусом r с центром в точке A касается внешним образом кругов с центрами в точках B и C. S — сумма площадей трех кругов.

а) Покажите, что

$$S=\pi(1+3r^2-2r(\sin\alpha+\cos\alpha)).$$

б) При каком r круги с центрами в точках B и C также касаются друг друга?

в) Пусть r таково, что выполнены условия предыдущего пункта. Какое наименьшее значение может принимать площадь S в зависимости от α?

3. Дана функция

$$f(x)=\log_a(1-8a^{-x}).$$

а) Найдите область определения функции f.

б) При $a=\frac{1}{2}$ решите неравенство $f(x)>x+5$.

в) Решите неравенство $f(x)+2x>0$ при всех допустимых a.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Один математический маятник имеет период колебаний T_1, другой T_2. Какой период колебаний будет у математического маятника, длина которого равна сумме длин указанных маятников?

2. Резиновый шар содержит $V=2$ л кислорода при температуре $t=20$ °C и атмосферном давлении $p=100$ кПа. Определите массу кислорода в шаре. Какой объем займет кислород, если шар опустить в воду на глубину $h=10$ м и охладить до температуры воды $t'=4$ °C? Давление внутри шара принять равным давлению вне шара.

3. Во сколько раз нужно повысить напряжение источника, чтобы потери в линии электропередачи уменьшились в n раз? Мощность, отдаваемую источником, считать постоянной.

4. Расстояние между двумя точечными источниками света $l=24$ см. Где между ними надо поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=9$ см, чтобы изображения обоих источников получились в одной и той же точке?

5. Как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после α-распада его атомов? после β-распада?

Вариант 2

1. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец, а нижним концом погружена в воду. При этом равновесие достигается, когда палочка расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится половина палочки. Какова плотность материала палочки?

2. Какое количество теплоты необходимо сообщить гелию массой $m=40$ г, содержащемуся в баллоне, для его нагревания на $\Delta T=20$ К? Чему равна удельная теплоемкость гелия в этом процессе?

3. Определите начальную скорость сближения протонов, находящихся на достаточно большом расстоянии друг от друга, если минимальное расстояние, до которого они могут сблизиться, равно $r_{\min}$.

4. Плоский воздушный конденсатор после зарядки отключают от источника и погружают в керосин с диэлектрической проницаемостью ε. Как изменится энергия, накопленная в конденсаторе?

5. Как нужно расположить две собирающие линзы, чтобы пучок параллельных лучей, пройдя через обе линзы, снова стал параллельным? Главные оптические оси линз не совпадают друг с другом.

Публикацию подготовили
Ю. Богачев, А. Коточигов,
Г. Лапин, С. Энтина

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 39)

(Иркутск) 78, 82, 87, 88; *Р. Пекарский* (Киев) 78—80, 82, 89; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 78; *В. Петрова* (Криводол, НРБ) 82; *Т. Петрова* (Новосибирск) 79, 82; *И. Пилюгин* (Алма-Ата) 85, 87—90; *С. Подпрятов* (Киев) 79, 89; *В. Полищук* (Канев) 78, 80, 82, 85, 86, 89, 92; *С. Польшин* (Харьков) 78, 80—82, 85—92; *Ф. Попеленский* (Москва) 81, 85; *С. Поторочин* (Ижевск) 89, 91, 92; *Е. Призант* (Одесса) 78, 80, 82, 85, 86, 88—92; *Д. Прошин* (Загорск) 89; *В. Пузанов* (Донецк) 79, 82, 85, 88, 89; *А. Раздобудько* (Киев) 79, 81, 82; *А. Распереза* (Брест) 78, 81, 82, 85; *У. Рахимов* (Шават) 79, 89; *Х. Рахимов* (Шават) 79, 81, 85, 89; *Л. Рубчинский* (Горький) 79, 80, 82; *А. Рыбалочка* (Киев) 79, 80, 82, 85, 88, 89; *Н. Рябова* (Харьков) 79, 80, 85, 86, 88, 89, 92; *А. Савин* (Горловка) 78, 80—82; *У. Сапаев* (Шават) 89; *Р. Сеннов* (Москва) 80, 82; *В. Силаев* (Брест) 78; *А. Скабелин* (Барановичи) 78—82, 85—92; *В. Слюсарь* (Киев) 85, 86; *А. Смирнов* (Москва) 80; *В. Солдатов* (п. Краснореченск Приморского кр.) 79, 80, 82; *Ю. Спектор* (Киев) 78, 82; *М. Субботин* (Старый Оскол) 79, 80, 89; *И. Сысоев* (Семипалатинск) 79, 82, 86, 88; *С. Тайманов* (Раменское) 78, 80, 82, 88; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 78—82, 86—90, 92; *В. Тебус* (Москва) 92; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 85, 89—92; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 80, 82, 85; *М. Титов* (Киев) 78, 80—82, 89; *С. Тихонов* (Воронеж) 78, 80—82, 85, 86, 89, 91; *Р. Тодоров* (Варна, НРБ) 79, 86, 88, 92; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 88, 89; *С. Трифонов* (Киев) 85; *А. Усинский* (п. Птичья Ровенской обл.) 79, 80, 85, 86, 88—92; *Г. Федоров* (Мамадыш) 78, 82; *Л. Френклах* (Воронеж) 79; *А. Фридлянд* (Саратов) 78, 79, 81, 82, 85, 86, 89—92; *А. Харламов* (Киев) 88; *М. Хасин* (Донецк) 82; *Г. Хачатрян* (с. Бердик АрмССР) 78, 81, 85, 89; *А. Холод* (Бердянск) 90, 91; *А. Христиченко* (Краматорск) 78, 79, 82; *Е. Чашечкина* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 80—82, 85—92; *Л. Чернышев* (Москва) 79, 80, 87, 89; *В. Чертушкин* (Мариуполь) 79; *А. Чирихин* (Жуковский) 89; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 78, 79, 81, 82, 85, 86, 89—92; *С. Шавырин* (Серпухов) 79; *Е. Шагаров* (Грозный) 79, 80, 82, 85, 88, 89; *Г. Шаповалов* (Киев) 78—82, 85, 89; *А. Шехтер* (Бельцы) 78—82, 85; *С. Шинкевич* (Березники) 78—82, 85—92; *А. Шпагин* (Мариуполь) 87; *О. Шпырко* (Киев) 89; *И. Шуляк* (Киев) 78, 80—82, 87—89; *К. Шурунов* (Куйбышев) 78, 82, 88; *М. Энтин* (Тула) 78—82, 85—87, 89, 90, 92; *Д. Юсупов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 31; *А. Яремчук* (Артемовский) 80, 81.

Ответы, указания, решения

Переходные процессы в электрических цепях

1. $U(t)=\mathscr{E}_0(1+2e^{-t/(RC)})$.

2. $r=R/2=5$ Ом.

3. $Q={}^1/_6\, C_0U_0^2$.

Ленинградский государственный университет

Вариант 1

1. (1; 3).

2. $k\pi\pm\sqrt{k^2\pi^2-1}$, $k\neq 0$, $k\in Z$; $m\pm\sqrt{m^2\pi^2+1}$, $m\in Z$.

3. $-1\pm\sqrt{3}$, $-2\pm\sqrt{2}$. Указание. Пусть $y=x^2+3x-2$. Тогда исходное уравнение запишется в виде $x=y^2+3y-2$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $(x-y)(x+y+4)=0$. Откуда следует, что или $x^2-2x-2=0$, или $x^2+4x+2=0$.

4. $R(R-r-h)/(R+r+h)$, где $h=\sqrt{R(R-2r)}$. Указание. Пусть O_1, O_2 — центры кругов с радиусами r, O_3 — центр круга радиусом R, O_4 — центр четвертого круга, A — точка касания первых двух кругов. Обозначим длину отрезка O_3A через h, длину отрезка O_4A — через h_1, радиус четвертого круга — через x (рис. 1). По теореме Пифагора из треугольников O_3O_2A и O_4O_2A получаем $\sqrt{(R-r)^2-r^2}=h$, $\sqrt{(r+x)^2-r^2}=h_1$. Подставляя h и h_1 в соотношение $h+h_1=R-x$, получим уравнение относительно x.

5. $ab^2\operatorname{tg}\alpha/12$. Решение. Проведем плоскость DCF перпендикулярно ребру AB (рис. 2). Это можно сделать, так как по условию DC и AB перпендикулярны. Искомый объем V равен сумме объемов треугольных пирамид $AFCD$ и $BFCD$, поэтому

$$V=\frac{1}{3}AF\cdot S_{\triangle DFC}+\frac{1}{3}BF\cdot S_{\triangle DFC}=\frac{1}{3}a\cdot S_{\triangle DFC}.$$

Найдем $S_{\triangle DFC}$. Заметим, что плоскость DFC будет перпендикулярна плоскостям ACB и ADB, так как они проходят через прямую AB.

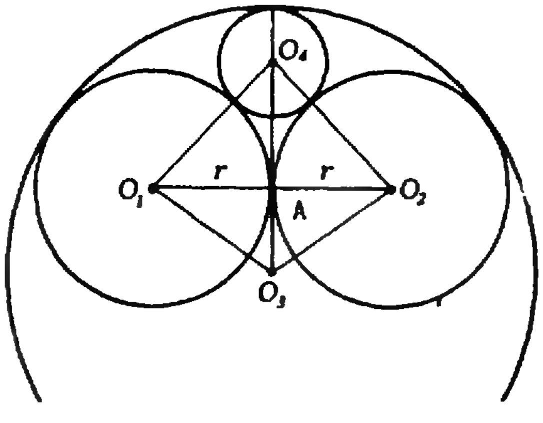


Рис. 1

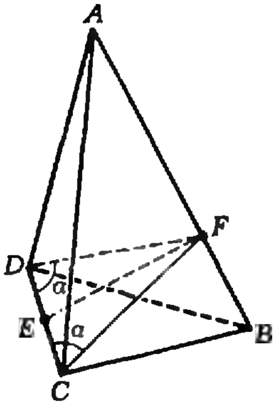


Рис. 2.

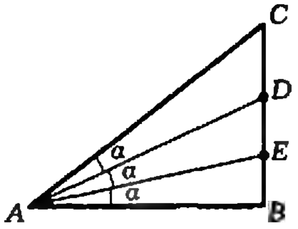


Рис. 3.

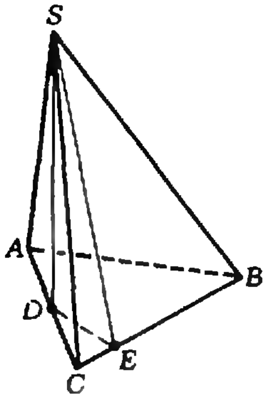


Рис. 4.

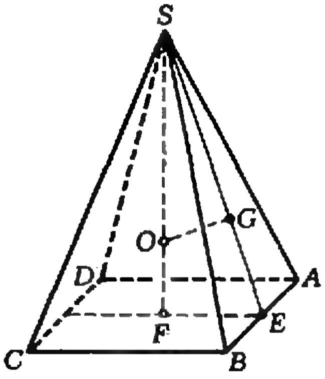


Рис. 5.

перпендикулярную DFC. Следовательно, углы FDC и FCD равны α и поэтому треугольник DFC — равнобедренный. Пусть EF — его высота. Тогда $EF=b\,\mathrm{tg}\,\alpha/2$, $S_{\Delta DFC}=\frac{1}{2}b\cdot\frac{b}{2}\times\times\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Итак, $V=\frac{1}{3}a\frac{b^2}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{ab^2}{12}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

Вариант 2

1. $x=\sqrt{2}$, $y=2$. **Указание.** Из условия следует неравенство $4\log_2^2 x+1\leqslant 4\log_2 x$. Это возможно лишь при $2\log_2 x=1$.

2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

3. $x_{1,2}=\frac{3\pm(\sqrt{5}-2)}{2}$, $x_{3,4,5,6}=\pm\sqrt{\frac{3\pm(\sqrt{5}-2)}{2\sqrt{5}}}$. **Указание.** После группировки слагаемых получаем

$$x\left(\sqrt{5}x^2+\frac{1}{x^2}\ \ 3\right)-3\left(\sqrt{5}x^2+\frac{1}{x^2}-3\right)+$$
$$+\frac{\sqrt{5}}{x}\left(\sqrt{5}x^2+\frac{1}{x^2}-3\right)=0,$$

откуда или

$$\sqrt{5}x^2+\frac{1}{x^2}-3=0,$$

или

$$x+\frac{\sqrt{5}}{x}-3=0.$$

4. $\frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{2b}$ **Решение.** Пусть $\angle EAB=\angle DAE=\alpha$ (рис. 3). Тогда из $AB=a\cos 2\alpha=b\cos\alpha$ получим уравнение $a(2\cos^2\alpha-1)=b\cos\alpha$ для определения $\cos\alpha$. Учитывая, что α — острый угол, запишем

$$\cos\alpha=\frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{4a}.$$

Отношение площади S_1 треугольника ADB к площади S_2 треугольника AEB равно

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2a}{b}\cos\alpha=\frac{b+\sqrt{b^2+8a^2}}{2b}.$$

5. $\frac{4\sqrt{3}}{9}H^3\,\mathrm{ctg}^2\alpha$. **Решение.** Пусть ASC — та боковая грань, которая перпендикулярна основанию (рис. 4), а SD — высота пирамиды. Так как углы между основанием ABC и гранями SAB и SBC равны α, точка D равноудалена от AB и BC, т. е. D — середина AC.

Вариант 3

1. $\sqrt{15}/7$.

2. $\left[1;\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2};\ 4\right]$.

3. $(9;3)$, $\left(\frac{1}{27};\ 729\right)$.

4. $\left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right]$. **Указание.** При $a=0$ и $a<0$ множество решений первого неравенства неограничено и поэтому не может содержаться в интервале $(-2;\ 0)$. При $a>0$ первое неравенство равносильно неравенству

$$(x+2)\left(x-\frac{2a-1}{a}\right)<0.$$

Для того чтобы решения этого неравенства удовлетворяли условию задачи необходимо и достаточно, чтобы было $-2\leqslant\frac{2a-1}{a}\leqslant 0$.

5. $\frac{3\pi}{32}$. **Указание.** Проведем сечение пирамиды через центр шара и середину стороны основания пирамиды (рис. 5). В точках F и G шар касается основания и боковой стороны соответственно. Из подобия треугольников SFE и SOG имеем $EF/8R=R/SG$. Так как $SG=\sqrt{49R^2-R^2}$, то $EF=2\sqrt{3}R/3$. Следовательно, объем пирамиды $V=128R^3/9$.

Вариант 4

1. $x=1$.

2. $\arcsin\frac{4}{5}\Big/2+\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. **Указание.** Запишите уравнение в виде $\cos\varphi\sin 2x-\sin\varphi\cos 2x=1$, где $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

3. См. рис. 6. **Указание.** Из вещественности корней x_1 и x_2 следует, что $p^2\geqslant q$. По теореме Виета $2=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4p^2-2q$.

4. $a^2(2-\sqrt{3})$. **Решение.** Пусть ABC — исходный треугольник, $AB'C'$ — повернутый. D —

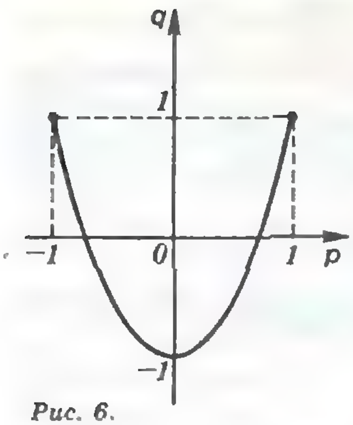


Рис. 6.

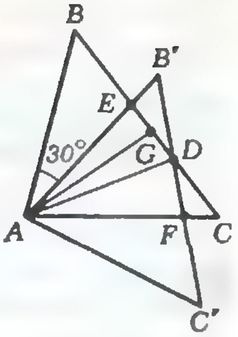


Рис. 7.

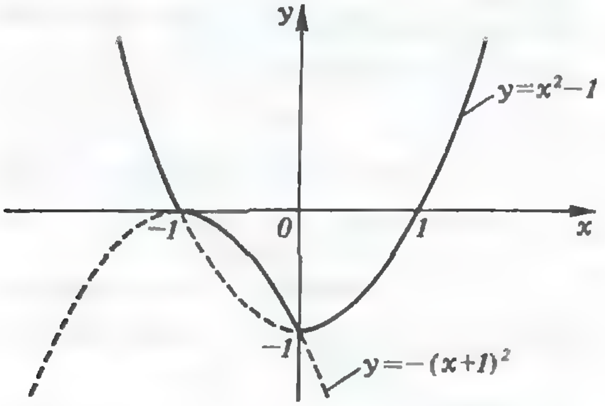


Рис. 8.

точка пересечения BC и $B'C'$ (рис. 7). Из соображений симметрии ясно, что $\angle EAD = \angle FAD = 30°$. Следовательно, $AE = AD$, а искомая площадь равна $2S_{\triangle AED}$. Пусть AG — перпендикуляр, опущенный из точки A на BC. Так как $\angle EAG = 15°$, то ясно, что

$$S_{\triangle AED} = AG \cdot EG = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{tg} 15 = \frac{a}{2}(2-\sqrt{3}).$$

Поэтому искомая площадь равна $a^2(2-\sqrt{3})$.

5. $(V^{\frac{1}{3}} - U^{\frac{1}{3}})U^{\frac{2}{3}}$. **Указание.** Из подобия пирамид следует, что отношение их высот равно корню кубическому из отношения их объемов. Высота третьей пирамиды равна разности высот первых двух, т. е. $[(V/U)^{\frac{1}{3}} - 1] \cdot h$, где h — высота меньшей пирамиды.

Вариант 5

1. $\frac{2\pi}{3} + 4k\pi,\ \frac{2\pi}{3} \pm 4 \arccos \frac{1}{10} + 8k\pi,\ k \in Z.$

Указание. Заметим, что $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. См. рис. 8. 3. $\sqrt{5} < x < 3$.

4. $\frac{27}{2}$. **Указание.** Получите уравнение для высоты трапеции, выразив сумму оснований трапеции через ее диагонали и высоту при помощи теоремы Пифагора.

5. $\frac{3\sqrt{3}}{16} h(4R^2 - h^2)$.

Вариант 6

1. $-2-\sqrt{5},\ -1,\ -2+\sqrt{5}$.

2. $x=1$, $y=2$. **Указание.** Исходное уравнение равносильно уравнению $(x+2-y)(x+2+y)=5$. Так как $x+2+y>0$, то и $x+2-y>0$. Получим разложение числа 5 в произведение двух целых положительных чисел, т. е. $x+2+y=5$, $x+2-y=1$.

3. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$.

4. 4. **Указание.** Так как $|\sin \alpha| \leqslant 1$, то $f(x) \leqslant 3+1=4$. Если $x=\frac{\pi}{2}$, то $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$.

5. 8. **Решение.** Обозначим (рис. 9) периметры треугольников ABC, ADC и BDC через p, q и x. Треугольники ABC, ADC и BDC подобны и их периметры относятся как длины соответственных сторон, т. е. $p/AB = q/AC = x/BC = k$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, откуда $p^2 = q^2 + x^2$. По условию $p=10$, $q=6$, следовательно, $x=8$.

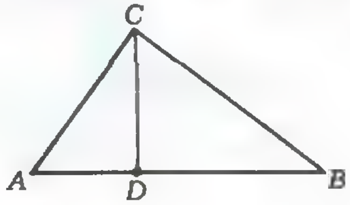


Рис. 9.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Физика

Физический факультет

1. $\Delta E/E = 0{,}9$.
2. $A = 0{,}4Q = 120$ Дж.
3. $R_{AB} = 2$ Ом.
4. См. рис. 10.

Математический факультет

1. $l_2/l_3 = 3$.
2. $\Delta(mv) = mgt = 2$ кг · м/с.
3. $\frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2(R_1+r)^2}{R_1(R_2+r)^2} = 0{,}625$.

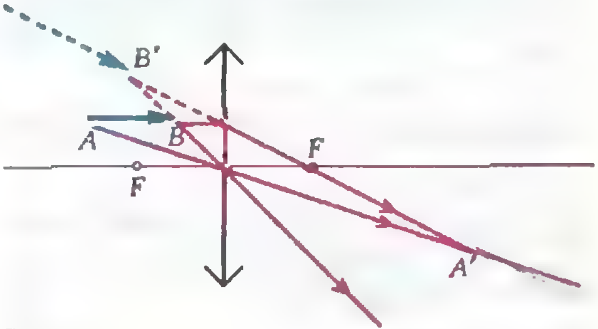


Рис. 10.

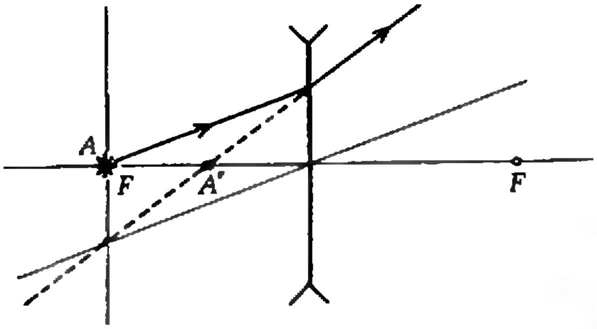


Рис. 11.

Индустриально-педагогический факультет

1. $\Delta m_в=m=20$ г.
2. $Q_2=AT_2/(T_1-T_2)=200$ Дж.
3. Изображение точки находится на оптической оси посередине между светящейся точкой и линзой (рис. 11).

[redacted]инградский политехнический институт М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $\left\{(-1;\ 4);\ \left(\log_3\frac{2}{3};\ 2\right)\right\}$.
2. $\left]-4\frac{21}{25};\ 4\right[$.
3. $\{3^{1/2};\ 3^{-7/8}\}$.
4. $2\pi k-\frac{\pi}{5}\pm\arccos\frac{2}{3},\ k\in Z$. **Указание.** Умножьте обе части уравнения на $\sin\frac{x}{2}$ и примените формулу $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$.
5. $H\operatorname{ctg}54^\circ\operatorname{tg}\frac{G}{2}$.

Вариант 2

1. $\left\{-\frac{2}{5};\ -\frac{1}{2}\right\}$. 2. $\{(0;\ 2^{8/9})\}$.
3. $]3^{-3/4};\ 3^{-1/4}[\ \cup\ ]3^{3/11};\ 3[$.
4. $\varnothing$. **Указание.** Замените $\sin^3x$ в уравнении, пользуясь формулой $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3x$.
5. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3\sin^2F}-1}$.

Физика

1. $\alpha_{\min}=\operatorname{arctg}(2(H-h)/l+r/\sqrt{R^2-r^2})=45^\circ$. **Указание.** При минимальном угле бросания мяч касается передней и задней точек дужки кольца.
2. $F_g=Mg-\rho Va$.
3. Центр тяжести находится на оси симметрии полуокружности на расстоянии $x=2r/\pi$ от центра окружности.
4. $A=mg\sin\alpha(vt+h/\sin\alpha)$. **Указание.** Задачу проще решать в системе отсчета, связанной с движущимся эскалатором.
5. $x=\frac{h}{2}\left(1+\frac{2\rho gh}{2p_0+\rho gh}\right)$.
6. $Q=2\pi\sigma^2/(\rho g)$.
7. $E=(m\omega^2/e)r;\ U=m\omega^2R^2/(2e)$, где m и e — масса и заряд электрона.
8. Скорости максимальны в тот момент, когда все три тела находятся на одной прямой. При этом скорость среднего заряда $v_1=q/\sqrt{6\pi\varepsilon_0 ml}$, а скорости крайних зарядов $v_{2,3}=v_1/2$ (здесь ε_0 — электрическая постоянная).
9. $r'=r_0\sin\alpha=0{,}1$ м.
10. Угол при вершине призмы $\alpha=36^\circ$, а при основании $\beta=72^\circ$.

[redacted]инградский электротехнический институт В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) **Указание.** Воспользуйтесь равенством $\sin 3x=\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x$.

б) $x=\pm\arccos\left(-\frac{5}{6}\right)+2\pi k,\quad x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,$ $k\in Z$.

в) $\left(-\frac{7}{3};\ 14\right)$. **Указание.** Обозначьте $t=\cos x$ и исследуйте область значений функции $g(t)=2(6t^2+2t-1)$ при $|t|<1$.

2. б) $\left(0;\ \frac{\pi}{6}\right)$. **Указание.** Воспользуйтесь результатом предыдущего пункта, учитывая, что $k>0$ по условию.

в) $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

г) **Указание.** Если $3\alpha\geqslant\frac{\pi}{2}$, неравенство очевидно $\left(\beta<\frac{\pi}{2}\right)$. Если $3\alpha<\frac{\pi}{2}$, то вычислите $\operatorname{tg}3\alpha$ и покажите, что $\operatorname{tg}3\alpha>\operatorname{tg}\beta$.

3. а) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$.

б) $[-11;\ 3]$. **Указание.** Решите эквивалентное уравнение $x^2-1=8|x-4|,\ x\in D(f)$.

в) $0<a<8+\sqrt{60}$. **Решение.** Уравнение $f(x)=a$ равносильно уравнению $x^2-1=a|x-4|$. Последнее всегда имеет корни на луче $(-\infty;\ 1)$ и на отрезке $(1;\ 4)$. Других корней уравнение не имеет, если $x^2-1>a(x-4)$ при $x>4$.

Вариант 2

1. а) $\left\{-2;\ -\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ 1\right\}$. **Указание.** Сделайте замену $t=\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$.

б) $x=-\frac{1}{2}$. Найдите наименьшее значение функции $\varphi(t)=t+\frac{1}{t},\ t>0$ и, далее, исходя из равенства $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=t$, найдите x.

в) **Решение.** Рассмотрим уравнение $\varphi(t)=a$ при $t>0$, где $\varphi(t)=t+\frac{1}{t}$. Оно имеет два корня t_1 и t_2 при $a>2$, причем $0<t_1\leqslant1\leqslant t_2<\infty$. Далее решаем уравнения $\frac{x}{x+1}=\pm\sqrt{t_1}$ и $\frac{x}{x+1}=\pm\sqrt{t_2}$. Анализируя вид решений, заметим, что только корень $\dfrac{\sqrt{t_1}}{1-\sqrt{t_1}}$ положителен.

2. б) $r=\dfrac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha-1)$. Указание. Сумма радиусов кругов с центрами в точках B и C равна 1.

в) $\pi\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Указание. Объединяя результаты двух предшествующих пунктов, получите выражение $S(\alpha)=\pi(2-\dfrac{1}{4}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)^2-\cos\alpha-\sin\alpha)$ и исследуйте его на промежутке $\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. а) При $a>1$, $x>\log_a 8$; при $a<1$, $x<\log_a 8$.
б) $(-\infty;\ -4)\cup(-4;\ -3)$. Указание. Сделайте замену $t=2^x$ и перейдите к неравенству $256t^2-32t+1>0$, $t>0$.
в) При $a>1$, $x>\log_a(4+\sqrt{17})$; при $a<1$, $\log_a(4+\sqrt{17})<x<\log_a 8$. Указание. Неравенство $f(x)+2x>0$ равносильно:
при $a>1$ системе

$$\begin{cases} a^{2x}-8a^x>1,\\ x>\log_a 8,\end{cases}$$

при $a>1$ системе

$$\begin{cases} a^{2x}-8a^x<1,\\ x<\log_a 8.\end{cases}$$

Уравнение $t^2-8t-1=0$ имеет отрицательный корень $4-\sqrt{17}$ и корень $4+\sqrt{17}$ больший 8. Полагая $t=a^x$, вернемся к анализу систем и получим ответ задачи.

Физика

Вариант 1

1. $T=\sqrt{T_1^2+T_2^2}$.
2. $m=pVM/(RT)=2{,}6$ г, $V'=pVT'/((p+\rho gh)T)=0{,}95$ л, где $\rho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды, $M=32\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кислорода.
3. $U_2/U_1=\sqrt{n}$.
4. Линзу надо поместить на расстоянии 6 см от одного источника и 18 см от другого. При этом одно из изображений мнимое.
5. После α-распада химический элемент сместится на две клетки к началу периодической таблицы, а после β-распада — на одну клетку ближе к концу таблицы.

Вариант 2

1. $\rho=(3/4)\rho_в$ (здесь $\rho_в$ — плотность воды).
2. $Q=(3/2)(m/M)R\Delta T=2{,}5\cdot10^3$ Дж, $c=(3/2)(R/M)=3{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), где $M=4\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гелия.
3. $v=e\sqrt{\pi\varepsilon_0 m r_{\min}}$ (здесь ε_0 — электрическая постоянная).
4. Энергия конденсатора уменьшится в ε раз.
5. Линзы $Л_1$ и $Л_2$ надо расположить так, чтобы точка пересечения лучей после прохождения первой линзы совпадала с передним для $Л_2$ и задним для $Л_1$ побочными фокусами линз.

[illegible]нт» для младших школьников
[illegible] «Квант» № 3)

1. Пусть скорость первого путника равна v_1, скорость второго путника равна v_2 и пусть они встретились через t часов после выхода. Тогда $16v_1=tv_2$ и $tv_1=9v_2$. Деля первое уравнение на второе, находим $\dfrac{16}{t}=\dfrac{t}{9}$, откуда $t^2=16\cdot9$, т. е. $t=12$ часов.
2. 58 725+58 725+3 958 725=4 076 175.
3. 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9.
4. Пусть это числа вида $10x+y$. Тогда $10x+y=x^2+y^3$, т. е. $x(10-x)=(y-1)y(y+1)$. Числа x и $10-x$ одинаковой четности, а произведение $(y-1)y(y+1)$ делится на 6. Значит, числа x и $10-x$ оба четны и одно из них делится на 3, т. е. либо x делится на 6, либо $10-x$ делится на 6. Так как $0<x\leqslant9$, получаем, что либо $x=6$, либо $10-x=6$, т. е. $x=4$. В обоих случаях $y=3$. Получаем два решения: 63 и 43.
5. См. рис. 12.

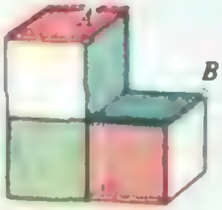


Рис. 12.

[illegible]о, буква, число
(см. «Квант» № 3)

Язык конго

Мы видим, что запись дат на языке конго имеет вид

kilumbu ya ...ya ngonda...,

где на месте каждого пропуска стоит одно слово (tatu, mosi и др.) или словосочетание, начинающееся с kumi na. Сравнение строк показывает, что слово, стоящее после kilumbu ya, обозначает число, а слово, стоящее на последнем месте,— порядковый номер месяца, т. е. «январь» буквально означает «1-й месяц», «март» — «3-й месяц» и т. д. Числа 11 и 18 передаются (соответственно) как «10 и 1» и «10 и 8» (по-видимому, na означает «и»). Буквальный смысл слов kilumbu ya и ya ngonda остается неясным, но понятно, что общее значение конструкции —

число ... месяца номер...

Ответ: 13 августа; kilumbu ya kumi ya ngonda tatu.

Русские буквы

Числовое значение букв определяется их местом в алфавите. (Звездочкой обозначены буквы, которые мы можем выбрать по аналогии.)

Единицы	Десятки	Сотни
		Р — 100
В — 2	К — 20	*С — 200
*Г — 3	Л — 30	Т — 300
Д — 4	М — 40	
Е — 5		Ф — 500
		Х — 600

Записывая число, младшие разряды помещают справа от старших.

Ответ: 624 — ХКД, 232 — СЛВ, 333 — ТЛГ. В задаче приведены только те буквы, которые совпадают с современными по написанию (не считая мелких различий в начертании), звуковому значению и порядку следования в алфавите. Для того чтобы записать другие числа, недостаточно знать современный алфавит. Например, исходя из современного алфавита, для чисел 10, 50 и 400 нужно выбрать буквы и, н и у, но звуки, которые передаются сейчас этими буквами, раньше записывались иначе: I («и десятеричное»), N и OR. (Для звука [и] имелась еще одна буква: Н — с числовым значением 8.) Некоторые числа записывались буквами, которые вышли из употребления.

Мартовские иды

В конце даты указывалось название месяца, при этом длинные названия передавались сокращенно: APR — апрель, MAI — май, AVG — август, OCT — октябрь, NOV — ноябрь, DEC — декабрь (совпадает с началом соответствующего слова английского и ряда других языков).

Первое число месяца современного календаря имело особое обозначение. Все другие даты, встречающиеся в задаче, относятся ко второй половине месяца; их древнеримское обозначение включало в себя указание на первый день следующего месяца,— например, в конце мартовских дат указано: KAL·APR, в конце апрельских — KAL·MAI и т. д. Римляне вели обратный счет дней, т. е. указывали, каким по счету будет данный день, если считать от начала следующего месяца и включать в счет само это начало. Например, для 27 июля имеем:

27, 28, 29, 30, 31 июля, 1 августа,

— всего шесть дней; поэтому древнеримское обозначение этой даты включает в себя число VI. (На обратный счет дней второй половины месяца указывают суммы современного и древнеримского чисел: для сентября и ноября, имеющих по 30 дней, они равны 32, а для июля и октября — 33.)

Ответ: 30 марта, A·D·XII·KAL·MAI, 20 октября.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов,
Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, М. Башмаков,
В. Белонучкин, В. Болтянский,
А. Боровой, Ю. Брук, В. Вавилов,
Н. Васильев, С. Воронин, Б. Гнеденко,
Н. Долбилин, В. Дубровский,
А. Земляков, А. Зильберман, С. Козел,
С. Кротов, Л. Кудрявцев, А. Леонович,
В. Лешковцев, С. Новиков, Т. Петрова,
М. Потапов, В. Разумовский, Н. Родина,
Н. Розов, А. Савин, Я. Смородинский,
А. Сосинский, В. Уроев, В. Фабрикант

Редакционный совет:
А. Балдин, С. Беляев, Е. Велихов,
И. Верченко, Б. Воздвиженский,
Г. Дорофеев, Н. Ермолаева,
Ю. Иванов, В. Кириллин, Г. Коткин,
Р. Кузьмин, А. Логунов, В. Можаев,
В. Орлов, Н. Патрикеева, Р. Сагдеев,
А. Стасенко, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Буздин, А. Виленкин, А. Егоров, Л. Кардасевич,
И. Клумова, Т. Петрова, С. Табачников,
В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов,
Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров,
И. Смирнова, Л. Тишков, П. Чернуский,
В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова
Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор М. Медведская

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.01.90. Подписано к печати 13.03.90. Т-06476
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 24,09. Уч.-изд. л. 7,96. Тираж 171 765 экз.
Заказ 31. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

[redacted]

Шахматная страничка

КОМПЬЮТЕР УГРОЖАЕТ ЧЕЛОВЕКУ

В 1988 году одна из сильнейших в мире шахматных программ «Хайтек» буквально разгромила американского гроссмейстера А. Денкера: в четырех партиях он набрал всего пол-очка. Похоже, это была первая победа машины над гроссмейстером в матче с нормальным контролем времени. Все же надо учесть, что рейтинг 75-летнего шахматиста сейчас всего 2295. А вот победа «Дип сот» в матче с Р. Бирном, другим американским гроссмейстером, недавним претендентом на корону,— истинная сенсация. Результат именно этого матча вызвал повышенный интерес к «Дип сот» и сделал интригующим поединок компьютера с Г. Каспаровым, о котором рассказывалось в прошлом номере. Две партии Бирн проиграл, две завершились вничью, и лишь на финише матча гроссмейстер выиграл партию престижа. (Дальнейшая информация о «Дип сот» основана на заметках Бирна.)

Программа «Дип сот» сочетает в себе невероятную силу расчета вариантов с глубоким анализом позиции, основанном на правильной оценке сравнительной силы фигур — в зависимости от их расположения на доске и стадии партии, и способна даже сравнивать различные планы ведения атаки. Ее создатели — пять выпускников компьютерного факультета университета Карнеги-Меллона. Забавно, что ни один из разработчиков не в состоянии оказать сколько-нибудь серьезного сопротивления своей программе. «Дип сот» анализирует 720 тысяч позиций в секунду. Такая скорость обеспечивается использованием в компьютере «Сан-4», на котором играет программа «Дип сот», двух процессоров, в каждый из которых встроен очень крупный чип (микросхема с большим количеством электронных элементов). Этот чип изобрел Фан-Сюнсю (Тайвань) в процессе работы над докторской диссертацией. Он же разработал контурную доску со 100 другими стандартными чипами (при анализе позиции каждая микросхема ведет свой собственный расчет вариантов). Впрочем, «Дип сот» может быть приспособлена к любой достаточно мощной компьютерной системе.

Помимо скоростных качеств, определяемых техническими достижениями в производстве компьютеров, в «Дип сот» реализован ряд новых алгоритмических идей, связанных прежде всего с уточнением оценочной функции. Так, Андреас Новатцик из ФРГ разработал способ более тонкого учета пешечной структуры позиции. Поясним это. При построении шкалы сравнительной силы фигур в шахматных учебниках сила пешки обычно принимается за 1, сила коня и слона — по 3,5, ладьи — 5 и ферзя — 9 единиц. Однако эти оценки существенно меняются в зависимости от конкретной ситуации. Скажем, пешки в фаланге следует оценивать выше, а сдвоенные, а тем более строенные пешки — ниже. Важными факторами являются количество фигур на доске, пространство, которое они контролируют, и т. д. Эти и другие позиционные нюансы учтены в программе «Дип сот».

А. Новатцик начал с общих оценок, известных ранее, и постепенно двигался по пути их конкретизации, используя шахматную эрудицию доктора Мэррея Кэмпбелла из Канады — самого сильного шахматиста в пятерке авторов «Дип сот». В процессе работы над программой компьютерному анализу были подвергнуты 900 партий, сыгранных гроссмейстерами и мастерами. При этом ЭВМ сравнивала оценки, которые игроки назначали фигурам в тех или иных ситуациях. Такой подход практически превратил «Дип сот» в усердного ученика нескольких гроссмейстеров.

А. Новатцик построил шкалу, содержащую около 100 оценок силы фигур в различных положениях. Например, коня в центре доски он оценил в 6,274, а на краю доски — в 4,738. Оценки могут меняться в зависимости от стадии партии. Скажем, королю в дебюте и раннем миттельшпиле крайне рискованно путешествовать в центр доски, но в окончании это чаще всего приносит пользу, и «Дип сот» дает отрицательную оценку централизованному королю в дебюте и положительную — в окончании.

Помимо чипа Фан-Сюнсю и шкалы оценок Новатцика и Кэмпбелла, в «Дип сот» есть еще одна новинка. Программа прогнозирует возможные продолжения и оценивает их. Научил машину этому Томас Анансараман из Индии. Наконец, пятый представитель группы Петер Янсен из Бельгии помог Кэмпбеллу вмонтировать в компьютерную систему базу данных для анализа окончаний, а также участвовал в создании оценочного механизма. Двое исследователей, упомянутых последними, обеспечивали и дебютную часть программы.

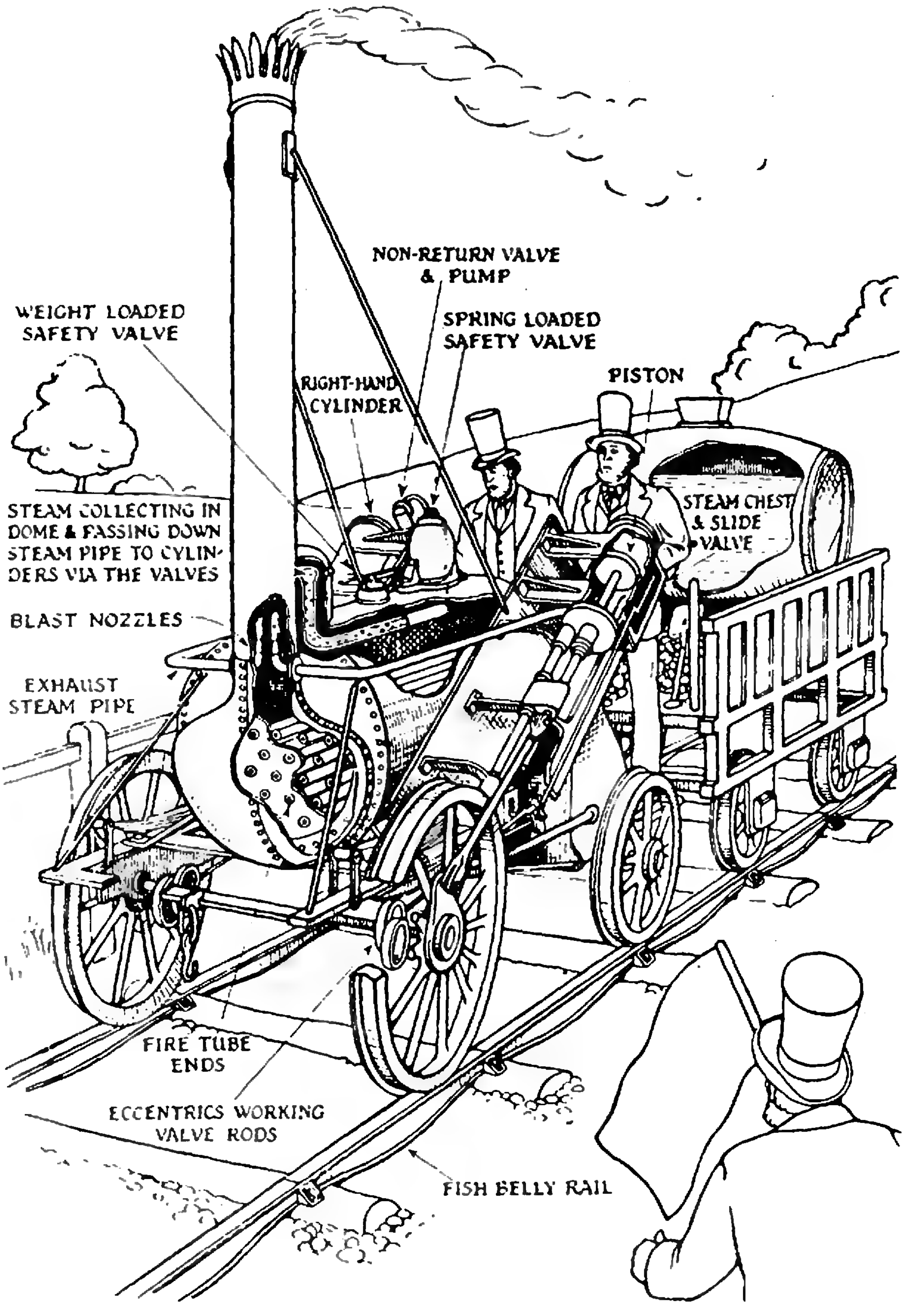
Так что «Дип сот» — компьютерное чудо, созданное международным содружеством ученых.

Мы уже рассказывали о победе «Дип сот» в крупном международном турнире, где компьютер впервые в истории выиграл турнирную партию у гроссмейстера — Б. Ларсена («Квант», 1989, № 6). Вот еще одна победа компьютерного гроссмейстера над сильным шахматистом в том же турнире в Лонг-Бич.

«Дип сот» — Гликсман
Французская защита

1. e4 e6 2. d4 d5 3. Kc3 Cb4 4. e5 Ke7 5. Cd2 c5 6. Kb5 C:d2+ 7. Ф:d2 Kf5 8. dc a6 9. Kd6+ K:d6 10. cd Kc6 11. f4 f6 12. Kf3 0—0 13. Ce2 fe 14. fe Лf5 15. Фc3 d4 16. Фd2 K:e5 17. K:d4 Фh4+ 18. g3 Фe4 19. 0—0—0 Лf2 20. Лhe1 Cd7 21. Фc3 Лc8 22. Cc4 Фg2 23. Л:e5 b5 24. C:e6+ C:e6 25. Лc5 Л:c5 26. Ф:c5 Cg4 27. Фc6 Лf1 28. Фe8+ Лf8 29. d7 Фd5 30. Лf1. Черные сдались.

Е. Гик


NON-RETURN VALVE & PUMP
WEIGHT LOADED SAFETY VALVE
SPRING LOADED SAFETY VALVE
RIGHT-HAND CYLINDER
PISTON
STEAM COLLECTING IN DOME & PASSING DOWN STEAM PIPE TO CYLINDERS VIA THE VALVES
STEAM CHEST & SLIDE VALVE
BLAST NOZZLES
EXHAUST STEAM PIPE
FIRE TUBE ENDS
ECCENTRICS WORKING VALVE RODS
FISH BELLY RAIL

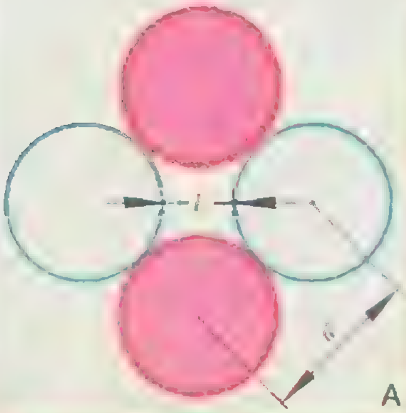
45 коп.

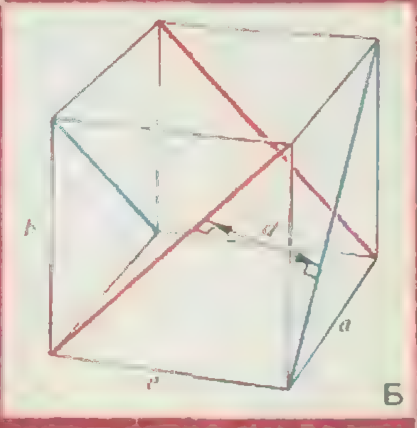
Индекс 70465

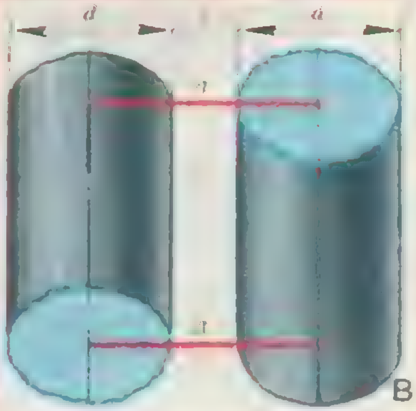
Чер 11 - 15

Как продеть толстую проволоку через узкий зазор? Над этим придется поломать голову тому, кто захочет расцепить показанные игрушки. Но читателей «Кванта» должен заинтересовать и чисто геометрический вопрос: при какой наименьшей ширине l *зазора расцепление возможно, если диаметр проволоки равен* d*?*

На рисунке А — сечение головоломки с фигурками зверюшек (рис. 1) в месте зазора в момент расцепления. Очевидно, l *здесь* $l=(\sqrt{2}-1)d\approx0{,}41d$*. Для головоломки «гвозди» (рис. 2) расчет сложнее. Если мысленно вырезать из одного гвоздя участок вблизи зазора, получатся два цилиндрика со скрещивающимися осями. При разъединении эти цилиндрики винтообразно скользят по двум скрещивающимся цилиндрическим участкам другого гвоздя. В критический момент оси всех четырех цилиндров можно представить как диагонали боковых граней правильной четырехугольной призмы (рис. Б). Задав размеры призмы* a *и* b*, можно найти расстояние* d *между соседними диагоналями, а оно равно наибольшему (при данных* a *и* b*) диаметру гвоздей:* $d=ab/\sqrt{a^2+2b^2}=a/\sqrt{2+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}$*, где* α *— угол, под которым согнуты гвозди. На рисунке В показана проекция нашей вспомогательной призмы на основание и два цилиндрических кусочка одного из гвоздей. Очевидно, ширина зазора между этими кусочками* $l=a-d=(\sqrt{2+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}-1)d$*. В частности, при* $\alpha=90^\circ$ *зазор должен быть не меньше* $(\sqrt{3}-1)d\approx0{,}73\,d$*. Аналогично рассчитывается зазор и для двух оставшихся головоломок.*







НОМЕР
5

Квант
1990
5

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Москва, «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *А. Варламов, К. Камерлинго.* Случай в поезде
6 *В. Шевелев.* Латинские прямоугольники
10 *И. Воробьев.* Охлаждение светом
18 *Б. Шапиро.* О ньютоновском притяжении эллипсоидов

Задачник «Кванта»

26 Задачи М1221 — М1225, Ф1228 — Ф1232
27 Решения задач М1196 — М1200, Ф1208 — Ф1212

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *А. Штейнберг.* В роли магдебургского бургомистра
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Фантастика

44 *Д. Киз.* Цветы для Элджернона

Школа в «Кванте»
Физика 9, 10, 11:

50 Что произойдет, если исчезнет трение?
53 Об электрическом сопротивлении проводников
55 Компьютер — в холодильнике?!

Математический кружок

58 *Ю. Сидоров.* Об одном замечательном уравнении

Практикум абитуриента

63 *В. Затакавай.* Решение неравенств методом интервалов
67 **Варианты вступительных экзаменов**
76 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(36, 43)*
Смесь *(62, 66, 80)*
Реклама *(17, 74)*

Наша обложка

1 *Несколько моментов работы эллиптической передачи. Желтый эллипс вращается равномерно вокруг одного из своих фокусов, который, в свою очередь, равномерно движется по окружности. По аналогичной окружности движется и один из фокусов красного эллипса, который все время касается желтого. А второй его фокус движется по «восьмерке». Эллипс — тема «Калейдоскопа» этого номера.*

2 *На этой картине бельгийского художника Р. Магрита (1898—1967) изображены три эллипсоида. С какой силой они притягивают друг друга? Об этом вы узнаете из статьи «О ньютоновском притяжении эллипсоидов».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Новая головоломка: укладывание шариков в куб.*

© Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1990

СЛУЧАЙ В ПОЕЗДЕ

Доктор физико-математических наук
А. ВАРЛАМОВ,
доктор К. КАМЕРЛИНГО (Италия)

Недавно авторам этих строк довелось возвращаться на железнодорожном экспрессе из Венеции в Неаполь. Поезд шел очень быстро (со скоростью около 150 км/ч), за окном мелькали пейзажи, будто сошедшие с полотен мастеров Возрождения. В полном согласии с их картинами местность была холмистая, и поезд то летел по мосту, то нырял в очередной туннель. В одном из особенно длинных туннелей вблизи Флоренции у нас неожиданно «заложило» уши, так, как это бывает при взлете или посадке у пассажиров самолета. Судя по внешним признакам, та же участь постигла и наших попутчиков — все в вагоне крутили головами, пытаясь избавиться от неприятного ощущения. Когда же поезд, наконец, вырвался из тесного туннеля, оно прошло само собой, и лишь у одного из нас, не привыкшего к таким сюрпризам на железной дороге, остался вопрос о происхождении этого эффекта. Поскольку он явно был связан с перепадом давления, мы стали оживленно обсуждать возможные физические причины явления. На первый взгляд казалось очевидным, что при наличии поезда давление воздуха между стенками туннеля и обшивкой поезда должно повыситься, однако по мере того, как мы углублялись в задачу, это соображение казалось все менее и менее бесспорным. Вскоре у нас было готово объяснение, которое мы и хотим вам предложить.

Рассмотрим поезд с площадью поперечного сечения $S_{\text{п}}$, движущийся с постоянной скоростью внутри длинного туннеля с площадью поперечного сечения S_0. Сразу же перейдем в систему отсчета, связанную с поездом. Течение воздуха будем считать установившимся, а вязкостью воздуха пренебрежем. В этом случае движение стенок туннеля относительно поезда можно не учитывать — ввиду отсутствия вязкости оно не оказывает влияния на течение воздуха. Будем также считать поезд достаточно длинным, чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами у переднего и заднего вагонов, а давление воздуха в туннеле будем считать установившимся и постоянным вблизи обшивки всего поезда.

Так мы, путем отказа от второстепенных деталей, перешли от реального движения поезда к упрощенной физической модели, которую уже можно попробовать описать математически. Итак. Имеется труба (бывший туннель), в которой соосно с ней покоится цилиндр (бывший поезд) с обтекаемыми концами. Сквозь трубу продувается воздух: вдали от поезда (сечение $A-A$ на рисунке) давление воздуха p_0 равно атмосферному, а скорость воздушного потока $v_{\text{п}}$ равна по величине и противоположна по направлению скорости, с которой до перехода в нашу систему отсчета двигался поезд. Рассмотрим некоторое сечение $B-B$ (на всякий случай подальше от концов поезда, чтобы наши предположения действительно выполнялись). Обозначим давление воздуха в этом сечении через p, а скорость потока воздуха через v. Эти величины можно связать с $v_{\text{п}}$ и p_0 с помощью уравнения Бернулли:

$$p+\frac{\rho v^2}{2}=p_0+\frac{\rho v_{\text{п}}^2}{2}, \qquad (1)$$

где ρ — плотность воздуха. Сразу же подчеркнем, что мы записываем уравнение Бернулли в виде так называемого приближения несжимаемой жидкости. Это накладывает дополнительные ограничения, которые стоит обсудить подробнее. Можно ли считать плотность воздуха в рассматриваемой задаче постоянной? Вопрос непростой, и строгий ответ на него может быть дан только с помощью гораздо более сложного рассмотрения на основании общего уравнения Бернулли (называемого интегралом Бернулли), справедливого и для сжимаемой жидкости. Мы же приведем лишь наводящие физические соображения. Если скорость потока не слишком велика (что это означает, станет ясно позже) и мы пренебрегли вязкостью воздуха, то изменением температуры воздуха можно пренебречь. Тогда плотность будет изменяться в такой же степени, как и давление воздуха. Мы ожидаем получить небольшое изменение давления, которое будет определяться обычной плотностью воздуха. Последняя может быть найдена из уравнения Менделеева — Клапейрона, примененного для воздуха вдали от поезда:

$$\rho = \frac{p_0\mu}{RT}. \qquad (2)$$

Нетрудно увидеть предел, где наше предположение о постоянстве плотности ρ заведомо не выполняется: если скорость потока воздуха в какомлибо из сечений трубы становится сравнимой со среднеквадратичной *скоростью теплового движения молекул*, то тут уже ни о каком постоянстве ρ в различных сечениях говорить не приходится. Действительно, ведь именно эта скорость определяет характерное время установления средней плотности газа в макроскопическом объеме, поэтому при столь высоких скоростях потока она, плотность, просто не будет успевать устанавливаться при переходе от одного сечения к другому. Однако, как мы увидим ниже, это ограничение может оказаться недостаточным. А пока будем считать плотность ρ постоянной.

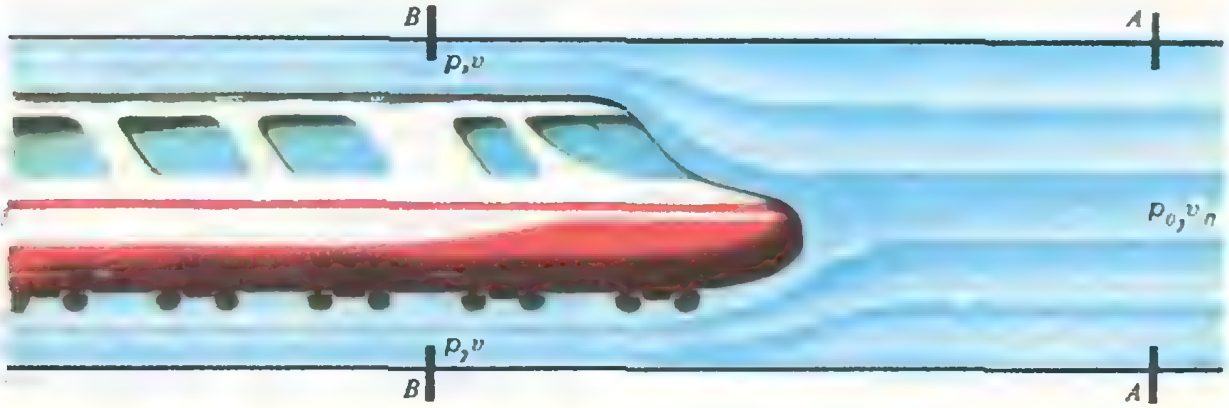
В уравнении (1) две неизвестные величины — p и v, поэтому для определения p необходимо еще одно соотношение. Его нам даст условие неизменности массы воздуха, протекающей через любое сечение в единицу времени (при течении в трубе масса не может ни возникать, ни исчезать):

$$\rho v_п S_0 = \rho v (S_0 - S_п). \qquad (3)$$

(Об этом соотношении часто говорят как об условии непрерывности потока.) Избавляясь с помощью (3) от скорости v в (1) и подставляя выражение (2) для плотности ρ, находим давление воздуха в туннеле:

$$p = p_0\left(1 - \frac{\mu v_п^2}{2RT}\left(\left(\frac{S_0}{S_0 - S_п}\right)^2 - 1\right)\right). \qquad (4)$$

Входящая в это выражение комбинация параметров $\mu v_п^2/RT$, очевидно, безразмерна. Следовательно, величина $\sqrt{RT/\mu}$ имеет размерность скорости. В ней, с точностью до коэффициента, можно сразу же усмотреть среднеквадратичную скорость теплового движения молекул. Однако при анализе рассматриваемой аэродинамической задачи для нас будет важна другая характеристика газа — скорость распространения в нем звука, которую авторам уже давно хочется ввести. Она, как и скорость теплового движения молекул, определяется температурой и молекулярной массой газа, и численное значение скорости звука $v_{зв}$ зависит еще от так называемого пока-



зателя адиабаты γ — характерного для каждого газа числа порядка 1 (для воздуха $\gamma=1{,}41$):

$$v_{\text{зв}}=\sqrt{\gamma RT/\mu}. \qquad (5)$$

При нормальных условиях $v_{\text{зв}}=335$ м/с (т. е. примерно 1200 км/ч). Используя определение (5), мы можем переписать выражение (4) для давления p в удобном для дальнейшего обсуждения виде (подставив $\mu/RT=\gamma/v_{\text{зв}}^2$):

$$p=p_0\left(1-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{зв}}}\right)^2\times\right.$$
$$\left.\times\left(\left(\frac{S_0}{S_0-S_{\text{п}}}\right)^2-1\right)\right). \qquad (6)$$

Теперь пришло время остановиться и подумать. Мы вычислили давление вблизи обшивки поезда внутри туннеля. Однако наши уши заболели не от самого давления, а от его изменения при входе поезда в туннель по сравнению с давлением p_0 вблизи обшивки поезда при его движении по свободному пространству.*) Перепад давления мы можем сразу же определить с помощью выражения (6): относительное изменение давления $\frac{\Delta p}{p_0}=\frac{p-p_0}{p_0}$ составляет

$$\frac{\Delta p}{p_0}=-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{зв}}}\right)^2\times$$
$$\times\left(\left(\frac{S_0}{S_0-S_{\text{п}}}\right)^2-1\right). \qquad (7)$$

Прежде всего отметим, что, как видно из (7), при входе в туннель давление вблизи обшивки движущегося поезда понижается (а не повышается, как нам показалось вначале).

Давайте оценим величину найденного эффекта. Для узкого (двухпутевого) железнодорожного туннеля можно принять, что $S_{\text{п}}=\frac{1}{4}S_0$. Величины $v_{\text{п}}=150$ км/ч и $v_{\text{зв}}=1200$ км/ч уже приводились выше. Таким образом, находим, что

$$\frac{\Delta p}{p_0}=-\frac{1{,}41}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2-1\right)\approx-1\%.$$

Как мы и ожидали, изменение давления оказалось малым, и, следовательно, сделанное выше предположение подтвердилось — изменением плотности воздуха действительно можно было пренебречь. Однако такая малость относительной величины изменения давления не означает, что человеческий организм не в состоянии ее почувствовать. Действительно, если мы вспомним, что $p_0=10^5$ Н/м^2 и примем площадь нашей барабанной перепонки за $\sigma=1$ см^2, то избыточная сила давления, действующая на нее изнутри, составит $\Delta F=\sigma\cdot\Delta p\sim0{,}1$ Н, что уже вполне заметно.

Казалось бы, эффект объяснен и можно ставить точку. Однако что-то беспокоило нас в полученной формуле. И мы быстро обнаружили, что именно: из выражения (7) следует, что даже при нормальном для обычных поездов соотношении $v_{\text{п}}/v_{\text{зв}}\ll1$ (эта комбинация скоростей постоянно встречается в аэродинамике и носит название числа Маха) в очень узком туннеле, когда $S_{\text{п}}\to S_0$, величина $|\Delta p|$ может стать порядка p_0 и даже превысить эту величину! Ясно, что в этом случае мы выходим за рамки ограничений, сделанных выше. Но где именно? Ведь, казалось бы, соотношение $v_{\text{п}}\ll v_{\text{зв}}$ весьма надежно защищает нас от неожиданностей. Попробуем разобраться.

Пусть действительно Δp, вычисленное по формуле (7) оказывается порядка p_0. Это означает, что

$$\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{зв}}}\left(\frac{S_0}{S_0-S_{\text{п}}}\right)\sim1,$$

и, следовательно,

$$v_{\text{п}}S_0\sim v_{\text{зв}}(S_0-S_{\text{п}}).$$

Сравнивая последнее равенство с условием непрерывности (3), мы видим, что произошло: $|\Delta p|$ становится порядка p_0, когда скорость протекания потока воздуха между обшивкой поезда и стенками туннеля оказывается порядка скорости звука, а в этом случае, как мы уже говорили, все наше рассмотрение оказывается неприменимым. Следовательно, условием применимости выражения (7) является не только условие $v_п \ll v_{зв}$, но и более жесткое:

---

*) Тут стоит отметить два обстоятельства. Во-первых, в биофизике существует так называемый закон Вебера — Хефнера, согласно которому любое изменение внешнего воздействия воспринимается органами чувств только тогда, когда относительное изменение этого воздействия превышает некоторую пороговую величину. Во-вторых, если туннель оказывается достаточно длинным, то организм успевает адаптироваться к новым условиям и неприятное ощущение исчезает. Однако на выходе из туннеля оно нас подстерегает вновь.

$$v_п \ll v_{зв}\left(\frac{S_0-S_п}{S_0}\right).$$

Для реальных поездов и туннелей оно, очевидно, выполняется всегда. Тем не менее наше исследование пределов применимости полученной формулы не следует рассматривать как простое математическое упражнение. Во-первых, физик должен всегда четко представлять «рабочую область» полученного им результата. Вторая причина, в данном случае, вполне практическая. Дело в том, что в последние десятилетия все чаще обсуждаются возможности создания принципиально новых видов транспорта, в том числе и на основе железнодорожного. Так, уже много лет назад была предложена идея поезда, движущегося на сверхпроводящей магнитной подушке. Это вагончик, внутри которого имеется мощный сверхпроводящий магнит. Благодаря создаваемому им магнитному полю, вагончик зависает над металлическим рельсом, и сопротивление движению определяется только аэродинамическими свойствами такого вагона. В Японии уже создана действующая модель этого вида транспорта. Экспериментальный образец перевозит 20 пассажиров вдоль линии длиной в 7 километров, развивая при этом максимальную скорость 516 км/ч! А ведь это уже почти половина скорости звука.

Следующим шагом на пути развития этого вида транспорта стала идея... заключить вагончик в герметическую трубу и создать там пониженное давление! Вот тут-то, как вы уже, наверное, сообразили, конструкторы и сталкиваются с рассмотренной нами задачей о поезде в туннеле, но в гораздо более сложном случае, когда $v_п \sim v_{зв}$ и $S_0 - S_п \ll S_0$. Движение разреженного воздуха здесь уже турбулентно, температура воздуха заметно меняется, и сегодня наука еще не знает ответов на многие вопросы, возникающие при решении подобных задач. Сделанная нами оценка позволяет вам понять некоторые из тех трудностей, которые встречаются на пути ученых.

В заключение предлагаем подумать над другими физическими вопросами, которые могут возникнуть при поездке в поезде.

1. Почему шум от движущегося поезда резко возрастает, когда поезд въезжает в туннель?

2. В последнее время на многих железных дорогах кладут так называемый «бархатный путь» — рельсы сваривают «в стык», не оставляя между ними зазора. А как же быть с тепловым расширением при изменении температуры?

3. Почему при встрече двух быстро движущихся навстречу друг другу поездов их окна испытывают удар? Куда направлена сила, действующая при этом на стекла,— наружу или внутрь вагона?

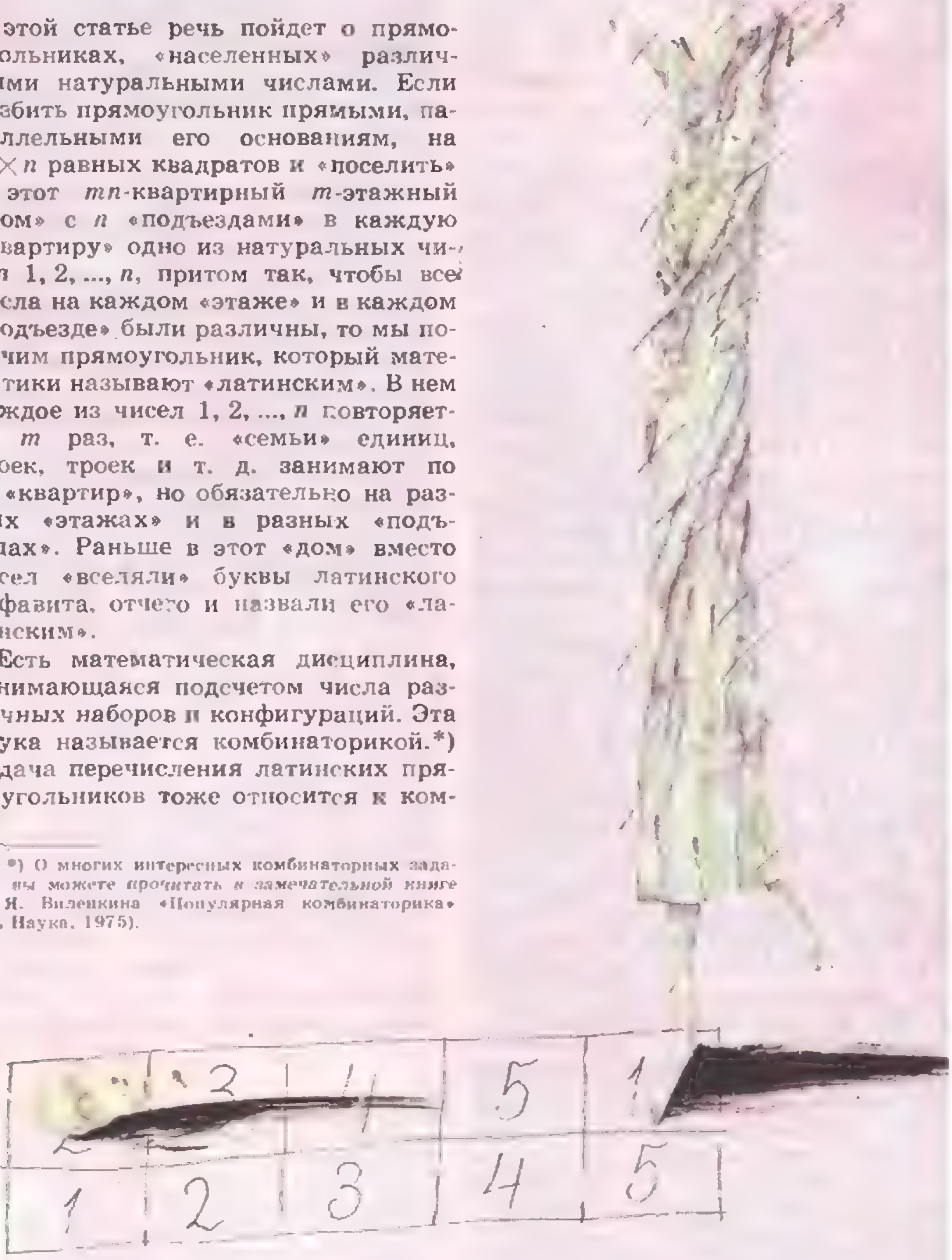
ЛАТИНСКИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

Кандидат физико-математических наук
В. ШЕВЕЛЕВ

О чем эта статья?

В этой статье речь пойдет о прямоугольниках, «населенных» различными натуральными числами. Если разбить прямоугольник прямыми, параллельными его основаниям, на $m \times n$ равных квадратов и «поселить» в этот mn-квартирный m-этажный «дом» с n «подъездами» в каждую «квартиру» одно из натуральных чисел 1, 2, ..., n, притом так, чтобы все числа на каждом «этаже» и в каждом «подъезде» были различны, то мы получим прямоугольник, который математики называют «латинским». В нем каждое из чисел 1, 2, ..., n повторяется m раз, т. е. «семьи» единиц, двоек, троек и т. д. занимают по m «квартир», но обязательно на разных «этажах» и в разных «подъездах». Раньше в этот «дом» вместо чисел «вселяли» буквы латинского алфавита, отчего и назвали его «латинским».

Есть математическая дисциплина, занимающаяся подсчетом числа различных наборов и конфигураций. Эта наука называется комбинаторикой.*) Задача перечисления латинских прямоугольников тоже относится к ком-



---

*) О многих интересных комбинаторных задачах вы можете прочитать в замечательной книге Н. Я. Виленкина «Популярная комбинаторика» (М., Наука, 1975).

бинаторике. Однако в общем виде эта задача необыкновенно трудна. Несмотря на то, что ею занимались крупнейшие математики, прошло более 200 лет между подсчетом числа «двухэтажных» и «трехэтажных» прямоугольников, первые из которых впервые перечислил француз Монмор еще в 1713 году, а вторые — американский математик Риордан всего 40 с небольшим лет назад. Кроме красивых явных формул Монмора и Риордана, о которых мы расскажем ниже, для этих прямоугольников были найдены и удобные рекуррентные формулы великим Эйлером (его формулу мы докажем) и индийцем Керавалой. Интересно, что Керавала опроверг «продержавшиеся» 12 лет (с 1930 по 1941) ошибочные рекуррентные формулы английского математика Джейкоба для числа «трехэтажных» латинских прямоугольников. Что ж, при решении трудных задач и такое бывает в математике!

Существование латинских прямоугольников

Теорема 1. *Для любых чисел $m \leqslant n$ существует латинский $m\times n$-прямоугольник.*

Доказательство. Будем «заселять» наш m-этажный «дом» с верхнего этажа. На m-м этаже «расселим» числа 1, 2, 3, ..., n в их естественном порядке. На $(m-1)$-м этаже «расселение» начнем с двойки: 2, 3, ..., n,1; на $(m-2)$-м этаже — с тройки: 3, 4, ..., n, 1, 2, и так далее; наконец, на 1-м этаже «расселение» начнем с числа m: m, $m+1$, ..., n, 1, 2,..., $m-1$. Тогда «дом» будет «заселен» так, как это сделано в таблице. Ясно, что при таком «заселении» нет двух одинаковых «жильцов» на одном «этаже» или в одном «подъезде». Следовательно, перед нами — «m-этажный» латинский прямоугольник длиной n. Значит, $m\times n$-прямоугольники существуют.

Два этажа

Перейдем теперь к подсчету числа латинских прямоугольников. Особенно просто решается задача для одноэтажных прямоугольников.

Теорема 2. *Число латинских $1\times n$-прямоугольников равно $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$.*

Доказательство. Латинский $1\times n$-прямоугольник — это просто произвольная перестановка из n чисел. Таких перестановок всего $n!$ (на первое место ставили любое из n чисел, на второе — любое из $n-1$ оставшихся, на третье — любое из $n-2$ оставшихся после этого и т. д.).

Перейдем к $2\times n$-прямоугольникам. Верхняя строка этого прямоуголвника — любая перестановка. Нижняя строчка — перестановка, в которой на каждом месте стоит число, не равное числу, стоящему на том же месте в первой перестановке. Если мы произвольным образом переставим столбцы нашего прямоугольника, он останется латинским, и при этом верхнюю перестановку можно сделать любой. Из этого видно, что какую бы конкретную перестановку мы ни взяли, число латинских прямоугольников, у которых верхняя строчка совпадает именно с этой перестановкой, будет одним и тем же для всех перестановок. Назовем латинский $2\times n$-прямоугольник *нормализованным*, если в его верхней строчке числа стоят подряд: 1, 2, 3, ..., $n-1$, n. Из сказанного видно, что число $L(2, n)$ латинских $2\times n$-прямоугольников равно числу D_n нормализованных латинских $2\times n$-прямоугольников, умноженному на число перестановок n чисел, т. е.

$$L(2, n) = n!\cdot D_n.$$

Для числа D_n нормализованных латинских $2\times n$-прямоугольников имеется несколько изящных формул.

Теорема 3. (Формула Эйлера.) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

Таблица

1	2	3	...	$n-1$	n
2	3	4	...	n	1
..	..	..	...	..	..
m	$m+1$	$m+2$	...	$m-2$	$m-1$

Это, как говорят, рекуррентная формула: если мы знаем D_1 и D_2, а, очевидно, $D_1=0$ и $D_2=1$, то мы можем найти с ее помощью последующие D_n:

$$D_3=2\cdot(1+0)=2,$$
$$D_4=3\cdot(2+1)=9,$$
$$D_5=4\cdot(9+2)=44,$$
$$D_6=5\cdot(44+9)=265$$

и т. д.

Доказательство. Всякую перестановку можно записать как систему циклов. Это делается так. Пусть, скажем, на 1-м месте стоит k_1, пишем $1\to k_1$. Если на k_1-м месте стоит k_2, напишем $1\to k_1\to k_2$. Затем $1\to k_1\to k_2\to k_3$ и так до тех пор, пока мы снова не дойдем до единицы (рис. 1). (Не может получиться, что в нашей последовательности появится одно из уже пройденных чисел раньше, чем единица. Скажем, если будет... $\to k_9\to k_{10}\to k_5$, то k_5 стоит на k_{10}-м месте и на k_4-м месте, а значит, $k_{10}=k_4$, точно так же $k_9=k_3$, ..., $k_6=1$.) Затем берем самое маленькое из чисел, не вошедших в наш цикл, и строим цикл, начиная с него. В конце концов все n чисел окажутся стоящими в циклах (рис. 2).

Число циклов может быть любым от 1 до n, и длина цикла может быть любой от 1 до n. Наше условие — что ни одно число не стоит на своем месте — запрещает циклы длиной 1.

Теперь построим по нашей перестановке перестановку длиной $n-1$ или $n-2$ и тоже без циклов длиной 1. Найдем на одном из циклов число n (рис. 3). Если длина этого цикла больше двух, мы просто выбросим n и соединим «накоротко» p с q (рис. 4). Если же n входит в цикл длиной 2, например в изображенный на рисунке 5, мы просто выбросим этот цикл и уменьшим все числа от $k+1$ до $n-1$ на единицу: $k+1\to k$, $k+2\to k+1$, ..., $n-1\to n-2$. В первом случае получится перестановка $n-1$ чисел, во втором случае — перестановка $n-2$ чисел. Сколькими способами у нас может получиться перестановка $n-1$ чисел? Ясно, что $n-1$ способами: чтобы вернуться к перестановке длиной n, мы должны разорвать любую стрелку $p\to q$ (а их $n-1$) и вставить туда n: $p\to n\to q$. Сколькими способами получается перестановка $n-2$ чисел? Снова $n-1$ способами: мы добавляем цикла $n\rightleftarrows k$, где k — любое число от 1 до $n-1$, и увеличиваем на единицу числа k, $k+1$, ..., $n-2$. Значит,

$$D_n=(n-1)D_{n-1}+(n-1)D_{n-2},$$

что и требовалось.

А вот другая рекуррентная формула для D_n, гораздо более простая.

Теорема 4. $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$.

Доказательство. Пусть $D_n-nD_{n-1}=E_n$. Из формулы Эйлера

$$E_n=D_n-nD_{n-1}=$$
$$=(n-1)D_{n-1}+(n-1)D_{n-2}-nD_{n-1}=$$
$$=-D_{n-1}+(n-1)D_{n-2}=-E_{n-1}.$$

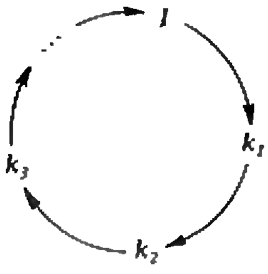
Значит,

$E_n=-E_{n-1}=E_{n-2}=\ldots=(-1)^nE_2$. Но $E_2=1-2\cdot 0=1$, значит, $E_n=(-1)^n$ и $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$.

Из последней формулы уже ничего не стоит найти не рекуррентную, а явную формулу для D_n.

Теорема 5. (Формула Монмора.)

$$D_n=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$



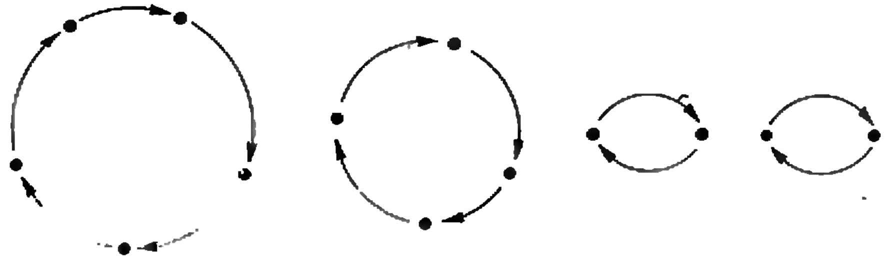


Рис. 1.

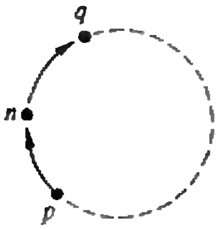


Рис. 3.

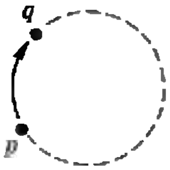


Рис. 4.

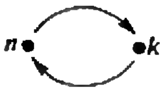


Рис. 5.

Доказательство.

$$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n=$$
$$=n((n-1)D_{n-2}+(-1)^{n-1})+(-1)^n=$$
$$=n(n-1)D_{n-2}+(-1)^{n-1}n+(-1)^n=$$
$$=n(n-1)(n-2)D_{n-3}+$$
$$+\ (-1)^{n-2}n(n-1)\ +\ (-1)^{n-1}n\ +$$
$$+(-1)^n=\ldots=n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot3\times$$
$$\times D_2-n(n-1)\cdot\ldots\cdot4+n(n-1)\cdot\ldots\cdot5-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}n+(-1)^n=$$
$$=n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

Последнее выражение в скобках может показаться знакомым тем из вас, кто усвоил в школе начала анализа. Нам оно тоже кажется знакомым, но мы отложим его «опознание» до заключительного раздела статьи.

Что же касается самой формулы Монмора, она была доказана раньше двух вышеприведенных формул. Ее прямое доказательство основано на формуле «включения—исключения»; читатели, знакомые с этой формулой, выведут из нее формулу Монмора без большого труда, а мы обратимся к трехэтажным латинским прямоугольникам.

Три этажа

Попытки нахождения числа $L(3, n)$ латинских $3\times n$-прямоугольников завершились в 1944 году, когда американский математик Риордан, опираясь на результаты длинной цепочки предшественников, выписал, наконец, окончательную формулу. Мы не приводим здесь не только вывода формулы (далеко выходящего за рамки школьной программы), но и самой формулы, которая тоже довольно громоздка. Ограничимся тем, что приведем рекуррентную формулу, которая называется формулой Керавала—Риордана: если $K_n=\frac{1}{n!}L(3, n)$, то

$$K_n=n^2K_{n-1}+n(n-1)K_{n-2}+$$
$$+2n(n-1)(n-2)K_{n-3}+(-1)^n(e_n+$$
$$+2ne_{n-1})\ (n\geqslant4),$$

где e_n находится из своей рекуррентной формулы (напоминающей формулу для D_n):

$$e_0=1,\ e_n=ne_{n-1}+(-2)^n.$$

Пользуясь этими формулами и тем, что $K_1=K_2=0$, $K_3=2$, мы можем найти K_n при всех n. Например,

$$K_5=552,$$
$$K_7=1073760;$$

уже из этих равенств видно, что числа K_n стремительно растут; числа $L(3, n)$, разумеется, растут еще быстрее.

Приближенные формулы

Выражение $\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$ показалось нам знакомым потому, что оно напоминает степенной ряд для e^x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

В частности,

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\approx$$
$$\approx1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots=e^{-1},$$

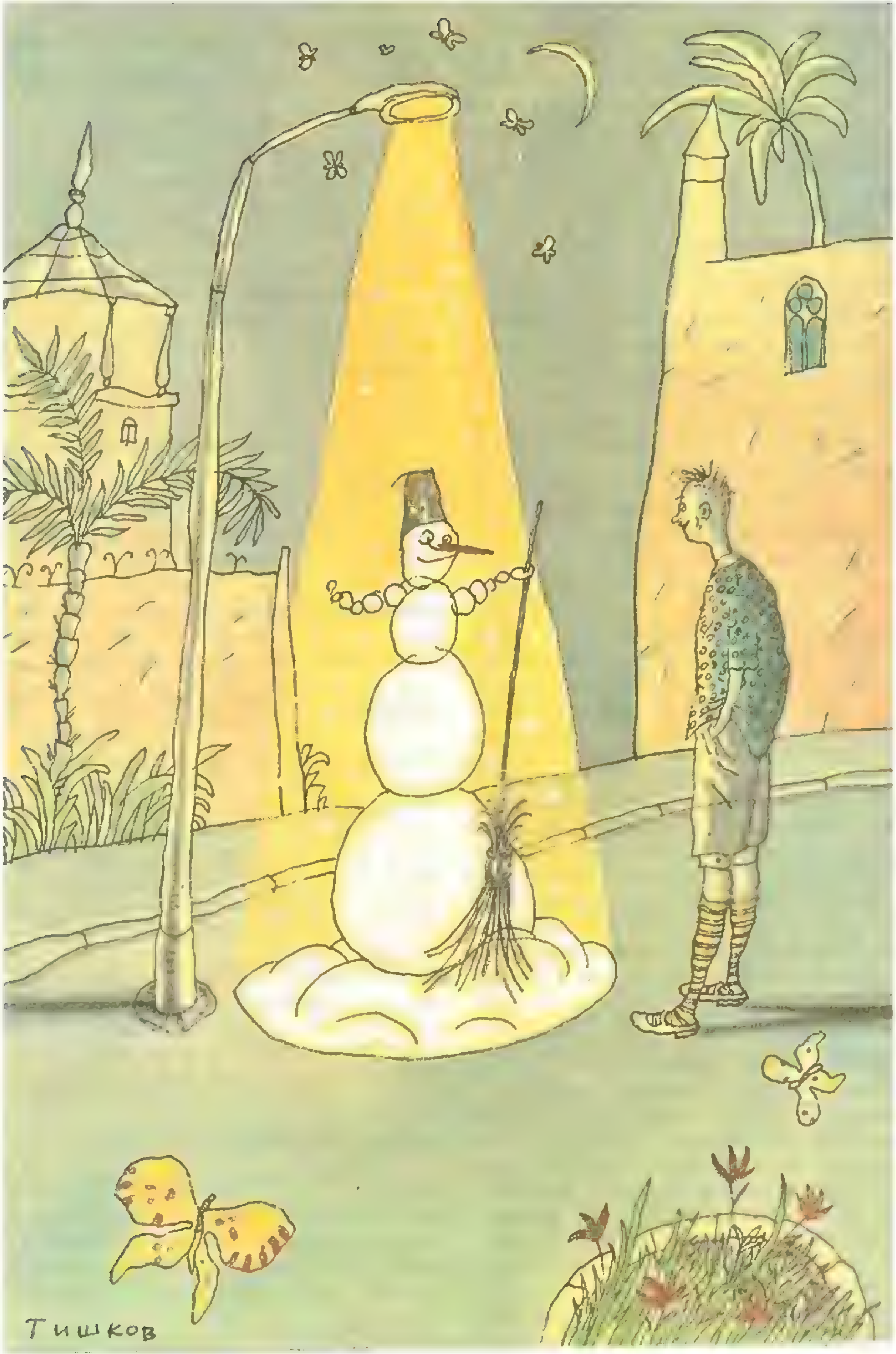
причем погрешность по абсолютной величине не превосходит $\frac{1}{(n+1)!}$.

Значит,

$$D_n\approx n!e^{-1}=\frac{n!}{e},$$

причем погрешность не превосходит $\frac{1}{n+1}$. (Поскольку D_n есть целое число, оно восстанавливается по этим данным однозначно.) Обобщая эту формулу, П. Эрдеш и И. Капланский в 1946 году получили изящную

(*Окончание см. на с. 25*)


Тишков

ОХЛАЖДЕНИЕ СВЕТОМ

И. ВОРОБЬЕВ

Вам не показалось, что в сочетании этих слов — «охлаждение светом» — есть какая-то нелепость? В самом деле, в жаркий день мы ищем прохлады в тени, стараясь укрыться от солнца. А тут — охлаждать вещество, облучая его светом? Ведь для понижения температуры нужно отнимать энергию, а свет ее приносит. Тем не менее световая холодильная установка создана, и с ее помощью достигнута весьма низкая температура в $2{,}4\cdot10^{-4}$ К.

Попробуем и мы отыскать способ «производить холод» светом.

Команда атомов и команда фотонов

Прежде всего вспомним, что температура связана со средней кинетической энергией теплового движения атомов:

$$\frac{3}{2}kT=\frac{m\overline{v^2}}{2}. \qquad (1)$$

Чтобы она понизилась, достаточно замедлить атомы. Почему бы для торможения не использовать фотоны? Фотон, как известно, обладает импульсом $p_ф=\varepsilon/c$, где ε — энергия фотона, c — его скорость, т. е. скорость света. Если летящий атом поглотит встречный фотон, то он, атом, затормозится. Но как «попасть» фотоном в летящий атом?

Понятно, что нет смысла «целиться» в отдельный атом, надо столкнуть «в лоб» пучок атомов с пучком фотонов. В качестве источника тормозящего света, естественно, надо использовать лазер. Он испускает остронаправленный поток фотонов одной и той же энергии. Чтобы получить направленный пучок атомов, сделаем следующее. Испарим в вакуумной камере крупинку вещества (электрическим разрядом или световым импульсом лазера). Две перегородки с малыми отверстиями выделят из разлетающегося облачка пара тонкий пучок. Так мы получим команду атомов, летящую навстречу лазерному лучу (рис. 1).

Прекрасно, контуры холодильной установки начинают вырисовываться. Но будет ли свет поглощаться сравнительно разреженным пучком? (Ведь газы, как правило, исключительно прозрачны. А это и означает, что фотоны пролетают сквозь толщу газа, практически не сталкиваясь с его атомами.) И если будет, то обязательно ли в этом процессе атом затормозится, потеряет часть своей энергии?

Примечательно, что оба эти вопроса тесно связаны.

Уровни возможной внутренней энергии атома образуют лестницу с пустыми промежутками между ступенями (рис. 2). От основного состояния с наименьшей внутренней энер-

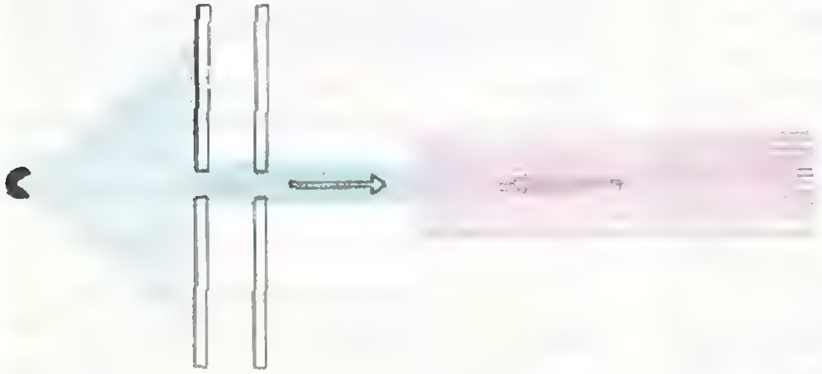


Рис. 1.

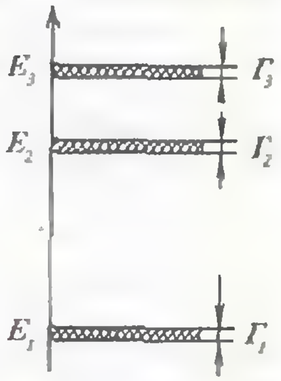


Рис. 2.

гией первое возбужденное состояние отделено энергией E_1, второе — E_2 и т. д. Сами ступени имеют некоторую толщину: у множества атомов в данном возбужденном состоянии встречаются энергии от $E-\Gamma/2$ до $E+\Gamma/2$, где величина Γ называется шириной уровня с энергией E. Вероятность встретить атом за пределами ширины уровня мала и резко убывает с ростом отклонения от середины ступени.

Между энергией атома и энергией поглощаемого фотона существует четкое соответствие: атом может поглотить только такой фотон, энергия которого отвечает переходу с одной ступеньки на другую. Такой резонансный характер поглощения и объясняет, в основном, высокую прозрачность газов — если энергия фотона отличается от энергии перехода больше, чем на ширину уровня, поглощение резко ослабляется и сходит на нет.

Итак, при специальном выборе энергии фотонов происходит поглощение с переходом атомов из одного состояния в другое, в котором внутренняя энергия больше. Из-за толчка при поглощении встречного фотона атом замедлится, уменьшится и его кинетическая энергия. Но это не противоречит закону сохранения энергии. В этом случае часть кинетической энергии атома и энергия фотона идут на прирост внутренней энергии атома. Совместное рассмотрение балансов импульса и энергии при взаимодействии атомов и фотонов и позволит разобраться в возможностях светового охлаждения.

Отложим пока расчеты. Подумаем вот о чем. Вряд ли однократное поглощение в точности погасит скорость атомов. Поэтому важна их судьба и после поглощения. Атом стабилен сам по себе лишь в основном состоянии, на низшем энергетическом уровне. Время жизни атома в возбужденном состоянии ограничено. Для первого уровня типичное время жизни порядка 10^{-8} с. В среднем через такое время атом перейдет в основное состояние, испустив при этом фотон. Как влияет отдача при излучении фотона на движение атома? Не скомпенсирует ли она торможение на этапе поглощения? Не приведет ли к вылету атома из пучка и лазерного луча? Это требует количественных оценок.

Переизлученные фотоны тоже могут быть поглощены атомами — для них тоже выполнены условия резонанса. Но число этих «вторичных» фотонов много меньше числа фотонов в интенсивном лазерном луче. Кроме того, они излучаются атомами в самых разных направлениях и бо́льшая их часть быстро покидает атомный пучок. Так что поглощением переизлученных фотонов можно пренебречь.

Резонансным поглощением и излучением мыслимые процессы не исчерпываются. Фотон высокой энергии может выбить электрон из атома; возможно рассеяние, когда происходит поглощение и излучение фотона в одном акте взаимодействия (при упругом рассеянии — без перехода с уровня на уровень, при неупругом — с изменением внутренней энергии); возможно двухфотонное поглощение и т. д. Однако эти возможные процессы или происходят со значительно меньшей вероятностью, или же от них можно «отстроиться» выбором диапазона энергии фотонов.

Настройка в резонанс

Реальный эксперимент проводился с натрием. Остановимся на переходе из основного состояния в первое возбужденное с внутренней энергией $E=2{,}1$ эВ *) и шириной уровня $\Gamma=4{,}4\cdot10^{-8}$ эВ. Столь узкий резонанс требует высокой точности в выборе энергии фотонов. Масса атома натрия $m=22$ ГэВ/c^2**), где $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света. При пересчете от температуры в энергию и наоборот удобно округленное значение постоянной Больцмана $k\approx10^{-4}$ эВ/К (более точно

---

*) 1 эВ — *один электронвольт* — равен энергии, которую приобретает электрон при прохождении разности потенциалов в 1 В; 1 ГэВ$=10^9$ эВ.

**) ГэВ/c^2 имеет размерность массы и служит ее единицей.

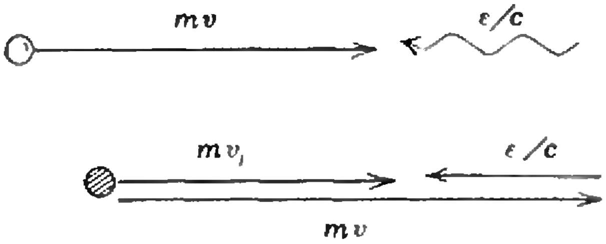


Рис. 3.

энергии в 1 эВ соответствует 11600 К). Температуре 10^3 К отвечает скорость теплового движения атомов натрия, примерно равная 10^3 м/с, а температуре 10^{-3} К — скорость 1 м/с. Порядок существенных величин примерно тот же и для других атомов.

Рассмотрим условия резонансного поглощения при «лобовом» столкновении атома, движущегося со скоростью v, и фотона с некоторой энергией ε (рис. 3). По закону сохранения импульса

$$mv_1 = mv - \varepsilon/c,$$

где v_1 — скорость атома после поглощения фотона. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_1^2}{2} + E = \varepsilon + \frac{mv^2}{2}.$$

Решение этих уравнений дает энергию фотона ε, обеспечивающую резонансное поглощение, и скорость атома v_1 после поглощения.

При температуре порядка 10^3 К, необходимой для испарения натрия, скорости атомов много меньше световой. Разумно использовать малость v и v_1 в сравнении с c и найти приближенное решение с устраивающей нас точностью. Для этого сначала запишем иначе условия баланса импульса и энергии:

$$\varepsilon = mc(v - v_1), \tag{2}$$

$$E - \varepsilon = \frac{m(v^2 - v_1^2)}{2}, \tag{3}$$

и поделим уравнение (3) на уравнение (2):

$$\frac{E-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{v + v_1}{2c}. \tag{4}$$

Относительное отличие энергии фотона от энергии возбуждения оказывается малой величиной. Пренебрегая этим отличием, в первом приближении имеем:

$$\varepsilon \approx E, \qquad v - v_1 \approx E/mc \approx 3 \cdot 10^{-2}\ \text{м/с}. \tag{5}$$

Разность скоростей получена заменой в (2) ε на немного большую величину E, так что точное значение разности еще чуть меньше.

В следующем приближении воспользуемся малостью разности скоростей по сравнению с самими скоростями и заменим в (4) v_1 на v; тогда

$$\frac{E-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{v}{c}. \tag{6}$$

Учет разницы скоростей приведет к сдвигу энергии ε на величину, много меньшую ширины уровня Γ, и потому для нас несуществен — он не повлияет на условие резонанса. По той же причине в выражении (6) допустима замена в знаменателе ε на E, так что

$$E - \varepsilon = E\,\frac{v}{c} \tag{7}$$

с устраивающей нас точностью.

Итак, найдено условие интенсивного поглощения встречных фотонов: их энергия должна быть меньше энергии уровня на долю, равную отношению скорости атома к скорости света. Удручает, правда, ничтожное уменьшение скорости на 3 см/с. Разовое торможение фактически ничего не дает.

Надо иметь в виду и то, что скорости атомов в пучке разные, поэтому в резонанс попадает лишь часть атомов. В самом деле, согласно (7) для верхней и нижней границы уровня имеем

$$E \pm \frac{\Gamma}{2} - \varepsilon = E\,\frac{V_\pm}{c},$$

где $V_\pm$ — граничные скорости, отвечающие попаданию в резонанс при заданной энергии фотона. Ширина диапазона скорости

$$\Delta V = V_+ - V_- = c\,\frac{\Gamma}{E} \approx 6\ \text{м/с}. \tag{8}$$

Атомы, скорости которых лежат вне этого диапазона, не будут тормозиться.

Переизлучение и подстройка резонанса

Однократного торможения при поглощении недостаточно. Однако, прожив короткое время в возбужденном состоянии, атом возвращается в основное состояние, испустив фотон, и после этого, надеемся, снова готов к поглощению. Поэтому рассмотрим излучение фотонов возбужденными атомами при возвращении их в основное состояние.

Лазерные фотоны летят туда, куда мы их направим. Направление же вылета излучаемых фотонов *меняется* от случая к случаю. От угла θ между скоростью возбужденного атома v и направлением вылета испущенного фотона (рис. 4) зависят и изменение скорости атома при отдаче, и энергия вылетевшего фотона ε'. По закону сохранения энергии

$$\frac{m(v_1')^2}{2}+\varepsilon'=\frac{mv_1^2}{2}+E,$$

где v_1' — скорость атома после излучения. Закон сохранения *импульса* необходимо записать в векторном виде:

$$\overrightarrow{mv_1'}+\vec{p}\,'=\overrightarrow{mv_1}.$$

Ясно, что при вылете фотона «вбок» направление движения атома изменится на некоторый угол φ.

Применим опять приближенный расчет. В первом приближении $\varepsilon'=E$. Так как E/c много меньше mv_1, то снова v_1 и v_1' весьма близки, а угол φ весьма мал. Радиусом mv_1' сделаем засечку на отрезке mv_1 (см. рис. 4). Малую дугу окружности можно считать прямолинейным отрезком, перпендикулярным отрезку mv. Поэтому из рассмотрения маленького прямоугольного треугольника имеем для длины этой дуги выражение $E\sin\theta/c$. Тогда угол, на который отклонится от направления движения атом, испустивший фотон, —

$$\varphi=\frac{E\sin\theta}{mvc}, \tag{9}$$

а изменение скорости атома —

$$v_1-v_1'=\frac{E\cos\theta}{mc}. \tag{10}$$

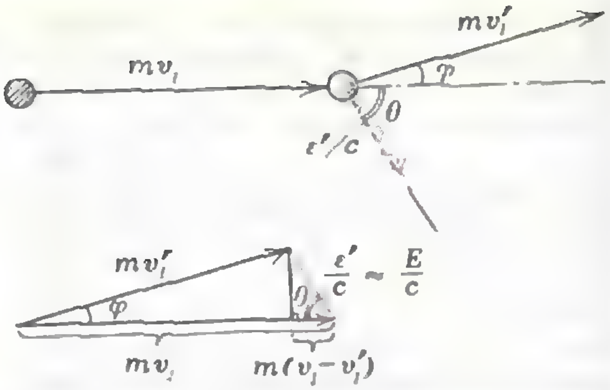


Рис. 4.

В следующем приближении (пренебрегаем v_1-v_1' по сравнению с v_1 и v_1') получим разность энергии излученного фотона и энергии уровня:

$$\varepsilon'-E=\frac{Ev_1\cos\theta}{c}.$$

Совпадение ε' и ε имеет место лишь при излучении фотона назад, при $\theta=\pi$ (см. (7)). *Лишь в этом единственном случае* отдача при излучении точно компенсирует торможение при поглощении. (Убедитесь, что это точный результат, а не приближенный.)

В каждом индивидуальном акте излучения изменение скорости атома зависит от угла вылета фотона и, согласно (10), находится в пределах от $-E/mc$ до $E/mc\approx3$ см/с. Из-за случайности угла вылета среднее значение *изменения скорости* при излучении можно считать нулевым.

Наибольший угол отклонения скорости атома при излучении, согласно (9), составляет

$$\varphi_{\max}=\frac{E}{mv_1c}.$$

При скорости порядка 10^3 м/с это примерно $3\cdot10^{-5}$ рад, а при скорости 10 м/с — примерно $3\cdot10^{-3}$ рад.

На первых порах десятки и даже сотни циклов «поглощение — излучение» не уведут атом из области резонанса. *Изменения* скоростей за цикл малы, отклонения направлений скоростей малы и случайны, и «суммарное» угловое *отклонение* атомного пучка накапливается очень медленно.

Но это до поры до времени. После уменьшения скорости на $\Delta V = c\frac{\Gamma}{E} = 6$ м/с (см. (8)) резонанс прекратится. Для дальнейшего торможения становится необходима подстройка. Анализируя условие резонанса (6), можно предложить два способа подстройки.

Первый способ состоит в плавном увеличении энергии фотонов ε в соответствии с уменьшением скорости атомов. Для этого нужен лазер с изменяемой энергией излучаемых им фотонов. Такие лазеры есть.

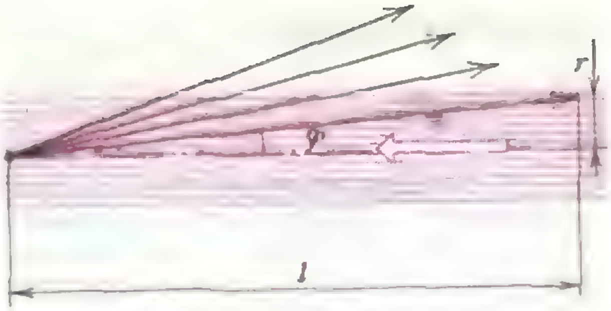
Второй способ состоит в воздействии на саму энергию E. В частности, уровни энергии немного меняются во внешнем магнитном поле. В постоянном по времени поле, плавно меняющемся по оси пучка, для атома с любой скоростью найдется место с подходящим значением поля. Оба способа действительно осуществлены.

Рассмотрим подробнее первый способ. Выберем начальную энергию фотонов такой, чтобы она отвечала резонансу при скорости V, превышающей, допустим, скорости 90 % атомов пучка. Начнем плавно увеличивать энергию фотонов вплоть до значения, равного энергии уровня E, отвечающего резонансу с почти неподвижными атомами.

Сначала тормозятся атомы в диапазоне скоростей от $V - \frac{1}{2}c\frac{\Gamma}{E}$ до $V + \frac{1}{2}c\frac{\Gamma}{E}$. За счет замедления атомов этот диапазон постепенно почти опустеет — скорости почти всех атомов станут заведомо меньше V.

При увеличении энергии фотонов затормозившиеся атомы снова окажутся в резонансе, но к ним добавятся атомы пучка, исходно имевшие подходящую скорость. Таким образом, все атомы со скоростями меньше V дождутся прихода резонанса, когда начнется их торможение.

Оценим время торможения от скорости V до почти нулевой скорости. Число циклов «поглощение — излучение» за это время равно $N = V/(E/mc)$



$$\varphi \sim \frac{r}{l}$$

Рис. 5.

(E/mc — уменьшение скорости в акте поглощения (см. (5)); изменением скорости при испускании возбужденным атомом фотона мы пренебрегаем.) Продолжительность цикла Δt определяется временем жизни τ в возбужденном состоянии, так как при большой интенсивности лазерного луча поглощение происходит быстро. Таким образом, полное время торможения —

$$t = N\cdot\Delta t = N\tau = \frac{mcV}{E}\tau.$$

При начальной скорости $V = 3\cdot10^3$ м/с $t = 10^{-3}$ с. (Напомним, что в эксперименте, проводившемся с натрием, $m = 22$ ГэВ/c^2, $E = 2{,}1$ эВ.)

Расстояние, на котором происходит торможение, оценивается величиной $l = Vt/2 \approx 1$ м. Это расстояние существенно не только для выбора размеров вакуумной камеры. Диаметр лазерного луча ограничен. Заметное угловое отклонение скоростей от оси пучка атомов приводит к уходу атомов из тормозящего луча (рис. 5). При диаметре луча порядка одного-двух сантиметров на метровой длине достаточно отклонения порядка 10^{-2} рад. Такого порядка отклонения достигаются при отдаче из-за излучения «вбок» для атомов со скоростями 10—3 м/с. Почти полной потерей атомов в этом случае и ограничиваются возможности «однолучевого» торможения. Указанным выше скоростям отвечает диапазон температур от 0,1 до 0,01 К. Полученная в действительности температура 0,05 К согласуется с нашими грубыми прикидками.

Ловушка в ловушке

Даже медленные атомы из-за разброса скоростей и направлений движения сравнительно быстро разбредутся. «Сверххолодные» атомы нужно как-то собирать и удерживать в компактной группе. Ловушку для атомов, даже две ловушки — одна в другой, тоже удалось построить из света.

Внешняя «большая» ловушка, обеспечивающая и дополнительное охлаждение, это своего рода развитие тормозящего луча. Она образована пересечением шести лазерных лучей с энергией фотонов $\varepsilon_0 = E - \frac{\Gamma}{2}$, соответствующей нижней границе уровня (рис. 6).

Закон сохранения энергии при поглощении в данном случае приводит к равенству:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\Gamma}{2} = \frac{mv_1^2}{2}.$$

При кинетической энергии атома $\frac{mv^2}{2} > \frac{\Gamma}{2}$ возможно поглощение «тормозящего» фотона, но не происходит поглощения «разгоняющего». Ибо для того чтобы атом, поглотивший фотон, мог поглотить фотон, летящий вдогонку, этот фотон должен иметь энергию хотя бы чуть выше нижней границы уровня. Атом поэтому будет замедляться, направление же его скорости при поглощении и излучении будет меняться достаточно заметно. Это приведет к весьма запутанной траектории и, в результате, к довольно продолжительному блужданию атомов в области пересечения шести лучей. На практике для области объемом несколько кубических сантиметров время задержки составляло примерно 0,5 с. Этого более чем достаточно, чтобы у многих атомов кинетическая энергия стала меньше или сравнялась с полушириной уровня.

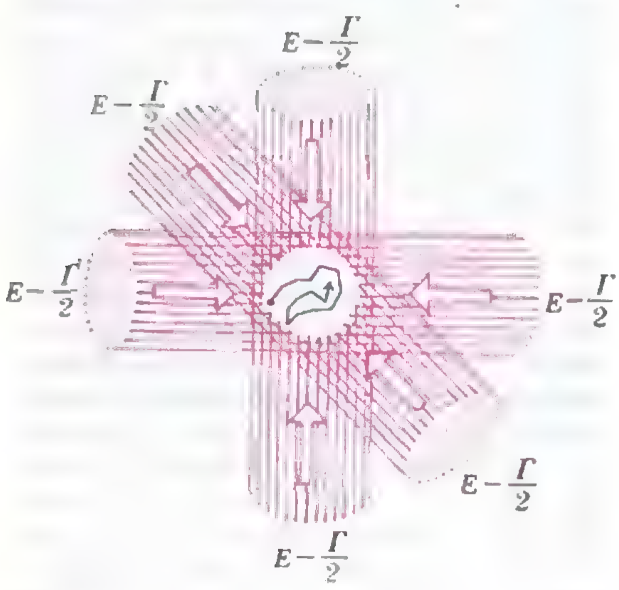


Рис. 6.

Понятно, что когда в процессе торможения энергия атома становится меньше $\Gamma/2$, поглощение прекращается. Таким образом, предельная температура определяется шириной уровня: $T_{\text{пр}} = \Gamma/2k$ (см. (1)). Фактически достигнутая температура $2{,}4 \times 10^{-4}$ К почти не отличается от предельной.

Шестилучевая ловушка получила название «ловушка из патоки». В сущности она неспособна удержать атомы надолго. Они покидают ее при блужданиях и заведомо покинут, затормозившись до энергии $\Gamma/2$ или до скорости около 0,5 м/с. Поэтому и нужна дополнительная «настоящая» ловушка.

Нужно создать внутри «ловушки из патоки» маленькую ямку, в которую бы скатывались замедлившиеся атомы. Но здесь для убедительного элементарного рассмотрения понадобилось бы слишком обширное отступление. Поэтому просто сообщу, что такой ямкой служит область объемом около 10^{-9} см^3 вблизи фокуса еще одного лазерного луча с энергией фотонов, заметно меньшей резонансной энергии. Двигая линзу, можно перемещать фокус и транспортировать захваченные в его окрестности атомы.

Энергетическая глубина ямки составляет в температурных единицах всего $5 \cdot 10^{-3}$ К. Поэтому столкновение с атомами остаточных газов при температуре 300 К буквально вышвыривает атом натрия из ямки вблизи фокуса. При достигнутом качестве вакуума время удержания составляет примерно 10 с.

* * *

История создания световой холодильной установки охватывает время начиная с 1968 года, когда была всерьез предложена ловушка в фокусе лазерного луча, до 1986 года, когда удалось поймать в нее и удержать несколько секунд 500 атомов натрия. Современные возможности «дают нам поразительную власть над атомами» — так выразился один из создателей установки Стивен Чу. Думается, что атомы и фотоны представят нам еще не раз случай изобрести и осуществить что-нибудь не менее красивое.

Реклама

Физический факультет МГУ — путь в большую науку

Физической науке принадлежит ведущая роль в развитии современного естествознания, создания целостной картины мира, ускорении научно-технического прогресса. Всесторонние сведения об элементарных частицах, полях и их взаимодействиях, о структуре материи и физических законах, проявляющихся на различных уровнях организации материи от микромира до Вселенной, разнообразные экспериментальные и математические методы исследований — все это составляет тот багаж общечеловеческих ценностей и источник новых идей, без которых не может успешно и целенаправленно развиваться современная наука.

Научные достижения в различных областях физики непосредственно определяют новые направления в преобразовании техники, приводят к созданию современных технологий.

Определяющая роль в развитии физической науки принадлежит высококвалифицированным кадрам. Подготовка таких кадров и осуществляется на физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Она охватывает весь спектр физических специальностей и заслуженно пользуется мировым признанием.

Физический факультет МГУ по праву относится к ведущим научным центрам страны. Его современные лаборатории лазерной физики, высокотемпературной сверхпроводимости, космических лучей, ускорителей, физики твердого тела, физики плазмы, биофизики, геофизических исследований, радиофизики и электроники, кафедры теоретической физики и математики, Научно-исследовательский институт ядерной физики и Астрономический институт им. П. К. Штернберга являются базой многих выдающихся открытий. Они служат также первоклассной базой для введения студентов в увлекательный мир научных исследований.

Студенты физического факультета МГУ имеют возможность работать в Объединенном институте ядерных исследований (г. Дубна), Физическом институте им. П. Н. Лебедева, Математическом институте им. В. А. Стеклова, Институте биологической физики (г. Серпухов) и др.

Физический факультет МГУ — это 172 доктора и 491 кандидат физико-математических наук. На факультете работают академики Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, Е. П. Велихов, Г. Т. Зацепин, Л. В. Келдыш, В. А. Магницкий, Б. М. Понтекорво, И. М. Франк, А. Е. Чудаков.

Физический факультет МГУ — это около 3000 студентов и 500 аспирантов.

Срок обучения на факультете — 5,5 лет. Выпускников ждут на работу научно-исследовательские институты АН СССР, отраслевые НИИ, конструкторские бюро и высшие учебные заведения.

В 1990 году вступительные экзамены на физический факультет проводятся, начиная с 4 июля, по математике (письменно), русскому языку и литературе (письменно), физике (устно, по 10-балльной системе). Прием документов с 20 июня по 3 июля 1990 года.

Любую дополнительную информацию о физическом факультете можно получить по адресу: **119899, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, приемная комиссия.**

О НЬЮТОНОВСКОМ ПРИТЯЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДОВ

Б. ШАПИРО

От редакции.
В этой математической статье используются понятия, хорошо знакомые вам из курса физики: сила, потенциал, эквипотенциальная поверхность... Конечно, всем им можно дать точное математическое определение. Но и без этого их наглядный смысл вполне ясен. На всякий случай напомним несколько фактов: сила (и потенциал), которую создают несколько масс (или зарядов), равна сумме сил (и потенциалов), созданных каждой из них; если в некоторой области пространства потенциал равен константе, то силовое поле равно нулю; эквипотенциальная поверхность — это поверхность, потенциал всех точек которой равен некоторой константе; вектор силы в каждой точке такой поверхности перпендикулярен ей. Наконец, автор свободно пользуется (в духе Ньютона!) понятиями бесконечно малых углов, площадей, объемов и т. п.

Ньютон о притяжении однородной сферы

Свои основные математические достижения Исаак Ньютон опубликовал в 1687 году в «Математических началах натуральной философии». На протяжении этого трактата он многократно возвращается к теории притяжения неподвижных и вращающихся тел и вопросу о форме земной поверхности. Среди прочего Ньютон приводит элегантное доказательство следующего факта.

Теорема XXX из отдела XIII «О притягательных силах сферических тел»:

> *«Если к отдельным точкам сферической поверхности направлены равные центростремительные силы, убывающие в отношении квадратов расстояний, то частица, помещенная внутри этой поверхности, от таких сил ни в какую сторону притяжения не испытывает».*

Другими словами, однородная материальная сфера не притягивает внутренние точки.

Ньютон рассуждает так. Пусть P — произвольная точка внутри сферы (рис. 1). Возьмем маленький телесный угол с центром P и покажем, что силы, с которыми действуют на P две бесконечно малые части поверхности, высекаемые на ней углом, взаимно уничтожаются. Действительно, сила, с которой действует на P каждая из частей, пропорциональна массе части, т. е. ее площади, и обратно пропорциональна квадрату расстояния до точки P. Основания бесконечно узких конусов с вершиной P можно считать плоскими. Как видно из рисунка 1, на котором изображено сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр O и ось конусов, эта ось составляет с основаниями равные углы. Следовательно, конусы подобны, и отношение площадей их оснований равно отношению квадратов длин их осей. Поэтому силы притяжения двух рассматриваемых частей взаимно уничтожаются. Ньютон заключает:

> *«Из этого рассуждения следует, что притяжение всей сферической поверхности, как состоящее из противоположных элементов, уничтожается; следовательно, P ни в какую сторону этим притяжением к движению не побуждается».*

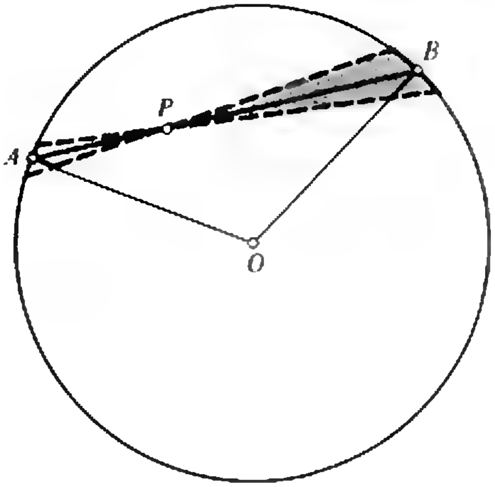


Рис. 1.

Сделаем два замечания по поводу этого поучительного рассуждения. Во-первых, оно годится и для однородного шарового слоя, который можно представлять себе состоящим из бесконечного числа материальных сфер. Во-вторых, массу можно заменить на электрический заряд, поскольку кулоновская сила тоже обратно пропорциональна квадрату расстояния. Значит, однородная заряженная сфера не создает внутри себя электрического поля.

Поле притяжения однородной сферы во внешней области

Выяснив, каким будет гравитационное поле внутри однородной сферы, Ньютон заинтересовался вопросом, какую силу притяжения создает сфера во внешней области пространства. В силу симметрии задачи эта сила будет зависеть лишь от расстояния до центра сферы (и, конечно, от ее массы). Но как именно?

Забудем на время, что мы изучаем силы притяжения, и поговорим о течении жидкости. Представим себе, что в начале координат расположен источник, из которого по радиусам сферически симметрично растекается несжимаемая жидкость. В силу несжимаемости через каждую сферу с центром в источнике за единицу времени протекает одинаковое количество жидкости. Это количество пропорционально площади сферы, т. е. квадрату ее радиуса, и пропорционально скорости жидкости. Значит, скорость течения обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника.

Мы сделали важное наблюдение: поле скоростей сферически-однородной несжимаемой жидкости — такое же, как силовое поле точечной массы (или электрического заряда). Это означает, что силовое поле точечной массы обладает свойством несжимаемости: величина его потока через границу любой области, не содержащей массу, равна нулю — сколько втекает, столько и вытекает. То же верно и для любого распределения масс (и зарядов), ибо сила, которую создают несколько масс, равна сумме сил, созданных каждой из них. Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему:

сила притяжения однородной сферы массой M совпадает с силой, создаваемой точечной массой M, помещенной в центр сферы.

Действительно, как мы уже установили, силовое поле сферы сферически-симметрично и несжимаемо. Но мы знаем, что единственное радиальное поле скоростей несжимаемой жидкости обратно пропорционально квадрату расстояния до центра, т. е. совпадает с полем точечной массы. Что эта масса совпадает с массой сферы, следует из сравнения потоков через поверхности, охватывающие данную сферу.

На этом исследование притяжения однородной сферы завершено. Если бы мы попытались вычислять силы прямо, т. е. интегрируя вклады бесконечно малых кусочков поверхности, то наверняка встретились бы с большими трудностями. Теперь наша задача — обобщить полученные результаты на более сложные поверхности.

О свободном распределении зарядов

Свободное распределение зарядов на замкнутой проводящей поверхности — это такое распределение, которое получается, если предоставить заряду возможность распределяться самостоятельно в отсутствие внешних сил. Например, на сфере такое распределение будет однородным. Свободное распределение обладает двумя важными свойствами.

Всякая поверхность является эквипотенциальной для свободного распределения зарядов на ней.

Это очевидно: разность потенциалов на поверхности привела бы к перераспределению зарядов на ней.

Силовое поле свободного распределения зарядов внутри замкнутой поверхности равно нулю (а потенциал равен константе).

Действительно, пусть потенциал, равный некоторой константе на поверхности, отличен от этой константы во внутренней области. Тогда в некоторой точке P он достигает минимального или максимального значения. Рассмотрим маленькую эквипотенциальную поверхность, окружающую эту точку. Силовые линии протыкают ее и сходятся в точке P, что противоречит несжимаемости потока. Итак, потенциал равен константе, а силовое поле — нулю.

Как видите, теорема Ньютона о том, что свободное распределение зарядов на сфере не создает внутри нее силовое поле, обобщается на произвольные поверхности. Теперь мы займемся явным видом свободного распределения для поверхностей, следующих по сложности за сферой — для эллипсоидов.

О гомеоидах

Эллипсоидом называется поверхность, полученная из сферы растяжением или сжатием вдоль трех перпендикулярных осей с тремя, вообще говоря, различными коэффициентами. То, что получается при описанном растяжении из шарового слоя, называется *гомеоидом* (рис. 2). Ограничивающие гомеоид поверхности эллипсоидов гомотетичны, причем центр гомотетии совпадает с их общим центром.

Попробуем вычислить притяжение бесконечно тонкого гомеоида в какой-нибудь внутренней точке P. Вы, наверное, догадались, что это притяжение окажется равным нулю; и чтобы доказать это, нужно убедиться, что силы притяжения двух бесконечно малых пирамид, заштрихованных на рисунке 2, взаимно уничтожаются. Эти силы пропорциональны массам (т. е. объемам) пирамид и обратно пропорциональны квадратам расстояний до точки P. Объем заштрихованной бесконечно малой пирамиды можно вычислить как произведение площади S перпендикулярного сечения бесконечно малого телесного угла на длину h отрезка оси этого угла, заключенного в гомеоиде. Площадь S пропорциональна квадрату расстояния r, поэтому сила притяжения правой пирамиды на рисунке 2 пропорциональна $r^2h/r^2=h$. Аналогично, сила притяжения левой пирамиды пропорциональна H. Остается заметить, что $h=H$ — ведь соответствующие отрезки лежат на одной прямой и длины их прообразов в шаровом слое одинаковы (рис. 3). Итак, мы доказали следующую теорему Ньютона:

> *сила притяжения однородного бесконечно тонкого гомеоида в любой его внутренней точке равна нулю.*

(Отсюда, как и в случае сферы, следует, что равно нулю и притяжение настоящего «толстого» гомеоида.)

Как мы уже знаем, свободное распределение зарядов — это такое распределение, которое создает в любой внутренней точке нулевое поле. С другой стороны, поскольку ограничивающие гомеоид поверхности гомотетичны, его толщина в любой точке пропорциональна длине радиуса-вектора, проведенного из центра в эту точку. Соединяя эти два замечания, мы приходим к описанию свободного распределения зарядов на эллипсоиде:

> *плотность свободного распределения зарядов в каждой точке пропорциональна длине радиуса-вектора, проведенного в эту точку из центра эллипсоида.*

Теорема Арнольда

Для того чтобы обобщить теорему о гомеоиде, нам придется немного повозиться с формулами. Вспомним, что эллипсоид получается растяжением сферы вдоль трех осей коор-

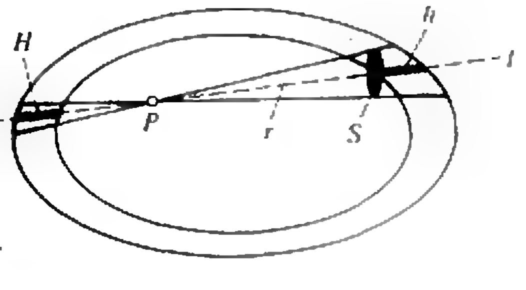


Рис. 2.

динат. Пусть a, b и c — коэффициенты растяжения, т. е. при растяжении координата x превращается в ax, y — в by, а z — в cz. При этом уравнение единичной сферы

$$x^2+y^2+z^2=1$$

превратится в уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(подумайте: почему a, b и c попали в знаменатель?). При гомотетии координаты x, y и z умножаются на одно и то же число; поэтому уравнением близкой гомотетичной поверхности будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\varepsilon$$

(а коэффициент гомотетии равен $\sqrt{1+\varepsilon}$). Итак, плотность свободного распределения зарядов на поверхности *эллипсоида M, заданного уравнением*

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

пропорциональна расстоянию до бесконечно близкой поверхности M_ε, заданной уравнением

$$f(x,\ y,\ z)=1+\varepsilon.$$

Теперь мы совершим прыжок в 300 лет и из времени Ньютона перенесемся в наши дни. Рассмотрим поверхность N, заданную уравнением

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

где f — некоторый многочлен n-й степени от трех переменных. Распределим на N заряд с плотностью, пропорциональной расстоянию от N до *бесконечно близкой поверхности* N_ε, заданной уравнением

$$f(x,\ y,\ z)=\varepsilon.$$

Мы собираемся доказать, что такая заряженная поверхность *не притягивает* свои внутренние точки. Только какие точки называть внутренними?

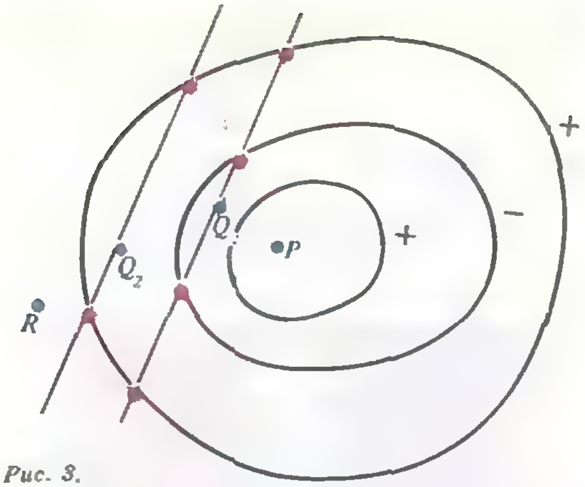


Рис. 3.

Посмотрим на рисунок 3, на котором изображена поверхность, заданная некоторым многочленом 6-й степени. Точку R, конечно, нельзя считать внутренней; а как быть с точками Q_1, Q_2 или P? Дадим определение: точка называется *внутренней* для поверхности N, если каждая проходящая через нее прямая пересекает N *ровно* в n точках (n — степень многочлена, задающего N)*). При таком определении ни точка R, ни точки Q_1 и Q_2 внутренними не являются, а точка P — внутренняя.

Теперь мы можем сформулировать теорему известного советского математика В. И. Арнольда:

> *заряженная поверхность N, заданная уравнением n-й степени $f(x,\ y,\ z)=0$, с плотностью заряда, пропорциональной расстоянию до бесконечно близкой поверхности N_ε, заданной уравнением $f(x,y,z)=\varepsilon$, не притягивает своих внутренних точек P. Знак заряда чередуется: положителен на ближайшем к P куске поверхности, отрицателен — на следующем и т. д. (рис. 3).*

Теорема Арнольда доказывается аналогично теореме о гомеоиде. Возьмем бесконечно малый телесный угол с вершиной в P и осью l (см. снова *рис. 2) и докажем*, что силы притяжения высекаемых им на N бесконечно малых площадок взаимно уничтожаются. Заменим заряженную поверхность на бесконечно тонкий материальный слой между поверхностями N и N_ε (аналог гомеоида). Сила притяжения, создаваемая одной из пирамидок в точке P, пропорциональ-

---

*) Подумайте, почему точек пересечения заведомо не больше n. Бывают и такие многочлены, что соответствующие поверхности вообще не содержат внутренних (в смысле данного определения) точек.

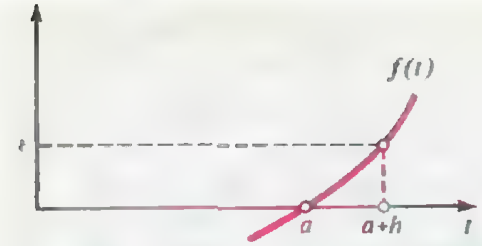


Рис. 4.

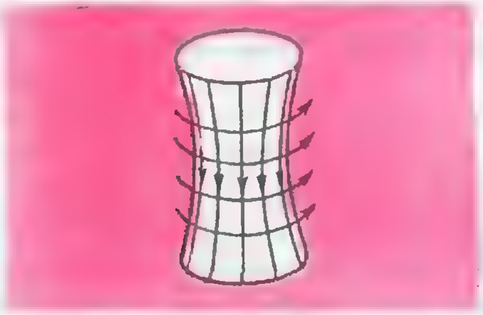


Рис. 5.

на $Sh/r^2 \sim h$. Поэтому достаточно доказать, что сумма длин отрезков (с учетом знаков !), высекаемых поверхностями N и N_ε на прямой l, равна нулю.

Но это утверждение относится уже не к трехмерному пространству, а к прямой l. Ограничив f на эту прямую, мы получим функцию одной переменной, которую будем по-прежнему обозначать через $f(t)$. Пусть a — одна из точек пересечения l и N. Тогда $f(a)=0$. Сейчас мы выразим длину h через ε. Посмотрите на рисунок 4:

$$f(a)=0 \text{ и } f(a+h)=\varepsilon.$$

По определению производной,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\varepsilon-0}{h}=\frac{\varepsilon}{h}.$$

Поэтому $h=\varepsilon/f'(a)$ (точное равенство мы написали, т. к. и ε, и h бесконечно малы). Итак, нам нужно доказать, что

$$\frac{1}{f'(a_1)}+\frac{1}{f'(a_2)}+\ldots+\frac{1}{f'(a_n)}=0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки пересечения l и N, т. е. корни многочлена $f(t)$.

Вспомним, что $f(t)$ — многочлен n-й степени, имеющий ровно n корней. Такой многочлен (с точностью до постоянного множителя) можно записать в виде

$$f(t)=(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n),$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — его корни. Дифференцируя это равенство, получим:

$$f'(t)=(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)+$$
$$+(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)+\ldots+$$
$$+(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1}).$$

В частности,

$$f'(a_i)=(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots$$
$$\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n).$$

Все слагаемые, кроме i-го, содержат множитель (a_i-a_i) и обращаются в ноль.

Мы видим, что равенство (1) эквивалентно тождеству:

$$\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+$$
$$+\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}=0. \quad (2)$$

Трудно поверить, но это тождество выполнено *для любых попарно различных* чисел $a_1, \ldots, a_n$. И доказывается оно поистине олимпиадным приемом!

Рассмотрим многочлен $(n-1)$-й степени:

$$g(t)=\frac{(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+$$
$$+\frac{(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

При $t=a_i$ все слагаемые, кроме i-го, обращаются в ноль, а i-е — в 1. Поэтому

$$g(a_1)=g(a_2)=\ldots=g(a_n)=1.$$

Значит, многочлен $(n-1)$-й степени $g(t)-1$ имеет n корней, что возможно *только если* $g(t)-1=0$ для всех t. В частности, равен нулю старший член многочлена $g(t)$. Но это и есть правая часть тождества (2)! Тем самым это тождество, а вместе с ним и теорема Арнольда, доказаны.

Мы доказали теорему даже с «некоторым запасом». Действительно, нулю равен не только старший член многочлена $g(t)-1$, но и остальные его члены. Это наблюдение позволяет усилить доказанную теорему:

> *утверждение о равенстве нулю силы притяжения сохранится, если плотность заряда умножить на значение произвольного многочлена $\varphi(x, y, z)$ степени не выше $(n-2)$.*

Существуют и другие современные обобщения теоремы Ньютона. Например, рассмотрим проводящий гиперболоид (см. статью Д. Фукса в «Кванте» № 12 за 1989 год). И приложим к нему на бесконечности некоторую разность потенциалов. Вдоль меридианов гиперболоида начнет течь электрический ток. Оказывается, что магнитное поле этого тока внутри гиперболоида равно нулю, а во внешней области направлено вдоль параллелей (рис. 5), причем величина этого поля явно вычисляется. Наоборот, существует единственный и явно вычисляемый поверхностный ток вдоль параллелей гиперболоида, магнитное поле которого во внешней области равно нулю, а внутри направлено вдоль меридианов.

К сожалению, мы не можем останавливаться на этом интересном сюжете, так как нас ожидает еще одно путешествие во времени: на этот раз — в 1809 год.

Поле однородного гомеоида во внешней области

Вернемся к однородному гомеоиду. Мы уже знаем, что он создает нулевое поле в своей внутренней области. А каким будет поле во внешней области пространства? Ответ на этот вопрос нашел в 1809 году шотландский механик и математик Джеймс Айвори. Ему удалось описать эквипотенциальные поверхности свободного распределения зарядов на эллипсоиде — оказалось, что это тоже эллипсоиды (в случае сферы эквипотенциалями, конечно, служат концентрические сферы).

Рассмотрим эллипсоид M, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3)$$

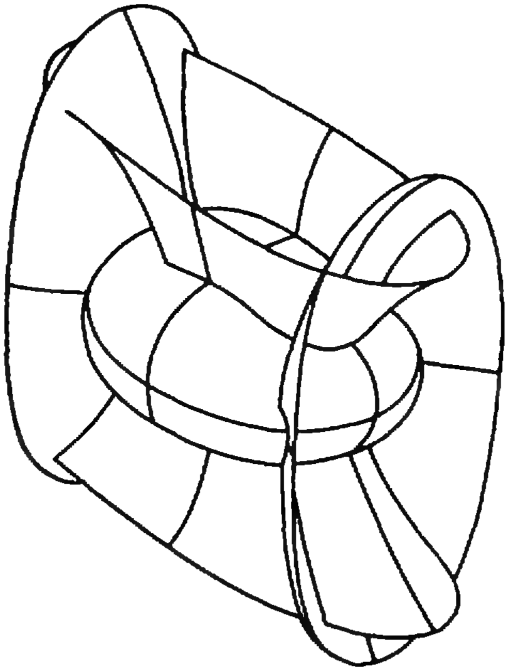


Рис. 6.

Софокусным эллипсоидом называется всякий эллипсоид M, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}=1, \qquad (4)$$

где t — некоторое число ($t>-a^2$, $t>-b^2$, $t>-c^2$). Каждому t отвечает свой эллипсоид, причем при $t\neq s$ эллипсоиды M_t и M_s не пересекаются, а все семейство $\{M_t\}$ заполняет область пространства.

Название «софокусные эллипсоиды» подсказано аналогией с плоскостью. Эллипс M_d на плоскости можно задать как множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек — фокусов — равна некоторой постоянной d.

Иными словами, если закрепить в фокусах концы нити длины d, вставить в нить карандаш и натянуть ее, то карандаш вычертит эллипс M_d. При разных t мы получим разные эллипсы с фиксированными фокусами. Нетрудно убедиться (сделайте это!), что в подходящих координатах семейство софокусных эллипсов задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}=1. \qquad (5)$$

Если же выбрать t так, что одно из

слагаемых в формуле (5) станет отрицательным, то уравнение (5) задаст уже не эллипс, а гиперболу, причем эта гипербола будет перпендикулярна всем эллипсам M_d. Аналогично, если в формуле (4) отрицательны одно или два слагаемых, то она задает семейство однополостных или двуполостных гиперболоидов, причем поверхности всех трех семейств будут попарно перпендикулярны (рис. 6).

Эллипсоид, как и эллипс, тоже можно задать с помощью нити фиксированной длины — рисунок 7.

Рассмотрим точки $P(x, y, z)$ и $P'(x', y', z')$, лежащие на эллипсоидах M и M_t. Один эллипсоид получается из другого растяжением в направлениях трех координатных осей. Точки P и P' называются *соответственными*, если при таком растяжении P переходит в P'. Иными словами,

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'},\ \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'},\ \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'},$$

где

$$(a')^2 = a^2 + t,\ (b')^2 = b^2 + t,\ (c')^2 = c^2 + t. \tag{6}$$

Лемма Айвори. *Пусть P, P' и Q, Q' — две пары соответственных точек, лежащих на софокусных эллипсоидах: $P, Q \in M$, $P', Q' \in M_t$. Тогда $PQ' = P'Q$.*

Мне не удалось придумать геометрического доказательства этого утверждения, поэтому нам придется немного посчитать. Пусть координаты точек P и Q равны (x, y, z) и (u, v, w), а точек P' и Q' — $\left(\frac{a'}{a}x, \frac{b'}{b}y, \frac{c'}{c}z\right)$ и $\left(\frac{a'}{a}u, \frac{b'}{b}v, \frac{c'}{c}w\right)$. Тогда

$$|P'Q|^2 = \left(\frac{a'}{a}x - u\right)^2 + \left(\frac{b'}{b}y - v\right)^2 + \left(\frac{c'}{c}z - w\right)^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 x^2 + \left(\frac{b'}{b}\right)^2 y^2 + \left(\frac{c'}{c}\right)^2 z^2 + u^2 + v^2 + w^2 \underline{- 2\frac{a'}{a}xu - 2\frac{b'}{b}yv - 2\frac{c'}{c}zw}.$$

$$|PQ'|^2 = \left(x - \frac{a'}{a}u\right)^2 + \left(y - \frac{b'}{b}v\right)^2 + \left(z - \frac{c'}{c}w\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 u^2 + \left(\frac{b'}{b}\right)^2 v^2 + \left(\frac{c'}{c}\right)^2 w^2 \underline{- 2\frac{a'}{a}xu - 2\frac{b'}{b}yv - 2\frac{c'}{c}zw}.$$

Подчеркнутые слагаемые в обеих формулах одинаковы. Поэтому равенство $|P'Q|^2 = |PQ'|^2$ равносильно равенству:

$$\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 1\right]x^2 + \left[\left(\frac{b'}{b}\right)^2 - 1\right]y^2 + \left[\left(\frac{c'}{c}\right)^2 - 1\right]z^2 = \left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - 1\right]u^2 + \left[\left(\frac{b'}{b}\right)^2 - 1\right]v^2 + \left[\left(\frac{c'}{c}\right)^2 - 1\right]w^2.$$

Согласно формулам (6), это равенство равносильно уравнению

$$t\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = t\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}\right),$$

которое выполняется, так как координаты точек P и Q удовлетворяют уравнению (3). Лемма Айвори доказана.

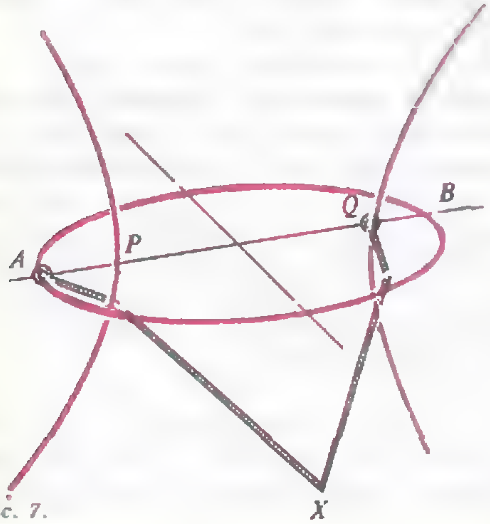


Рис. 7.

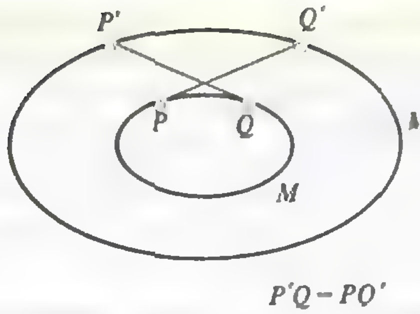


Рис. 8.

Вознаграждением за проделанную работу будет изящное доказательство теоремы Айвори об эквипотенциалях однородного гомеоида. Рассмотрим два бесконечно тонких однородных софокусных гомеоида M и M' равных объемов. Пусть P и P' — пара соответственных точек на них (рис. 8). Тогда

потенциал, создаваемый гомеоидом M' в точке P, равен потенциалу, создаваемому гомеоидом M в точке P'.

Действительно, рассмотрим бесконечно малый объем в точке Q' и равный ему объем в соответственной точке Q. По лемме Айвори, $PQ'=P'Q$. Значит, вклад элементарного объема, окружающего точку Q', в потенциал точки P равен вкладу элементарного объема, окружающего точку Q, в потенциал точки P'. Это верно для всех точек Q', что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим, наконец, бесконечно тонкий однородный гомеоид M. Потенциал, создаваемый им в произвольной точке P' любого софокусного эллипсоида M', равен потенциалу гомеоида M' в соответственной точке $P\in M$. Но по теореме Ньютона потенциал гомеоида M' во всех внутренних точках равен константе, так как не зависит от положения точки P. Поэтому потенциал гомеоида M в любой точке P' софокусного эллипсоида M' будет одним и тем же. Мы доказали теорему Айвори:

эквипотенциальными поверхностями свободного распределения зарядов на эллипсоиде служат софокусные ему эллипсоиды.

Заключение

Теория, о которой рассказано в статье, обобщается и на пространства произвольной размерности n. При этом гравитационные (и кулоновские) силы подчиняются обобщенному закону Ньютона:

$$f\sim r^{1-n},$$

где r — расстояние между притягивающимися частицами. Если вас заинтересовал мой рассказ, попробуйте сформулировать и доказать теоремы этой статьи в плоском мире, т. е. при $n=2$. Подумайте, в частности, каким будет свободное распределение зарядов на отрезке и каковы эквипотенциальные кривые такого распределения.

А еще советую вам прочитать замечательную книгу В. И. Арнольда «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук» (М., «Наука», 1989).

Латинские прямоугольники

(Начало см. на с. 6)

приближенную формулу для числа «m-этажных» латинских прямоугольников длиной n:

$$L(m,\ n)\approx(n!)^m e^{-\frac{(m-1)m}{2}}.$$

Последняя формула дает тем меньшую относительную погрешность, чем больше n (такие формулы называются асимптотическими). Правда, Эрдеш и Капланский доказали это утверждение при одной существенной оговорке: «этажность» латинского прямоугольника не должна превышать полуторную степень логарифма его длины: $m<(\ln n)^{1,5}$. Однако впоследствии стало ясно, что оно верно и для бо́льших значений m. Японский математик К. Ямамото доказал, что для его справедливости достаточно предположить «лишь», что $m<\sqrt[3]{n}$. Слово «лишь» мы взяли в кавычки потому, что математикам очень бы хотелось найти если не точные, то хотя бы асимптотические формулы без всяких ограничений на соотношение длины и «этажности» латинских прямоугольников, и подобраться к латинским квадратам, уже сейчас находящим приложение в такой практической области математики, как теория планирования эксперимента (о которой, вероятно, «Квант» еще расскажет). Но решение этой задачи — дело будущего.

Задачник „Кванта“

Задачи

M1221—M1225, Ф1228—Ф1232

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июля 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите «Задачник «Кванта» № 5 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1221» или «Ф1228». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1221. Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении 1:2.

В. Чичин

M1222. Пусть $m > 1$ — натуральное число, s — наибольшее целое число, для которого $2^s \leqslant m$. Докажите, что
а) для любых $s+1$ целых чисел можно выбрать несколько чисел и расставить знаки плюс и минус между ними так, что полученная сумма будет делиться на m.
б) оценка в пункте а) неулучшаема: существуют такие s целых чисел, что никакая сумма нескольких из них при любой расстановке знаков не делится на m.

В. Лев

M1223. На квадратный лист бумаги со стороной a посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Докажите, что если каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы, то суммарная площадь клякс не больше a.

А. Разборов

M1224. Из вершины треугольника проведен отрезок в точку на противоположной стороне, делящийся вписанной окружностью на три равные части. Может ли этот отрезок оказаться а) высотой; б) медианой; в) биссектрисой треугольника?

В. Сендеров

M1225*. Докажите, что
а) если для натуральных чисел a и b число $(a^2+b^2)/(ab-1)$ натуральное, то оно равно 5.
б) уравнение $x^2-5xy+y^2+5=0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

С. Мамиконян, Г. Оганесян

Ф1228. Из стальной упругой тонкой ленты сделаны два обруча разных радиусов. При скольжении по горизонтальному столу обручи испытывают торможение силами вязкого трения, причем силы пропорциональны скоростям обручей и их поперечным размерам. Если толкнуть меньший обруч со скоростью v_0, он проедет до полной остановки путь L_0. Толкнем малый обруч так, чтобы он налетел на большой, имея перед ударом скорость v. На каком расстоянии друг от друга остановятся обручи?

А. Коршков

Ф1229. В стакан с водой опустили кипятильник, и вода начала понемногу нагреваться. График зависимости температуры воды от времени приведен на рисунке 1. По истечении трех минут кипятильник отключают от сети. Через какое время вода остынет до 50 градусов? до 30?

З. Рафаилов

Ф1230. Две удаленные друг от друга проводящие сферы, внешние радиусы которых R и $3R$, имеют толщину стенок $R/20$. В центры сфер помещены заряды Q и $2Q$. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поменять местами эти заряды (в стенках для этой цели предусмотрены маленькие отверстия)?

В. Можаев

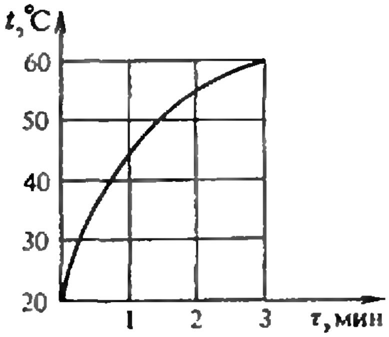


Рис. 1.

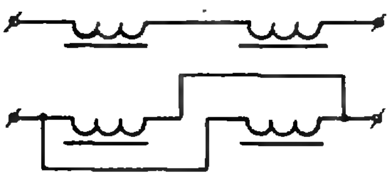


Рис. 2.

Ф1231. Две цилиндрические катушки с ферритовыми сердечниками помещены недалеко друг от друга и соединены последовательно. Индуктивность одной из них равна 1 мГн, другой — 2 мГн, а измеренная индуктивность катушек, соединенных последовательно, составила 3,6 мГн. Не меняя взаимного положения катушек, их переключают в параллель (рис. 2). Какую индуктивность мы измерим теперь?

А. Зильберман

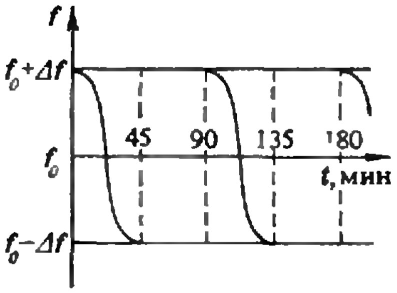


Рис. 3.

Ф1232. На большом расстоянии от Земли находится планета ДВК-1, вокруг которой по круговой орбите вращается спутник БК-0010Ш. На спутнике установлена радиостанция, излучающая сигнал постоянной частоты. На Земле принимают этот сигнал, однако при этом возникают перерывы — 45 минут сигнал есть, потом 45 минут он отсутствует, потом опять 45 минут есть и т. д. Этим дело не ограничивается — частота принимаемого сигнала изменяется относительно среднего значения $f_0=1{,}5\cdot10^9$ Гц по закону, показанному на рисунке 3 ($\Delta f=3\cdot10^4$ Гц). Считая, что отрезок Земля — планета лежит в плоскости орбиты, найдите массу ДВК-1.

М. Гаврилов

Решения задач

М1196—М1200, Ф1208—Ф1212

М1196. *Дано несколько (не менее двух) ненулевых чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа $a+b/2$ и $b-a/2$. Докажите, что после нескольких таких операций нельзя получить исходный набор чисел.*

Проследим, как меняется при указанных операциях сумма квадратов всех чисел набора. Поскольку

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2,$$

каждый раз эта сумма увеличивается (или не меняется — причем лишь в случае $a=b=0$). По условию в самом начале числа не равны 0, поэтому уже на первом шаге сумма квадратов увеличится и в дальнейшем не может принять первоначальное значение.

Д. Фомин

М1197. *В треугольнике ABC точка M лежит на стороне AB, точка N — на стороне BC, O — точка пе-*

Решение основано на том, что выполнение равенств задачи эквивалентно существованию окружности, касающейся продолжений всех сторон четырехугольника $OMBN$.

ресечения отрезков CM и AN. Известно, что $AM+AN=CM+CN$. Докажите, что $AO+AB=CO+CB$.

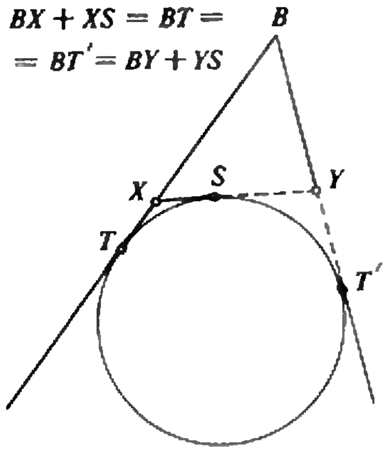


Рис. 1.

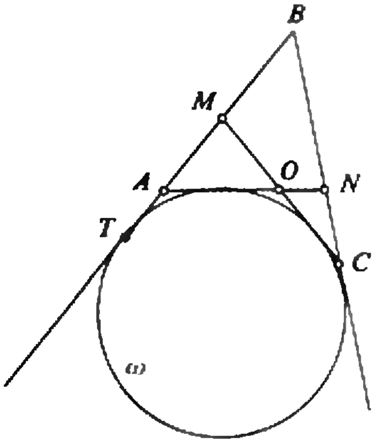


Рис. 2.

Докажем сначала следующую лемму: окружность, вписанная в угол XBY и касающаяся его сторон в точках T и T' будет вневписанной для треугольника XBY (рис. 1) тогда и только тогда, когда его периметр P_{XBY} равен $2BT$.

Если окружность касается прямой XY, то равенство $P_{XBY}=2BT$ сразу следует из теоремы о касательных, проведенных из одной точки (см. рис. 1). Обратно, если $P_{XBY}=2BT$, то вневписанная окружность треугольника XBY касается прямой BX в точке, находящейся от B на расстоянии $P_{XBY}/2$, т. е. в точке T, и, следовательно, совпадает с данной окружностью.

Пусть теперь известно, что $AM+AN=CM+CN$ (рис. 2). Тогда периметры треугольников ABN и MBC равны (их разность равна $(AB-BM)+AN-CM+(BN-BC)=AM+AN-CM-CN=0$). Поэтому вневписанная окружность ω треугольника ABN будет касаться и отрезка MC, а значит (см. рис. 2),

$$2MT=2BT-2BM=P_{BMC}-2BM=CB+CM-BM.$$

С другой стороны, ω является вневписанной окружностью и для треугольника AMO, следовательно,

$$2MT=P_{AMO}=OM+MA+AO.$$

Приравнивая нулю разность правых частей этих равенств, получим:

$$CB+(CM-OM)-(BM+MA)-AO=$$
$$=CB+CO-AB-AO=0,$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается, что из второго равенства задачи следует первое и что оба они эквивалентны третьему равенству — $BM+OM=BN+ON$. Заметим, что и для существования «обычной» вписанной окружности четырехугольника $OMBN$ (рис. 2), кроме известного условия $OM+BN=ON+BM$, имеются еще два эквивалентных: $AM+MC=AN+NC$ и $AO+BC=CO+BA$; этот факт использовался в решении задачи М1025 («Квант», 1987, № 5, с. 26).

А. Меркурьев

М1198. *Назовем словом строчку из 10 цифр 0 и 1. Два слова будем считать синонимами, если одно можно получить из другого несколькими операциями следующего вида: из слова вычеркивается несколько подряд идущих цифр, сумма которых четна, и на их место вписываются те же цифры, но в обратном порядке. Каково*

Ответ: 46 слов.

Заметим сначала, что если бы разрешалось переворачивать любой отрезок из нескольких цифр (а не только содержащий четное число единиц), то ответ был бы: 11 слов. В самом деле, любое слово из k единиц и $10-k$ нулей ($k=0, 1, \ldots, 10$) такими операциями не трудно превратить в слово

$$\underbrace{1\ldots1}_{k}\ \underbrace{0\ldots0}_{10-k}. \qquad (*)$$

(Если слово еще не приведено к виду (*), то переворачивая его отрезок 0...01, начинающийся с первого слева нуля и заканчивающийся первой после него еди-

максимальное число слов, среди которых нет синонимов?

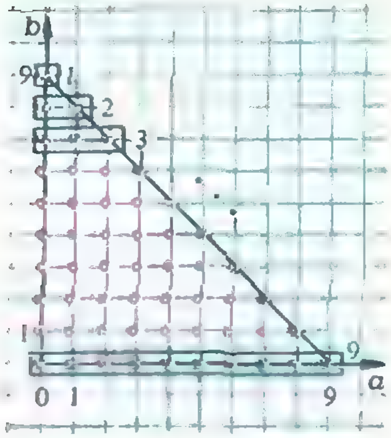


Рис. 1.

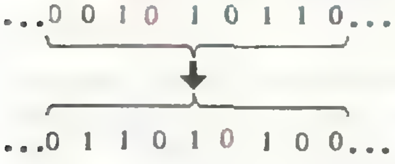


Рис. 2.

ницей, мы увеличим число единиц в начале слова и за несколько таких шагов получим слово (*).)

Покажем, что в нашей задаче каждое слово приводится к виду

$$1\ldots1\,\underbrace{0\ldots0}_{a}\,1\,\underbrace{0\ldots0}_{b} \tag{**}$$

(или к слову из одних нулей). Если этот вид еще не достигнут, то выделим в слове отрезок 0...010...01 (или 0...011), начинающийся первым слева нулем и кончающийся второй после него единицей. Перевернув этот отрезок, мы увеличим число единиц в начале слова. Это можно делать, *пока справа от первого нуля остается* не менее двух единиц.

Число слов вида (**) равно количеству пар целых чисел (a, b), где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a+b \leqslant 9$, т. е. $1+2+\ldots+9=45$ (рис. 1).

Остается доказать, что среди слов (**) нет синонимов. Для этого заметим, что при каждом переворачивании *сохраняется* число нулей, справа от которых стоит четное число единиц, и число нулей, предшествующих нечетному числу единиц (эти числа являются *инвариантами**) наших операций). Более того, если пометить любой из нулей исходного слова и подсчитать число стоящих за ним единиц до и после переворачивания, то окажется, что это число сохраняет четность: «четные» нули остаются «четными», а «нечетные» — «нечетными». Это очевидно для нулей, остающихся неподвижными. А для нуля на переворачиваемом отрезке это следует из того, что число единиц этого отрезка слева от выбранного нуля имеет ту же четность, что и справа от него (рис. 2). *Поскольку для слов* (**) указанные инварианты равны a (число «нечетных» нулей) и b (число «четных» нулей), такие слова при разных a и b *не могут быть синонимами.*

Д. Фомин

М1199. *Докажите, что если уравнение $ax^2+(c-b)x+(e-d)=0$ имеет корень, больший 1, то уравнение*

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

имеет хотя бы один корень.

Пусть корень уравнения $ax^2+(c-b)x+(e-d)=0$ равен $x=t^2$, где $t>0$; тогда

$$at^4+ct^2+e=bt^2+d.$$

Положим $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$.
Из предыдущего равенства следует, что числа

$$f(t)=(at^4+ct^2+e)+t(bt^2+d),$$
$$f(-t)=(at^4+ct^2+e)-t(bt^2+d)$$

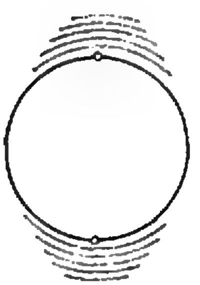
имеют разные знаки (поскольку $t>1$, знак *определяет* второе слагаемое — большее по модулю). Поэтому на отрезке $[-t, t]$ уравнение $f(x)=0$ *должно иметь корень.* (Мы пользуемся здесь тем, что непрерывная функция, принимающая в концах отрезка значения разных знаков, должна в некоторой точке обращаться в нуль.)

Д. Фомин

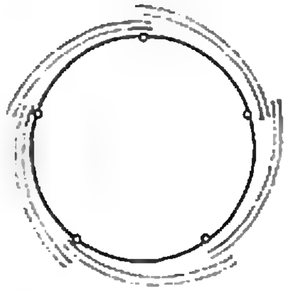
---

*) См. об инвариантах «Квант», 1982, № 7, с. 28 или 1983, № 10, с. 30.

M1200*. *Для каких k можно расположить на окружности а) 10; б) 100; в) n дуг так, чтобы каждая из них пересекалась ровно с k другими?*



а) $n=10$, $k=4$;



б) $n=10$, $k=5$;
$l=1$, $d=5$.

О том, что эта задача не так проста, как может показаться на первый взгляд, свидетельствует **ответ**:

а) k — любое натуральное число, меньшее 10, кроме 3 и 7;

б) k — число, меньшее 100, для которого $k+1$ не делится на 8 (т. е. $k \neq 7, 15, \dots, 95$);

в) k — число, меньшее n, для которого числитель несократимой дроби, равной $\frac{k+1}{n}$, нечетен.

Будем решать задачу сразу в общем случае в).

Приведем примеры, показывающие, что любое из указанных в ответе значений k возможно. Пусть сначала $\frac{k+1}{n}=\frac{1}{d}$, т. е. $k=n/d-1$, где d — некоторый делитель числа n ($1 \leqslant d < n$). Расставим на окружности d точек (скажем, делящих ее на равные части) и покроем каждую точку группой из $k+1$ небольших дуг так, чтобы дуги разных групп не пересекались. Каждая из $(k+1)d=n$ этих дуг пересекается с k другими.

Пусть, вообще, $\frac{k+1}{n}=\frac{2l+1}{d}$, т. е. $k+1=q(2l+1)$, $n=qd$, где l, d, q — целые числа ($0 \leqslant 2l < d$). Разделим окружность на d равных частей и возьмем дуги, состоящие из l таких частей, причем каждую из них в количестве q экземпляров. Каждая из $qd=n$ выбранных дуг имеет общие точки (включая концы) с $q-1+2lq=k$ другими — с $q-1$ дугами «своей группы» и со всеми q дугами, отстоящими на 1, 2, ..., l частей в ту и в другую стороны. (Мы можем, конечно, слегка увеличить каждую дугу — тогда все их можно сделать различными, а все попарные пересечения — дужками, а не отдельными точками. На рисунках а) и б) приведены два примера для $n=10$, соответствующие $k=4$ и $k=5$.)

Докажем теперь, что если n дуг размещены так, что каждая пересекается лишь с k другими, то в несократимом представлении дроби $\frac{k+1}{n}$ числитель нечетен (другими словами, $k+1$ не делится на 2^{r+1}, если $n=2^r m$, где m — нечетно).

Заметим, что если одна из дуг целиком содержит другую, можно ее сжать до размеров этой меньшей: ясно, что они пересекаются с одним и тем же набором дуг. Отметим точки, где начинаются и кончаются дуги (мы обходим окружность, для определенности, против часовой стрелки); если для некоторой из этих точек нет начинающихся (или нет заканчивающихся) в ней дуг, можно снять прилегающий к ней отрезок — сжать дуги; в конце концов мы получаем *приведенную* систему дуг.

Пусть $M_1, M_2, \dots, M_d$ — точки, где начинаются и кончаются дуги, и пусть в точке M_i начинается q_i дуг, состоящих из l_i частей, т. е. заканчивающихся в точке M_{i+l_i} (здесь и дальше мы считаем, что индексы рассматриваются «по модулю d», т. е. индекс $d+1$ заменяем на 1, $d+2$ — на 2, ..., 0 — на d, -1 — на $d-1$ и т. д.). Очевидно, $l_2 \geqslant l_1$ — иначе дуга второй группы, начинающаяся в M_2, содержалась бы в дуге, начинающейся в M_1; далее, $l_3 \geqslant l_2, \ldots, l_d \geqslant l_{d-1}, l_1 \geqslant l_d$, поэтому все «длины» $l_1, l_2, \ldots, l_d$ равны одному и тому же числу l. При этом дуга i-й группы пересекается по условию с k другими:

$$q_{i-l}+q_{i-l+1}+\ldots+(q_i-1)+\ldots+q_{i+l}=k,$$

а общее число дуг равно $q_1+\ldots+q_d=n$. Складывая равенства $q_{i-l}+q_{i-l+1}+\ldots+q_i+\ldots+q_{i+l}=k+1$ по всем $i=1, 2, \ldots, d$ и учитывая, что каждое q_j встречается в $2l+1$ из этих равенств, получим: $n(2l+1)=(k+1)d$, т. е.

$$\frac{k+1}{n}=\frac{2l+1}{d}; \qquad (*)$$

отсюда следует, что указанное в ответе в) условие выполнено.

Отметим, что любая «приведенная» система дуг, удовлетворяющих условию, задается числами l, d, удовлетворяющими условию (*), где $0 \leqslant 2l \leqslant d$, и набором натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_d$, имеющим период НОД$(2l+1, d)$, для которого $q_1+q_2+\ldots+q_{2l+1}=k+1$. (Любая другая система получается из приведенной расширением некоторых дуг, не приводящим к новым пересечениям.)

С. Генкин, Д. Фомин

Ф1208. *Многие из вас, по-видимому, замечали, что в тот момент, когда вы ступаете на мокрый песок, он светлеет. Это связано с тем, что песок становится суше. Но как только вы убираете ногу, след, оставленный ногой, немедленно заполняется водой. Объясните это явление.*

Чтобы объяснить, что происходит с песком на берегу реки, начнем с... шариков.

Одинаковые шарики можно уложить на плоскости так, чтобы каждый из них касался шести других шаров. В лунки между шарами первого слоя можно положить шары второго слоя, каждый из которых будет касаться трех шаров нижнего слоя и шести — своего слоя, и т. д. Полученное таким образом расположение называется плотной упаковкой шаров. Если нарушить плотную упаковку, промежутки между шарами увеличатся, возрастет и объем всей системы. Это означает, что если на систему шаров действуют силы, приводящие к нарушению плотной упаковки, объем системы увеличивается за счет увеличения промежутков между шарами.

Аналогично ведет себя и любая зернистая среда. Возьмите, например, пшено (или кофе), наполните им стакан, слегка встряхните стакан, чтобы зерна расположились, образуя наиболее плотную из возможных упаковку, и затем надавите на пшено. Давление приведет к нарушению плотной упаковки, т. е. к увеличению объема, занимаемого зернами, и часть зерен высыпется. Если теперь слегка постучать по стакану с тем, чтобы зерна вновь «упаковались» наиболее плотно, стакан окажется не заполненным доверху.

Теперь вернемся к песку на берегу. Он тоже плотно упакован. При давлении на песок плотная упаковка разрушается, и объем песка увеличивается за счет увеличения пространства между песчинками. Вода из верхних слоев песка уходит вглубь, заполняя эти увеличившиеся промежутки, и песок как бы высыхает. Когда ногу убирают, плотная упаковка восстанавливается, а вытесненная из вновь уменьшившихся промежутков вода заполняет след, оставленный ногой.

И. Слободецкий

Ф1209. *Груз висит на упругой нити. Если к грузу прикладывать силу, медленно нарастающую от нулевого значения, то нить оборвется, когда величина силы достигнет значения F_1. При какой минимальной величине силы оборвется нить, если прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения и в дальнейшем остается неизменной?*

Упругую нить можно рассматривать как пружину. Пусть жесткость этой пружины равна k. Согласно условию задачи, при медленном нарастании силы нить обрывается, когда полная сила $F_{\text{п}}$, приложенная к ней, равна

$$F_{\text{п}} = mg + F_1,$$

где m — масса подвешенного груза. Посмотрим, что происходит в том случае, когда прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения F и в дальнейшем не меняется.

В начальный момент (когда сила равна нулю) нить растянута под действием силы тяжести груза на величину x_0, определяемую условием $kx_0 = mg$, т. е. координата конца нити в положении равновесия равна $x_0 = mg/k$ (за начало отсчета принято положение конца нити в отсутствие груза). При действии силы F координата конца нити в положении равновесия будет равна $x' = mg/k + F/k$. Однако в состояние равновесия система перейдет лишь после затухания возникающих колебаний. Начальная амплитуда этих колебаний определяется начальным отклонением системы от положения равновесия: $x_m = x' - x_0 = F/k$. Так как затухание колебаний мало́, через полпериода полное растяжение пружины будет равно

$$x_{\text{п}} = \frac{mg+F}{k} + x_m = \frac{mg}{k} + 2\frac{F}{k}.$$

Значит, в этот момент к нити приложена полная сила

$$F'_{\text{п}} = mg + 2F.$$

Нить оборвется, если эта сила больше, чем сила $F_{\text{п}}$, определяющая предел прочности нити.

Таким образом, минимальная сила $F_{\min}$, при которой произойдет обрыв нити, находится из условия $F'_{\text{п}} = F_{\text{п}}$, т. е.

$$mg + 2F_{\min} = mg + F_1,$$

откуда получаем

$$F_{\min} = F_1/2.$$

Г. Баронов

Ф1210. *Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд*

Тепловая мощность, выделяющаяся при прохождении тока через резистор, частично идет на нагревание резистора, а частично рассеивается в окружающее *экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1=100$ °C мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1=50$ Ом до величины $R_2=100$ Ом; при охлаждении обратный скачок происходил при температуре $t_2=99$ °C (рис. 1). Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1=60$ В, при котором его температура оказалась равной $t_3=80$ °C. Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2=80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное значение тока. Температура воздуха в лаборатории постоянна и равна $t_0=20$ °C. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $C=3$ Дж/К.*

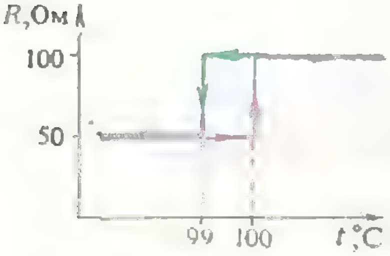


Рис. 1.

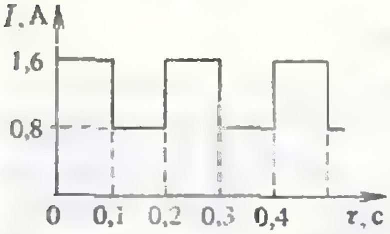


Рис. 2.

пространство. В состоянии теплового равновесия (когда температура резистора остается постоянной) вся выделяющаяся мощность рассеивается.

Обозначим через α коэффициент пропорциональности между рассеиваемой на резисторе мощностью и разностью температур резистора и окружающего воздуха. При температуре $t_3=80$ °C сопротивление резистора равно $R_1=50$ Ом (см. рис. 1). Тогда из равенства

$$\frac{U_1^2}{R_1}=\alpha(t_3-t_0)$$

получаем

$$\alpha=\frac{U_1^2}{R_1(t_3-t_0)}=1,2\,\frac{\text{В}^2}{\text{Ом}\cdot\text{К}}.$$

Самопроизвольные колебания тока при напряжении на резисторе $U_2=80$ В происходят в результате колебаний значения сопротивления резистора. Когда температура резистора становится равной $t_1=100$ °C, сопротивление его скачком увеличивается от $R_1=50$ Ом до $R_2=100$ Ом. В результате тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, уменьшается, резистор начинает охлаждаться (отвод тепла происходит интенсивнее, чем потребление). Когда температура резистора падает до $t_2=99$ °C, сопротивление его скачком уменьшается от 100 Ом до 50 Ом. Тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, увеличивается, резистор вновь нагревается (потребление тепла происходит быстрее, чем отвод). При температуре $t_1=100$ °C вновь происходит скачок сопротивления, и процесс повторяется.

Период колебаний тока в цепи

$$T=\tau_1+\tau_2,$$

где τ_1 — время нагрева резистора от t_2 до t_1, τ_2 — время охлаждения от t_1 до t_2. Запишем соответствующие уравнения теплового баланса:

$$\frac{U_2^2}{R_1}\tau_1=\tau_1\alpha(t_1-t_0)+C(t_1-t_2),$$

$$\frac{U_2^2}{R_2}\tau_2=\tau_2\alpha(t_1-t_0)-C(t_1-t_2)$$

(поскольку температура резистора меняется очень незначительно, можно считать, что отводимая тепловая мощность постоянна и равна $\alpha(t_1-t_0)$). Подставляя числовые данные, находим

$$\tau_1=\tau_2\approx0,1\ \text{c}\Rightarrow T\approx0,2\ \text{c}.$$

Максимальное значение тока равно, очевидно,

$$I_{\max}=\frac{U_2}{R_1}=1,6\ \text{А},$$

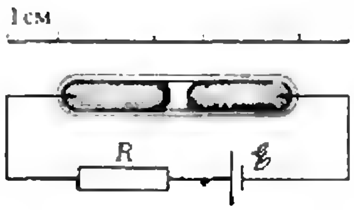
минимальное значение —

$$I_{\min}=\frac{U_2}{R_2}=0,8\ \text{А}.$$

График изменения тока в цепи со временем приведен на рисунке 2.

А. Буздин

Ф1211. *В запаянной капиллярной трубке находятся два столбика ртути, разделенные капелькой раствора электролита HgI_2. Внутренний диаметр трубки $d=0{,}3$ мм. Трубка подключена последовательно с резистором с сопротивлением $R=390$ кОм к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В. Через какое время капелька сместится на одно деление шкалы (см. рисунок)?*



Протекание электрического тока в электролите связано с переносом массы. В данном случае на катоде происходит восстановление металлической ртути из раствора электролита, а на аноде — окисление ртути, т. е. переход ее в раствор электролита. В соответствии с законом электролиза Фарадея, масса m ртути, выделившейся на катоде за время t, равна

$$m=\frac{1}{F}\frac{M}{n}It, \qquad (1)$$

где $F=9{,}65\cdot10^4$ Кл/моль — число Фарадея, $M=0{,}201$ кг/моль — молярная масса ртути, $n=2$ — валентность ртути, I — протекающий ток. Так как сопротивление металлической ртути и электролита и внутреннее сопротивление источника ничтожно малы по сравнению с R, протекающий ток равен

$$I=\mathscr{E}/R. \qquad (2)$$

Выделение ртути на катоде и растворение ее на аноде приводят к смещению капельки электролита в сторону анода. Расстояние l, на которое сместится капелька, связано с массой выделившейся на катоде ртути очевидным соотношением

$$m=\rho\frac{\pi d^2}{4}l, \qquad (3)$$

где $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3 — плотность ртути.

Из равенств (1) — (3) находим время, за которое капелька электролита сместится на расстояние l:

$$t=\frac{\pi d^2 Fn\rho Rl}{4M\mathscr{E}}.$$

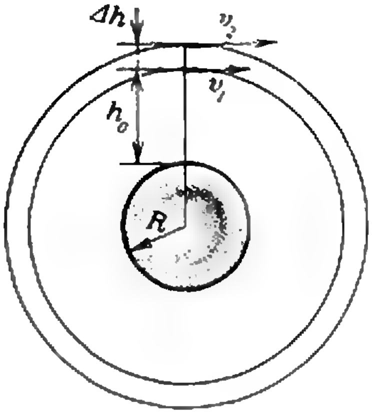
Подставив значения, приведенные в условии, и $l=1$ см, получим

$$t\approx100 \text{ ч.}$$

Подобные «ртутные часы» нашли применение в электронной технике в качестве малогабаритных времязадающих устройств, счетчиков времени наработки. Их используют также в качестве кулонметров для измерения заряда, протекшего по участку цепи за длительный промежуток времени.

Е. Юносов. И. Яминский

Ф1212. *Коэффициент преломления атмосферы планеты X уменьшается с высотой h над ее поверхностью по закону $n = n_0 - \alpha h$. Радиус планеты R. Найти, на какой высоте h_0 над поверхностью планеты находится оптический канал, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте.*



В атмосфере, где коэффициент преломления n уменьшается с высотой, свет распространяется не прямолинейно. Поворот фронта световой волны, и, следовательно, искривление световых лучей, происходит из-за того, что скорость света в среде $v = c/n$ тем меньше, чем больше коэффициент преломления.

Обозначим через Δh ширину оптического канала, по которому световые лучи будут обходить планету, оставаясь на постоянной высоте (см. рисунок). Рассмотрим два крайних луча. Луч, остающийся на постоянной высоте h_0, обойдет планету за время

$$t = \frac{2\pi(R+h_0)}{v_1} = 2\pi(R+h_0)\frac{n_0 - \alpha h_0}{c}.$$

Другой луч того же светового канала, отстоящий от первого на расстояние $\Delta h \ll h_0$, должен обойти планету на высоте $h_0 + \Delta h$ за то же самое время (только в этом случае фронт световой волны, распространяющейся по каналу, будет всюду перпендикулярен окружности радиусом $R + h_0$):

$$t = \frac{2\pi(R+h_0+\Delta h)}{v_2} = 2\pi(R+h_0+\Delta h)\frac{n_0 - \alpha(h_0+\Delta h)}{c}.$$

Приравняв времена распространения и учитывая, что $\Delta h \ll h_0$, найдем

$$h_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{n_0}{\alpha} - R\right).$$

Заметим, что рассмотренное явление называется круговой рефракцией. Как показывают наблюдения, оно реально возможно, например — в атмосфере Венеры.

Поправка

В «Кванте» № 3 за 1990 в условии задачи М1213 из «Задачника «Кванта» была допущена ошибка. Правильное условие:

М1213. а) Докажите, что если выпуклый шестиугольник можно разрезать на параллелограммы, то он имеет центр симметрии.

б) Докажите, что если выпуклый шестиугольник, в котором каждая диагональ, соединяющая противоположные вершины, параллельна двум сторонам, можно разрезать на N параллелограммов равной площади, то N делится на 3.

Срок отправки решения задачи продлевается до 15 июля. Редакция приносит читателям свои извинения.

„Квант" улыбается

Движенья — нет?

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.

Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

А. С. Пушкин. Движение

Читал я тут как-то Пушкина. Отлично пишет. Про хлеб, про любовь. Про гордость...

И вдруг читаю: «Движенья нет...» Как так? Ну, то, что справедливости нет — это все знают, но чтоб и движенья не было? Сомнительно.

Выясняю. Оказывается, 2500 лет назад жил Зенон, философ. И однажды он спросил: «10 000 зерен — это куча, 2 зерна — не куча, а где же граница?» Ну, естественно, всем вокруг неловко, ответа не знают. Умней всех он, видите ли! Потом справились, назвали его выходку апорией, или парадоксом. Пословицу пустили, мол, один дурак придумает столько апорий, что ста мудрецам не ответить. Полегчало.

А Зенон не унимается, в соответствии с пословицей — апория за апорией. В частности, насчет движения: апории стрелы, стены, Ахиллеса.

Пусть стрела летит. В какой-то момент времени она находится в какой-то точке. Если она находится в какой-то точке, то она не летит. Противоречие. Движения нет.

Пусть Геракл (это у них такой штангист был) стоит на большом расстоянии от стены. Может он сразу оказаться у нее? Нет. А сразу на полпути? Нет. А сразу на полполпути? Нет. Так ведь сколько пополам ни дели — чистого нуля не получить. Противоречие. Движения нет.

Ему, естественно, умные люди возражают, мол, что ты от штангиста хочешь? Конечно, он не очень быстро бегает. Ты придумай что-нибудь про нашего спринтера Ахиллеса, уж он-то всех обгоняет.

Пожалуйста, говорит. Пусть он обгоняет черепаху, но черепахе — фору, идет? Согласились. Ребята! — говорит.— Когда Ахиллес пробежит эту фору, черепаха хоть немного, но проползет. Опять фора. Получается сказочка про белого бычка. Противоречие. Движения нет.

Это он так резко выражался, потому что в те времена у философов были суровые нравы. Если что-то противоречит логике и истине, то этого нет. Им истина была даже дороже друзей.

Но в наше время появились такие философы — только держись! Вообще, говорят, ничего не бывает без противоречий. Это, по-моему, перебор. Я считаю, надо хоть приблизительно знать, где какая теория применима. Совсем без теории — тоже плохо.

Выясняю про Зенона дальше. Лет так через 2200—2300 Лейбниц с Ньютоном начали Зеноновы апории потихоньку математически щелкать. Придумали дифференциальное и интегральное исчисления и научились точно определять, когда Ахиллес догонит черепаху. Бесконечные ряды научились суммировать и прочее.

Однако же. Во всех своих математических штучках опираются на теорию пределов. А там — основной постулат: если у тебя есть что-то бесконечно малое, считай его в пределе нулем. Ребята, так ведь это значит только одно: во всех Зеноновских задачах пренебреги физической сутью вопроса! А с апорией стрелы и вообще непонятно, что делать — там ведь математики совсем нет, одна логика. И чуть-чуть физики. Ну, конечно, можно отмахнуться, мол, это же просто слова. Но, ребята! Ведь физика — это не только математика, слова в ней нужны обязательно. Даже термин такой есть: интерпретационный механизм математической модели.

Я — к брату: что скажет? Сказал. Во-первых, бросай курить. Во-вторых, это интуитивно ясно и никому не нужно. А в-третьих, у каждого человека есть биополе, то есть аура. А может быть, этих аур даже не одна, а несколько. И при помощи бега и этих аур можно поправить свое здоровье и оценить качество продуктов и количество нитратов. Вот это действительно интересно и нужно. Вот так.

Племянник Ленька тоже поддержал разговор. Видик, говорит. И хард рок.

Ну, насчет аур и хард рока я не знаю. Может быть. А с Зеноном-то как?

И вот — самое интересное. Читаю я спор Бора с Эйнштейном насчет принципа неопределенности Гейзенберга и чувствую: что-то похожее на Зенона. Мамочки, это же самое то! Гейзенберг так и сказал: координату и скорость одновременно мы можем определять только приблизительно. И чем точнее координату, тем хуже скорость, и наоборот. Сел, посчитал. Счет — элементарный, только кроме неопределенностей координаты и скорости надо еще задать массу стрелы, Геракла, Ахиллеса и черепахи.

Вот такая формула:

$$\Delta x\cdot\Delta v \geqslant \frac{\hbar}{2m},$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, мировая константа.

И тогда любой школьник может Зенону доказать, где его цепь рассуждений обрывается, так как он вступает в область квантовой механики.

С апорией стрелы чуть посложнее, но тоже понятно, как ее привести к виду, удобному для решения — договориться, что такое «движется» $(v\pm\Delta v)$ и что такое «находится в данной точке» $(x\pm\Delta x)$.

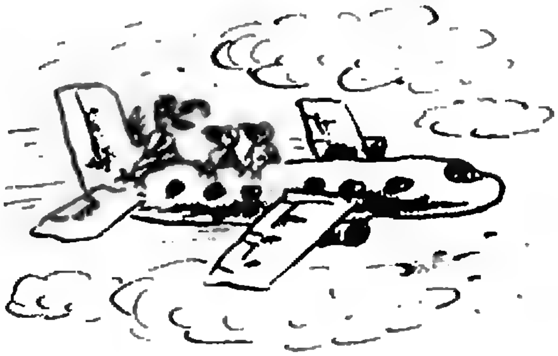
(Окончание см. на с. 49)

„Квант" для младших школьников

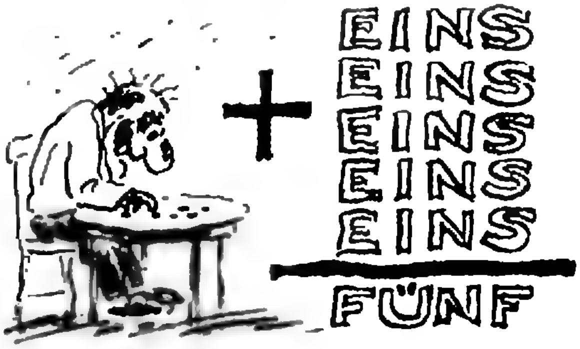
Задачи

1. Антон пошел в молочный магазин. Денег у него не было, но он взял пустые бутылки из-под молока — 6 литровых (по 20 копеек) и 6 пол-литровых (по 15 копеек). В магазине было только разливное молоко по цене 22 копейки за литр. Антон решил сдать часть бутылок, а купленное на полученные деньги молоко налить в оставшиеся бутылки. Какое наибольшее количество молока он сможет принести домой?

2. Самолет вылетел из города A в полдень и приземлился в городе B в 14 часов местного времени. В полночь он вылетел обратно и прилетел в город A тогда, когда там было 6 часов утра. Сколько времени длится перелет между этими городами на таком самолете?

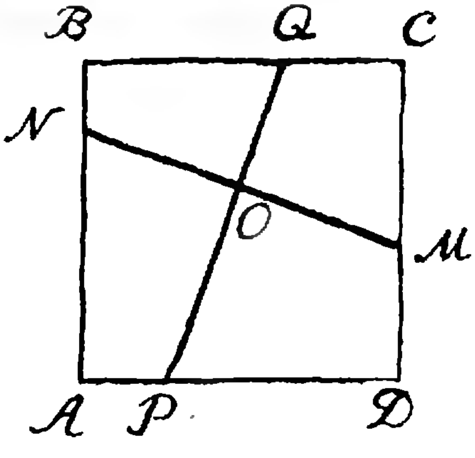


3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. (По-немецки слова eins и fünf означают *один* и *пять*.)



4. Представьте число 1990 тремя различными способами в виде суммы нескольких (двух или больше) последовательных натуральных чисел.

5. В квадрате $ABCD$ проведены два взаимно перпендикулярных отрезка MN и PQ (см. рисунок). Покажите, что сумма периметров четырехугольников $APON$ и $CQOM$ равна сумме периметров четырехугольников $BNOQ$ и $DMOP$.



Эти задачи нам предложили А. Морозов, С. Дворянинов, М. Сафаралиев, А. Савин, В. Произволов.

В РОЛИ МАГДЕБУРГСКОГО БУРГОМИСТРА

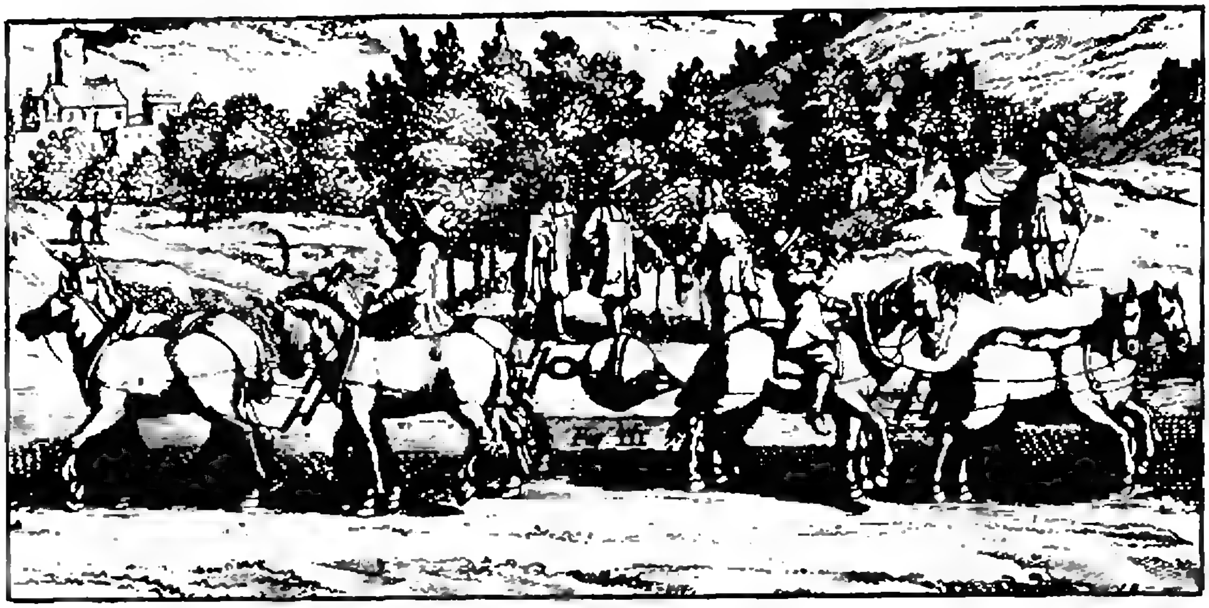
Кандидат физико-математических наук
А. ШТЕЙНБЕРГ

Эта статья не совсем обычна. Вашему вниманию будут предложены несколько ситуаций из жизни одного из замечательных физиков прошлого — Отто фон Герике. О том, как решал Герике встававшие перед ним проблемы, мы расскажем. Но прежде чем знакомиться с его решениями, предлагаем вам испытать свои силы: подумайте, как бы вы справились с такой задачей? Возможно, вам удастся повторить ход мыслей Герике. А может быть, вы придумаете что-нибудь оригинальное. Никаких специальных знаний, выходящих за рамки вашего учебника, для этого не потребуется. Только фантазия, воображение и здравый смысл.

Отто фон Герике (1602—1686) родился в Магдебурге. После завершения образования (он изучал право, математику и инженерное дело в университетах Лейпцига, Гельмштедта, Йены, путешествовал по Франции и Англии, где знакомился со многими учеными) возвратился в родной город. Здесь он был избран членом городского совета и много сил отдал строительству и укреплению Магдебурга. В 1646 году за заслуги перед Магдебургом он был избран его бургомистром и прославился на этом посту не только разумным управлением, но и замечательными физическими опытами.

Целью первых своих опытов Герике поставил получение пустого пространства — пространства, не заполненного ничем, даже воздухом. Широко распространенная точка зрения на этот вопрос состояла в том, что пустого пространства быть не должно, так как «природа не терпит пустоты». Опровергнуть это заблуждение можно было только опытом.

Сначала для этой цели Герике взял винную бочку, наполнил ее водой и плотно закупорил, чтобы внутрь не мог проникнуть наружный воздух. Затем подсоединил к бочке узкую



Опыты с магдебургскими полушариями...

трубку с поршнем и, выдвигая поршень, попытался извлечь воду из бочки. По замыслу Герике в бочке после этого должна была остаться пустота. Вот как описывает опыт сам Герике:

«После установки трубы в нижней части бочки я попытался извлечь из нее воду. Однако прежде чем вода последовала за поршнем, лопнули железные обручи и болты, с помощью которых труба была прикреплена к бочке.

Тем не менее усилия вовсе не были безнадежными... После того как недостатки установки были устранены посредством использования более сильных болтов, трое сильных мужчин, тянувших за шток, смогли наконец извлечь следующую за поршнем воду...

При этом, однако, во всех частях бочки слышался шум, как будто вода сильно кипела, и это продолжалось до тех пор, пока бочка вместо извлеченной воды не заполнилась воздухом».

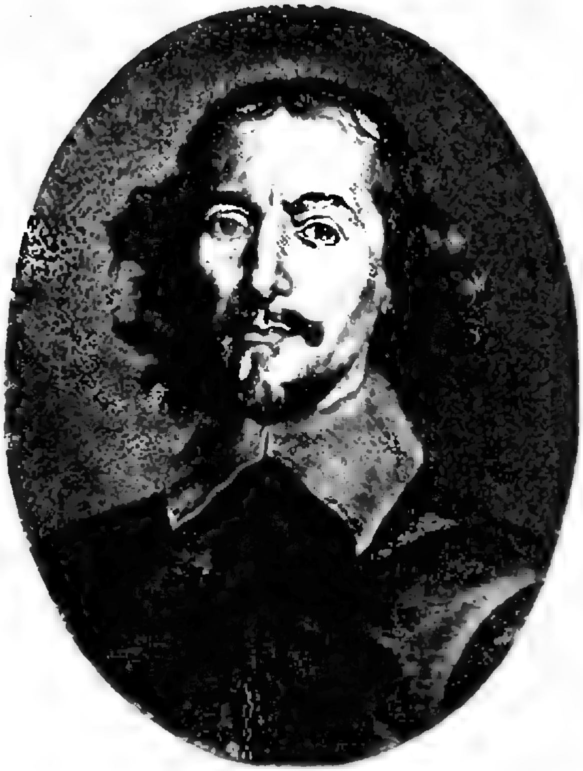
Опыт, как вы видите, закончился неудачей. Однако Герике не сдался и придумал прием, с помощью которого ему все-таки удалось создать пустоту в бочке.

Подумайте, как бы это сделали вы.

В дальнейшем Герике научился создавать пустоту с помощью придуманного им нового прибора — воздушного насоса. Им он, в частности, воспользовался в своем знаменитом опыте с магдебургскими полушариями. Вы о нем, скорее всего, знаете: две упряжки лошадей отрывали друг от друга два сомкнутых полушария, из которых был предварительно откачан воздух. Опыт был исключительно эффектен и на его демонстрации присутствовал даже император «Священной Римской империи» Фердинанд III.

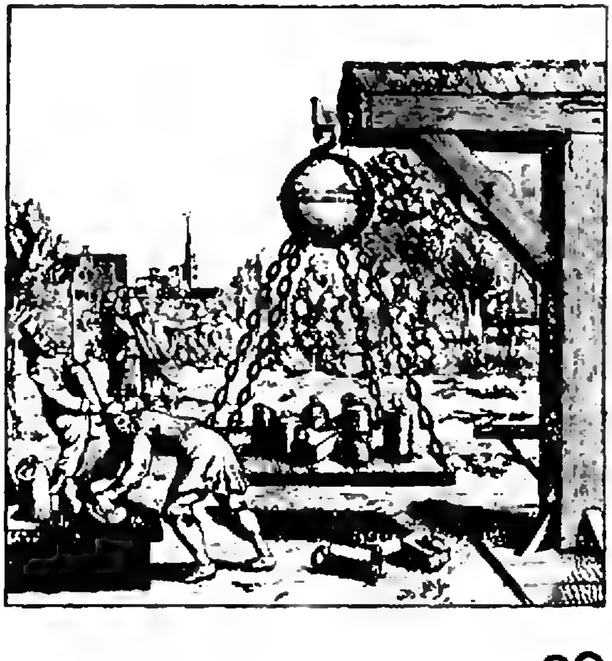
Попытайтесь придумать простейшую схему насоса для откачки воздуха.

Своим насосом Герике воспользовался и для совсем другой цели. Он много занимался акустическими исследованиями. Его, в частности, интересовало, каким образом распространяется звук, какая среда передает его от источника до нашего уха. Сегодня мы знаем, что это — воздух, но впервые установил этот факт Герике.

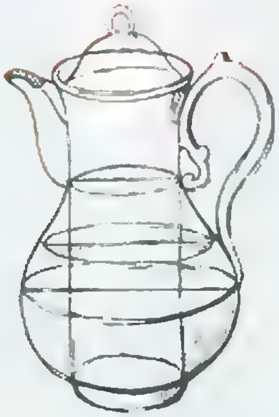

Отто фон Герике. (С гравюры 1640 г.)

Попытайтесь представить себе схему его опыта.

Убедившись, что воздух действительно передает звук, Герике заинте-



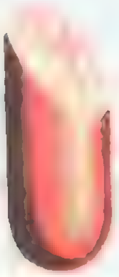
Калейдоскоп „Кванта"



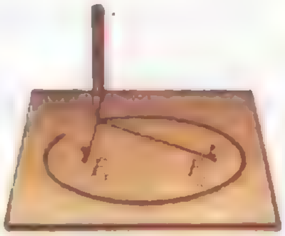
Эллипс

С эллипсом человек познакомился, видимо, сразу же после изобретения колеса — ведь вид круга сбоку является эллипсом.

Свое название (по-гречески — «недостаток») эллипс получил в трудах одного из последних древнегреческих геометров Аполлония из Перги (III век до н. э.), а первое описание эллипса и его свойств содержатся в трудах другого древнегреческого геометра Менехма (IV век до н. э). Там он появляется как сечение цилиндра плоскостью.



Одно из красивейших свойств эллипса, часто принимаемое за его определение, таково: «Эллипс — геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек этой плоскости F_1 и F_2 (фокусов) — величина постоянная». Эта величина обозначается через $2a$. На этом свойстве основан способ разбивки клумб эллиптической формы, часто применяемый садовниками. Два колышка, палка и веревка — вот и весь инструмент.



Из определения эллипса следует, что длина наибольшего из «диаметров» эллипса равна $2a$. Длина наименьшего из «диаметров» обозначается через $2b$. Расстояние между фокусами обозначают через $2c$. Числа a, b, c связаны соотношением $a^2=b^2+c^2$, которое легко устанавливается из рисунка 1. Уравнение эллипса в системе координат, изображенной на рисунке 1, таково:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

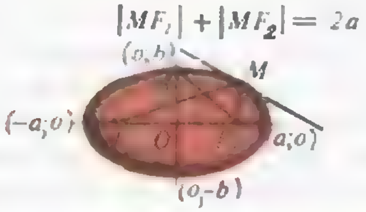


Рис. 1.

Если $a=b$, то эллипс превращается в окружность.

Эллипс можно определить еще и как кривую, полученную из окружности равномерным сжатием к одному из диаметров окружности (рис. 2).

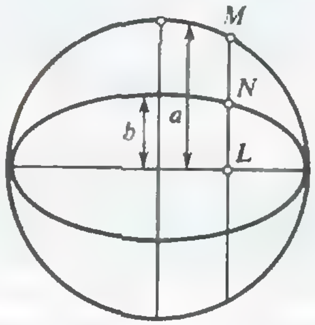
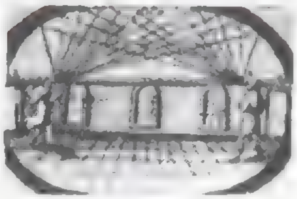


Рис. 2.

Очень интересно так называемое оптическое свойство эллипса. Луч, выходящий из одного его фокуса, после отражения от эллипса попадает во второй его фокус. Это свойство объясняет феномен некоторых пещер, имеющих эллипсообразные своды, где слово, сказанное в одной (особой) точке пещеры, необычайно отчетливо слышно в другой ее точке, отстоящей на значительное расстояние от первой. Эффект фокусирования звука сводчатым эллиптическим потолком был известен архитекторам еще в XVII веке.



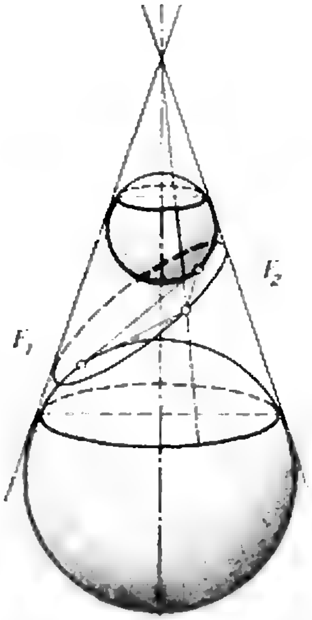


Рис. 3.

Любое ограниченное сечение плоскостью конуса (бесконечного) также будет эллипсом. Любопытно, что шары, касающиеся конуса и секущей его плоскости, соприкасаются с ней в фокусах эллипса (рис. 3). Этот факт был открыт в 1822 году бельгийским математиком Данделеном (1794—1847).

Интерес к эллипсу сильно возрос после того, как в 1609 году немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер установил, что небесные тела Солнечной системы — планеты, кометы, астероиды — движутся по эллипсам вокруг Солнца, причем Солнце находится в одном из фокусов таких эллипсов (рис. 4).

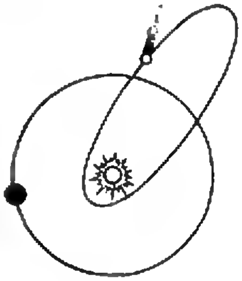


Рис. 4.

Мы привыкли к круглым колесам, «круглым» шестерням и т. д., но в технике встречаются и «эллиптические» шестерни. Если взять два одинаковых эллипса, шарнирно закрепить один из фокусов первого эллипса в некоторой точке A, а фокус другого эллипса — в точке B, находящейся на расстоянии $2a$ от A, то из оптического свойства эллипса будет следовать, что при соприкосновении этих эллипсов точка касания всегда будет лежать на отрезке AB (рис. 5), и при вращении одного из эллипсов второй будет катиться по нему без скольжения. Такие шестерни применяются в тех случаях, когда требуется превратить равномерное вращение в неравномерное.

Меру «вытянутости эллипса» можно охарактеризовать величиной $k=b/a$ — коэффициентом сжатия окружности, при котором получился данный эллипс. Но чаще в качестве такой характеристики рассматривают величину $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$, которая называется эксцентриситетом. Для окружности $\varepsilon=0$, а для сильно вытянутых эллипсов, например орбит комет, ε близко к 1.

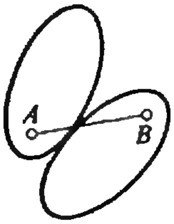


Рис. 5.

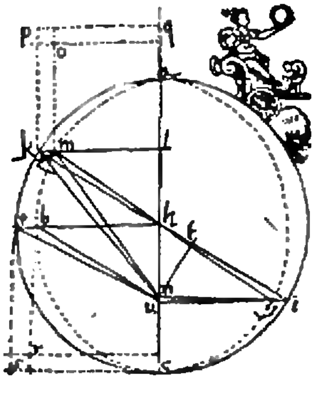
Вспомним, что отношение длины окружности к ее диаметру — число π — не является рациональным числом. Площадь, ограниченная эллипсом, равна πab, но длину эллипса оказывается невозможно выразить через a и b с помощью известных в школе (так называемых элементарных) функций. Длина эллипса может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$L=2\pi a\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5}-\ldots\right],$$

из которого она может быть найдена с любой точностью. Длина дуги эллипса, которая видна из его центра (середины отрезка между фокусами) под углом φ, отсчитываемым от положительного направления оси x, равна интегралу

$$l(\varphi)=\int_0^\varphi\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 u}\,du;$$

этот интеграл называется эллиптическим интегралом. Эллиптическими интегралами называются еще несколько похожих интегралов. Эллиптические интегралы породили функции, оказавшиеся очень полезными в приложениях математики, а именно — функции, обратные к функциям, задаваемым эллиптическими интегралами. Такие функции назвали эллиптическими функциями.



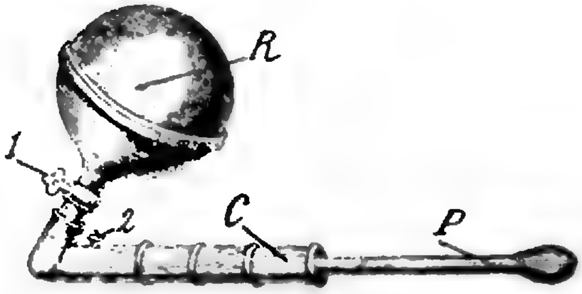
ресовался: а не может ли звук передаваться и через другие среды? Он придумал оригинальный опыт, показавший, что звук распространяется и в воде.

Какой эксперимент вы поставили бы для подтверждения этого факта?

Если вы сумели ответить на все вопросы — это очень хороший результат. Но не стоит все-таки слишком обольщаться. Дело в том, что правильно поставить проблему не менее трудно, чем ее решить. Когда знаешь, над чём думать, думать значительно легче.

А теперь — о том, как решал поставленные им самим проблемы Отто фон Герике.

Ситуация 1. Герике поместил бочку, из которой откачивалась вода, внутрь большей бочки, которую также заполнил водой. Таким образом ему удалось более надежно изолировать внутреннюю бочку от наружного воздуха. Полностью предотвратить просачивание во внутреннюю бочку, правда, не удалось. Когда ее через три дня открыли, она частично оказалась заполненной водой и воздухом. Тем не менее до вскрытия часть ее все же была пустой (воздух проник в бочку во время вскрытия).

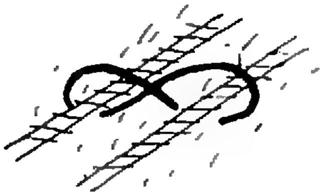


Ситуация 2. Воздушный насос Герике изображен на рисунке. Откачиваемый сосуд *R* соединен краном *1* с цилиндром *C*, в котором перемещается плотно прилегающий к стенкам цилиндра деревянный поршень *P* со смазанной маслом кожаной покрышкой. В левой части цилиндра имеется кран *2*. Чтобы откачать воздух из *R*, сначала закрывают кран *1*, открывают кран *2* и перемещают поршень в крайнюю левую позицию для удаления всего воздуха из цилиндра *C*. После этого кран *2* закрывают, открывают кран *1* и перемещают поршень в крайнее правое положение. Часть воздуха из сосуда *R* переходит при этом в цилиндр *C*. После этого вновь закрывается кран *1*, открывается кран *2* и повторяется первый такт. Поршень у Герике приводился в движение с помощью зубчатой рейки и шестерни. Работникам при откачке воздуха приходилось изрядно попотеть.

Ситуация 3. Герике поместил колокол в сосуд, из которого воздух можно было откачивать с помощью насоса. Кроме того, он приспособил часовой механизм так, чтобы колокол звонил через определенные промежутки времени автоматически. А далее он отчетливо наблюдал ослабление звука по мере уменьшения давления в сосуде. После этого стало очевидным, что звук действительно передается через воздух. А через воду?

Ситуация 4. На этот вопрос Герике сумел найти ответ с помощью эксперимента, который можно назвать физическим с очень большой натяжкой. Скорее он ближе к физиологическим опытам Ивана Павлова над собаками. Тем не менее идея весьма остроумна. «Лабораторией» послужил пруд с колоколом на берегу. Колокол звонил всякий раз, когда рыбе бросали в определенное место корм. Когда рыбу приучили, она стала приплывать на место кормежки просто по сигналу колокола, хотя экспериментаторы ничем ее при этом не потчевали. Это было достаточно убедительным доказательством того, что звук передается и водой. Позднее результат Герике был подтвержден водолазами, которые слышат звук под водой.

„Квант" улыбается

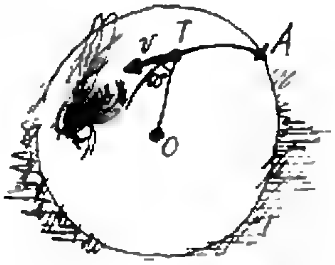


Задача о встречных поездах

Представьте себе, что вы являетесь пассажиром необычного бесконечно длинного поезда, составленного из пассажирских и товарных вагонов, причем и паровоз, и все вагоны имеют одинаковую длину и расположены друг за другом в определенном порядке, который связан со значением целого числа k. Это число мы будем называть «классом» поезда. Условимся считать, что сразу за паровозом расположен пассажирский вагон № 1, за которым идут несколько товарных вагонов, а именно столько, что следующий пассажирский вагон № 2 занимает в составе место 2^k, считая от паровоза. Затем идут опять товарные вагоны, потом пассажирский вагон № 3 на месте 3^k и т. д. Будем считать, что число k может принимать значения $k=3, 4, 5,...$ Например, первые пять пассажирских вагонов с номерами 1, 2, 3, 4, 5 в поезде «третьего класса» ($k=3$) будут занимать соответственно места 1, 8, 27, 64, 125, а в поезде «четвертого класса» ($k=4$) они должны занимать места 1, 16, 81, 256, 625 и т. д.

Теперь представьте себе, что навстречу нашему поезду по соседнему пути едет поезд такого же класса, как и наш, и машинисты обоих составов дают короткие гудки в каждый такой момент, когда паровоз поравняется с очередным пассажирским вагоном встречного поезда. Таким гудком машинист приветствует пассажиров именно этого встречного вагона, но в момент очередного гудка люди во всех других пассажирских вагонах также бросаются к окнам, надеясь увидеть напротив своего вагона тоже пассажирский вагон со встречными пассажирами и желая приветствовать их, однако это им никогда не удается, в каком бы вагоне они ни находились. Как вы думаете, почему? Ответ вы найдете на этой странице.

Б. Трубников



Об обратимости времени

Законы механики обратимы во времени, т. е. «выдерживают» замену переменной времени t на $(-t)$. А как обстоит дело с математикой?

Муха T ползет по круглому столу с постоянной скоростью. Она начинает свой путь в точке A граничной окружности, и ее скорость в каждый момент времени составляет угол в 60° с отрезком OT, где O — центр стола (см. рисунок). Если R — радиус стола, а v — скорость мухи, то проекция скорости на радиус-вектор OT равна $v/2$. Поэтому через время $t=2R/v$ муха окажется в точке O.

Попробуем обратить время. Теперь муха выползает из центра стола и движется к краю так, что ее скорость составляет угол в 60° с радиусом-вектором OT. Через время $t=2R/v$ она окажется в точке граничной окружности... Но в какой именно точке? В точке A? Но ведь она была выбрана совершенно произвольно. Мы приходим к выводу, что муха может оказаться в любой точке окружности! В чем тут дело? Ответ вы найдете на этой странице.

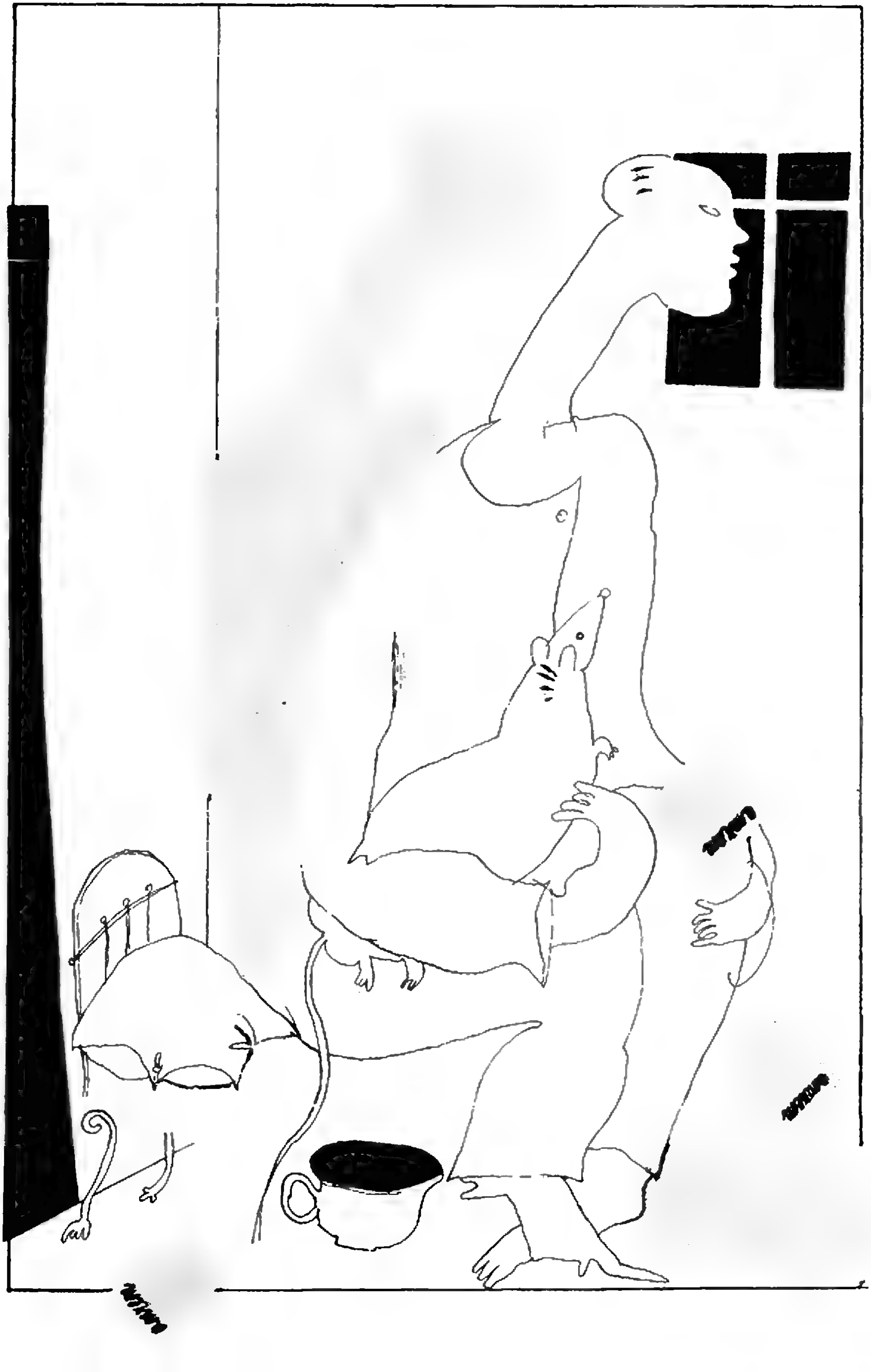
С. Т.

Хадзеоп хынчертсв о ачадаз

Пусть паровоз первого поезда поравнялся с пассажирским вагоном с номером z^k второго поезда. Тогда пассажиры вагонов с номерами x^k первого поезда и y^k второго поезда увидят друг друга, если $x^k+y^k=z^k$. Это — знаменитое уравнение Ферма, о котором существует гипотеза, что при $k>2$ оно не имеет решений в натуральных числах. Эта гипотеза, известная также как «Великая (или последняя) теорема Ферма» не доказана и не опровергнута до сих пор.

Иинемерв итсомитарбо бо

Спираль, по которой движется точка T, делает бесконечное число оборотов вокруг точки O, прежде чем муха попадет в центр стола. При обращении времени движение точки T перестает быть определенным — за любой, даже самый малый, отрезок времени она должна сделать бесконечное число оборотов вокруг O. Ситуация напоминает суммирование геометрической прогрессии $1+{}^1/_2+{}^1/_4+{}^1/_8+...=2$. Сумма первых n членов равна $2-({}^1/_2)^{n-1}$, что в пределе обращается в 2, однако суммирование прогрессии «с конца» не имеет смысла.



ЦВЕТЫ ДЛЯ ЭЛДЖЕРНОНА

(фантастический рассказ)

Д. КИЗ (США)

1. атчет о праисходящем — 5 марта 1956

Доктор Штраусс говорит что с севодняшниво дня я должен записывать все что я думаю и что со мною случаица. Я незнаю зачем это нужно но он говорит это очинь важно для таво чтобы посмотреть использывать меня или нет. Я надеюсь они меня используют. Мисс Кинниен говорит может они сделают меня умным. Я хочу быть умным. Меня зовут Чарли Гордон. Мне 37 лет и две недели назад был мой день раждения. Сейчас мне больше писать нечево и на севодня я кончаю.

2. атчет о праисходящем — 6 марта

Севодня у меня было испытание. Я думаю что я несправился и мне кажеца может теперь они небудут меня использывать. А было так в комнате сидел какойто добрый молодой человек и у нево было немножко белых карточек и все они залиты чирнилами. Он сказал Чарли что ты видиш на этой карточке.

Я сказал что вижу чирнильную кляксу. Он сказал правильно. Я подумал это все но когда я встал чтобы уйти он остановил меня. Он сказал садись Чарли мы еще не кончили. Я не так хорошо помню что было потом он вроде захотел чтобы я сказал что я вижу в чирнильной кляксе. Я ничево в ней неувидел но он сказал что там картинки что другие люди видят какието картинки. А я несмог увидеть никаких картинок. Я паправде старался увидеть. Я держал карточку близко от глаз а потом далеко. Я сказал еслибы у меня были очки я бы видел получше я одеваю очки только в кино или когда смотрю телевизор но я сказал что они в шкафу в передней. Я их принес. Потом я сказал дайте мне еще посмотреть на эту карточку я обязатильно теперь найду картинку.

Я очинь старался но всетаки никак немог найти картинки. Я видел только чирнильную кляксу. Я сказал ему может мне нужны новые очки. Он чтото написал на бумаге я испугался что невыдиржал испытание. Я сказал ему это очинь красивая клякса с малинькими точками вокруг. Он стал очинь пичальным значит я ошибся.

3. атчет о праисходящем — 7 марта

Доктор Штраусс и доктор Немюр говорят что чирнильные кляксы это ничево незначит. Я сказал им я непраливал чирнило на карточки и я ничево немог разглядеть в кляксах. Они сказали что может быть *они* всетаки меня используют. Я сказал мисс Кинниен никогда неделала мне такие испытания только праверяла письмо и чтение. Они сказали мисс Кинниен говорит что я ее самый лучший учиник в вечерней шкле для взрослых потомучто я стараюсь больше всех и паправде хочу учитца. Они спрасили как это палучилось Чарли что ты сам пришел в вечернюю школу для взрослых. Как ты ее нашел. Я ответил что я спрашивал у людей и ктото мне сказал куда мне пойти чтобы научитца хорошо читать и писать. Они спрасили почему это тебе захотелось. Я сказал я всю жизнь хотел быть умным а не тупицей. Но умным быть очинь трудно. Они спрасили а ты знаш что это может быть времено. Я сказал да. Мисс Кинниен мне говорила. Мне всеравно если это больно.

Севодня попозже у меня были еще какието психованые испытания. Это испытание показалось мне легким потомучто я мог разглядеть картинки. Только в этот раз добрая леди которая со мной занималась нехотела чтобы я расказал ей про картинки. Это меня запутало. Я сказал что вчерашний мущина прасил чтобы я расказал что я видел в кляксе она сказала что это ничево незначит. Она сказала придумай расказы про людей которые на картинках. Я сказал как можно расказывать про людей которых никогда невидел. Почему я должен придумывать неправду. Я теперь больше неговорю неправду потомучто я всегда пападаюсь.

Автор этого рассказа — американский писатель и педагог Дэниел Киз, в свое время он редактировал научно-фантастический журнал «Марвэл». Перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики в 15-ти томах. Том 10» (М., Молодая гвардия, 1967). Перевод с английского С. Васильевой.

Потом люди в белых пальто повели меня в другую часть бальницы и дали мне игру. Это вроде состязания с белой мышкой. Они называли мышку Элджерноном. Элджернон сидел в коробке в которой было очинь много заваротов вроде всяких стенок и они дали мне карандаш и бмагу с полосками и квадратиками. С одной стороны было написано СТАРТ а с другой стороны написано ФИНИШ. Они сказали что это лаберинт и что мы с Элджерноном должны сделать один и тотже лаберинт. Я непонял как мы можем делать один и тотже лаберинт если у меня была бумага и у Элджернона коробка но я ничево не сказал. Да и времени небыло потомучто начались состязания.

У одного мущины были часы которые он хотел от меня спрятать поэтому я старался несмотреть туда и начал изза этаво валнаватца.

От этаво испытания мне было хуже чем от всех других потомучто они повторяли его 10 раз с разными лаберинтами и Элджернон всегда выигрывал. Я незнал что мыши такие умные. Может это потому что Элджернон белый. Может белые мыши умнее чем другие.

4. атчет о происходящем — 8 мар

Они будут меня использывать! Я так влнуюсь что почти немогу писать. Сперва доктор Немюр и доктор Штраусс паспорили об этом. Доктор Немюр был в кабинете когда меня туда привел доктор Штраусс. Доктор Немюр незнал использывать меня или нет но доктор Штраусс сксал ему что мисс Кинниен рикаминдавала меня самым лучшим из всех каво она учит. Мне нравица мисс Кинниен потомуто она очинь умная учительница. И она сказала Чарли у тебя будет еще один шанс. Если ты дабровольно согласишся на этот экспирамент может ты станеш умным. Они незнают это будет навсегда или нет но есть шанс. Поэтому я сказал ладно хотя и очень боялся потомучто она сказала что мне будут делать апирацию. Она сказала небойся Чарли ты сделал такие большие успехи с такими малинькими спасобнастями что я думаю ты заслужил это больше всех.

Поэтому я испугался кгда доктор Немюр и доктор Штраусс об этом паспорили. Доктор Штраусс сказал что у меня есть чтото очинь хорошее.

Он сказал доктор Немюр Чарли не такой каким вы представляете себе перваво из ваших новых интелек... (немог разабрать слово) сюперменов. Но большинство людей таковаже низкаво уровня интелек... вражд... и необщит... они обычно тупы апатич... и с ними трудно иметь дело. У нево хороший характир он заинтирисован и сготовностью идет навстречу.

Доктор Немюр сказал незабывайте что он будет первым человечиским сущиством интилект котораво устроитца врезультате хирургичискаво вмишатильства.

Доктор Штраусс сказал правильно. Поглядите как он хорошо научился читать и писать для своево низкаво умствинаво уровня это такоеже великое достиж... как еслибы мы с вами без всякой помощи изучили тиорию... ности эйнштина.

Я понял не все слова они говорили слишком быстро но похоже доктор Штраусс был за меня а другой нет.

Потом доктор Немюр кивнул он сказал ладно можетбыть вы правы. Мы используем Чарли. Кгда он так сказал я очинь развалнавался я вскачил и пжал ему руку за то что он такой добрый ко мне. Я сказал ему спасибо док вы не пожалеите что дали мне еще один шанс. И я это сказал чесно. После апирации я обязатильно пастараюсь стать умным. Я буду ужас как старатца.

5. атчет о праисходящ — 10 мар

Мне страшно. Многие люди которые здесь работают и сестры и те которые делали мне испытания принесли мне конфеты и пажелали мне удачи. Я надеюсь что мне повезет.

Я спрасил доктора Штраусса смогу я после апирации победить Элджернона и он сказал может быть. Если апирация получица я докажу этой мышке что я могу быть такимже умным. А может даже умнее. Я смогу лучше читать и правильно писать слова буду знать много разных вещей и буду как дргие люди. Я хочу быть умным как другие. Если это останеца навсегда они сделают умными всех на свете.

6. отчет о происходящем — 15 мар

От апирации мне было больно. Он ее сделал когда я спал. Они севодня сняли у меня с головы и глаз бинт и я могу писать отчет о происходящем. Доктор Немюр который видел мои другие отчеты говорит что я пишу слово отчет неправильно и он показал как ево нужно писать и слово происходящем тоже. Я должен постаратца это запомнить.

Я очинь плохо запоминаю как нужно правильно писать. Доктор Штраусс говорит мне нужно писать все что со мной случаица но он говорит я должен расказывать больше что я думаю и чуствую.

Когда я сказал ему я неумею думать он сказал папробуй. Пока у меня на глазах был бинт я все время старался думать. Ничево неполучилось. Я незнаю о чем думать. Можетбыть если я спрашу ево он мне скажет как я должен это делать ведь теперь мне полагаеца стать умным. О чем думают умные люди. Наверно чтонибудь придумывают. Я бы хотел уже уметь придумывать.

7. отчет о происходящем — 19 мар

Все тоже самое. Мне делали много испытаний и разные состязания с Элджерноном. Я ненавижу эту мыш. Она мня всегда обыгрывает. Доктор Штраусс сказал что я должен играть в эти игры. И еще он сказал что мне скоро опять придеца пройти эти испытания. Эти кляксы психованые. И те картинки тоже психованые. Мне нравица рисовать мущину и женщину но я нестану врать о людях.

Я так сильно стараюсь думать что у меня заболела голова. Я думал доктор Штраусс мой друг а он мне непомогает. Он мне неговорит о чем думать или когда я стану умным.

8. отчет о происходящем — 23 мар

Я иду обратно работать на фабрику. Они сказали это лучше чтобы я снова начал работать но мне нельзя никому говорить для чево мне делали апирацию и я должен каждый вечер после работы на час приходить в бальницу. Они собираюца мне платить деньги каждый месяц чтобы я учился быть умным.

Я рад что я возвращаюсь на фабрику потомучто я скучаю по моей работе и по всем моим друзьям и по нашим развличениям.

Доктор Штраусс говорит что я должен продолжать записывать разные вещи но мне ненужно это делать каждый день а только когда я о чемнибудь думаю или когда случаица чтонибудь особенное. Он говорит непадай духом потомучто на это нужно время и это идет медлено. Он сказал что прошло много времени пока Элджернон стал в 3 раза умнее чем раньше. Значит Элджернон меня всегда обыгрывает потому что у нево тоже была такая апирация. Мне от этаво легче. Можетбыть я смогу делать этот лаберинт быстрее чем простая мыш. Может когданибудь я обыграю Элджернона. Вот будет здорово. Пока похоже что Элджернон останеца умным навсегда.

25 мар (мне больше ненужно писать наверху ОТЧЕТ О ПРОИСХОДЯЩЕМ только когда я отдаю это раз в неделю доктору Немюру чтобы он прочел. Мне нужно только ставить число. Это сохраняет время).

У нас на фабрике было севодня очинь весело. Джо Керп сказал а нука посмотрим где у Чарли была апирация что они сделали как они добавили Чарли мозгов. Я захотел расказать ему но вспомнил что доктор Штраусс сказал нельзя. Потом Френк Рейлли сказал что ты делал Чарли давай поднатужся и выкладывай. От этаво мне стало смешно. Они мои настоящие друзья и они меня любят.

Ингда ктонибудь скажет эй посмотрите на Джо или Френка или Джорджа какова он свалял Чарли Гордона. Я незнаю почему они так говорят но они всегда смеюца. Севодня утром Эмос Борг который у Доннегана 4 человек называл мое имя когда кричал на рассыльного Эрни. Эрни патерял пакет. Он сказал черт возьми Эрни ты что строиш из себя Чарли Гордона. Я непонимаю почему он так сказал. Я никогда нетерял никаких пакетов.

28 мар. Севодня вечером ко мне домой пришел доктор Штраусс чтобы узнать почему я не зашел туда как мне положено. Я сказал ему что мне больше ненравица играть с Элджерноном. Он сказал что пока мне это ненужно делать но я должен приходить. Он принес мне подарок только это не подарок а взаймы. Я подумал что это малинький телевизор но это нетак. Он сказал я должен его включать когда ложусь спать. Я сказал вы шутите почему я должен его включать когда я иду спать. Где это слыхано. Но он сказал что если я хочу стать умным я должен его слушатца. Я сказал ему я недумаю что становлюсь умным а он положил мне руку на плечо и сказал Чарли ты еще этаво незнаеш но ты все время становишся умнее. Ты пока этаво небудеш замичать. Мне кажеца что он просто был добрым чтобы меня успокоить потомучто я совсем невыгляжу умнее.

Ах да чуть не забыл. Я спрасил когда я смогу вернутца в школу в клас к мисс Кинниен. Он ответил что я туда больше непойду. Он сказал что мисс Кинниен скоро будет приходить в бальницу чтобы учить меня отдельно. Я очинь на нее сердился что она непришла навестить меня когда мне сделали апирацию но я ее люблю и можетбыть мы опять подружимся.

29 мар. Я всю ноч не спал изза этаво психованава телевизора. Как я могу заснуть когда всю ноч мне в уши орут какието психованые слова. И эти дурацкие картинки. Жуть. Я непонимаю что там говорят когда я несплю как же я пойму это во сне.

Доктор Штраусс говорит все в порядке. Он говорит что мои мозги учаца когда я сплю и это мне поможет когда мисс Кинниен начнет со мной уроки в бальнице (только я теперь знаю что это не бальница а лабатория). Я думаю это все чепуха. Если можно поумнеть во сне зачем люди ходят в школу. Я не думаю что чтонибудь из этаво получица. Я всегда смотрю позднюю и препозднюю программу по телевизору и это совсем несделало меня умнее. Может нужно спать когда ее смотриш.

9. отчет о происходящем — 3 апреля

Доктор Штраусс показал мне как сделать у телевизора звук потише и теперь я могу спать. Я ничево не слышу. И я до сих пор непонимаю что он там говорит. Иногда утром я снова включаю ево чтобы посмотреть что я выучил когда спал и я думаю что ничево. Мисс Кинниен говорит может это на другом языке или еще что. Но почти всегда он похож на американский. Телевизор говорит так быстро даже быстрее чем мисс Голд которая была моей учительницей в 6 класе а я помню она говорила так быстро что я немог ничево понять.

Я сказал доктору Штрауссу что хорошево стать умным во сне. Я хочу быть умным когда я несплю. Он говорит это одно и тоже.

Но голова у меня болит от вечиринки. Мои друзья с фабрики Джо Керп и Френк Рейлли пригласили меня пойти с ними в салун Маггси чтонибудь выпить. Я нелюблю выпивать но они сказали что нам будет очинь весело. Я хорошо провел время.

Джо Керп сказал что я должен показать девушкам как я на фабрике мою пол в уборной и он принес мне тряпку. Я показал и все засмиялись когда я сказал что мистер Доннеган говорит что я самый лучший уборщик из всех каво он имел за все время потомучто я люблю свою работу и хорошо с ней справляюсь никогда не опаздываю и непрогулял ни одново дня только когда мне делали апирацию.

Я сказал что мисс Кинниен всегда говорила Чарли гордись своей работой потомучто ты с ней хорошо справляешся.

Все смиялись нам было весело и они дали мне много выпить а Джо сказал ну и тип этот Чарли когда наклюкаетца. Я незнаю что это значит но все меня любят и нам весело. Я немогу дождатца пока стану таким умным как мои лучшие друзья Джо Керп и Френк Рейлли.

Я непомню как кончилась вечиринка но мне кажеца я вышел купить газету и кофе для Джо и Френка и когда я вернулся там никаво их небыло. Я искал их везде допозна. Что потом я помню не так хорошо но мне кажеца я захотел спать или заболел. Какойто добрый полицейский привел меня домой. Так говорит моя квартирная хозяйка миссис Флинн.

Но у меня болит голова и на ней большая шишка и кругом синяки. Я думаю может я упал но Джо Керп говорит это работа полицейскаво они иногда бьют пьяных. Я так недумаю. Мисс Кинниен говорит что полицейские должны помогать людям. А все таки у меня очинь болит голова меня тошнит и все у меня болит. Я думаю что я больше никогда небуду пить.

6 апреля. Я победил Элджернона! Я даже незнал что я победил ево пока мне несказал лабарант Берт. А во второй раз я проиграл потомучто я так валнавался что упал со стула когда еще не кончил. Но потом я победил ево еще 8 раз. Должно быть я становлюсь умным если победил такую умную мыш как Элджернон. Но я не чуствую себя умнее.

Я хотел еще соревноватца с Элджерноном но Берт сказал на один день хватит. Мне разрешили его минутку подержать. Он не такой уж плохой. Он мягкий как ватный шарик. Он моргает и когда открывает глаза они черные а покраям розовые.

Я сказал что могу покормить ево потомучто мне было неприятно что я победил ево а я хочу быть добрым и со всеми дружить. Но Берт сказал нельзя Элджернон совсем особиная мыш с такой же апирацией как у меня и он первый из всех животных так долго остался умным. Он сказал Элджернон такой умный что каждый день должен решать задачу чтобы получить еду. Это вроде замка на двери который меняют когда он заходит внутрь чтобы поесть поэтому он каждый раз должен выучить чтонибудь новое чтобы получить свою еду. Мне стало ево жалко потомучто если он несможет учитца будет голодным.

Я думаю это неправильно заставлять кавонибудь проходить испытание за еду. Как бы это понравилось доктору Немюру еслибы он должен был проходить испытание каждый раз когда ему захочеца кушать. Я думаю что мы с Элджерноном будем друзьями.

9 апреля. Севодня после работы в лабаратории была мисс Кинниен. Она вроде была рада меня видеть но какбудто чевото боялась. Я сказал ей мисс Кинниен невалнуйтесь я еще не умный и она расмиялась. Она сказала я верю в тебя Чарли как ты изо всех сил старался читать и писать лучше всех других. Сперва ты будешь занимаца понемножку и ты сделаешь коечто для науки.

Мы читаем очинь трудную книжку. Я никогда раньше нечитал такой трудной книжки. Она называеца Робинзон Крузо об одном человеке который пападает на необитаемый Остров. Он умный и придумывает разные штуки чтобы иметь дом и еду и он хорошо плавает. Только мне ево жалко потомучто он совсем один и у нево нет друзей. Но мне кажеца на острове есть ктото еще потомучто там есть картинка как он со своим смешным зонтиком смотрит на следы ног. Я надеюсь у нево будет друг и он небудет одиноким.

10 апреля. Мисс Кинниен учит меня писать лучше. Она говорит посмотри на слово закрой глаза и повторяй его много много раз пока не запомниш. Мне очень трудно со словом кажется которое говорят кажеца и со словом сегодня которое говорят севодня.

14 апреля. Я кончил Робинзона Крузо. Мне хочется узнать что с ним еще случится но мисс Кинниен говорит это все. Почему.

15 апреля. Мисс Кинниен говорит что я учусь быстро. Она прочла некоторые из моих сообщений и както страно посмотрела на меня. Она говорит что я хороший человек и я им всем докажу. Я спросил ее почему. Она сказала неважно но мне не нужно огорчатся если я пойму что все не такие хорошие как я думаю. Она сказала такой человек как ты которому бог дал так мало сделал больше чем многие умные люди которые никогда даже не используют свои мозги. Я сказал что все мои друзья умные люди но они хорошие. Они меня любят и никогда ничего плохого не сделали. Тут ей чтото попало в глаз и она побежала в туалет.

16 апр. Сегодня, я выучил запятую, вот она какая (,) точка с хвостиком, мисс Кинниен, говорит что это важно, потому что, запятая, делает, написанное, лучше.

17 апр. Я ставил запятые неправильно. Это знак препинания. Мисс Кинниен велела мне смотреть в словаре длиные слова чтобы я научился их писать. Я спросил зачем если их можно читать. Она сказала это входит в твое обучение поэтому теперь я буду смотреть все слова когда я неуверен как их нужно писать. Из за этого приходится писать долго но мне кажется что я запоминаю. Мне нужно посмотреть только один раз и я уже знаю как писать. Поэтому я правильно написал слово препинание. (Оно так написано в словаре.) Мисс Кинниен говорит что точка тоже знак препинания и что есть еще много других знаков которые нужно выучить.

Нужно все знаки употреблять вместе, она показала? Мне «как, это делать, и теперь; я могу! употреблять вместе все» знаки препинания, когда! пишу? Есть множество! правил? которые нужно? выучить; но я их дер'жу в голове.

Мне нравится, в Дорогой мисс Кинниен (так нужно писать в деловом письме если я когда нибудь стану деловым человеком) что она, всегда мне ' все об'ясняет» когда — я спрашиваю. Она ге'ний! я бы хотел! быть таким, умным» как она;

(Знаки, препинания; смешные!)

18 апр. Какой же я болван! Ведь я даже не понял, о чем она говорила. Вчера вечером я прочел учебник грамматики, и там все об'ясняется. Потом до меня дошло, что мисс Кинниен пыталась мне об'яснить то же самое, но я тогда не понял. Я встал посреди ночи, и у меня в голове все прояснилось.

Мисс Кинниен сказала, что мне помог телевизор, который работает, когда я сплю.

(Продолжение следует)

Движенья — нет?

(Начало см. на с. 36)

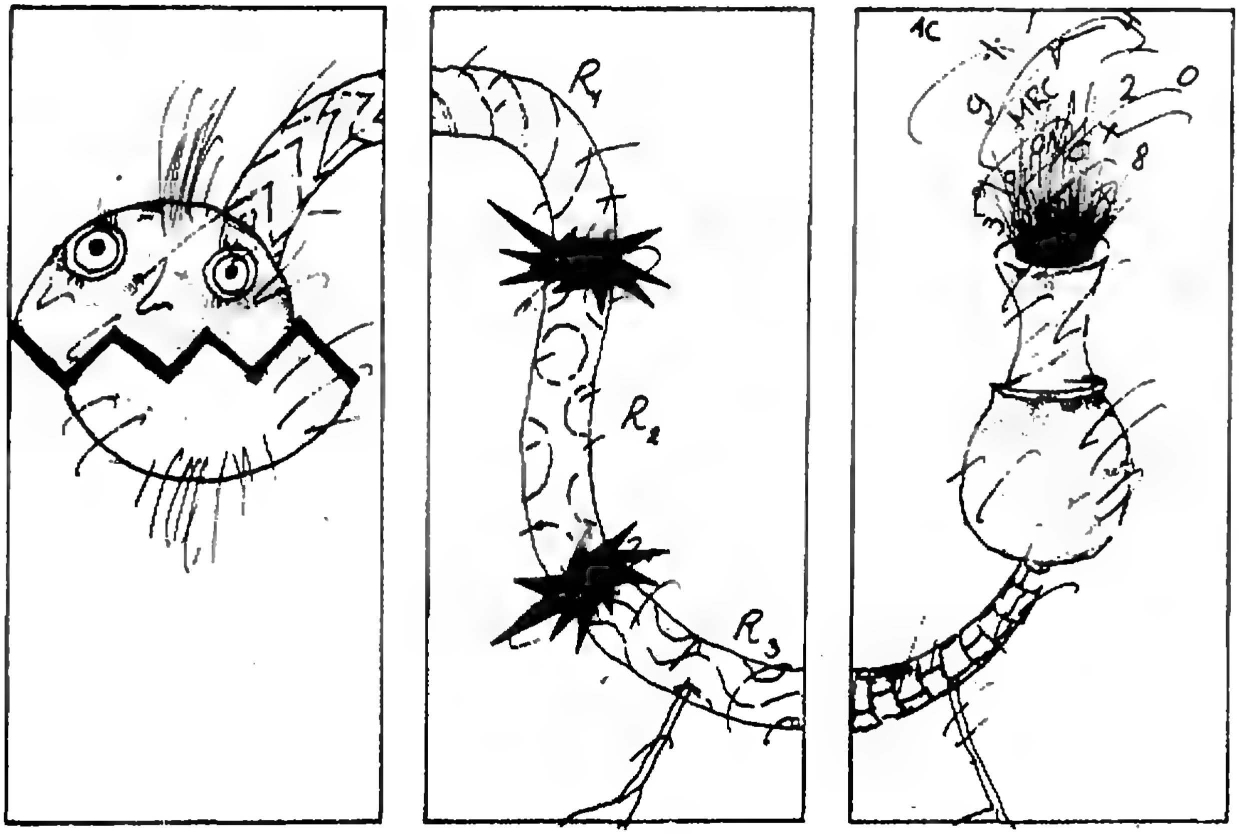
Так что — спокойно. Движение есть.

Честно говоря, квантовую механику я недолюбливал. Не очень понятная. Да и применима где-то уж очень глубоко в физике. Но уж если она на таком уровне себя проявила, что даже школьнику понятно, то я ее зауважал.

А Зенон-то каков? Это он, оказывается, намеки делал. Апория кучи — намек на теорию вероятностей и теорию нечетких множеств. Эти три апории — намек на интегральное и дифференциальное исчисления, бесконечные ряды, квантовую механику. Хороший мужик, уважаю.

Как сказал Пушкин: «... И гений, парадоксов друг».

К. Окунев



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Что произойдет, если исчезнет трение?

Публикуемая ниже заметка «Что произойдет, если исчезнет трение?» предназначена девятиклассникам, заметка «Об электрическом сопротивлении проводников» — десятиклассникам, «Компьютер — в холодильнике?!» — десятиклассникам и одиннадцатиклассникам. Впрочем, первую заметку мы рекомендуем прочитать всем старшеклассникам. И вот почему.

Несмотря на вездесущность трения в окружающем нас мире и кажущуюся простоту законов сухого трения, физика трения на микроскопическом уровне до конца не ясна и сегодня. Время от времени в научных журналах появляются статьи, в которых на основании той или иной модели из фундаментальных принципов физики выводятся опытные законы сухого трения. Заметку «Что произойдет, если исчезнет трение?» написали школьники. Они предлагают свою простую модель этого явления, отражающую многие его свойства и особенности.

Как показывают оценки, на преодоление трения и его разрушительных последствий человечество тратит примерно 5—10 % всей совершаемой им работы. Если же трение исчезнет, то в машинах, станках, двигателях и других различных устройствах, участвующих в современных производственных процессах, уменьшатся потери энергии, износ, шум.

Но, вместе с тем, если исчезнет трение, то... наступит хаос. Движущиеся поезда, автомобили, велосипеды, трамваи не смогут остановиться, а покоящиеся — не смогут тронуться с места. Беспомощно будут барахтаться пешеходы, сползая вместе с припаркованными автомобилями и другими предметами по уклонам улиц. Развяжутся узлы на всех нитках и веревках. Сами собой начнут раскручиваться гайки и выпадать шурупы. Обвиснут струны роялей, гитар. Смычки перестанут извлекать звуки из скрипок, альтов, виолончелей...

Но может ли исчезнуть трение? Что значит «трение отсутствует»? Что такое, наконец, сила трения? Об этом и пойдет речь в заметке.

Как известно, сила трения (точнее — сила сухого трения) F определяется коэффициентом трения k, зависящим от рода веществ, из которых сделаны трущиеся тела, и качества обработки их поверхностей, и силой N нормального давления одного тела на другое:

$$F = kN.$$

Представим себе, что у всех окружающих нас тел любой малый участок поверхности абсолютно гладкий, т. е. $k_i = 0$. Тогда при любой величине силы N_i, действующей на этот участок, $F_i = 0$. Очевидно, что это и означало бы, что трение *как свойство вещества* исчезло.

Однако оказывается, что даже если трение как свойство вещества исчезнет, сила трения между телами, тем не менее, может проявляться. Для того чтобы это пояснить, рассмотрим пример.

Изготовим из вещества, не обладающего трением, два тела, у которых соприкасающиеся поверхности имеют одинаковые бороздки с сечением в виде равнобедренных треугольников с углом при основании α, длиной основания $2l$ и высотой h (рис. 1). Пусть масса верхнего тела равна m и, соответственно, сила нормального давления верхнего тела на нижнее равна $N = mg$. Приложим к верхнему телу вдоль горизонтальной плоскости, «осредняющей» бороздки, силу F и будем пытаться с помощью этой силы медленно сдвинуть верхнее тело относительно нижнего. Понятно, что когда верхнее тело переместится по горизонтали на величину l, его центр тяжести поднимется на высоту h и тело приобретет потенциальную энергию

$$E_p = mgh.$$

При этом сила F совершит работу

$$A = Fl.$$

Согласно закону сохранения механической энергии,

$$E_p = A, \text{ или } mgh = Fl,$$

откуда

$$F = \frac{h}{l} mg.$$

Обозначим отношение h/l через k, учтем, что $mg = N$, и получим

$$F = kN.$$

Отсюда видно, что для того чтобы в условиях отсутствия трения одно тело начало движение по поверхности другого, надо приложить силу, величина которой определяется точно так же, как и величина силы трения.

Таким образом, предположение о том, что трение как свойство вещества исчезло, не привело к исчезновению силы трения. При этом коэффициент трения оказывается зависящим только от геометрических параметров неровностей на поверхности соприкасающихся тел.

Безусловно, всем хорошо известна задача, в которой смысл коэффициента трения иллюстрируется с помощью наклонной плоскости и находящегося на ней тела. Если менять угол наклона плоскости к горизонту, начиная от нуля, то коэффициент трения будет равен тангенсу такого угла α_0, при котором лежащее на плоскости тело начнет соскальзывать. Но и в рассмотренном нами идеализированном примере отсутствия трения как свойства вещества движение тела на наклонной плоскости начинается с углов α_0, для

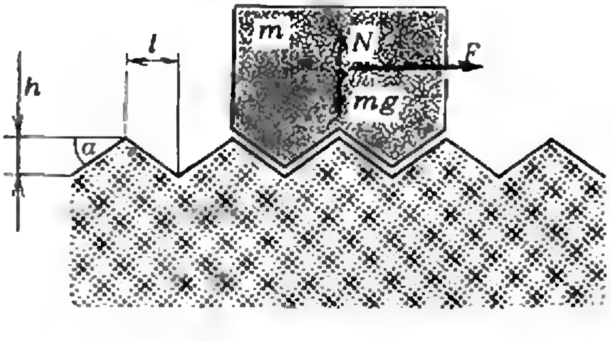


Рис. 1.

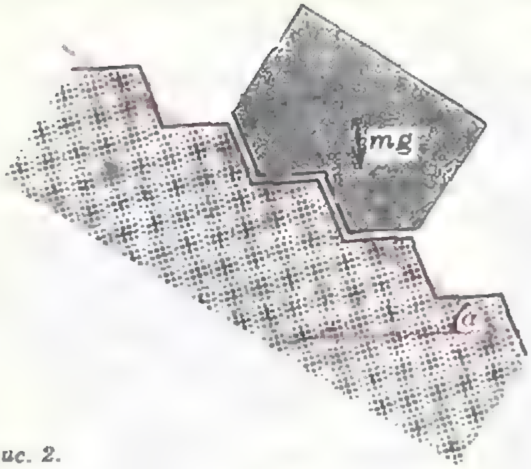


Рис. 2.

которых $\operatorname{tg}\alpha_0=h/l$ (рис. 2). Значит, опять коэффициент трения равен тангенсу угла наклона поверхности контакта тел, при котором одно тело начинает движение по поверхности другого.

Вернемся, однако, к нашему первому примеру (см. рис. 1). В действительности сила трения существует не только в начале движения, поэтому рассмотрим, что будет происходить с нашими идеальными телами, когда их взаимное перемещение по горизонтали станет больше l. Верхнее тело, поднявшись на гребень бороздки, начнет опускаться вниз, его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую, а в конце спуска произойдет удар о восходящую грань следующей бороздки. Если при этом опять окажется возможным полное преобразование кинетической энергии в потенциальную, т. е. будет возможен подъем верхнего тела на гребень следующей бороздки, то дальнейшее движение верхнего тела сможет осуществляться без приложения дополнительной силы. А это и будет означать, что сила трения исчезла. Если же этого не произойдет, то, несмотря на полное отсутствие трения как свойства вещества, сила трения сохранится.

Рассмотрим подробнее изменение скорости верхнего тела при ударе о грань следующей бороздки (рис. 3). Будем считать, что условия идеальные и при ударе нет потерь энергии (т. е. происходит абсолютно упругий удар). В таком случае справедлив известный закон: угол падения равен углу отражения; при этом углы отсчитываются от перпендикуляра к поверхности, с которой происходит соударение, т. е. от перпендикуляра к восходящей грани бороздки в нашем случае (см. углы γ на рисунке 3).

Обозначим скорость в конце спуска через $\vec{v}_1$ (она направлена вдоль плоскости спуска с бороздки), а скорость после удара — через v_2. Разложим эти скорости на составляющие вдоль осей X и Y, направленных по горизонтали и по вертикали соответственно*):

$$v_{1x}=v_1\cos\alpha,\quad v_{1y}=v_1\sin\alpha,$$
$$v_{2x}=v_2\cos\varphi,\quad v_{2y}=v_2\sin\varphi.$$

Из рисунка 3 найдем соотношение между углами α и φ:

$$\varphi=\pi-\alpha-2\gamma,$$
$$\gamma=\pi-\pi/2-2\alpha=\pi/2-2\alpha,$$

откуда

$$\varphi=3\alpha.$$

Воспользуемся известными из справочников формулами тригонометрии

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$
$$\sin 3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha,$$
$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

и запишем отношения соответствующих проекций скоростей после удара и до него:

$$\frac{v_{2x}}{v_{1x}}=\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=1-4\sin^2\alpha,$$

$$\frac{v_{2y}}{v_{1y}}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=-(1-4\cos^2\alpha).$$

В условиях сохранения энергии верхнее тело после удара о нижнее поднимется в точности на гребень следующей бороздки только в том случае, если вектор скорости $\vec{v}_2$ будет направлен вверх по плоскости бороздки, а величина скорости останется такой же, как и до удара. Этому отвечает условие

$$\frac{v_{2x}}{v_{1x}}=1 \quad\text{и}\quad \frac{v_{2y}}{v_{1y}}=-1.$$

Но, в силу приведенных выше формул, это возможно только при $\alpha=0$, т. е. когда поверхности соприкасаю-

---

*) На рисунке 3 допущена неточность: угол φ, как и угол α, должен отсчитываться от горизонтали. (*Примеч. ред.*)

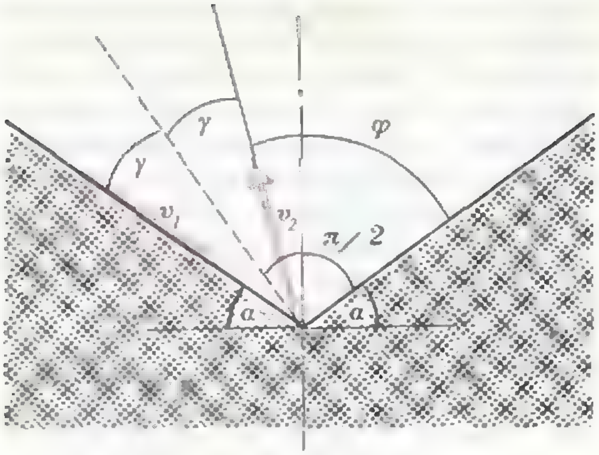


Рис. 3.

щихся тел абсолютно гладкие, без всяких бороздок! Во всех остальных случаях невозможно полное преобразование кинетической энергии в потенциальную такое, чтобы затем верхнее тело могло неограниченно продолжать свое движение без приложения внешней силы. Если, например, $v_{2x}/v_{1x}=1-4\sin^2\alpha<0$, т. е. $\alpha>\pi/6$, то компонента v_{2x} направлена навстречу движению, поэтому сила F должна не только компенсировать потери кинетической энергии при ее преобразовании в потенциальную, но и совершать работу, бо́льшую, чем в начале движения.

Из рассмотренного примера возникает парадоксальный вывод: если трение как свойство вещества и может исчезнуть, то это не приведет к исчезновению силы трения, включая и ее характерную особенность — различие в величине силы трения в начале движения и при его продолжении. Останутся также и такие сопутствующие трению явления, как шум из-за ударов неровностей друг о друга и разрушение поверхностей тел (если, например, сломать выступы бороздок окажется легче, чем подняться по ним вверх). Наконец, самое интересное следствие состоит в том, что сохраняется зависимость силы трения между телами от того, из какого вещества они изготовлены, так как при одинаковом способе механической обработки поверхностей форма неровностей для разных веществ может быть различной.

В. Агаян, И. Хазен

Об электрическом сопротивлении проводников

Как вам, безусловно, известно, электрическое сопротивление проводника зависит от материала, из которого он изготовлен, от размеров и формы проводника. Так, например, для однородного проводника постоянного сечения S и длиной l сопротивление

$$R=\rho\frac{l}{S}, \tag{1}$$

где ρ — удельное электрическое сопротивление. Иногда бывает удобнее говорить не о сопротивлении проводника, а об обратной ему величине — электрической проводимости.

Первым физиком, попытавшимся выяснить количественные закономерности прохождения постоянного электрического тока через проводники, был скромный школьный учитель из Кельна Георг Симон Ом (1789—1854). Результаты своих первых опытов Ом опубликовал в 1826 году.

Разумеется, в распоряжении Ома не было современных нам высокоточных электроизмерительных приборов и надежных источников тока, поэтому Ому по ходу дела пришлось решить целый ряд сложных практических задач.

Так, в качестве источников тока в своих первых опытах Ом использовал вольтовы столбы — чередующиеся слои двух разнородных металлов (например, серебра и цинка), разделенных бумагой, пропитанной раствором соли. При этом он заметил, что сила тока в гальванической цепи со временем заметно убывает. Ясно, что в таких условиях было почти бессмысленно заниматься установлением каких-либо количественных закономерностей. Когда же Ом познакомился с работами Зеебека (Томас Иоганн Зеебек (1770—1831) — немецкий физик), открывшего в 1821 году термоэлектрический эффект, то стал использовать в своих опытах термоэлемент, дающий достаточно стабильный ток. В установке Ома, схема которой изобра-

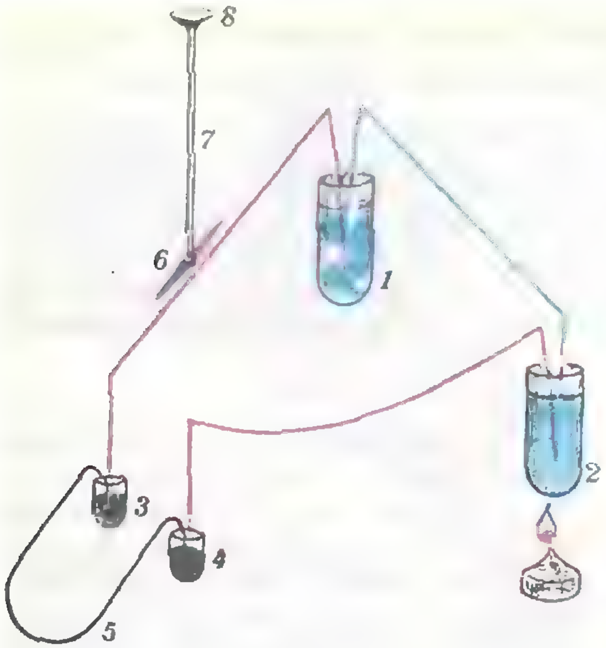


Рис. 1.

жена на рисунке 1, использовался термоэлемент, состоящий из висмутого стержня, спаянного с двумя медными проводами. Спай *1* поддерживался при температуре таяния льда, а спай *2* — при температуре кипения воды. Свободные концы 3 и *4* проводов были погружены в чашечки со ртутью. Сюда же погружались и предварительно зачищенные для лучшего контакта концы исследуемых проволок *5*.

Узнав об опытах Эрстеда (Ханс Кристиан Эрстед (1777—1851) — датский физик), обнаружившего в 1820 году действие электрического тока на магнитную стрелку, Ом решил характеризовать силу тока величиной угла отклонения магнитной стрелки, находящейся около проводника с током. Для этого проводник помещался в плоскости магнитного меридиана (см. рис. 1), в отсутствие тока в проводнике магнитная стрелка *6* располагалась над ним и была параллельной ему, а слегка сплющенная проволока *7*, к которой подвешивалась стрелка, деформирована не была. При протекании тока через проводник магнитная стрелка выходила из плоскости магнитного меридиана и закручивала подвес. Ом поворачивал головку *8*, где был закреплен верхний конец подвеса, так, чтобы стрелка снова оказывалась параллельной проводнику с током, и измерял угол поворота. Этот угол и принимался в качестве характеристики магнитного действия электрического тока.

Для исследования проводимости различных металлов Ом брал проволоки одинакового поперечного сечения, но изготовленные из различных материалов, и поочередно включал их в цепь. В качестве эталона он выбрал медную проволоку определенной длины, приняв ее проводимость за 1000 условных единиц, и измерил угол поворота головки, при котором магнитная стрелка становилась параллельной проводнику с током. Затем включал в цепь проволоки из других металлов и укорачивал их до тех пор, пока угол поворота головки не становился таким же, как и в случае эталонной проволоки. По полученной при этом длине можно было судить о проводимости соответствующего материала. Таким образом Ом нашел, что проводимость золота составляет 574 условных единицы, серебра — 356, цинка — 333 и т. д.

Затем Ом исследовал проволоки из одного и того же металла, но различной толщины, и поступал с ними так же, как при определении проводимости различных металлов. Он нашел, что сопротивления проволок из одного и того же материала одинаковы, если отношения их длин равны отношениям площадей их поперечных сечений, т. е. если отношения l/S у этих проволок одинаковы. Впоследствии было установлено, что сопротивление R прямо пропорционально этому отношению: $R \sim l/S$. Вводя коэффициент пропорциональности ϱ, зависящий от природы материала, можно для сопротивления проволоки записать соотношение (1). Покажем теперь, как, исходя из этого соотношения, можно получить известные вам формулы для подсчета общего сопротивления системы проводников, соединенных последовательно или параллельно.

Рассмотрим проводник постоянного поперечного сечения площадью S, изготовленный из какого-либо однородного материала с удельным сопротивлением ϱ. Обозначим его длину через l. Вообразим этот проводник состоящим из нескольких последовательно соединенных частей, например трех. Пусть их длины равны l_1, l_2 и l_3 (рис. 2). Очевидно, что

$$l=l_1+l_2+l_3.$$

Умножим обе части этого равенства на отношение ϱ/S:

$$\varrho\frac{l}{S}=\varrho\frac{l_1}{S}+\varrho\frac{l_2}{S}+\varrho\frac{l_3}{S}.$$

Но $\varrho l/S=R$ — сопротивление всего проводника, $\varrho l_1/S=R_1$, $\varrho l_2/S=R_2$ и $\varrho l_3/S=R_3$ — сопротивления его первой, второй и третьей частей соответственно. Таким образом,

$$R=R_1+R_2+R_3. \qquad (2)$$

Это и есть искомая формула для вычисления общего сопротивления при последовательном соединении проводников.

Теперь представим тот же проводник состоящим из нескольких, например опять же трех, параллельно соединенных частей с поперечными сечениями S_1, S_2 и S_3 (рис. 3). Аналогично предыдущему случаю,

$$S=S_1+S_2+S_3,$$

или, после умножения на общий множитель $1/(\varrho l)$,

$$\frac{S}{\varrho l}=\frac{S_1}{\varrho l}+\frac{S_2}{\varrho l}+\frac{S_3}{\varrho l}.$$

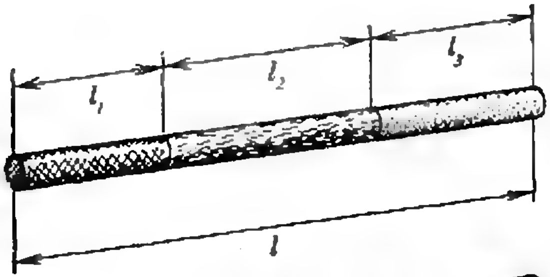


Рис. 2.

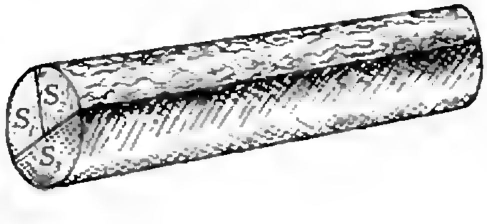


Рис. 3.

В соответствии с формулой (1),

$$\frac{S}{\varrho l}=\frac{1}{R},\quad \frac{S_1}{\varrho l}=\frac{1}{R_1},\quad \frac{S_2}{\varrho l}=\frac{1}{R_2}\quad\text{и}\quad \frac{S_3}{\varrho l}=\frac{1}{R_3},$$

поэтому получаем

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}. \qquad (3)$$

По этой формуле и можно найти общее сопротивление при параллельном соединении проводников.

Формулы (2) и (3) выведены здесь лишь для частного случая конкретного вида проводников — один и тот же материал, одинаковые поперечные сечения в первом случае и одинаковые длины во втором. Однако применимы они и для самых общих случаев.

М. Маринчук

Компьютер — в холодильнике?!

Каким вы представляете себе суперкомпьютер XXI века? Размером с небоскреб? Вряд ли. Так могли думать люди лет тридцать назад, когда появляющиеся электронные монстры работали на лампах или, в лучшем случае, на транзисторах и действительно занимали целые залы. Сегодняшние же компьютеры по размерам становятся все меньше и меньше.

Теперь самое время вспомнить, что при протекании по проводникам даже слабых токов выделяется джоулево тепло, происходит, как говорят, диссипация (рассеяние) энергии. Поэтому сверхминиатюризация неизбежно должна привести к перегреву и невозможности работы компьютера. Где же выход из этого тупика?

Одним из видимых сегодня путей является создание компьютеров следующих поколений на сверхпроводящих элементах, диссипация энергии в которых практически полностью отсутствует. О чудесном явлении протекания тока без сопротивления, называемом сверхпроводимостью, и пойдет речь в этой заметке.

Впервые о сверхпроводимости стало известно 28 апреля 1911 года, когда голландский ученый Г. Камерлинг-Оннес на заседании Королевской академии наук в Амстердаме сообщил о только что обнаруженном им поразительном эффекте — исчезновении электрического сопротивления ртутного образца, охлажденного с помощью жидкого гелия до рекордно низкой по тем временам температуры — до 4,15 К. Это явление резко противоречило сложившимся классическим представлениям об электронных свойствах металлов.

Сверхпроводимость стали интенсивно изучать. Вскоре выяснилось, что равенство нулю сопротивления сверхпроводника, по-видимому, выполняется не приблизительно, а строго (так, ток, возбужденный в сверхпроводящем кольце, мог циркулировать в нем годами, не изменяясь по величине). Обнаружились и другие удивительные свойства. Например — полное вытеснение магнитного поля из объема проводника при его переходе в сверхпроводящее состояние (это явление имеет место при не слишком сильных полях). Существенно расширился и ряд известных сверхпроводящих металлов. Перспективы практического применения обнаруженного явления казались безграничными: линии передачи энергии без потерь, сверхмощные магниты, сверхэнергоемкие аккумуляторы, новые виды транспорта...

Однако на пути реализации всех этих проектов стали два, непреодолимых, как казалось, препятствия. Первое — это чрезвычайно низкие температуры, при которых наблюдалась сверхпроводимость. Так, за 75 лет исследований во многих лабораториях мира критическую температуру — так называют температуру перехода вещества в сверхпроводящее состояние — удалось повысить лишь до 23 К. «Рекордсменом» стал в 1973 году сплав Nb_3Ge. Это обстоятельство делало нерентабельными почти все направления использования сверхпроводимости ввиду дороговизны необходимого для охлаждения дефицитного жидкого гелия.

Но было и второе препятствие — уже упоминавшаяся «боязнь» сверхпроводников проникновения в их объем магнитных полей. Причина такой «нелюбви» понятна — согласно закону электромагнитной индукции, проникновение поля привело бы к возникновению в сверхпроводнике бесконечно большого тока, который он пропустить просто не в состоянии. Однако, если «сверхпроводящие» токи возникнут в приповерхностном слое проводника, то своим магнитным полем они смогут полностью скомпенсировать внешнее поле. До определенного момента сверхпроводники так и «поступают», но затем «сдаются» и скачком переходят в нормальное, несверхпроводящее, состояние даже при низкой температуре (строго говоря, так ведут себя только так называемые сверхпроводники первого рода, но долгое время исследовались именно они, а о существовании иных просто не было известно). Это препятствие оказалось даже более неприятным, чем необходимость низких температур. И действительно, магнитное поле всегда сопутствует протеканию тока, следовательно, по сверхпроводнику невозможно пропустить достаточно большой ток, не разрушив при этом само сверхпроводящее состояние.

Несмотря на эти удручающие обстоятельства, ученые продолжали исследовать явление сверхпроводимости и накапливать данные о свойствах сверхпроводников. Неясным и загадочным оно оставалось на протяжении почти полувека. Лишь в 1957 году была создана последовательная микроскопическая теория, объяснившая удивительные свойства большинства из известных сверхпроводников. Явление сверхпроводимости оказалось связанным с возникновением в некоторых металлах своеобразного притяжения между электронами. Да, да, не удивляйтесь, именно притяжения, хотя электроны и одинаково заряженные частицы. Природа этого притяжения носит сугубо квантовый характер и тесно связана с взаимодействием электронов с окружающей их кристаллической решеткой. Благодаря такому притяжению, при достаточно низких температурах часть электронов в металле объединяются в так называемые куперовские пары (по имени их первооткрывателя Л. Купера). Они пребывают в особом квантовом состоянии, таком, что могут переносить электрический ток, не взаимодействуя при этом с кристаллической решеткой, а следовательно, не выделяя тепла.*) Для электронов, образующих куперовскую пару, взаимодействие с решеткой уже как бы реализовалось (объединением их в пару), и теперь они составляют «касту неприкасаемых». Удивительно, что размеры таких пар в атомном масштабе весьма велики — они могут достигать сотен и даже тысяч межатомных расстояний. Так что куперовскую пару следует представлять скорее не как двойную звезду, вращающуюся относительно ее центра масс, а как двух партнеров, которые вместе пришли на дискотеку, но, разделенные десятками других танцоров, танцуют в разных концах зала.**)

Создание теории сверхпроводимости послужило мощным импульсом к дальнейшим исследованиям этого явления. Примерно в то же время пало одно из двух главных препятствий на пути его практического применения — были открыты так называемые сверхпроводники второго рода, которые, частично впуская в себя магнитное поле (в виде отдельных вихрей), все же сохраняли свойство бездиссипативного протекания тока. Сверхпроводящие магниты пришли в лаборатории и на производство, однако их функционирование по-прежнему требовало дефицитного и дорогого жидкого гелия.

Высокотемпературная сверхпроводимость стала своеобразным Эльдорадо для физиков 60—80-х годов, но на протяжении длительного времени ее «поиски» оставались безрезультатными.

Открытый в 1973 году сплав Nb_3Ge с критической температурой $T=23$ К в течение 14 лет оставался рекордсменом, которому было еще очень далеко до желанного «азотного барьера», т. е. до возможности получения сверхпроводимости при охлаждении дешевым жидким азотом с температурой кипения (при атмосферном давлении) 77 К. И вот, в 1986 году весь мир (и, ввиду важности открытия, не только физический) облетела весть об открытии высокотемпературной сверхпроводимости. Обладателями этого свойства оказались керамические (!) соединения (вначале весьма капризные к способу их изготовления). Замечательно, что до тех пор все сверхпроводящие материалы в нормальном состоянии были металлами, хорошо проводящими электрический ток, керамические же вещества в нормальном состоянии проводили ток значительно хуже.

За короткое время критические температуры в новом классе сверхпроводников были подняты от 30 до 95 К, а затем и до 120—125 К. Сегодня явление сверхпроводимости при азотном охлаждении можно демонстрировать без особых ухищрений даже в школьном физическом кабинете.

Похоже, что сверхпроводящий компьютер XXI века из мечты становится близким будущим. Важный шаг для этого уже сделан.

А. Варламов

---

*) См. заметку автора «Как в металле протекает электрический ток?» («Квант», 1988, № 3).

**) Это сравнение принадлежит одному из создателей теории сверхпроводимости Р. Шрифферу и приведено в статье академика А. Абрикосова «Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи» («Квант», 1988, № 6).

$\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}}x$

Математический кружок

Об одном замечательном уравнении

Кандидат физико-математических наук
Ю. СИДОРОВ

Начнем с задачи, которую, по слухам, однажды предложили абитуриенту на устном вступительном экзамене.

Сколько корней имеет уравнение

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x=\log_{\frac{1}{16}}x? \qquad (1)$$

Если нарисовать эскиз графиков функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ при $0<a<1$ (рис. 1), может показаться, что эти графики обязательно пересекаются в одной точке, причем лежит эта точка на прямой $y=x$.

Однако непосредственно видно, что уравнение (1) имеет два корня: $x=\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{4}$ (убедитесь в этом подстановкой), причем соответствующие этим корням точки пересечения графиков *не лежат* на прямой $y=x$. Таким образом, уравнение (1) имеет как минимум три корня.

Этот факт удивляет большинство выпускников средних школ и, к сожалению, очень многих учителей, хотя задача достаточно «старая» и часто приводится в качестве примера, показывающего, что графический способ решения уравнений нужно применять с большой осторожностью. Секрет неверного решения задачи прост: на рисунке 1 изображены очень грубые эскизы графиков и это привело к неверному выводу о числе корней уравнения (1).

На рисунке 2 изображены более точные графики, построенные с помощью ЭВМ. Из этого рисунка невозможно увидеть, сколько корней имеет уравнение (1), так как кривые не идеально тонкие и поэтому практически сливаются на некотором промежутке.

Графики на рисунке 3 также построены с помощью ЭВМ. На этом рисунке уже отчетливо видно, что уравнение

$$\left(\frac{1}{64}\right)^x=\log_{\frac{1}{64}} x$$

имеет ровно три корня.

Если с помощью ЭВМ построить те же графики $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$ и $y=\log_{\frac{1}{16}} x$, выбирая за единицу, например, 100 см, то, как и на рисунке 3, можно увидеть, что уравнение (1) имеет (у нас нет возможности поместить здесь рисунок, сделанный машиной) ровно три корня. Однако никакая ЭВМ не может построить идеально точные графики. Поэтому доказательствам с помощью только рисунка верить нельзя и необходимы строгие математические рассуждения.

Мы изучим общее уравнение:

$$a^x=\log_a x \qquad (2)$$

при различных значениях a (разумеется, здесь $a>0$, $a\neq 1$).

Заметим, что при любом a уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$a^{a^x}=x. \qquad (2')$$

Вместе с уравнением (2′) рассмотрим уравнение

$$a^x=x. \qquad (3)$$

Пусть x_0 — корень уравнения (3). Тогда $a^{a^{x_0}}=a^{x_0}=x_0$, т. е. x_0 является также корнем уравнений (2′) и (2).

Итак, *если уравнение* (3) *имеет хотя бы один корень, то уравнение* (2) *также имеет корни.*

Сделаем еще одно замечание. При $a>1$ функция $f(x)=a^x$ возрастает. Уравнение (2′) можно записать так: $f(f(x))=x$, а уравнение (3) при этом принимает вид $f(x)=x$.

Лемма. *Если функция $y=f(x)$ — возрастающая, то уравнения $f(f(x))=x$ и $f(x)=x$ равносильны.*

Доказательство. Пусть x_0 — корень уравнения $f(x)=x$. Тогда $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$, так что x_0 является корнем первого уравнения. Наоборот, пусть $f(f(x_0))=x_0$, причем $x_0\neq f(x_0)$. Тогда либо $x_0>f(x_0)$, либо $x_0<f(x_0)$, а так как функция f возрастает, получаем, что в первом случае $f(x_0)>f(f(x_0))=x_0$, а во втором случае $f(x_0)<f(f(x_0))=x_0$. Противоречие.

Из леммы и сделанных ранее замечаний следует, что при $a>1$ уравнение (2) эквивалентно уравнению $a^x=x$.

Упражнения

1. Решите уравнение

$$2\sqrt[3]{2x-1}=x^3+1.$$

2. При каждом значении a решите уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$$

Исследование уравнения $a^x=x$

Сначала сформулируем одну замечательную теорему, о которой уже шла речь в журнале «Квант».

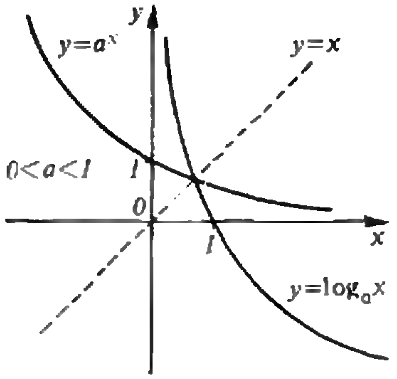


Рис. 1.

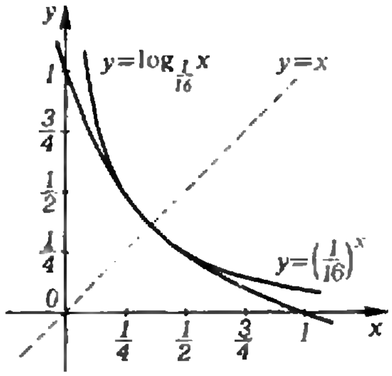


Рис. 2.

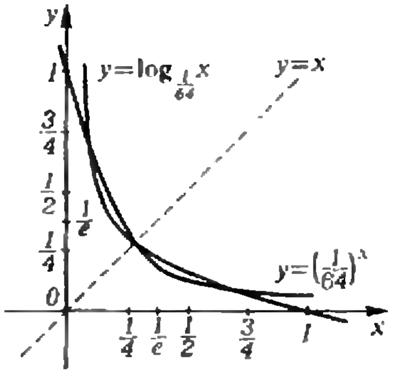


Рис. 3.

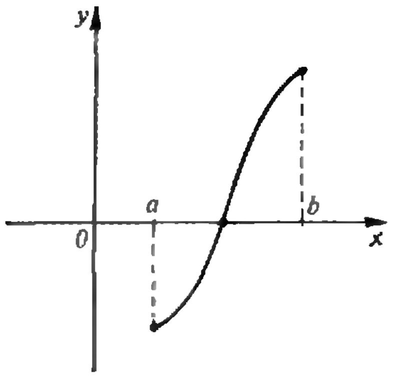


Рис. 4

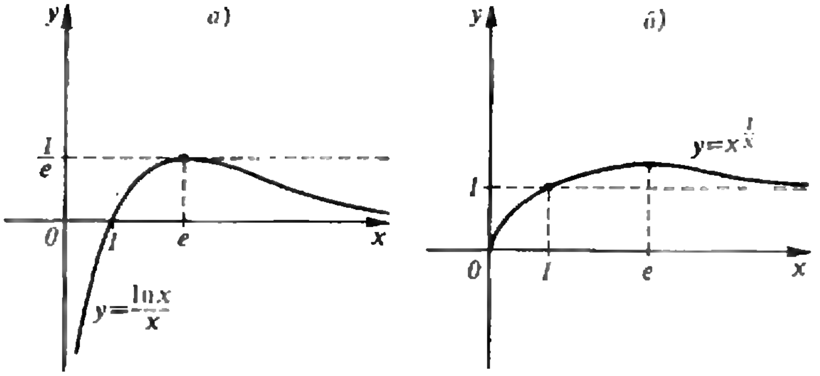


Рис. 5.

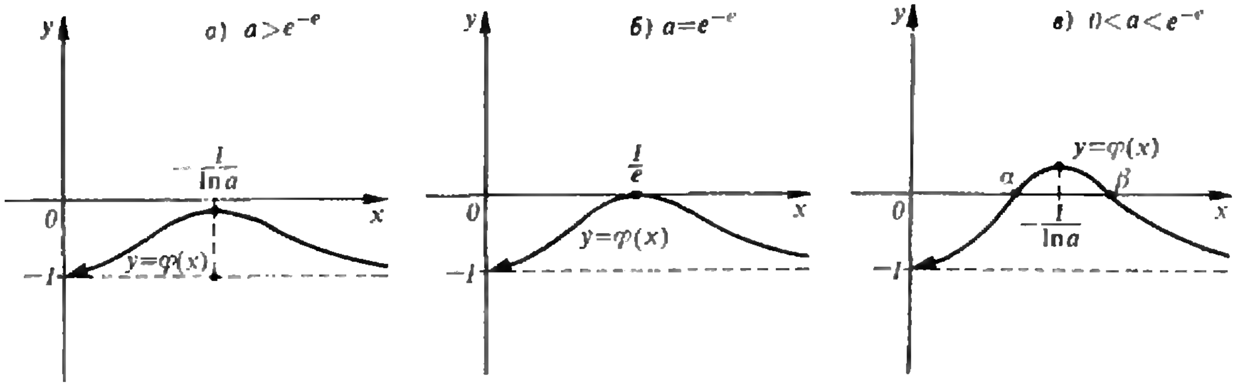


Рис. 6.

Теорема (Больцано — Вейерштрасса). *Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем $f(a)<0$, $f(b)>0$, то уравнение $f(x)=0$ имеет корень, принадлежащий интервалу $(a; b)$.*

Эта теорема доказывается в курсе математического анализа. Впрочем, смысл ее наглядно ясен: непрерывная кривая, показанная на рисунке 4, обязательно пересекает ось Ox. В дальнейшем мы будем неоднократно ею пользоваться.

В частности, если данная функция *возрастает* или *убывает* на отрезке $[a; b]$, то уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень принадлежащий промежутку $(a; b)$.

Теперь исследуем уравнение (3). Оно эквивалентно уравнению

$$\ln a=\frac{\ln x}{x}. \qquad (3')$$

Построим график функции $h(x)=\frac{\ln x}{x}$. Поскольку $h'=\frac{1-\ln x}{x^2}$, функция h возрастает при $x<e$ и убывает при $x>e$, а в точке $x=e$ достигает максимума, равного $\frac{1}{e}$ (рис. 5, *а*). Поэтому уравнение (3′) не имеет корней, если $\ln a>\frac{1}{e}$ (т. е. при $a>e^{\frac{1}{e}}$) и имеет единственный корень $x=e$ при $a=e^{\frac{1}{e}}$.

Упражнения

3. Докажите, что при $0<\ln a<\frac{1}{e}$, т. е. при $1<a<e^{\frac{1}{e}}$, уравнение (3′) имеет ровно два корня.

4. Пользуясь графиком рисунка 5, *а*, докажите, что график функции $y=x^{\frac{1}{x}}$ имеет вид, показанный на рисунке 5, *б*, и исследуйте уравнение $x^{\frac{1}{x}}=a$.

5. Постройте график функции $y=x^x$ и исследуйте уравнение $x^x=a$.

Итак, окончательно, при $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ уравнение (2) имеет ровно два корня, при $a=e^{\frac{1}{e}}$ — один корень $x=e$ и не имеет корней при $a>e^{\frac{1}{e}}$.

Случай $0<a<1$

При $0<a<1$ уравнение $a^x=x$ имеет единственный корень x_0.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=a^x-\log_a x$$

и изучим ее поведение. Для этого вычислим ее производную

$$f'(x)=a^x\ln a-\frac{1}{x\ln a}=\frac{xa^x\ln^2 a-1}{x\ln a}.$$

Рассмотрим теперь числитель полученной дроби $\varphi(x)=xa^x\ln^2 a-1$. Знаменатель ее отрицателен при всех $x>0$ и потому знак $f'(x)$ противоположен знаку $\varphi(x)$.

Упражнение 6. Докажите, что функция $\varphi(x)$ убывает при $x<-\frac{1}{\ln a}$, возрастает при $x>-\frac{1}{\ln a}$ и принимает свое наибольшее значение $\varphi_{\max}$ при $x=-\frac{1}{\ln a}$.

Из упражнения 6 следует, что если $\varphi_{\max}\leqslant 0$ при всех x, то функция $f(x)$ возрастает при всех $x>0$, так что x_0 является единственным корнем уравнения (2) (рис. 6, *а*, *б*).

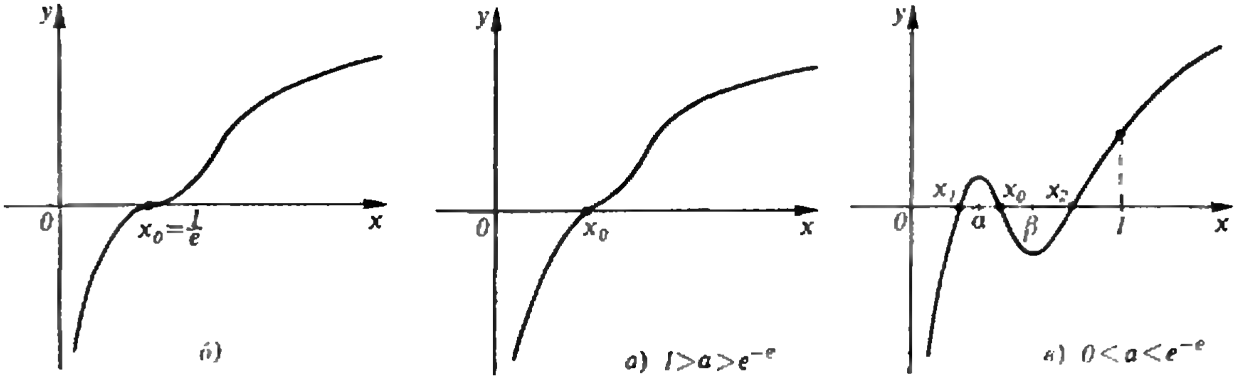
Решая неравенство $\varphi_{\max}=-\frac{\ln a}{e}-1\leqslant 0$, получаем $a\geqslant e^{-e}$. Итак, при $e^{-e}\leqslant a<1$ уравнение (2) имеет ровно один корень $x=x_0$.

Если же $0<a<e^{-e}$, то $\varphi_{\max}>0$, а график функции φ имеет вид, показанный на рисунке 6, *в*. Для обоснования этого достаточно заметить, что $\varphi(0)=-1$, а $\varphi(1)<0$. Графики функции $f(x)=a^x-\log_a x$ при $e^{-e}<a<1$ и $a=e^{-e}$ показаны на рисунках 7, *а*, *б*.

Упражнение 7. Докажите, что $\varphi(1)=a\ln^2 a-1<0$ при $0<a<e^{-e}$. **Указание.** Найдите максимум функции $g(a)=a\ln^2 a$.

Из упражнения 7 следует, что функция $\varphi(x)$ равна нулю в двух точках α и β, причем $0<\alpha<-\frac{1}{\ln a}$, а $-\frac{1}{\ln a}<\beta<1$.

Это значит, что функция f возрастает при $x\in(0,\alpha)$, убывает при $x\in(\alpha;\beta)$ и снова возрастает при



б)

а) $1>a>e^{-e}$

в) $0<a<e^{-e}$

Рис. 7.

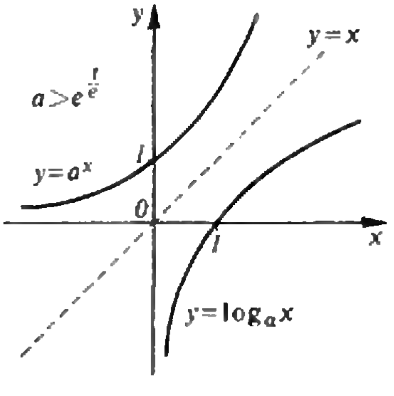


Рис. 8.

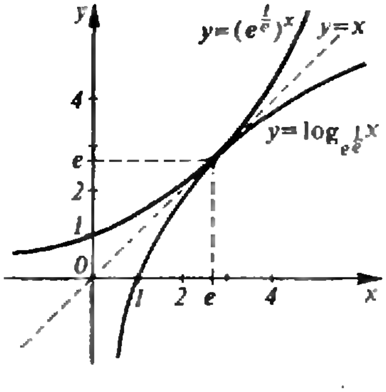


Рис. 9.

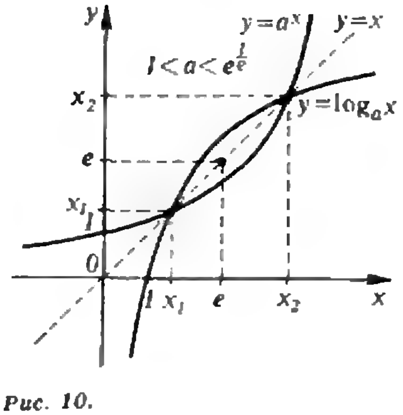


Рис. 10.

$x\in(\beta;1)$. Таким образом, точки α и β являются соответственно: α — точкой максимума, а β — точкой минимума функции f (график этой функции показан на рисунке 7, *в*).

Для завершения нашего исследования докажем, что $\alpha<x_0<\beta$.

Упражнение 8. Докажите, что $x_0<\frac{1}{e}$ при $0<a<e^{-e}$. **Указание.** *Предположив, что* $x_0>\frac{1}{e}$, получим $x_0=a^{x_0}<a^{\frac{1}{e}}<\frac{1}{e}$ — противоречие!

Вычислим теперь $\varphi(x_0)=x_0^2\ln^2 a-1=\ln^2 a^{x_0}-1=\ln^2 x_0-1$. Так как $\ln x_0<-1$, сразу получаем $\varphi(x_0)>0$, так что $f'(x_0)<0$, т. е. $\alpha<x_0<\beta$.

Отсюда следует, что $f(\alpha)>0$, а $f(\beta)<0$, а из свойств монотонности функции f окончательно получаем, что на промежутках $(0;\alpha)$, $(\alpha;\beta)$ и $(\beta;1)$ уравнение (2) имеет по одному корню, а на промежутке $(1;\infty)$ корней не имеет.

Окончательный результат таков: при $0<a<e^{-e}$ уравнение $a^x=\log_a x$ имеет три корня. При $e^{-e}\leqslant a<1$ — один корень.

Упражнение 9. Докажите, что при различных значениях a взаимное расположение графиков функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ такое, как показано на рисунках 8, 9 и 10. Постройте соответствующие графики при $e^{-e}<a<1$, $a=e^{-e}$ и $0<a<e^{-e}$.

О трисекции угла и удвоении куба

Как известно, с помощью циркуля и линейки невозможно осуществить трисекцию произвольного угла (построить угол, втрое меньший данного) и удвоение куба (построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема куба с данным ребром). Однако, если привлечь дополнительные механические устройства, обе задачи поддаются решению.

Устройство для трисекции угла изобрел югославский ученый *Б. Шабрич* (рис. 1). Оно состоит из стержней a и b длинами $2R$, шарнирно закрепленных в центре окружности O радиусом R. Массы стержней a и b равны m и $2m$. Невесомый стержень OM длиной R соединяет центр окружности с концом M стержня b. Штифт T, соединяющий стержни a и b, способен передвигаться по окружности.

Подвесим описанное устройство вертикально за точку V и закрепим стержень OM под углом α к вертикали. Точка T займет такое положение, когда потенциальная энергия системы минимальна (т. е. центр тяжести стержней a и b занимает наиболее низкое положение). Пусть стержень a составляет с вертикалью угол β. Центр тяжести стержня a находится на расстоянии $R\cos\beta$ от горизонтали OO', проходящей через точку O, а центр тяжести стержня b — на расстоянии $R\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\alpha\right)$ от этой горизонтали. Следовательно, центр тяжести системы находится на расстоянии

$$f(\beta)=\frac{1}{3m}\left(mR\cos\beta+2mR\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\alpha\right)\right)=\frac{1}{3}R\left(\cos\beta+2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos\alpha\right)$$

от горизонтали OO'.

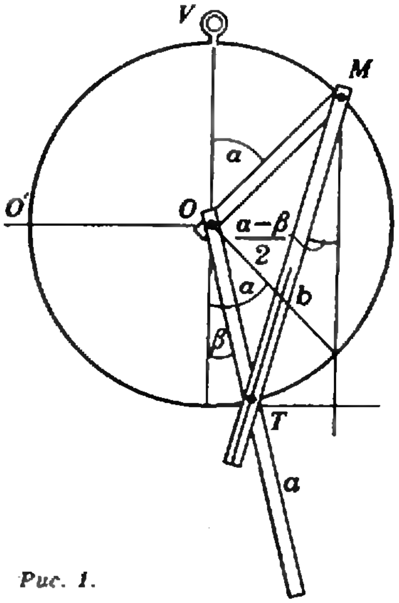


Рис. 1.

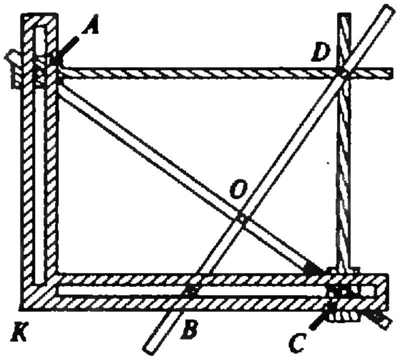


Рис. 2.

Минимум функции $f(\beta)$ достигается при $f'(\beta)=0$, т. е. при

$$-\sin\beta+\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

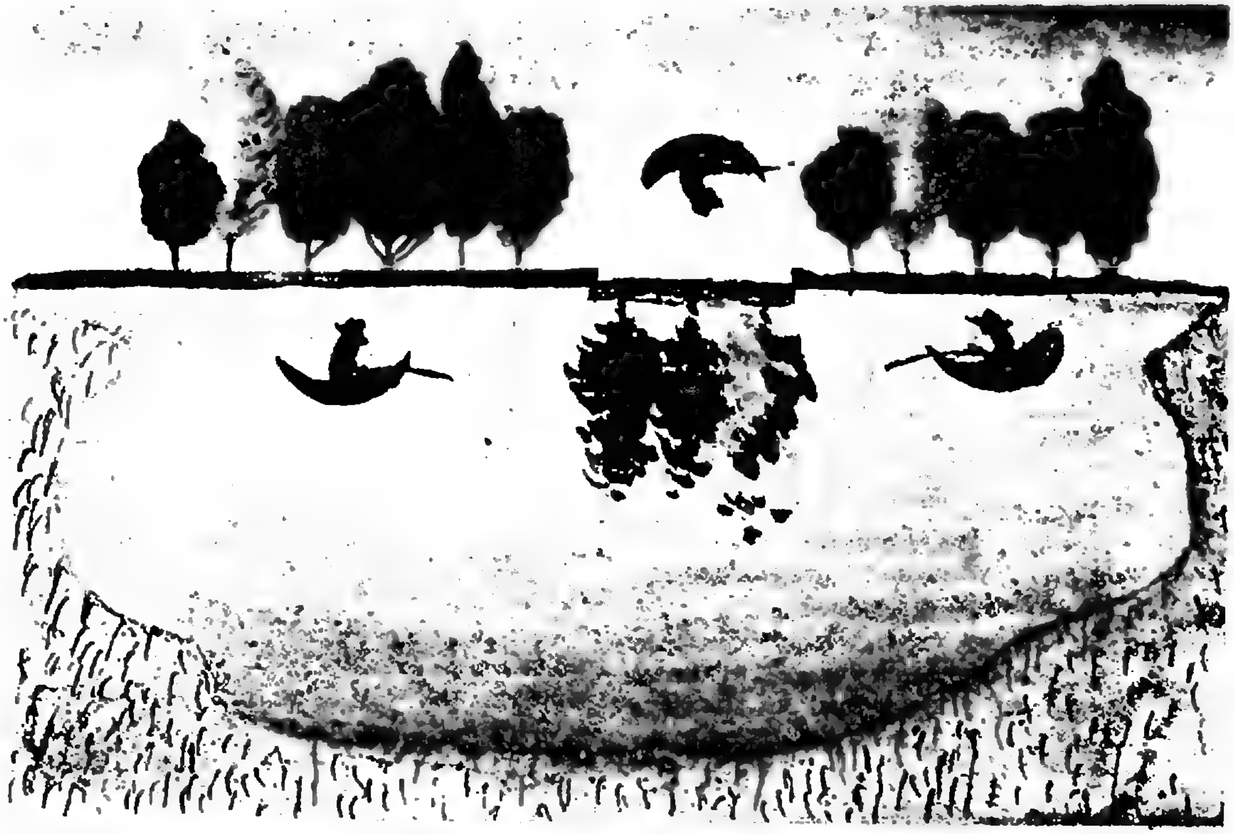
Отсюда $\beta=\frac{\alpha-\beta}{2}$, т. е. $\beta=\alpha/3$. Итак, угол β равен трети данного угла α.

Устройство для «удвоения куба» (рис. 2) известно очень давно. Оно состоит из жесткого прямого угла AKC, двух стержней AD и DC, способных скользить по сторонам AK и KC, оставаясь им перпендикулярными, и диагонального прямого креста. На кресте — штифты A и B, способные скользить по пазам угла AKC, причем $OA=2OB$. Из подобия треугольников BOC, COD и DOA следует, что

$$\frac{BO}{OC}=\frac{OC}{OD}=\frac{OD}{OA}.$$

Из этих пропорций, используя равенство $OA=2OB$, находим $OA^3=2OD^3$.

Итак, если дан куб с ребром длиной OD, то куб с ребром OA имеет вдвое больший объем.



Практикум абитуриента

Решение неравенств методом интервалов

Кандидат педагогических наук
В. ЗАТАКАВАЙ

Эта статья адресована старшеклассникам (10—11 классы) и может быть использована при подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

При решении неравенств обычно используются два стандартных подхода. Рассмотрим их на примере простого неравенства

$$\frac{x-1}{x-2}>0.$$

Это неравенство сводится к двум системам:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x-1<0, \\ x-2<0. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $x>2$, или $(2;\,+\infty)$. Из второй — $x<1$, или $(-\infty;\,1)$. Решение исходного неравенства: $(-\infty;\,1)\cup(2;\,\infty)$.

Другой метод — это известный метод интервалов. Его идея очень проста. Так, в данном случае числитель дроби $\frac{x-1}{x-2}$, обращаясь в 0 при $x=1$, сохраняет знак «минус» на полупрямой $(-\infty;\,1)$ и знак «плюс» на полупрямой $(1;\,\infty)$.

Знаменатель дроби, обращаясь в 0 при $x=2$, сохраняет знак «минус» на полупрямой $(-\infty;\,2)$ и «плюс» — на $(2;\,\infty)$. Таким образом, дробь может изменить знак лишь при переходе через точки $x=1$ и $x=2$ и, следовательно, сохраняет тот или иной знак

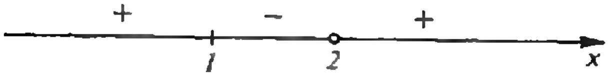


Рис. 1.

на каждом из трех промежутков: $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$ и $(2; +\infty)$ (рис. 1).

На таком простом примере легко вспомнить идею метода интервалов, но нельзя увидеть никаких его заметных преимуществ. Другое дело — более сложные неравенства.

Пример 1.

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\geqslant\frac{1}{x-3}.$$

Решение. После переноса дроби $\frac{1}{x-3}$ в левую часть и приведения к общему знаменателю получаем:

$$\frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}\geqslant 0.$$

Первый подход к решению этого неравенства — с помощью систем неравенств — приводит к рассмотрению довольно большого числа систем. Метод интервалов в данном случае гораздо более рационален. Функция $f(x)=\frac{x^2-6x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ определена на всей числовой оси за исключением «нулей» знаменателя — точек 1, 2, 3. Нули числителя: $3-\sqrt{2}$ и $3+\sqrt{2}$. Нанесем все пять точек на ось. На каждом из шести образовавшихся промежутков функция $f(x)$ сохраняет тот или иной знак.

Ответ фактически «нарисован» (рис. 2), остается лишь аккуратно его записать.

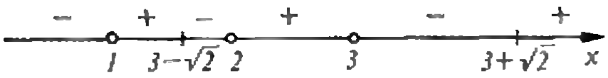


Рис. 2.

Ответ: $(1; 3-\sqrt{2}]\cup(2; 3)\cup[3+\sqrt{2}; +\infty)$.

В рассмотренном примере знаки в промежутках знакопостоянства функции чередуются. Однако делать «обобщение», что так будет происходить всегда, разумеется, не следует.

Пример 2.

$$\frac{(x+2)^2}{x-1}\geqslant 0.$$

Решение. Это неравенство весьма «коварно». Часто учащиеся решают его следующим образом: так как $(x+2)^2\geqslant 0$ при всех x, знак дроби зависит от знака знаменателя, откуда получается $x>1$. Неполнота ответа очевидна: изолированная точка $x=-2$ также удовлетворяет *нестрогому* неравенству. Метод же интервалов, наряду с «компактностью», в большей степени помогает избежать такого рода ошибок (рис. 3).

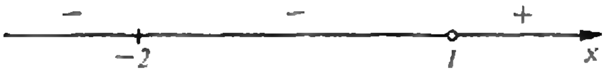


Рис. 3.

Остается записать промежутки и точки, в которых функция $f(x)=\frac{(x+2)^2}{x-1}$ принимает неотрицательные значения.

Ответ: $\{-2\}\cup(1; +\infty)$.

Заметим, что в этом примере при переходе через $x=-2$ знак функции не изменился. Это связано с «кратностью» нуля функции. Очевидно, что если кратность нуля — четная (в данном случае кратность нуля $x=-2$ равна двум), то знак функции при переходе через такую точку не меняется; если кратность нуля — нечетная, то знак функции меняется на противоположный. В школе, как правило, выясняют знак функции на каждом из промежутков знакопостоянства. Это разумно, но в практике вступительных экзаменов встречаются весьма «неудобные» промежутки: определение знака на них сопряжено с вычислительными трудностями. Поэтому учет кратности корня зачастую облегчает решение.

Применимость метода интервалов не ограничивается решением рациональных неравенств. Универсальность метода основана на достаточно наглядном свойстве непрерывных функций: «Если на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак»*).

Рассмотрим еще несколько примеров.

---

*) См. например, учебное пособие «Алгебра и начала анализа 9—10», М.: Просвещение, 1988, с. 98.

Пример 3.

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geqslant 2.$$

Решение. Область определения $x \leqslant 2$, $x \neq 0$. Приведем неравенство к виду

$$\frac{\sqrt{2-x}+2x-3}{x} \geqslant 0.$$

Для того чтобы найти нули числителя, необходимо решить иррациональное уравнение $\sqrt{2-x}=3-2x$. При решении иррациональных уравнений из-за возведения в квадрат могут возникнуть посторонние решения, от которых необходимо избавиться (в данном случае $x=1\frac{3}{4}$ — постороннее решение).

Итак, нуль числителя при $x=1$. Решение неравенства представлено на рисунке 4.

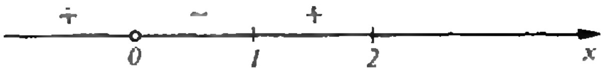


Рис. 4.

Ответ: $(-\infty;\,0)\cup[1;2]$.

Пример 4.

$$\frac{1}{3+\sqrt{9-x^2}}+\frac{1}{3-\sqrt{9-x^2}} > \frac{1}{x}.$$

Решение. Область определения находится из следующих условий: $9-x^2 \geqslant 0$, $3-\sqrt{9-x^2} \neq 0$, $x \neq 0$, т. е. $[-3;\,0)\cup(0;\,3]$. Причем в данном случае важно зафиксировать эту область с самого начала, так как уже на подготовительном этапе после очевидных преобразований выражение $\sqrt{9-x^2}$ исчезает, и получающееся неравенство $\frac{6-x}{x^2} > 0$ имеет гораздо более «широкие» и область определения, и решение.

Решение неравенства $\frac{6-x}{x^2} > 0$, а именно $(-\infty;\,0)\cup(0;\,6)$, ограниченное областью определения исходного, приводит к **ответу**: $[-3;\,0)\cup(0;\,3]$.

Пример 5.

$$\log_2\sqrt{7-x}\cdot\log_{(x-1)}4 \leqslant 2.$$

Решение. Область определения задается условиями $7-x>0$, $x-1>0$, $x-1 \neq 1$, т. е. $(1;\,2)\cup(2;\,7)$.

На подготовительном этапе получаем:

$$\frac{\log_2\sqrt{7-x}}{\log_4(x-1)} \leqslant 2,$$

и далее,

$$\frac{\log_2(7-x)-2\log_2(x-1)}{\log_2(x-1)} \leqslant 0.$$

Последнее неравенство, с учетом найденной ранее области определения, равносильно исходному неравенству.

Нули числителя определяются из уравнения

$$\log_2(7-x)=2\log_2(x-1).$$

При решении логарифмического уравнения есть опасность приобрести посторонние корни: $7-x=(x-1)^2$, или $x^2-x-6=0$. Здесь решение $x=3$ — корень нашего логарифмического уравнения, а решение $x=-2$ — посторонний корень, так как $-2-1=-3<0$.

Нуль знаменателя — $x=2$.

На рисунке 5 представлено решение исходного неравенства.

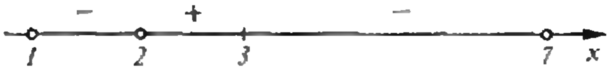


Рис. 5.

Ответ: $(1;\,2)\cup[3;\,7)$.

Пример 6.

$$\log_{(x^2-2x+1)}(3-x) \leqslant 1.$$

Решение. В примере содержится «коварная» подсказка: полный квадрат разности в основании логарифма провоцирует желание избавиться квадрата:

$$\frac{1}{2}\log_{|x-1|}(3-x) \leqslant 1.$$

Рассмотрение логарифмического неравенства, содержащего знак модуля, связано с известными трудностями. На мой взгляд, более рационально привести логарифм к некоторому конкретному основанию, скажем к основанию e, и воспользоваться методом интервалов.

Условия $x^2-2x+1 \neq 0$, $x^2-2x+1 \neq 1$, $3-x>0$ дают область определения: $(-\infty;\,0)\cup(0;\,1)\cup(1;\,2)\cup(2;\,3)$.

Переходим к основанию e:

$$\frac{\ln(3-x)}{\ln(x^2-2x+1)} \leqslant 1.$$

Получаем

$$\frac{\ln(3-x)-\ln(x^2-2x+1)}{\ln(x^2-2x+1)} \leqslant 0.$$

Нули числителя определяются из уравнения $3-x=x^2-2x+1$, а именно, $x=-1$, $x=2$; нули знаменателя — из условия $x^2-2x+1=1$, а именно, $x=0$, $x=2$. Хотя для расстановки знаков на каждом промежутке можно привлечь соображения кратности корня, мы рекомендуем здесь все же проверить знаки на каждом промежутке непосредственно (рис. 6).

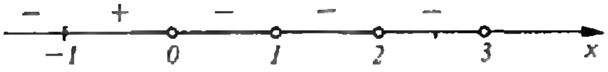


Рис. 6.

Крайне полезен метод интервалов при решении тригонометрических неравенств, точнее, неравенств, содержащих тригонометрические функции.

Пример 7.

$$\frac{\sqrt{7+12x-4x^2}}{\cos x} \leqslant 0.$$

Решение. Область определения задается следующими условиями:

$7+12x-4x^2 \geqslant 0$, $\cos x \neq 0$, т. е. $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{7}{2}\right]$.

Как и в примере 2, типичная ошибка здесь — потеря изолированного значения $x=-0{,}5$, удовлетворяющего *нестрогому* неравенству.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{7}{2}\right]$.

Решать любое неравенство методом интервалов вовсе не обязательно. В то же время метод интервалов весьма универсален, и во многих случаях его применение облегчает решение.

Предлагаем несколько неравенств для самостоятельного решения.

1. $\dfrac{x^4-2x^2-8}{x^2+2x+1} \leqslant 0.$
2. $\dfrac{2x+5}{|x+1|} \geqslant 1.$
3. $(2+x)\sqrt{x^2-2x-3} \geqslant 0.$
4. $\dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \dfrac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$
5. $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5 > 1.$
6. $\log_{16}(x^2-5x+6)\cdot\log_{(3-x)}4 \leqslant \dfrac{0{,}25}{\log_4(3-x)}.$
7. $\dfrac{(|x|-1)(2^x-2)}{\sqrt{3-x}+2x} \leqslant 0.$
8. $\dfrac{\sqrt{x-0{,}5}}{\log_3 x^2} \geqslant 0.$
9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant 0.$
10. $\dfrac{x^2+2x-8}{\sqrt{\sin x}} \leqslant 0.$

Внимание!

Берет старт новый конкурс!

Двадцатый век, открывший человечеству дорогу в Космос, подходит к концу. Следующий век станет веком интенсивного освоения космического пространства. Если вы хотите приблизить наступление новой эры, если у вас есть оригинальные идеи и технические решения, для которых малы земные масштабы, если вы исполнены желания реализовать свой творческий потенциал и испытать себя в серьезном и перспективном деле, примите участие в конкурсе

АСТРОИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Организаторы конкурса: Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз», Выставочный комплекс «Наука» ВДНХ СССР, Авиационный научно-технический центр «Союз».

Победителей конкурса ждут награды: первая премия — 3000 рублей, две вторых премии — по 1000 рублей и три третьих — по 500 рублей, а также поощрительные призы.

На конкурс принимаются проекты космических поселений, технологических сооружений и энергетических установок; ресурсодобывающих, информационных и других космических систем; авиационных и космических тренажеров, игр, медицинских систем диагностики и оздоровления.

Первый этап конкурса будет проходить по 30 ноября 1990 года. Ваши проекты просим присылать по адресу: 101000, Москва, а/я № 924, ВАКО «Союз», «Конкурс астроинженерных конструкций».

Ждем Ваших необычных проектов!

ВАКО «Союз»

Варианты вступительных экзаменов

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в различные вузы в 1989 году.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Бригада трактористов вспахала 300 га земли. Если бы в бригаде было на 3 трактора больше, она бы закончила работу на 5 дней раньше. Сколько тракторов было в бригаде, если один трактор обрабатывал 15 га в день?

2. Решите уравнение

$$\cos x-\sin(5x+3\pi/2)=\sqrt{3}\cos(3x+\pi).$$

3. Решите уравнение

$$\log_2\left(\frac{3}{8}x+1\right)=1-\log_2 x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-2}<0.$$

5. Найдите все значения параметра k, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y-\dfrac{1}{2}=k(x+2),\\ y=\sqrt{x} \end{cases}$$

имеет решение.

6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого AA_1 — одно из ребер, через вершину A, середину ребра A_1D_1 и центр грани D_1DCC_1 проведена плоскость. Из всех сечений куба, параллельных этой плоскости, найдите сечение с наибольшей площадью; определите его площадь, считая длину ребра равной a.

Вариант 2

1. Расстояние между пунктами A и B равно 60 км, причем 2/3 дороги приходится на шоссе, а остальная часть — на грунтовую дорогу. Найдите скорость движения автомобиля по грунтовой дороге и по шоссе, если по шоссе скорость его движения на 20 км/ч больше его скорости по грунтовой дороге, а на весь путь он затратил всего 2 часа.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg(3x^2-12x+13)}{\lg(x-1)}=2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{2^x+3}<\frac{1}{2^{x+2}-1}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \lg(4+y)=\lg x,\\ a-y=\dfrac{1}{2}(x+a)^2 \end{cases}$$

имеет решение.

6. В сферу радиусом R вписана правильная треугольная пирамида, у которой апофема равна диаметру окружности, описанной вокруг основания. Между сферой и пирамидой расположена правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой наибольший объем может иметь призма?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шайба массой $m=50$ г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l=50$ см, останавливается. Найдите работу силы трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения $\mu=0{,}15$.

2. Санки, движущиеся по льду со скоростью $v_0=6$ м/с, въезжают на асфальт. Длина полозьев санок $L=2$ м, коэффициент трения санок об асфальт $\mu=1$. Какой путь пройдут санки до полной остановки?

3. Легкая пружина жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. С высоты H над столом на нее падает небольшой шарик массой m. Какую максимальную скорость будет иметь шарик при своем движении вниз? Трением пренебречь.

4. Гладкий легкий горизонтальный стержень AB может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. На стержне находится небольшая муфточка массой m, соединенная невесомой пружиной длиной l_0 с концом A. Жесткость пружины k. Какую работу надо совершить, чтобы эту систему медленно раскрутить до угловой скорости ω?

5. По газопроводной трубе идет углекислый газ при давлении $p=4\cdot10^5$ Па и температуре $t=7$ °C. Какова средняя скорость движения газа в трубе, если за время $\tau=10$ мин протекает масса газа $m=2$ кг? Площадь сечения трубы $S=5$ см^2.

6. В откачанном сосуде объемом $V=1$ дм^3 находится $m=1$ г гидрида урана (UH_3). При нагреве до температуры $t=400$ °C гидрид урана полностью разлагается на уран и водород. Найдите давление водорода в сосуде при этой температуре. Атомная масса урана $A=238$.

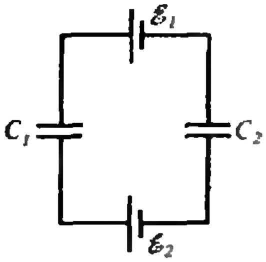


Рис. 1.

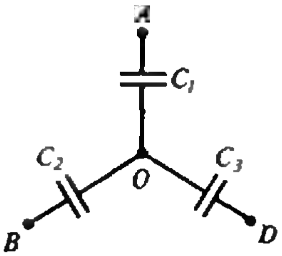


Рис. 2.

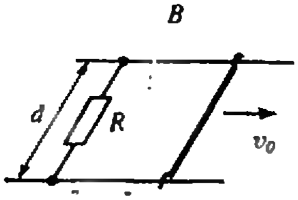


Рис. 3.

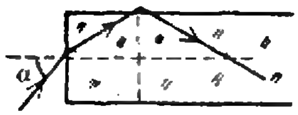


Рис. 4.

7. Определите напряжения на конденсаторах (рис. 1), если $\mathscr{E}_1=12$ кВ, $\mathscr{E}_2=13$ кВ, $C_1=3$ мкФ, $C_2=7$ мкФ. Проводимостью диэлектриков пренебречь.

8. Три незаряженных конденсатора, емкости которых равны C_1, C_2 и C_3, соединены, как показано на рисунке 2, и подключены к точкам A, B и D. Потенциалы этих точек равны φ_A, φ_B и φ_D соответственно. Определите потенциал общей точки O.

9. По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми d, может скользить без трения перемычка массой m (рис. 3). Рельсы соединены резистором сопротивлением R и помещены в вертикальное однородное магнитное поле, индукция которого равна B. Перемычке сообщают скорость v_0. Найдите путь, пройденный перемычкой до остановки. Как зависит ответ от направления вектора индукции $\vec{B}$?

10. На торец стеклянного стержня падает свет под углом α (рис. 4). Каким должен быть наименьший показатель преломления стекла, чтобы свет, вошедший в стержень, не мог выйти через его боковую стенку независимо от угла α?

Публикацию подготовили
Л. Паршев, Ю. Струков

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$6+4\sqrt{3-x}=5x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{4}{\lg 10x}-\frac{5}{\lg 100x}\geqslant 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x-4\sin x\cos x=0.$$

4. К бассейну объемом 1200 м^3 подведены две трубы: подающая и отводящая. Если открыть одновременно обе трубы, то бассейн заполнится за 60 часов. Если же открыта только одна труба, то заполнение бассейна водой продолжается на два часа меньше, чем его освобождение от воды. Сколько воды в час пропускает каждая труба?

5. Определите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана третьей стороны равна 2.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$x^2+2x-4\leqslant x+2.$$

2. Решите уравнение

$$x+\log_2(9-2^x)=3.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\cos 2x.$$

4. Путь от A до B пассажирский поезд проходит на 3 ч 12 мин быстрее товарного. За то время, что товарный поезд проходит путь от A до B, пассажирский проходит на 288 км больше. Если скорость каждого поезда увеличить на 10 км/ч, то пассажирский пройдет расстояние от A до B на 2 ч 24 мин быстрее товарного. Определите расстояние от A до B.

5. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами p_1 и p_2. Найдите стороны треугольника.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$|x-2|=3x-4.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x+1}+\frac{1}{3^x-3}\leqslant 0.$$

3. Решите уравнение

$$1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$$

4. Один турист вышел в 6 ч, а второй навстречу ему — в 7 ч. Они встретились в 8 ч и, не останавливаясь, продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, откуда вышел второй, на 28 мин позже, чем второй пришел в то место, из которого вышел первый. Каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

5. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника удалена от катетов на расстояния соответственно 3 и 4. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Танк, движущийся со скоростью $v_0=36$ км/ч, притормаживает одну из гусениц так, что ось ее ведущего колеса начинает двигаться вперед со скоростью $v_1=32{,}4$ км/ч. Рас-

стояние между гусеницами $l=2$ м. Под каким углом к первоначальному направлению движения будет двигаться танк спустя время $t=2$ с?

2. Лягушка сидит на конце доски длиной $l=0{,}8$ м. Доска плавает на поверхности пруда. С какой минимальной скоростью должна прыгнуть лягушка, чтобы оказаться после прыжка на другом конце доски? Массы лягушки и доски одинаковы. Трением о воду пренебречь.

3. Автомобиль с работающим двигателем, имея начальную скорость $v=72$ км/ч, въезжает в гору, поверхность которой наклонена под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Гору какой высоты может преодолеть автомобиль, если коэффициент трения о полотно дороги $\mu=0{,}4$?

4. Камера заполняется смесью водорода с кислородом при температуре $t=27$ °C. Парциальные давления газов в камере одинаковы. Камера герметизируется, и происходит взрыв. Сразу после завершения реакции соединения водорода с кислородом давление в камере оказывается вдвое больше первоначального. Какова температура в камере в этот момент?

5. Какая масса воды поднимется по смачиваемой ею капиллярной трубке радиусом $r=0{,}25$ мм? Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.

6. Заряженные шарики, находящиеся на расстоянии $r=60$ см друг от друга в вакууме, притягиваются с силой $F=0{,}3$ Н. Суммарный заряд шариков $Q=4$ мкКл. Определите заряд каждого шарика. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

7. Электромотор питается от батареи с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В. Какую мощность развивает мотор при протекании по его обмотке тока $I_1=2$ А, если при полном затормаживании якоря по цепи течет ток $I_2=3$ А?

8. Определите резонансную частоту контура, если максимальный заряд конденсатора $q_m=1$ мкКл, а максимальный ток в контуре $I_m=10$ А.

9. Две линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см каждая находятся на расстоянии $l=15$ см друг от друга. При каких положениях предмета система дает действительное изображение?

10. При распаде нейтральной частицы, летящей со скоростью $0{,}6\,c$ (c — скорость света), образовалось два фотона. Каков минимальный угол разлета фотонов?

Публикацию подготовили
Р. Ведерников, М. Либерзон,
А. Симонов

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства

$$|x+6{,}5|>12.$$

2. Вычислите при $a=0{,}3$

$$\frac{(\sqrt[3]{7}b^{\frac{1}{3}}+a)^2-4\sqrt[3]{7ba}}{7^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{b}-a}-\sqrt[3]{7b}.$$

3. Сумма 11-го и 20-го членов арифметической прогрессии равна 7. Найдите сумму первых тридцати членов этой прогрессии.

4. Найдите целое решение системы

$$\begin{cases} 2x^2+x-15<0,\\ x<-1.\end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{2x^2+19x+40}=-x-4.$$

6. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{0{,}25^{3x+5}}{0{,}0625^{6-x}}<64.$$

7. Вычислите $\log_{5^7\cdot\sqrt{5}}\sqrt[3]{125}$.

8. Найдите середину промежутка, являющегося множеством решений неравенства

$$\log_{x-3{,}2}(4{,}2-x)>1.$$

9. Найдите абсциссу точки минимума функции

$$y=2x^3+3x^2-36x+21.$$

10. Вычислите

$$\operatorname{tg}\arcsin\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right).$$

11. Вычислите

$$\frac{\cos^2 57°-\sin^2 3°}{\cos 54°}.$$

12. Найдите в градусах наибольший отрицательный кореиь уравнения

$$\cos 6x+\cos 12x=15\cos 3x.$$

13. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найдите длину гипотенузы треугольника.

14. Найдите площадь правильного восьмиугольника, если радиус описанной около него окружности равен $\sqrt[4]{2}$.

15. Угол между боковой гранью и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 45°. Объем пирамиды равен 1/3. Найдите длину стороны основания пирамиды.

16. В цилиндр вписан шар. Найдите объем шара, если объем цилиндра равен 7,5.

Вариант 2

1. Уравнение $|x^2-2x-3|=a$ имеет ровно 3 корня. Найдите значение параметра a.

2. Упростите выражение

$$\frac{a-2{,}25}{\sqrt{a}-1{,}5}-\frac{a\sqrt{a}-27/8}{a+1{,}5\sqrt{a}+9/4}.$$

3. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма членов этой прогрессии в 6 раз больше суммы ее членов, стоящих на четных местах. Найдите знаменатель прогрессии.

4. Найдите наименьшее целое число из области определения функции

$$y=\sqrt{\frac{6x-1}{9-2x}}.$$

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{24-x}>12-x.$$

6. Решите уравнение

$$0{,}125\cdot4^{2x-3}=\left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}.$$

7. Вычислите

$$\log_{0{,}25}25+\log_{0{,}5}1{,}6.$$

8. Найдите меньший корень уравнения

$$\log_{13}x\cdot\log_{2{,}5}x=\log_{13}2{,}5.$$

9. Прямая $y=4x-7$ касается графика функции $y=2x^3-50x+101$. Найдите абсциссу точки касания.

10. Найдите наименьшее значение функции

$$y=2+\frac{10}{\pi}\arcsin(4x-1).$$

11. Вычислите при $\alpha=\pi/21$

$$4\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{7\alpha}{8}-\sin^2\frac{49\alpha}{8}\right).$$

12. Сколько корней уравнения

$$\sin x-\sin 2x+\sin 3x=0$$

находится в промежутке $[0;\pi]$?

13. Вокруг окружности описана трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен 0,8. Найдите площадь трапеции.

14. В сектор с углом 90° вписана окружность, длина которой равна $12(\sqrt{2}-1)$. Найдите длину дуги сектора.

15. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро пирамиды равно 4. Найдите объем пирамиды.

16. Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Найдите отношение объема конуса к объему вписанного в него шара.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Камень, брошенный с земли под углом $\alpha=45°$ к горизонтальной плоскости, через $t=0{,}8$ с после начала движения имел вертикальную составляющую скорости $v_в=12$ м/с. Чему равно расстояние между точкой бросания и местом падения камня? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

2. Шар массой $m=4$ кг, имевший скорость $v=5$ м/с, сталкивается с покоящимся шаром такой же массы. Считая удар неупругим, найдите выделившееся количество теплоты.

3. Во сколько раз увеличится радиус круговой орбиты искусственного спутника Земли, если период его обращения возрастет в $n=27$ раз?

4. На сколько плотность некоторого тела больше, чем плотность жидкости $\rho=800$ кг/м^3, если вес*) тела в этой жидкости в $n=3$ раза меньше, чем в воздухе?

5. При нагревании газа при постоянном объеме на один градус давление увеличилось на относительную долю $n=0{,}004$ от первоначальной величины. Какова (в кельвинах) начальная температура газа?

6. По газопроводу течет газ при давлении $p=0{,}83$ МПа и температуре $T=300$ К. Какова скорость движения газа в трубе, если за $\tau=2{,}5$ мин через поперечное сечение трубы площадью $S=5$ см^2 протекает $m=20$ кг газа? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К), средняя молярная масса газа $M=40$ кг/кмоль.

7. Напряженность электрического поля плоского воздушного конденсатора емкостью $C=4$ мкФ равна $E=10$ В/см. Расстояние между обкладками $d=1$ мм. Определите энергию электрического поля конденсатора.

8. На резисторе сопротивлением $R=9$ Ом, подключенном к источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}=3{,}1$ В, выделяется мощность $P=1$ Вт. Определите внутреннее сопротивление источника тока.

9. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=3520$ В, электрон попал в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}002$ Тл, перпендикулярное скорости электрона. Найдите радиус окружности, по которой будет двигаться электрон. Отношение заряда электрона к его массе $\gamma=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

10. Действительное изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, находится от нее на расстоянии $f_1=80$ см. Если собирающую линзу заменить рассеивающей с таким же фокусным расстоянием, мнимое изображение предмета будет отстоять от линзы на $f_2=20$ см. Найдите абсолютную величину фокусного расстояния линз.

Вариант 2

1. С какой высоты падает без начальной скорости тело, если путь, пройденный им за последнюю секунду движения, в $n=7$ раз больше пути, пройденного за первую секунду? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

2. Тело массой $m=2$ кг брошено с поверхности земли со скоростью $v_0=6$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. На сколько увеличится потенциальная энергия тела, когда оно достигнет высшей точки подъема?

3. Маленький шарик массой $m=0{,}3$ кг привязан к концу вертикальной нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен. Шарик с нитью переводят в горизонтальное положение и отпускают без начальной скорости. Чему будет равно натяжение нити в тот момент,

---

*) Точнее было бы сказать «подъемная сила». (*Примеч. ред.*)

когда она составит угол $\alpha=60^\circ$ с вертикалью? Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2.

4. Прямой конус плавает в жидкости так, что его ось вертикальна и вершина обращена вверх. Плотность материала конуса составляет $n=7/8$ плотности жидкости. Во сколько раз высота подводной части конуса меньше всей его высоты?

5. До какой температуры (в кельвинах) следует нагреть изобарически газ, чтобы его плотность уменьшилась в $n=2$ раза по сравнению с его плотностью при $t^\circ=0$ °C?

6. Определите начальную температуру (в кельвинах) азота массой $m=0{,}56$ кг, если при изобарном нагревании до $T=370$ К газ совершил работу $A=16{,}6$ кДж. Молярная масса азота $M=28$ кг/кмоль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

7. На точечный заряд, находящийся внутри плоского конденсатора емкостью $C=100$ мкФ, действует некоторая сила. Напряжение на конденсаторе $U=10$ кВ. Во сколько раз увеличится сила, действующая на заряд, если конденсатор в течение $t=2$ мин подзаряжать током $I=0{,}1$ А?

8. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл находится виток площадью $S=10$ см^2, расположенный перпендикулярно линиям индукции. Сопротивление витка $R=2$ Ом. Какой заряд протечет по витку при выключении поля?

9. Амплитуда незатухающих колебаний точки струны $A=1$ мм, частота $f=1$ кГц. Сколько сантиметров составит путь, пройденный точкой за время $t=1{,}2$ с?

10. В цепочке радиоактивных превращений элемента с порядковым номером $Z_1=92$ и атомной массой $A_1=235$ в элемент с $Z_2=82$ и $A_2=207$ (урана в свинец) содержится несколько альфа- и бета-распадов. Сколько всего распадов в этой цепочке?

Публикацию подготовили
Л. Белопухов, Б. Писаревский

Московский институт электронной техники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение, вычислите его значение при $a=11$, $b=6$:

$$\frac{\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\right)a^3}{((\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab})^2-ab}.$$

2. Найдите

$$A=\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha,$$

если $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=5$.

3. Решите уравнение

$$\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1.$$

4. Найдите решение системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(xy+2), \\ x+y=6. \end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}>\frac{x}{2}.$$

6. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длины оснований этой трапеции.

7. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 3, а сторона основания равна 2. Вычислите косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

8. Свежие грибы содержат по весу 90 % воды, а сухие — 12 % воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

9. На отрезке $[0;\pi]$ найдите решение уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}=\sqrt{3\operatorname{tg}x}.$$

10. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x}{6}}(\log_x\sqrt{6-x})>0.$$

11. Дайте определение прямой, параллельной плоскости.

12. Сформулируйте теорему косинусов.

13. Выведите формулу логарифма произведения.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{7}}\right)\left(\sqrt{7}-\frac{2}{\sqrt{7}}+2\right).$$

2. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2.$$

3. При каких значениях параметра a равны между собой корни квадратного уравнения

$$x^2-(2a+1)x+2a=0?$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x}=-2.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{|x-2|-|x+2|}{x-1}>0.$$

6. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. $AC=3$, $BC=4$. Найдите сторону AB этого треугольника.

7. Найдите отношение поверхности шара к поверхности вписанного в него куба.

8. Теплоход прошел по течению реки 120 км и столько же против течения и затратил на весь путь 8 ч. Определите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки равна 8 км/ч.

9. Упростите выражение

$$\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)+$$
$$+\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ-\alpha).$$

10. Решите уравнение

$$x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x.$$

11. Дайте определение точки максимума.

12. Сформулируйте теорему синусов.

13. Выведите формулу синуса половинного угла.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Определите среднюю плотность планеты, продолжительность суток на которой шесть часов. На экваторе этой планеты пружинные весы показывают на 10 % меньший вес, чем на полюсе. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ м³/(кг·с²).

2. Сможет ли воздушный шар, наполненный гелием, поднять груз массой $m_1=100$ кг, если объем шара $V=150$ м³, а масса оболочки $m_2=8$ кг? Давления и температуры гелия внутри шара и воздуха снаружи одинаковы и равны соответственно $p=10^5$ Па и $t=15$ °С. Молярная масса гелия $M_г=4$ г/моль, воздуха $M_в=29$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

3. Элемент атомной батареи (источника тока) представляет собой плоский конденсатор, на одну из обкладок которого равномерно нанесен радиоактивный препарат, испускающий α-частицы со скоростью $v=1{,}2\cdot10^6$ м/с. Определите ЭДС такого элемента, если отношение заряда α-частицы к ее массе $\gamma=4{,}8\cdot10^7$ Кл/кг.

4. Определите, какое количество меди выделилось из раствора за $\tau=100$ с, если ток, протекавший через электролит, менялся по закону $I(t)=(5-0{,}02\,t)$ А, где t — время в секундах. Постоянная Фарадея $F=96500$ Кл/моль, молярная масса меди $M=63{,}5$ г/моль, валентность меди $n=2$.

5. В дно водоема глубиной $H=2$ м вертикально вбита свая, на $h=0{,}5$ м выступающая из воды. Найдите длину тени от сваи на дне водоема, если высота Солнца над горизонтом $\varphi=60°$. Показатель преломления воды принять равным $n=4/3$.

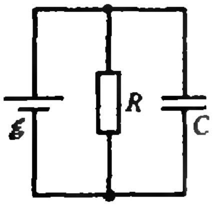
6. Период полураспада одного из радиоактивных изотопов иода составляет $T=8$ суток. Через какое время число атомов этого вещества окажется в $n=100$ раз меньшим по сравнению с их начальным числом?

Вариант 2

1. Вертикально расположенная пружина соединяет два груза. Масса верхнего груза $m_1=2$ кг, а нижнего $m_2=3$ кг. Когда система подвешена за верхний груз, длина пружины равна $l_1=10$ см. Если систему поставить на подставку, длина пружины оказывается равной $l_2=4$ см. Определите длину ненапряженной пружины.

2. В герметичном сосуде объемом $V=5{,}6$ л содержится воздух при давлении $p=10^5$ Па. Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить количество теплоты $Q=1430$ Дж? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной $C_V=21$ Дж/(моль·К). Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

3. Каким должно быть сопротивление R резистора, включенного в схему (см. рисунок),



чтобы напряженность поля в плоском воздушном конденсаторе составила $E=2$ кВ/м. Электродвижущая сила батареи $\mathscr{E}=5$ В, ее внутреннее сопротивление $r=0{,}5$ Ом. Расстояние между пластинами конденсатора $d=0{,}2$ см.

4. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы лампочка в фаре велосипеда, рассчитанная на действующее значение напряжения $U=2{,}5$ В, светилась полным накалом при работе динамомашины? Диаметр приводного колеса динамомашины $D=2$ см, число витков обмотки якоря $n=2000$, площадь одного витка $S=5$ см², индукция магнитного поля постоянных магнитов $B=0{,}01$ Тл. Поле считать однородным, сопротивлением провода обмотки пренебречь.

5. Точка лежит на оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d=40$ см от линзы. Фокусное расстояние линзы $F=10$ см. Точку переместили на расстояние $l=5$ см в плоскости, перпендикулярной оптической оси. На какое расстояние нужно подвинуть линзу в ее плоскости, чтобы изображение точки получилось в первоначальном месте?

6. Излучение с длиной волны $\lambda=0{,}3$ мкм падает на металлическую пластинку. Красная граница фотоэффекта для металла, из которого изготовлена пластинка, $\nu_{\min}=4{,}3\cdot10^{14}$ Гц. Чему равна кинетическая энергия фотоэлектронов? Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
А. Берестов, В. Плис, В. Терпигорьева

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{-8-x^3-16x^{-3}}{(2x^3-x^3\sqrt[3]{x^6}-27\sqrt[3]{x^6}+54)^2(2+\sqrt[3]{x^6})^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times0{,}1^{\log_{100}(-x^3)+\lg(-x-3)}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{x^2+1}(x^5-9x^2+8)\cdot\log_{x^2-1}(x^2+1)=3.$$

3. Студент купил две книги, уплатив за них 6 рублей. Если бы первая книга стоила на 25 % меньше, а вторая — на 50 % больше, то цены книг были бы одинаковыми. Сколько денег уплатил студент за каждую книгу?

4. Найдите корни уравнения

$$\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x=\sin(7\pi-x)\sin\frac{7}{6}\pi,$$

принадлежащие области определения функции $y=\sin\sqrt{4\pi^2-x^2}$.

5. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите длину окружности, описанной около данного треугольника.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\frac{(a^2-b^2)(a+b)}{a^3-b^3}-\left(\frac{(a-b)^2+3ab}{a^2+b^2}\right)^{-1}\right)^{-1}-$$

$$-\frac{1}{2ab}\cdot 3^{\log_{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+b^2}}$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{(x^2-2x-8)\log_2 3^{\log_9(x^2-2x+1)}}.$$

3. На реке, скорость течения которой равна 4 км/ч, в направлении ее течения расположены в указанном порядке пристани A, B, C, причем расстояние от A до B вдвое меньше, чем расстояние от B до C. От пристани B в один и тот же момент по направлению к пристани C отправлены плот (плывущий относительно берегов со скоростью течения реки) и катер. Дойдя до пристани C, катер разворачивается и движется по направлению к пристани A. Найдите все значения собственной скорости катера (т. е. скорости катера в стоячей воде), при которых катер приходит в пункт A позже, чем плот приходит в пункт C.

4. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x+24\pi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{11}{10}\pi\right)=\sin\frac{4}{5}\pi.$$

5. Найдите радиус шара, объем которого равен объему тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, длина которой равна $2a$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Закон сохранения энергии в тепловых процессах (первый закон термодинамики). Применение этого закона к изопроцессам.

2. Окраска небольших предметов разбрызгиванием краски становится выгодной и безвредной для работающего, если приложить высокое напряжение к струе краски и заземлить окрашиваемый предмет. Дайте объяснение.

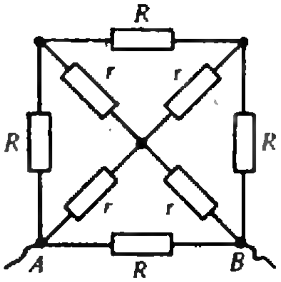


Рис. 1.

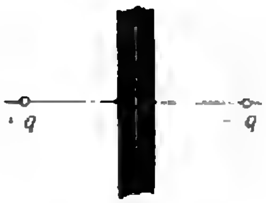


Рис. 2.

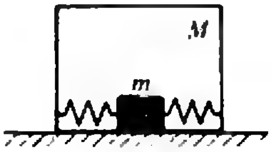


Рис. 3.

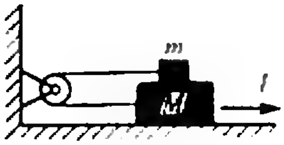


Рис. 4.

3. Из резисторов с сопротивлениями $R=12$ Ом и $r=6$ Ом спаяна цепь, изображенная на рисунке 1. Определите сопротивление между точками A и B цепи.

4. Первый раскат грома дошел до наблюдателя через $t=25$ с после вспышки молнии. На каком расстоянии от наблюдателя возникла молния?

5. Коэффициент полезного действия теплового двигателя $\eta=20$ %. Какова должна быть температура нагревателя T_1, если температура холодильника $T_2=300$ К?

Вариант 2

1. Состав ядра атома. Энергия связи атомных ядер. Ядерные реакции. Деление ядер урана. Ядерный реактор.

2. Как изменится сила, действующая на разноименные точечные заряды, если между ними поместить толстую незаряженную металлическую пластину (рис. 2)?

3. Средняя квадратичная скорость молекул газа $v=400$ м/с. Определите объем, который занимает $m=1{,}0$ кг газа при давлении $p=10^5$ Па.

4. Кабина массой M стоит на шероховатой горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ (рис. 3). Внутри кабины находится брусок массой m, связанный с ней двумя пружинами жесткостью k каждая. При какой амплитуде колебаний бруска кабина сдвинется с места? Трение между бруском и кабиной отсутствует.

5. Расстояние между источником света и экраном $L=1$ м. Тонкая линза, помещенная между ними, дает четкое изображение при двух положениях, расстояние между которыми $l=0{,}4$ м. Определите фокусное расстояние линзы.

(Окончание см. на с. 76)

МФТИ

Ректор физтеха.

МФТИ — это Московский физико-технический институт История создания института — предмет особой гордости каждого физтеха. Ведь около полувека назад был создан не просто еще один вуз, а вуз нового типа. Его студентам предоставлялась уникальная возможность учиться у таких крупнейших ученых как академики П. Л. Капица, И. В. Курчатов, С. И. Вавилов, Н. Н. Семенов, С. А. Христианович, М. В. Келдыш, Л. Д. Ландау. Обучение было организовано по новой системе, которая ныне известна всему миру как «система физтеха».

В основу «системы физтеха» положены следующие принципы.

1. Тщательный отбор наиболее одаренной и склонной к творческой работе молодежи.

Абитуриенты сдают вступительные экзамены по математике (письменно и устно), физике (письменно и устно) и пишут сочинение. Задачи, предлагаемые экзаменующимся, не выходят за рамки школьной программы, но требуют сообразительности, умения нестандартно мыслить, находить остроумные решения. Те, кто получил положительные оценки на экзаменах, проходят собеседование в комиссии, которая состоит из ведущих ученых страны, работающих в базовых институтах и в лабораториях МФТИ. Собеседование, по мнению ректора физтеха Н. В. Карлова,— самый точный из экзаменов.

Будущий абтуриент должен иметь в виду следующие три момента:

а) система проходных баллов, принятая в других вузах, в МФТИ не применяется, хотя сумма баллов и учитывается;

б) вечерних, заочных и подготовительных отделений институт не имеет;

в) учащиеся, окончившие школу с золотой медалью, поступают в МФТИ на общих основаниях.

2. Непосредственное участие ведущих ученых из научно-исследовательских институтов-организаторов (баз) в обучении студентов.

Тесные контакты с передовыми физиками и математиками стимулируют развитие творческих способностей студентов, прививают навыки к самостоятельной научной работе.

3. Фундаментальное образование.

Наши выпускники, как правило, работают на стыке наук, и тут важны широта и глубина общей подготовки в сочетании с конкретным тренингом во вполне определенной, даже быть может узкой области исследований. Поэтому подготовка научных кадров в МФТИ объединяет в себе широту классического университетского образования и конкретность современных научно-технических знаний.

На первых трех курсах студенты всех факультетов изучают фундаментальные курсы физики и математики в университетском объеме. О высоком уровне преподавания этих дисциплин свидетельствует тот факт, что на протяжении многих лет физтехи лидируют во всесоюзных студенческих олимпиадах по физике и математике.

Для развития технических навыков (умения спроектировать и рассчитать экспериментальную установку, усовершенствовать прибор, провести тонкий эксперимент) широко практикуются лабораторные работы, требующие от студента максимума самостоятельности.

Современный ученый не мыслим без знания иностранных языков. Поэтому в течение первых трех лет учебы обеспечивается глубокое овладение английским языком. Интенсивная система обучения позволяет свободно читать научную литературу, делать доклады по специальности, а также вести беседы на различные темы. На 4 — 5 курсах студенты имеют возможность изучать второй иностранный язык.

4. Специальное образование студентов старших курсов ведется на экспериментальной базе ведущих научно-исследовательских институтов Академии наук СССР и отраслевых НИИ и КБ.

Такое обучение естественным образом приводит к тому, что диапазон специальностей МФТИ постоянно обновляется. По существу физтех — это своеобразная «следящая система», автоматически настраивающаяся на современный уровень состояния науки и техники.

Каждая специальность физтеха имеет свой базовый институт. В каждом из них организована соответствующая базовая кафедра. После ознакомительной практики на 2—3 курсах студент выбирает научную группу и конкретную тему своей будущей работы, которую он выполняет на 4—6 курсах под руководством опытного научного сотрудника. Результат двух последних лет работы обычно составляет содержание дипломной работы.

Участвуя в научных семинарах, конференциях, выполняя конкретные разделы плана научно-исследовательской работы базового института, студенты приобретают опыт коллективной работы.

Такая подготовка дает возможность выпускникам физтеха вступать в жизнь уже сложившимися специалистами, непосредственно после окончания института готовыми к самостоятельной ответственной деятельности в новейших направлениях науки и техники.

Большинство физтехов после окончания института в течение первых трех — пяти лет защищают кандидатские диссертации.

В настоящее время в МФТИ имеется девять факультетов, охватывающих такие направления исследований:

радиофизика и астрофизика;

физика элементарных частиц;

средства дальней, сверхдальней и космической связи;

передача информации и информационные системы;

физика планет;

исследование Земли из космоса;

физика атмосферы, океана и земной коры;

летательная техника, космическая техника и технология;

физика плазмы (космической, звездной и т. д.);

проблемы термоядерного синтеза;

радио и микроэлектроника;

конструирование ЭВМ новых поколений;

искусственный интеллект;

математическая физика;

прикладная математика;

программирование и математическое моделирование в физике, биологии, социологии, экологии;

разработка новых типов лазеров;

голография;

применение лазеров в изучении фундаментальных свойств вещества;

биофизика;

биохимия;

генетика, медицинская биофизика;

физика живых систем;

моделирование биофизических процессов и многое другое.

Итак, дорогой читатель, ты познакомился с Московским физико-техническим институтом и уже примериваешься, каким тоном сказать родителям: «Я буду поступать на физтех». Теперь остановись на минуточку и подумай: а нужно ли тебе все это? Припомни свое отношение к физике и математике в разные моменты своей жизни. Поверь, что труд ученого — это не только успех, слава, Нобелевские премии. Прежде всего это тяжелый, изнурительный труд, требующий полной самоотдачи. Посоветуйся с кем-нибудь, кто уже закончил физтех или учится в нем, если есть вопросы к нам — напиши письмо. Лучше, если твое желание учиться на физтехе будет не результатом минутного увлечения, а трезвым, взвешенным решением взрослого человека.

Наш адрес: 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, МФТИ, Приемная комиссия. Телефоны: 408-48-00, 408-49-36.

И в заключение. Прием документов — с 20 июня. Приказ о зачислении в МФТИ объявляется не позднее 14 июля.

Студент физтеха.

Московский Энергетический институт

(Начало см. на с. 72)

Вариант 3

1. Методы регистрации ионизирующих излучений. Радиоактивность. Изотопы. Альфа- и бета-частицы, гамма-излучение.

2. Можно ли всасывающим водяным насосом поднять кипящую воду?

3. Шарик с массой m и зарядом Q, закрепленный на изолированной нити длиной l в однородном электрическом поле, колеблется с периодом $T_0=2\pi\sqrt{l/g}$ относительно положения равновесия, находящегося на одной вертикали с точкой подвеса. Определите величину и направление напряженности электрического поля.

4. На гладком горизонтальном столике лежит брусок массой $M=2$ кг, на котором находится брусок массой $m=1$ кг (см. рис. 4 на с. 73). Оба бруска связаны нитью, перекинутой через невесомый блок. Какую силу F нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он двигался с ускорением $a=g/2$? Коэффициент трения между брусками $\mu=0{,}5$.

5. При коротком замыкании батареи возникает ток I_1, а при подключении внешнего сопротивления R в цепи идет ток I_2. Определите ЭДС батареи.

Публикацию подготовили
А. Касаткин, В. Прохоренко,
А. Седов

Ответы, указания, решения

ение неравенств методом интервалов

1. $[-2;\ -1)\cup(-1;\ 2]$.
2. $[-2;\ -1)\cup(-1;\ +\infty)$.
3. $[-2;\ -1]\cup[3;\ +\infty)$.
4. $[-4;\ -1]\cup\{2\}$.
5. $(1;\ 4)$.
6. $[1;\ 2)$.
7. $\{1\}$.
8. $[0{,}5]\cup(1;\ +\infty)$.
9. $(-1;\ 1)$.
10. $[-4;\ -\pi)\cup(0;\ 2]$.

овский государственный технический ерситет им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 2. 2. $\pi(2k+1)/6$, $\pi(12k\pm5)/12$, $k\in Z$.
3. 4/3. 4. $(-2;\ 2)$.

5. $-1/4\leqslant k\leqslant 1/4$. **Указание.** Поскольку $y\geqslant 0$, $x=y^2$, мы должны вычислить, при каких k уравнение $2ky^2-2y+4k+1=0$ (*) имеет хотя бы один неотрицательный корень. При $k=0$ $y=1/2$. Если же $k=0$, то уравнение (*) имеет корни при $-1/2\leqslant k\leqslant -1/4$, причем при $\frac{4k+1}{2k}\leqslant 0$, т. е. при $-\frac{1}{4}\leqslant k<0$, произведение корней неположительно и поэтому один из корней неотрицателен. При $-\frac{1}{2}\leqslant k<\frac{1}{4}$ корни отрицательны. Наконец, при $0<k\leqslant\frac{1}{4}$ корни положительны.

6. $a^2\sqrt{14}/3$ **Решение.** Пусть прямая AE ($A_1E=ED_1$) пересекает продолжение ребра DD_1 в точке S (рис. 1). Тогда $D_1S=DD_1=a$.

Из подобия треугольников SD_1L, SHO и SDK следует, что $D_1L=a/3$ и $DK=2a/3$.

Полученное сечение — трапеция $AELK$ с основанием $AK=a\sqrt{1+(2/3)^2}=a\sqrt{13}/3$. Чтобы найти высоту трапеции, проведем $DT\perp AK$, тогда $ST\perp AK$ и $GT=ST/2=a\sqrt{2^2+(2/\sqrt{13})^2}/2=$ $=a\sqrt{14/13}$.

Если провести сечение, расположенное между точкой D_1 и данным сечением и параллельное ему, получится также трапеция с той же высотой, но с меньшими основаниями; если секущая плоскость находится между точками D и D_1, то в сечении получается треугольник. В этих случаях площадь сечения, очевидно, меньше площади трапеции $AELK$.

Если секущая плоскость расположена между данным сечением и точкой A_1, то получается пятиугольник $PNMRQ$, который можно представить как параллелограмм $UNMR$ со срезанным углом UPQ. И наконец, если секущая плоскость проходит через точку A_1, то получается параллелограмм A_1K_1CV, одна из вершин которого совпадает с вершиной куба A_1, а противоположная — с вершиной C. Действительно, так как $EA_1=D_1E$, то $LK_1=D_1L=a/3$ и $KC=LK_1=a/3$. Следовательно, сечение, имеющее форму параллелограмма, — единственное.

Так как параллелограмм A_1K_1CV равен параллелограмму $UNMR$, его площадь больше площади любого сечения, имеющего форму пятиугольника, трапеции или треугольника.

Основание VC параллелограмма равно основанию AK трапеции, а его высота равна высоте трапеции, следовательно, площадь параллелограмма A_1K_1CV равна $S_{A_1K_1CV}=\frac{a\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{14}}{\sqrt{13}}=$ $=\frac{a^2\sqrt{14}}{3}$.

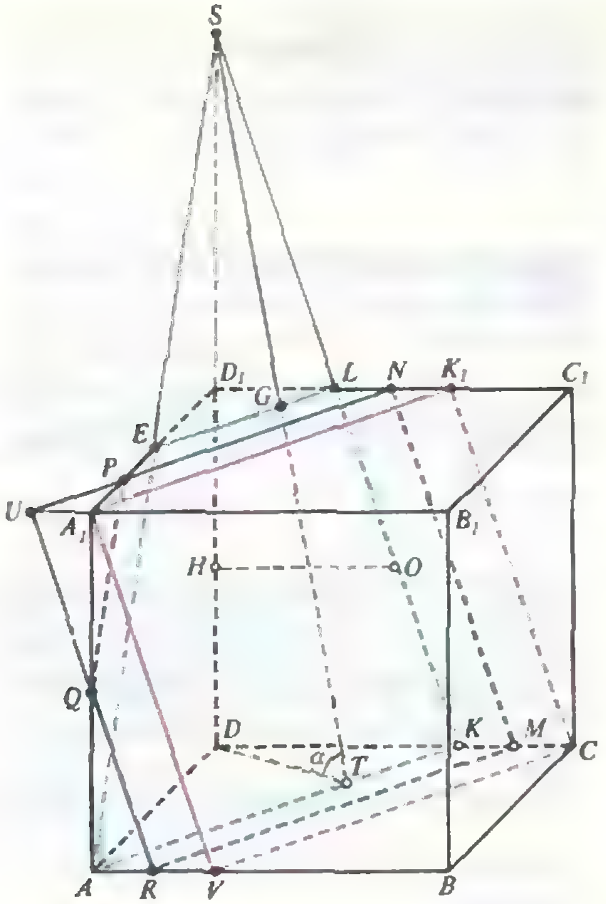


Рис. 1.

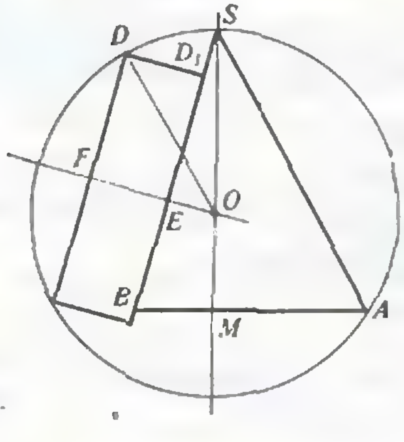


Рис. 2.

Вариант 2

1. 20 км/ч, 40 км/ч. 2. $(-1)^{k+1}\pi/6+\pi k$, $k\in Z$. 3. $\{3\}$. 4. $(-2;\ 2-\log_2 3)$. **Указание.** Выполните замену $y=2^x$ и примените *метод интервалов.*

5. $-9/4\leqslant a<4$. **Указание.** Поскольку $y=x-4$, $x>0$, получаем из второго уравнения $x^2+2(a+1)x+a^2-2a-8=0$, откуда $x=-(a+1)\pm\sqrt{4a+9}$. Для существования решения системы необходимо и достаточно, чтобы $\sqrt{4a+9}>a+1$. Решая это неравенство относительно a, приходим к ответу.

6. $25R^3/54$. **Решение.** Проведем сечение через высоту пирамиды и апофему той боковой грани, в плоскости которой лежит основание призмы (рис. 2). Центры оснований призмы лежат на перпендикуляре к этой грани, проходящем через центр сферы. Так как призму можно поворачивать вокруг этого перпендикуляра, *не нарушая* условий задачи, будем считать, что в сечении лежит также боковое ребро DD_1 призмы. По условию $MA=BS/2$ (AS — боковое ребро пирамиды), следовательно, $BM=BS/4$. Из подобия треугольников OES и BMS находим $EO=OS/4=R/4$.

Пусть $FE=DD_1=h$ и $FD=r$. В треугольнике OFD $R^2=(h+R/4)^2+r^2$, откуда $r^2=\frac{15}{16}R^2-\frac{1}{2}Rh-h^2$.

Найдем объем призмы, считая заданной ее высоту h: $V(h)=2r^2h=2\left(\frac{15}{16}R^2h-\frac{1}{2}Rh^2-h^3\right)$.

Исследуем эту функцию на экстремум. Производная функции $V'(h)=2\left(\frac{15}{16}R^2-Rh-3h^2\right)$ равна нулю при $h=5R/12$. При этом значении h призма расположена вне пирамиды и имеет наибольший объем $\max V(h)=\frac{25}{54}R^3$.

Вторая *критическая точка* функции $h=-9R/12$ соответствует случаю, когда призма расположена с той же стороны боковой грани пирамиды, что и сама пирамида (а это не соответствует условию).

Физика

1. $A_{\text{тр}}=-\mu mgl/(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha)=-0{,}05$ Дж.
2. $l=(L+v_0^2/(\mu g))/2=2{,}8$ м.
3. $v_{max}=\sqrt{2g(H-l)+mg^2/k}$.
4. $A=\dfrac{m\omega^2l_0^2(1+m\omega^2/k)}{2(1-m\omega^2/k)^2}$.
5. $v=mRT/(pMS\tau)=0{,}88$ м/с (здесь $M=44\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса углекислого газа).

6. $p=3mRT/(2MV)=3{,}5\cdot10^4$ Па (здесь $M=241\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса гидрида урана).
7. $U_1=(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)C_2/(C_1+C_2)=17{,}5$ кВ; $U_2=(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)C_1/(C_1+C_2)=7{,}5$ кВ.
8. $\varphi_O=(\varphi_AC_1+\varphi_BC_2+\varphi_DC_3)/(C_1+C_2+C_3)$.
9. $l=mRv_0/(B^2d^2\sin^2\alpha)$, где α — угол между *вектором B и плоскостью* контура.
10. $n_{\min}=\sqrt{2}$.

[illegible]ковский авиационный технологический [illegible]итут им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант 1

1. 2. 2. $(0;\ 0{,}01)\cup(0{,}1;\ 1000)$. 3. πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$. 4. 120 м^3, 100 м^3. 5. $\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. $[-3;\ 2]$. 2. $[0;\ 3]$. 3. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$,

$2\pi n$, $n\in Z$. 4. 360 км. 5. $p_1+p_2-\sqrt{2p_1p_2}$, $\sqrt{2p_1p_2}-p_1$, $\sqrt{2p_1p_2}-p_2$.

Вариант 3

1. 3/2. 2. [0; 1]. 3. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. 4. 3 ч 40 мин, 2 ч 12 мин. Указание. Найдите отношение скоростей туристов. 5. 2,4.

Физика

1. $\varphi=(v_0-v_1)t/l=1$ рад.
2. $v_{\min}=\sqrt{gl/2}=2$ м/с.
3. $h=v^2/(2g(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha))=67$ м.
4. $T'=8T/3=800$ К.
5. $m=2\pi\sigma r/g=11{,}5\cdot10^{-6}$ кг.
6. $q_1=6$ мкКл; $q_2=-2$ мкКл.
7. $P=\mathcal{E}I_1(1-I_1/I_2)=8$ Вт.
8. $\omega=I_m/q_m=10^7$ с$^{-1}$.
9. На расстоянии, превышающем $F/3=10$ см от ближайшей линзы.
10. $\alpha_{\min}=\arccos(-0{,}28)=106^\circ$. Указание. Воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса:

$$mc^2=E_1+E_2,$$

$$(m\cdot0{,}6c)^2=\left(\frac{E_1}{c}\right)^2+\left(\frac{E_2}{c}\right)^2+\frac{2E_1E_2\cos\alpha}{c^2},$$

где m — масса летящей частицы, E_1 и E_2 — энергии образовавшихся фотонов.

[illegible]ковский институт нефти и газа [illegible]И. М. Губкина

Математика

Вариант 1

1. —19. 2. —0,3. 3. 105. 4. —2. 5. —8. 6. 1. 7. 0,1. 8. 3,95. 9. 2. 10. —3. 11. 0,5. 12. —30. 13. 13. 14. 4. 15. 2. 16. 5.

Вариант 2

1. 4. 2. 3. 3. 0,2. 4. 1. 5. 24. 6. 6. 7. —3. 8. 0,4. 9. 3. 10. —3. 11. 2. 12. 4. 13. 20. 14. 3. 15. 12. 16. 2,25.

Физика

Вариант 1

1. $l=2(v_0+gt)^2/(g\operatorname{tg}\alpha)=80$ м.
2. $Q=mv^2/4=25$ Дж.
3. $k=\sqrt[3]{n^2}=9$.
4. $\Delta\rho=\rho/(n-1)=400$ кг/м^3.
5. $T=\Delta T/n=250$ К (здесь $\Delta T=1$ К).
6. $v=mRT/(pMS\tau)=20$ м/с.
7. $W=CE^2d^2/2=2$ мкДж.
8. $r=\mathcal{E}\sqrt{R/P}-R=0{,}1$ Ом.
9. $R=\sqrt{2U/\gamma}/B=0{,}1$ м.
10. $F=2f_1f_2/(f_1+f_2)=32$ см.

Вариант 2

1. $h=g(n+1)^2(\Delta t)^2/8=80$ м (здесь $\Delta t=1$ с).
2. $\Delta W=m(v_0\sin\alpha)^2/2=9$ Дж.
3. $T=3mg\cos\alpha=4{,}5$ Н.
4. $x=\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{1-n}}=2$.
5. $T=nT_0=546$ К.
6. $T_0=T-\mathrm{M}A/(mR)=270$ К.
7. $n=1+It/(CU)=13$.
8. $Q=BS/R=50$ мкКл.
9. $l=4Aft=480$ см.
10. $n=3(A_1-A_2)/4-(Z_1-Z_2)=11$.

[illegible]ковский институт электронной техники

[illegible]ематика

Вариант 1

1. $a-b=5$. 2. 6. 3. $\{-1;\ 7\}$. 4. $\{(2;\ 4),\ (4;\ 2)\}$. 5. $(-3;\ 1)$. 6. 15,5. Указание. Пусть a и b — основания трапеции. Тогда, по условию, $\frac{a+b}{2}=10$, $\frac{a+10}{b+10}=\frac{3}{5}$. 7. $1/(2\sqrt{2})$. 8. 2,5 кг.

9. $\{0;\ \pi/6;\ \pi\}$. Указание. Из условия следует, что либо $\operatorname{tg}x=0$, т. е. $x=0$ и $x=\pi$, либо $\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{3}$, $\operatorname{tg}x>0$, $0\leqslant x\leqslant\pi$. Возводя в квадрат второе уравнение, приходим к уравнению $\sin x=1/2$. 10. $(2;\ 5)$. Указание. Неравенство эквивалентно системе $0<\frac{1}{2}\log_x(6-x)<1$, решая которую, следует рассмотреть два случая: $0<x<1$ и $x>1$.

Вариант 2

1. $2\sqrt{3}$. 2. 2. 3. $a=1/2$. 4. $\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

5. $(0;\ 1)$. 6. $\sqrt{5}$. Указание. Если $3x=AD$, $3y=BE$, то $4y^2+x^2=4$, $y^2+4x^2=9/4$, $AB^2=4(x^2+y^2)$. 7. $\pi/2$. 8. 32 км/ч. 9. 1. 10. $\{-4;\ 2\}$.

Физика

Вариант 1

1. $\rho=30\pi/(GT^2)\approx3\cdot10^3$ кг/м^3 (здесь $T=6$ ч).
2. Да, сможет.
3. $\mathcal{E}=v^2/(2\gamma)=15$ кВ.
4. $m=\mathrm{M}(I_0+I_\tau)\tau/(2Fn)\approx0{,}13$ г (здесь $I_0=5$ А, $I_\tau=3$ А).
5. $l=\left(\dfrac{h}{\sin\varphi}+\dfrac{H}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}\right)\cos\varphi\approx1{,}1$ м.
6. $t=T\log_2 n\approx53$ сут.

Вариант 2

1. $l_0=(l_1m_1+l_2m_2)/(m_1+m_2)=6{,}4$ см.
2. $p'=p+QR/(C_VV)\approx200$ кПа.
3. $R=Edr/(\mathcal{E}-Ed)=2$ Ом.
4. $v=UD/(\sqrt{2}nBS)\approx3{,}5$ м/с.
5. $x=lF/d=1{,}25$ см.
6. $W_k=h(c/\lambda-\nu_{\min})\approx3{,}8\cdot10^{-19}$ Дж.

[illegible]овский энергетический институт

[illegible]ематика

Вариант 1

1. $f'(x)=2x-3$, $x<-3$. 2. $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$. 3. 4 руб.— за первую книгу, 2 руб.— за вторую. 4. $\{-2\pi;\ -\pi;\ 0;\ \pi;\ 2\pi\}$. 5. 29π.

Вариант 2

1. 1/2, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq b$. 2. $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ 1)\cup(1;\ 2]\cup[4,\ +\infty)$. 3. Собственная скорость лодки должна лежать в интервале (4 км/ч; 12 км/ч). 4. 1/15. 5. $(\sqrt[3]{4}/2)a$.

Физика

Вариант 1

2. В возникающем электрическом поле заряженные капли краски движутся по направлению к окрашиваемому предмету. В результате уменьшаются потери краски и степень загрязнения воздуха.
3. $R_{AB}=5$ Ом.
4. $l=v_{зв}t\approx 8500$ м $=$ 8,5 км (здесь $v_{зв}\approx$ ≈ 340 м/с — скорость звука в воздухе).
5. $T_1=\dfrac{T_2}{1-\eta/100\,\%}=375$ К.

Вариант 2

2. Сила притяжения зарядов увеличится.
3. $V=mv^2/(3p)=0{,}53$ м^3.
4. $x_m=\mu(M+m)g/(2k)$.
5. $F=\dfrac{1}{L}\left(\dfrac{L-l}{2}\right)\left(\dfrac{L-l}{2}+l\right)=0{,}21$ м.

Вариант 3

2. Нет, нельзя.
3. Напряженность поля направлена вертикально вверх и равна $E=2mg/Q$.
4. $F=(M+m)a/2+2\mu mg=25$ Н.
5. $r=I_1I_2R/(I_1-I_2)$.

нт» для младших школьников»
«Квант» № 4)

1. Так как $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$, то предпоследняя цифра этого числа будет нечетной только в том случае, если число десятков числа b^2 будет нечетным. Это имеет место лишь для $b=4$ и $b=6$. Поэтому последней цифрой указанного числа может быть только 6.

2. Пусть студентов было x человек. Тогда в турнире приняло участие $(x+2)$ человека и всего было набрано $\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}$ очков. Отсюда каждый студент набрал $\left(\dfrac{(x+2)(x+1)}{2}-6{,}5\right):x$ очков. После преобразований получаем число $\dfrac{x^2+3x-11}{2x}$. Это число будет целым числом или половиной целого числа лишь в том случае, если $x=11$, так как $\dfrac{x^2+3x}{2x}$ — всегда целое число или половина целого числа.

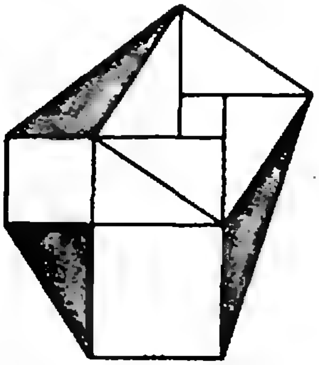


Рис. 3.

3. $65\,983+65\,983+65\,983=197\,949$.

4. Рассмотрим разность между удесятиренным полученным числом и первоначальным числом: $(10a+40b)-(10a+b)=39b$. Так как $39b$ делится на 13, из делимости на 13 одного «слагаемого» следует делимость на 13 и другого «слагаемого».

5. Из рисунка 3 видно, что эти треугольники имеют по основанию и высоте, равным катетам исходного прямоугольного треугольника.

йдоскоп «Кванта»
«Квант» № 4)

1. Только в поле, силовые линии которого прямые, и если начальная скорость частицы направлена по силовой линии.
2. Отклонение протона в два раза больше.
3. Электрон начнет ускоряться под влиянием положительных индуцированных зарядов, возникающих на суживающейся части трубы.
4. При определенной — достаточно большой — начальной скорости заряд уйдет в бесконечность; при меньших скоростях он будет совершать периодическое движение вдоль оси кольца.
5. Да, если частица движется вдоль эквипотенциальной поверхности.
6. Вертикально вверх.
7. Более быстрые частицы отклоняются на меньший угол.
8. При увеличении скорости растут магнитные силы притяжения между частицами, и расхождение будет меньше.
9. Такая стрелка была бы неподвижной относительно электронов и не обнаружила бы магнитного поля.
10. Нет, так как действующая на частицу сила Лоренца не совершает работы.
11. По винтовой линии с увеличивающимся шагом, причем ось спирали параллельна $\vec{E}$ и $\vec{B}$.
12. Заряженные частицы сносятся магнитным полем Земли к полюсам, возбуждая там молекулы кислорода и азота, которые затем высвечиваются.

Микроопыт

Поднесенный к экрану телевизора магнит будет искажать изображение из-за воздействия магнитного поля на движение электронов в кинескопе.

Вниманию наших читателей

Магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкниги» высылает наложенным платежом следующие книги:

Ветров Г. С. *С. П. Королев в авиации. Идеи. Проекты. Конструкции.* (История науки и техники).— 1988.— 55 к.

Власов В. К., Королев Л. Н., Сотников А. Н. *Элементы информатики.* (Библиотечка программиста).— 1988.— 1 р. 30 к.

Глушков В. М. *Основы безбумажной информатики.*— 1987.— 2 р. 60 к.

Кибернетика: прошлое для будущего. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1989.— 50 к.

Николов Р., Сендова Е. *Начала информатики. Язык Лого.*— 1989.— 40 к.

Персональный компьютер: Рабочее место профессионала. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1989.— 80 к.

Фролова Г. В. *Педагогические возможности ЭВМ. Опыт. Проблемы. Перспективы.*— 1988.— 70 к.

Заказы направляйте по адресу: 117393, Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2, магазин № 3 «Книга — почтой».

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов,
Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, М. Башмаков,
В. Белонучкин, В. Болтянский,
А. Боровой, Ю. Брук, В. Вавилов,
Н. Васильев, С. Воронин, Б. Гнеденко,
Н. Долбилин, В. Дубровский,
А. Земляков, А. Зильберман, С. Козел,
С. Кротов, Л. Кудрявцев, А. Леонович,
В. Лешковцев, С. Новиков,
Т. Петрова, М. Потапов, В. Разумовский,
Н. Родина, Н. Розов, А. Савин,
Я. Смородинский, А. Сосинский,
В. Уроев, В. Фабрикант

Редакционный совет:
А. Балдин, С. Беляев, Е. Велихов,
И. Верченко, Б. Воздвиженский,
Г. Дорофеев, Н. Ермолаева,
Ю. Иванов, В. Кириллин, Г. Коткин,
Р. Кузьмин, А. Логунов, В. Можаев,
В. Орлов, Н. Патрикеева, Р. Сагдеев,
А. Стасенко, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Буздин, А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов, С. Лухин,
Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Тишков,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.02.90. Подписано к печати 11.04.90
Т-06541. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,88
Тираж 172 226 экз. Заказ 251. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ШЕСТОЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА

В отличие от людей у компьютеров сбоев в розыгрыше шахматной короны не бывает — начиная с 1974 года аккуратно раз в три года определяется сильнейшая шахматная программа в мире (речь сейчас идет не о микрокомпьютерах, а о больших ЭВМ). Очередной, шестой чемпионат состоялся в Канаде летом 1989 года. В нем участвовало рекордное число программ — 24, в том числе первые 4 призера предыдущего первенства: «Крэй блитц», «Хайтек», «Бебе» и «Сан Феникс». Впервые в борьбу за корону вступила американская программа «Дип сот» («Deep Thought» — «глубокая мысль» в переводе с английского). Вместе с большими машинами играли и микрокомпьютеры. Соревнование, как всегда, проводилось по швейцарской системе в 5 туров с нормальным контролем времени — 2 часа на 40 ходов.

Главные события развернулись в последних двух турах. В 4-м произошла символическая передача компьютерной короны.

(В примечаниях к партиям использован материал из журнала «ICCA JOURNAL», издаваемого Международной ассоциацией компьютерных шахмат.)

«Дип сот» — «Крэй блитц»
Дебют ферзевых пешек

1. d4 Kf6 2. Kc3 d5 3. Cg5 Cf5 4. e3 Ke4 5. K:e4 C:e4 6. f3 Cf5 7. c4 c6 8. Фb3 Фa5+ 9. Kpd1 Cc8 10. Cf4 Kd7. После 10...dc 11. C:c4 e6 белые развиты несколько лучше, но их королю требуется время, чтобы пристроить себя, так что, осуществив программное c6 — c5 или e6 — e5, «Крэй блитц» могла смело смотреть в будущее.

11. cd Ф:d5. При 11...cd 12. Cb5 e6 13. Лc1 давление белых довольно неприятно. А теперь начинается долгое преследование черного ферзя, и до конца партии «Крэй блитц» так и не вырвется из тисков.

12. Cc4 Фf5 13. g4 Фf6 14. g5 Фf5 15. Ke2 e6 16. e4 Фg6 17. h4 h6 18. gh gh 19. Kpc2 b5 20. h5 Фf6 (20...bc 21. Ф:c4 и 23. Ф:c6, забирая ладью) **21. Cd3 e5 22. de K:e5 23. Фc3 Cd6 24. a3 Cd7 25. Cg3 Cb8 26. f4 Kg4 27. e5 Фe6 28. Kd4 Фd5 29. Лae1 Лg8 30. Ch7 Лg7 31. Ce4 Фc4 32. Ф:c4 bc.** Разменом ферзей черным удалось избавиться от мощного прессинга противника, но именно в этот момент «Дип сот» наносит эффектный заключительный удар.

33. e6! fe 34. K:e6 Лg8 35. Cg6+ Л:g6 36. hg C:e6 37. Л:e6+ Kpd7 38. g7 C:f4 39. Лg6 Ke3+ 40. Kpc1 C:g3 41. Л:g3 Лg8 42. Л:e3 Л:g7 43. Л:h6 Kpc7 44. Лee6. Черные сдались.

«Хайтек» в этот день выиграла у «Фиделити» и перед последним туром была единственной программой, уступающей «Дип сот» пол-очка. Лидеру достаточно было сделать ничью, но напряженная схватка принесла ему еще одну, уже пятую подряд победу.

«Хайтек» — «Дип сот»
Дебют ферзевых пешек

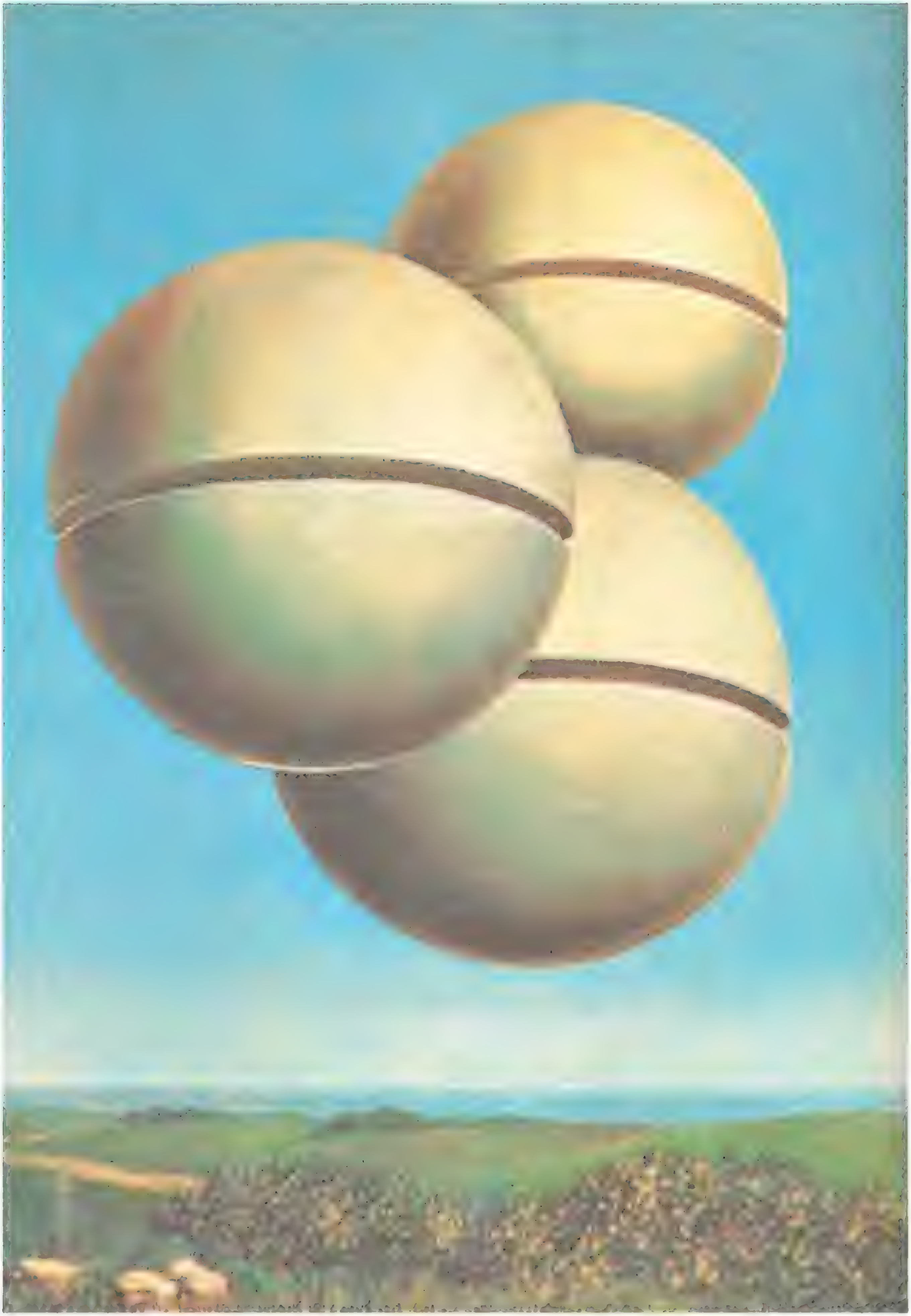
1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. Cf4 e6 4. e3 Kc6? В ферзевых дебютах не принято загораживать пешку «c», и защита Чигорина — 1.d4 d5 2.c4 Kc6 — лишь исключение (крайне редкое!), подтверждающее правило. **5. Kbd2.** Загадки с пешками «c» продолжаются. Почему-то и белые избегают естественного 5. c4 и 6. Kc3. **5...Ce7 6. h3 0—0 7. Ce2 Kh5?** И другой черный конь ведет себя не слишком солидно — нападает на слона уже после того, как подготовлено его отступление на h2. **8. Ch2 g6.** Коню следовало признать свою вину и отступить обратно на f6, но черные и не помышляют об этом. А поскольку на h5 конь чувствует себя уязвимо, он подкрепляется пешкой. **9. 0—0 f5.** Вот в чем дело: оказывается, компьютер давно задумал марш пешки «f». Но сразу 8...f5 не годилось из-за 9. Ke5 K:e5 10. de, и конь черных на отшибе, а 9...Kf6 10. K:c6 bc вело к нежелательному сдвоению пешек. Все же в стратегическом отношении позиция малопривлекательна для черных. После 10. c4! давление белых по линии «c» возрастало, и даже после 10. Ke1 Kf6 11. Kd3 и затем c2 — c4 их перевес был бы бесспорен. Но «Хайтек» допускает ужасный позиционный промах. **10. Ce5?** Стратегические дефекты этого хода очевидны: белые добровольно отказываются от пары слонов, снимают давление с пункта c7 и освобождают противнику весь ферзевый фланг. **10...K:e5 11. K:e5 Kf6 12. c4 c5 13. Kdf3 Cd6 14. a3.** Белым следовало разменяться в центре. **14...Фc7. 15. Лc1 a5 16. Фb3 b6 17. Фa4 Cb7.** Два вялых хода белого ферзя передали инициативу противнику, и теперь, когда центр вскроется, пара дальнобойных черных слонов разовьет опасную деятельность. **18. Лc2 Kph8 19. cd C:d5 20. Лd1 Лad8 21. Cd5 Ke4 22. Kd7 Лg8 23. Kfe5 Лg7.** Угрозы отражены, и конь d7 оказался не у дел. **24. Лd3 Ce7 25. Лd1 h5 26. Лdc1 Cg5 27. Лe1 Ch4 28. Лf1 Ce7 29. Лfc1 g5 30. f3 Kf6 31. Kpf1 g4 32. hg hg 33. f4 Ce4 34. Лd2 Kd5 35. Лe2 Лh7 36. Лee1 K:e3+! 37. Kpg1 Kd5 38. Kg6+ Kpg7 39. K:e7 Ф:f4!** Уже здесь «Хайтек» могла спокойно сдаться ввиду форсированного мата в 8 ходов.

40. K:f5+ ef 41. Л:e4 Ф:c1+ 42. Cf1 fe 43. Фb3 Лh1+ 44. Kp:h1 Ф:f1+ 45. Kph2 Лh8+ 46. Фh3 g3+ 47. Kp:g3 Фf4×.

«Крэй блитц», выиграв в последнем туре, догнала «Хайтек», и в компании с «Мефисто» они поделили 3—5 места (по 3,5 очка). Фокусы «Швейцарки»: после поражения от «Крэй блитц» программа «Бебе» отскочила во второй эшелон, где набрала 4 очка — чистое второе место.

По общему мнению, уровень игры «Дип сот» на два порядка выше, чем у ее соперников, и, похоже, мы не совсем представляем себе тот огромный прогресс, который достигнут в области компьютерных шахмат за последние три года.

Е. Гик



45 коп.
Индекс 70465

Чтобы сделать эту головоломку, вам понадобятся 14 одинаковых шариков и коробка в форме куба с ребром $(1+\sqrt{2})d \approx 2{,}41d$, где d — диаметр шарика. Из 13 шариков склеиваются 4 фигурки, показанные на рисунке 1 (тупые углы — по 120°). Требуется уложить эти фигурки в коробку так, чтобы каждой ее стороны касались 4 шарика (рис. 2). Второе задание — добавить оставшийся шарик и переложить фигурки так, чтобы каждой стороны коробки касались уже 5 шариков, как на рисунке 3. (Решения — в следующем номере.) Если мысленно отметить внутри коробки центры шаров обеих конфигураций, то все 27 точек попадут в узлы кубической решетки. Говоря точнее, центры 14 шаров рисунка 3 совпадут с вершинами куба с ребром $d\sqrt{2}$ и центрами его граней, а центры 13 шаров рисунка 2 — с серединами ребер этого куба и его центром. При этом каждый «угловой» шарик (рис. 3) касается трех «центрогранных», а каждый «центрогранный» — четырех угловых; каждый «реберный» (рис. 2) касается четырех других «реберных» и внутреннего центрального, а последний — всех 12 «реберных». Все эти свойства наших конфигураций вы можете проверить самостоятельно или познакомившись с заметкой В. Произволова «Тринадцать шаров в одной клетке» («Квант», 1986, № 10, с. 22), из которой вы узнаете и о том, какое отношение к 13 шарам имел... Исаак Ньютон.

Д. К.

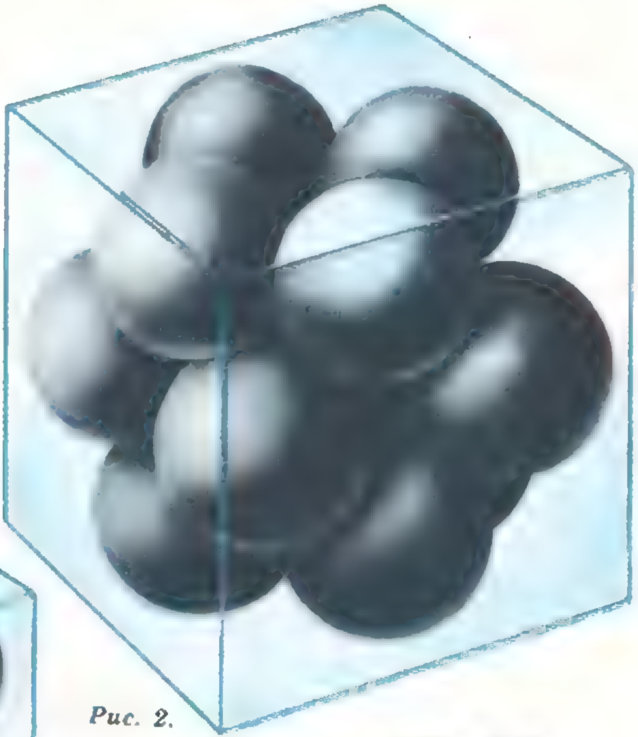


Рис. 2.

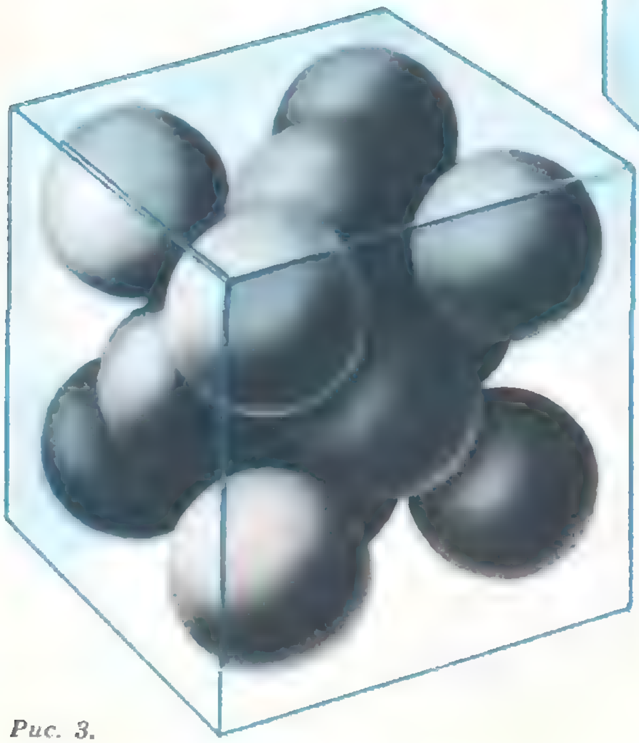


Рис. 3.

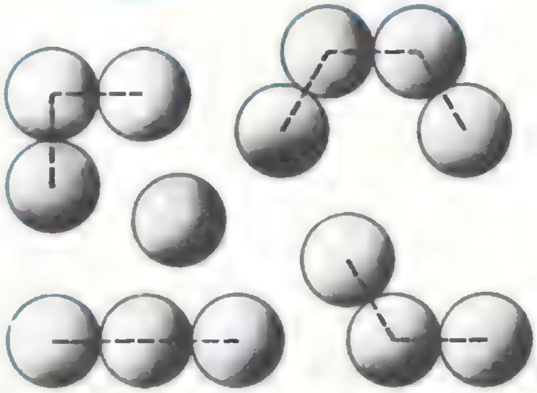


Рис. 1.

НОМЕР
6

Квант

6 1990

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *Д. Фукс.* Рогатая Сфера Александера
8 *Ю. Гуревич.* Холодное горение
16 *К. Богданов.* Большие и маленькие на прогулке
23 *С. Табачников.* Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля
25 *С. Гашков.* Задача Чебышева и тригонометрические многочлены

Задачник «Кванта»

28 Задачи М1226 — М1230, Ф1233 — Ф1237
29 Решения задач М1201 — М1205, Ф1213 — Ф1217

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 «Ты — мне, я — тебе»

Фантастика

46 *Д. Киз.* Цветы для Элджернона

* * *

52 Золотая медаль Филдса

Лаборатория «Кванта»

55 *В. Креймер.* Как увидеть... несуществующее

Р — значит ракета

57 *Л. Горшков.* Полет на Марс

Практикум абитуриента

63 *А. Зильберман.* Явление самоиндукции

67 **Варианты вступительных экзаменов**
77 **Ответы, указания, решения**
79 **Анкета 6—90**
«Квант» улыбается *(42)*

Наша обложка

1 *Фрагмент рисунка доктора физико-математических наук А. Фоменко «Рогатая Сфера Александера» (см. статью Д. Фукса на с. 2).*
2 *Репродукция картины Макса Эрнста «Aquis submersus» (1919). Конечно, погруженное в воду тело не тонет, потому что его поддерживает выталкивающая сила. А так ли хорошо знакома вам выталкивающая сила? (см. с. 41)*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Задачи на разрезание звездчатых многоугольников.*

© Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1990

РОГАТАЯ СФЕРА АЛЕКСАНДЕРА

Доктор физико-математических наук
Д. ФУКС

Читатели «Кванта» со стажем могут помнить изображение Рогатой Сферы, помещенное на обложке журнала № 7 в 1977 году.

Это был рисунок московского математика А. Т. Фоменко, который известен также как художник-график — фрагмент этого рисунка помещен на первой странице обложки этого номера. Рисунок Фоменко передает, хотя бы отчасти, главное свойство Рогатой Сферы — она необычайно красива. Еще из рисунка видно, что отдельные части Сферы как бы зацеплены друг с другом. Однако, чтобы оценить красоту Рогатой Сферы в полной мере — а она этого заслуживает,— стоит познакомиться с ее построением во всех деталях, а заодно и понять, для решения какой задачи она была построена.

Предыстория

В конце прошлого века знаменитый французский математик Камилл Жордан занялся написанием учебника анализа. Следует сказать, что за три с лишним века существования математического анализа как отдельной дисциплины учебники этого предмета многократно подвергались переработке. (Этот процесс не остановился и теперь.) И всякий раз такая переработка не только отражала прогресс в математике, но и в значительной мере способствовала этому прогрессу. Автор оригинального учебника неизменно обнаруживал естественные вопросы, ответа на которые не было не только в предшествующих учебниках, но и вообще в математике. Находя эти ответы, он становился автором не только учебника, но и фундаментальных математических теорем.

Не стал исключением и Жордан. Изучая свойства интегралов функций двух переменных по областям и кривым на плоскости, он пришел к выводу о необходимости придать точный смысл интуитивно ясному высказыванию «кривая разделяет плоскость». Кривая — это след непрерывно движущейся точки. Движение имеет начало и конец. Если конец совпадает с началом, кривая называется замкнутой, а если ни в какие другие различные моменты времени положения движущейся точки не одинаковы, то кривая называется несамопересекающейся или простой. Теорема Жордана утверждает, что замкнутая несамопересекающаяся кривая делит плоскость на две части. Это означает, что множество всех точек плоскости, не лежащих на нашей кривой l, подразделяется на две части, причем если две точки плоскости лежат в одной из этих частей, то их можно соединить ломаной, не пересекающей кривую l, а если они лежат в разных, то нельзя (рис. 1). Теорема Жордана и теперь входит в учебники анализа, авторы которых стремятся к большей строгости.

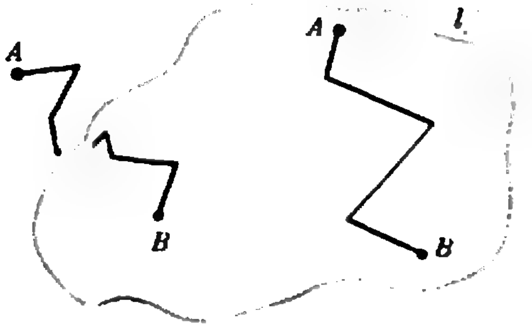


Рис. 1.

Область математики, к которой относится теорема Жордана, называется топологией. Жордан, однако, не был топологом — он, скорее, был алгебраистом; теорема о кривых интересовала его исключительно как автора учебника анализа. Но существовали ведь и топологи, и теорема Жордана не могла пройти мимо их внимания. Каковы части, на которые замкнутая несамопересекающаяся кривая делит плоскость? Оказалось, что эти части для разных несамопересекающихся замкнутых кривых устроены совершенно одинаково: эту теорему доказал в 1908 году немецкий тополог А. Шенфлис. Что значит устроены одинаково? Две области V и V' на плоскости считаются устроенными одинаково, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие, непрерывное в обе стороны. Это значит, что если мы возьмем две точки x и y области V и станем двигать x так, чтобы расстояние между x и y неограниченно уменьшалось, то расстояние между соответствующими точками x' и y' также будет неограниченно уменьшаться, и наоборот, если неограниченно уменьшается расстояние между точками x' и y', то неограниченно уменьшается и расстояние между x и y.*)

Проведенная циркулем окружность делит плоскость на две части: круг и плоскость с круглой дыркой (рис. 2). Теорема Шенфлиса утверждает, что всякая несамопересекающаяся замкнутая кривая делит плоскость на части, устроенные точно так же, как круг и плоскость с круглой дыркой.

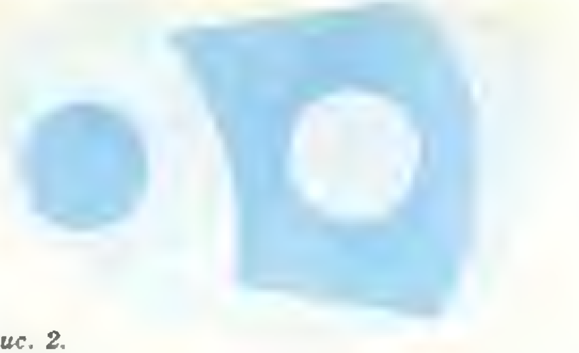


Рис. 2.

Пространственные обобщения

Математики начала века, в принципе, имели основания относиться к пространственной геометрии более легкомысленно, чем мы к ней относимся теперь. С точки зрения этого легкомыслия пространственные аналоги теорем Шенфлиса и Жордана должны существовать — нужно только найти правильные формулировки. Замкнутая кривая должна быть заменена замкнутой поверхностью. Правда, уже здесь есть одна неприятность: все замкнутые кривые на плоскости «устроены совершенно одинаково», а о замкнутых поверхностях этого не скажешь: бывают хорошо известные (с середины прошлого века) сферы с ручками (рис. 3), которые «устроены» иначе, чем сфера. Эту трудность мы преодолеем посредством волевого решения: сферы с ручками мы просто отменим. Именно: мы возьмем в пространстве обычную круглую сферу и произведем ее деформацию «без разрывов и склеек». В результате получится поверхность, для которой хотелось бы доказать аналоги теорем Жордана и Шенфлиса.

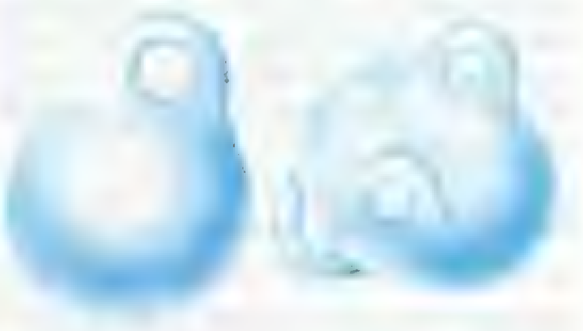


Рис. 3.

Аналог теоремы Жордана оказывается верным: наша поверхность делит пространство на две части (точная формулировка не отличается от фор-

---

*) «Устроены совершенно одинаково» — это выражение кажется математикам чересчур громоздким, и они предпочитают заменить его изящным, с их точки зрения, словом «гомеоморфны». Я постараюсь не употреблять это слово без крайней необходимости.

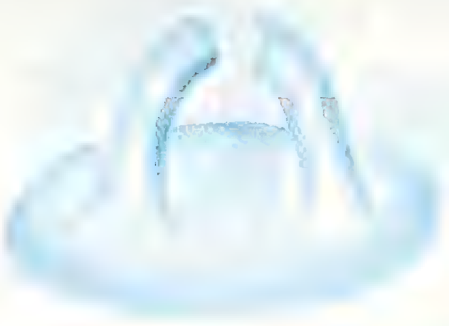


Рис. 4.

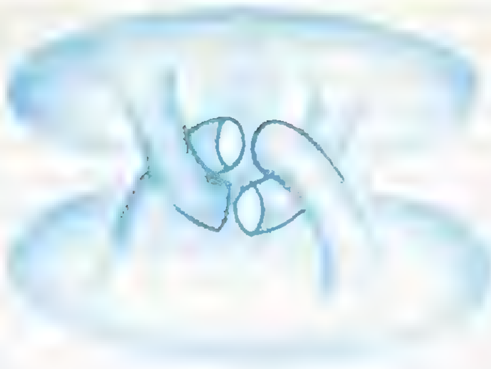


Рис. 5.

мулировки теоремы Жордана). Эта теорема, в действительности, верна и для сфер с ручками и еще для более широкого класса поверхностей (точное определение состоит в том, что поверхность гомеоморфна сфере с ручками, но мы условились не употреблять этого слова). Справедливы и многочисленные многомерные аналоги теоремы Жордана, но мы даже не будем пытаться их формулировать.

А теорема Шенфлиса? Ее пространственное обобщение должно было бы утверждать, что части, на которые пространство подразделяется продеформированной сферой, стандартны: одна «устроена точно так же», как область, ограничиваемая обычной сферой, т. е. шар (без границы), а другая — как внешность шара в пространстве. (Слово «внешность» здесь и дальше употребляется не в бытовом значении «внешний вид», а в математическом смысле: «часть, расположенная вне».) И вот эту-то вполне правдоподобную гипотезу неожиданно для всех опроверг в 1924 году тогда еще совсем молодой американский тополог Джон Александер. Опровержение было весьма убедительно: Александер построил в пространстве искривленную сферу, делящую пространство на нестандартные части. В чем состояла конструкция, вы сейчас увидите.

Она необычайно красива

И проста. Главный элемент конструкции показан на рисунке 4: на плоском диске мы берем два маленьких кружка и вытягиваем из них «пальцы», так, чтобы их концы сблизились, но не сомкнулись. Сами эти концы мы тоже считаем плоскими дисками.

Это вытягивание пальцев обычно будет у нас производиться не с одного диска, а с двух параллельно расположенных дисков. Вытянутые пальцы будут зацеплены в «замóк» (рис. 5).

Теперь опишем все построение. Берем круглую сферу. Из нее вытягиваем два почти смыкающихся пальца — как на рисунке 4 (рис. 6). Получившаяся поверхность вмещает в себя два расположенных близко один от другого параллельных диска (верх рисунка 6). Из этих двух дисков мы вытягиваем пальцы — в точности, как показано на рисунке 5. На поверхности, изображенной на рисунке 5 — присмотритесь к этому рисунку,— есть две пары параллельных дисков (концы вытянутых пальцев). Эти диски появятся (в уменьшенном виде) на нашей поверхности. Каждую из этих пар дисков мы превращаем — вытягиванием пальцев — в фигуру рисунка 5 (еще более уменьшенную). На новой поверхности будут уже четыре пары параллельных дисков, и мы опять вытягиваем из этих дисков (совсем уже маленькие) пальцы, превращая каждую пару в подобие рисунка 5. И так далее.

То, что получится после «и так далее» и есть Рогатая Сфера Александера.

Строго говоря, эту сферу изобразить на рисунке уже нельзя, потому что входящие в нее копии рисунка 5 приходится уменьшать неограниченно. (Вы знакомы с похожим эффектом по детским книжкам. Помните:

Рис. 6.

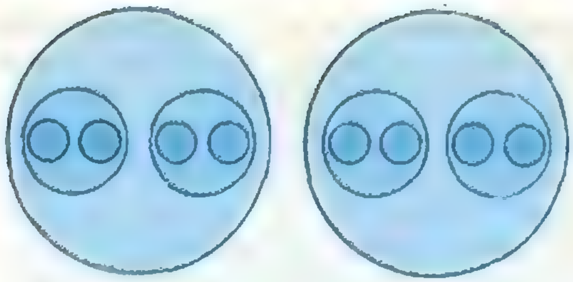


Рис. 8.

на обложке изображен человек или зверь, читающий эту же книжку.) Все же какое-то подобие Рогатой Сферы я решаюсь вам показать (рис. 7).

Я надеюсь, что конструкция вам понятна, если нет — значит я что-то плохо объяснил. Вникните в конструкцию еще раз, и, наверное, вам все станет ясно. А теперь займемся свойствами Рогатой Сферы.

Это действительно сфера

Поначалу это все-таки вызывает сомнения. Сфера Александера выглядит как гимнастическая гиря с распиленной ручкой и с какой-то сложной фигурой из проволоки различной толщины, вставленной в пропиленную щель. Не дотягиваются ли два куска ручки друг до друга? Ведь на каждом этапе построения мы сближаем какие-то части сферы между собой — не сольются ли они в пределе?

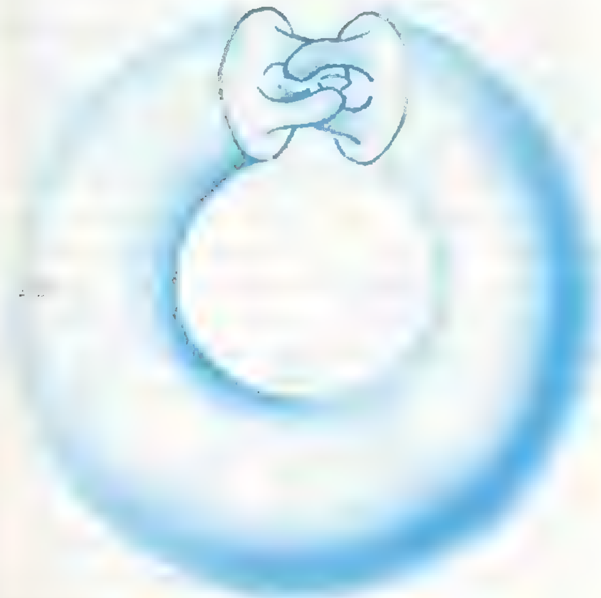


Рис. 7.

Нет! Предыдущее построение можно провести так, чтобы при деформации сферы расстояние между любыми двумя ее точками не увеличивалось и не уменьшалось больше, чем, скажем, в 100 раз. (Я говорю «скажем», потому что на рисунках 4 и 5 не указаны размеры — длины пальцев, ширина щели и т. д.; все это можно сделать немножко больше или немножко меньше; можно подобрать размеры так, чтобы указанное выше число равнялось именно 100.)

Рассмотрим наше построение шаг за шагом. Первое вытягивание пальцев затрагивает два кружка на круглой сфере; остальные части сферы остаются неподвижными на этом этапе деформации и на всех последующих этапах. Второй шаг затрагивает четыре маленьких кружка — по два внутри каждого из предыдущих кружков (рис. 8). Части сферы, лежащие вне этих четырех кружков, неподвижны на всех этапах деформации, кроме первого. Третий этап затрагивает 8 еще более маленьких кружков (см. рис. 8), четвертый — 16 еще более маленьких кружков (на рис. 8 они уже не видны) и т. д. Всего имеется 2^n кружков n-й очереди; в каждом кружке n-й очереди лежат два кружка $(n+1)$-й очереди; точки сферы, не лежащие ни в одном кружке n-й очереди, неподвижны на всех этапах деформации, начиная с n-го.

Проконтролируем теперь сближение точек. Пусть две точки лежат в разных кружках 1-й очереди (самых больших кружках). На первом этапе деформации они сближаются, скажем, максимум в 10 раз (см. рис. 4). На втором этапе деформации они могут еще сблизиться, поскольку пальцы, вытягивающиеся из концов предыдущих пальцев, подходят друг к другу ближе, чем сами эти концы — скажем, еще в 10 раз (см. рис. 5). Но на последующих этапах эти точки уже не сближаются, во всяком случае существенно: сближаются точки первого кружка с точками первого кружка и точки второго кружка с точками второго кружка. Пожалуйста, вникните и убедитесь в этом: здесь центральный пункт доказательства и главная красота конструкции — гениальное изобретение великого тополога.

Две точки, лежащие в разных кружках 2-й очереди, но в одном кружке 1-й очереди, при первом вытягивании пальцев не сближаются и не расходятся: расстояние между ними сохраняется. На втором и третьем этапах они могут сблизиться — не более, чем в 10 раз на каждом этапе, на дальнейших этапах расстояние между ними существенно не меняется. Вообще точки, лежащие в разных кружках $(n+1)$-й очереди, но в одном кружке n-й очереди, сближаются (не более, чем в 10 раз) на $(n+1)$-м и $(n+2)$-м этапах, а на других этапах расстояние между ними существенно не меняется. Ясно, что и увеличение расстояния между точками ограничено (оно происходит при вытягивании пальцев); можно считать, что и увеличивается расстояние не более, чем в 100 раз.

Таким образом, при нашей деформации никакие две точки не сливаются (они даже не сближаются более, чем в 100 раз). Непрерывность деформации тоже очевидна (хотя ее строгое доказательство требует небольшой техники). Значит, Рогатая Сфера — это действительно сфера, как мы ее понимали выше (см. пункт «Пространственные обобщения»).

Внешность Рогатой Сферы

Часть пространства, заключенная внутри Рогатой Сферы, устроена как открытый (т. е. лишенный границы) шар. Это легко доказать, но не это нас интересует. Главное для нас, что внешность Рогатой Сферы не гомеоморфна внешности обыкновенной круглой сферы, т. е. Рогатая Сфера опровергает гипотетическую формулировку обобщенной теоремы Шенфлиса. Доказательство этого факта просто, но весьма поучительно, ибо это — настоящая топология. Внешность круглой сферы обладает следующим свойством: любая лежащая в ней (во внешности сферы) замкнутая кривая может быть стянута в ней в точку (т. е. может быть непрерывно продеформирована в сколь угодно маленькую или даже точечную кривую, причем вся деформация протекает во внешности сферы) — см. рисунок 9. Это свойство внешности сферы наглядно очевидно (хотя строгое доказательство довольно занудно) и мы его не доказываем; оно называется односвязностью. Гомеоморфные («устроенные совершенно одинаково») области бывают односвязны одновременно: ес-

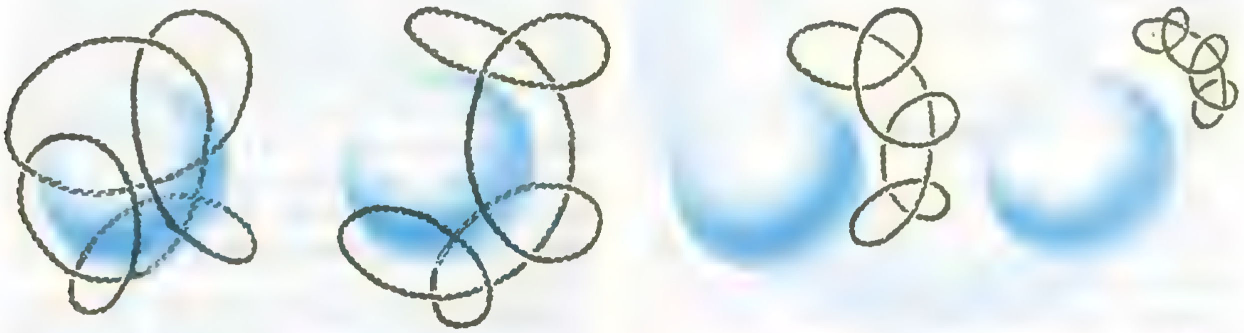


Рис. 9.

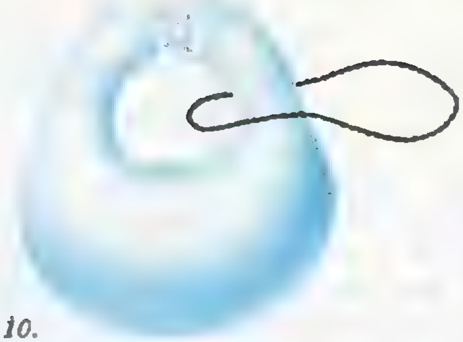


Рис. 10.

ли односвязна одна, то односвязна и другая. Но, в отличие от внешности круглой сферы, внешность Рогатой Сферы не односвязна: замкнутую кривую, охватывающую рог (рис. 10), выпутать из Рогатой Сферы невозможно. (При снятии с рога кривая должна была бы пройти между каждыми двумя противостоящими кружками каждой очереди. А это значит, что в процессе деформации кривая должна подойти к сфере сколь угодно близко: ближе любого наперед заданного расстояния. В свою очередь, это означает, что в какой-то момент при деформации кривая заденет сферу, что запрещено.)

Значит, внешность Рогатой Сферы устроена не так, как внешность круглой сферы — ожидавшееся обобщение теоремы Шенфлиса оказалось неверным.

Возможны варианты

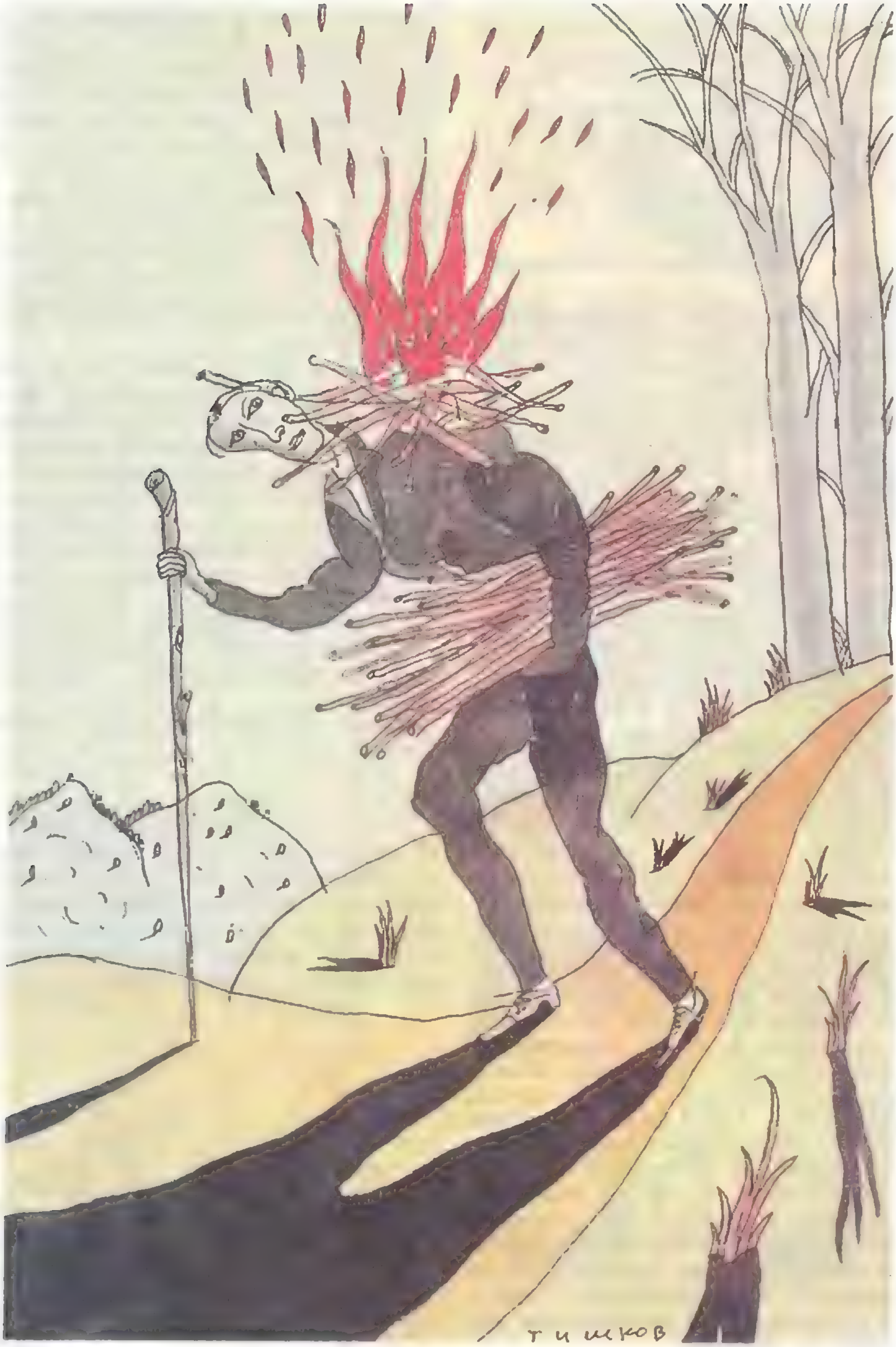
Теперь нам легко быть умными. Рога можно было бы вытягивать не наружу, а внутрь сферы — тогда внутренняя область отличалась бы от шара (а внешность была бы устроена как внешность круглой сферы). Можно было бы вытягивать рога и внутрь, и наружу — тогда были бы нестандартны (неодносвязны) и внешность, и внутренность. Можно вытягивать сколько угодно пар рогов, можно их как угодно заузливать и зацеплять — словом, можно настроить бесчисленное количество сфер с разными внешностями и внутренностями. Однако, это неограниченное разнообразие нас больше не удивляет.

Заключение

Прошли годы и десятилетия после открытия Александера, но топологов не оставляла надежда, что трехмерный аналог теоремы Шенфлиса все же существует — нужно только исключить из рассмотрения чересчур замысловатые поверхности. Что если, скажем, поверхность будет полиэдральной, т. е. многогранной? И для таких поверхностей теорема Шенфлиса оказалась крепким орешком, но все же в 1960 году ее удалось доказать американскому топологу Мортону Брауну.

Теорема Брауна верна не только для трехмерного пространства, но и для пространства любой размерности. Впрочем, в многомерных пространствах уже в полиэдральном случае не все благополучно. Например, как обнаружили в 70-е годы Р. Кэрби и Л. Зибенман, часть четырехмерного пространства, заключенная между двумя полиэдральными сферами, одна из которых объемлет другую, может быть не гомеоморфна стандартному четырехмерному шаровому слою.

Но все это уже не для популярной статьи.


ТИШКОВ

ХОЛОДНОЕ ГОРЕНИЕ

Доктор физико-математических наук
Ю. ГУРЕВИЧ

Ревущее пламя в реактивном двигателе космического корабля, спокойный огонь костра на привале, голубоватые язычки газа на кухонной плите — все они порождены одним процессом, который принято называть горением. Именно с пламенем в житейском представлении и ассоциируется этот процесс. Связь в сознании горения и пламени уходит в глубину веков: ведь именно огонь, т. е. пламя, дающее тепло, принес людям Прометей.

И лишь относительно недавно стало понятным, что горение может быть холодным. При этом с позиций «чистой выгоды» (отвлекаясь от эстетической красоты пламени) как раз холодное горение является наиболее эффективным. Устройства, в которых осуществляется процесс холодного или, как его еще именуют, электрохимического горения, называются топливными элементами.

На языке строгой науки горение — это химическая реакция, состоящая в переходе электрона (или нескольких электронов) от одного соединения к другому и сопровождающаяся выделением энергии. При этом вещество, отдающее электроны, служит горючим и в процессе горения оно окисляется. Вещество, принимающее электроны, называется окислителем.

Так, горение угля в воздухе есть химическая реакция окисления углерода кислородом; ее условно можно записать в виде

$$C+O_2=CO_2+\text{энергия}.$$

Именно эта реакция протекает в топках теплостанций, работающих на угле и других видах топлива, состоящих, в основном, из углерода. Та же реакция окисления углерода лежит в основе горения дров в печи или в костре.

Приведенный пример — процесс привычного всем «горячего» горения. Однако не всегда горение протекает привычно. Проиллюстрируем особенности холодного (электрохимического) горения на практически важном случае реакции сжигания водорода. Газообразный водород можно, как известно, непосредственно сжечь в кислороде воздуха. В результате такой реакции получается вода и выделяется тепло:

$$2H_2+O_2=2H_2O+\text{энергия}.$$

Можно, однако, поступить и иначе: разделить реакцию сгорания водорода в кислороде на два процесса, пространственно отделенных друг от друга. Рассмотрим сначала процесс с участием только водорода. Допустим, что молекула водорода приведена в соприкосновение с границей металл — раствор электролита. Молекула водорода состоит из двух атомов, и на поверхности некоторых металлов она на них распадается. (Распад связан с тем, что атомы водорода химически взаимодействуют с поверхностью металла, как бы прилипают к ней.) Находящиеся на границе металл — раствор атомы водорода (их называют адсорбированными) разрываются далее еще на две — теперь неравные — части: электрон и положительно заряженное ядро атома водорода — протон. Электрон уходит в глубину металла, а протон (или ион водорода) — в раствор.

Сходным образом, молекула газообразного кислорода на трехфазной границе металл — раствор — газ также вступает в электрохимическую реакцию. При этом, благодаря силам химического взаимодействия с кислородом, электроны отрываются от металла. В результате из кислорода, молекул воды и электронов образуются отрицательно заряженные частицы OH^- — ионы гидроксила. Они поступают в раствор, где соединяются с ионами водорода, которые генерируются в другом электроде. В результате этой реакции —

$$H^{+}+OH^{-}=H_2O$$

— получается вода — конечный продукт горения без пламени. Но главное здесь в том, что металлический электрод, находившийся в контакте с водородом, получил избыток электронов, а тот, что был в контакте с кислородом, напротив, отдал часть электронов. Поэтому, если соединить эти электроды проводником, т. е. замкнуть внешнюю цепь, избыточные электроны будут переходить от «водородного» электрода к «кислородному» (рис. 1). Иными словами, во внешней электрической цепи пойдет ток, который может совершить полезную работу. Процесс будет идти непрерывно, если держать электрическую цепь замкнутой, а к электродам подводить «горючий материал» — водород и кислород.

Таким образом, энергию химической реакции окисления, т. е. горения, в топливном элементе удается непосредственно превратить в энергию электрическую. В соответствии с названиями «сжигаемых» материалов тот конкретный элемент, который мы рассматривали, именуется кислородно-водородным.

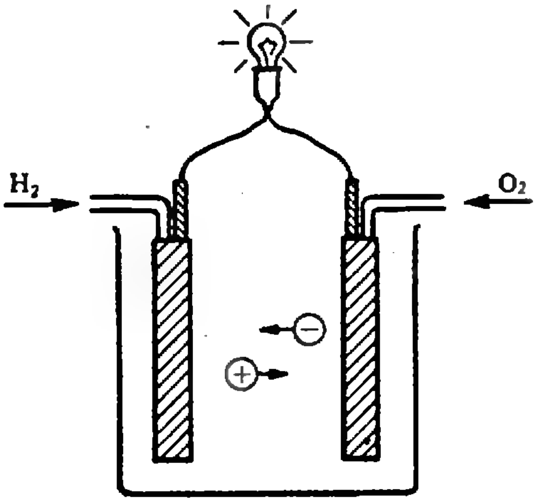


Рис. 1. Схема простейшего кислородно-водородного топливного элемента.

Интересно, что сама по себе идея создания топливного элемента отнюдь не является новой — в прошлом году ей исполнилось 150 лет. В 1839 году английский ученый У. Гров обнаружил протекание тока между двумя электродами из платины, частично погруженными в раствор серной кислоты, в условиях, когда один электрод находился в контакте с кислородом, а другой — с водородом. По сути, конструкция Грова была прообразом кислородно-водородного элемента. Однако в то далекое время результатом экспериментов Грова ни он сам, ни его современники не придали должного значения. Лишь несколько десятилетий спустя многие ученые и изобретатели пытались уже достаточно целенаправленно создать топливный элемент, пригодный для практического применения. Энтузиастом технического решения этой проблемы в семидесятых годах прошлого века был замечательный русский электротехник и изобретатель П. Н. Яблочков. Но тогда решение в руки не далось. И вот уже в наше время, во всеоружии научных знаний и технической оснащенности конца двадцатого века, ученые и инженеры вновь штурмуют ту же твердыню. Почему же так заманчиво прорваться за стены крепости и отчего эти стены столь неприступны?

Сперва о важности задачи.

Основу энергетики сегодняшнего дня составляют тепловые паротурбинные электростанции, работающие на угле, нефти, мазуте, газе. Система превращения топлива в электрическую энергию здесь многоступенчата: выделяющееся при сгорании тепло нагревает воду, вода превращается в пар высокого давления, пар приводит в движение турбину, которая, в свою очередь, вращает ротор электрического генератора.

При таком сложном, громоздком процессе не обойтись без больших энергетических потерь. Но если в сравнительно недавние времена считалось, что запасы топлива на Земле практически неисчерпаемы, то сегодня на многое открылись глаза, и эффективность превращения энергии становится одной из главных проблем.

Другая проблема — охрана окружающей среды. От отходов вроде копоти, пыли, вредных веществ избавиться относительно просто, во всяком случае принципиальных трудностей здесь нет. Гораздо сложнее обстоит дело с энергетическим засорением. Уже сейчас энергетический «товарооборот» человека в отдельных регионах земного шара сравним с тепловым оборотом природных процессов, а потребление энергии неумолимо растет. Возникает вопрос: куда «спрятать» потраченную без пользы энергию тепловых станций. Ведь при существующих темпах производства не сегодня так завтра нашей планете «станет жарко». Не будем живописать картину того, к чему это может привести. Ясно, однако, что энергетика должна быть не только экономичной, но и экологичной.

И даже если обычные тепловые электростанции уступят место атомным энергоустановкам, обольщаться не нужно — сформулированные проблемы останутся. Причина в том, что нынешная атомная и даже будущая термоядерная электростанции остаются по сути электростанциями тепловыми. Просто топка архаичного парового котла заменяется ядерным реактором, но, как и в прапрадедовские времена, здесь приходится, сжигая энергоноситель, сначала получать тепло и лишь затем, через промежуточные ступени, превращать тепловую энергию в электрическую.

Источник возникающих трудностей очень серьезен — мы наталкиваемся здесь на фундаментальный запрет, налагаемый неумолимыми законами термодинамики, который ограничивает максимальный коэффициент полезного действия (КПД) любой тепловой машины. Математически это ограничение описывается знаменитой формулой, полученной двадцативосьмилетним французским физиком и инженером Никола Сади Карно и опубликованной им в 1824 году в единственной за всю его жизнь научной работе «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу». Воспользовавшись формулой Карно, получаем результат не слишком утешительный: максимальный КПД самых современных тепловых установок, использующих пар, нагретый под высоким давлением, оказывается лишь немногим более 60 %. Причем это — идеальное значение, а с учетом неизбежных потерь КПД не превосходит сорока (в лучшем случае — сорока «с хвостиком») процентов. Некоторый выигрыш можно ожидать от применения магнитогидродинамических установок, где теплоносителем является плазма (смесь ионизованных атомов и электронов). Но и здесь реальный КПД вряд ли превзойдет 55 %.

Законы термодинамики не перешагнуть и не обойти, поэтому единственный путь радикального разрешения проблемы — отказаться от неэффективного «вульгарного» сжигания энергоносителей. Оказывается, что осуществление холодного горения — важнейший шаг по этому принципиально иному пути. В топливном элементе (электрохимическом генераторе) выделяющаяся химическая энергия превращается непосредственно в электрическую. Отсюда следует, что топливный элемент не есть тепловой двигатель и жесткие ограничения, вытекающие из термодинамической формулы Карно, на него не распространяются. Другими словами, коэффициент полезного действия устройств, в основе работы которых лежит функционирование топливных элементов, в принципе может быть приближен к заветным ста процентам. Отметим попутно, что сказанное относится и к иным химическим источникам тока, например — к гальваническим элементам, на основе которых работают батарейки в радиоприемниках, микрокалькуляторах, электронных часах и т. д.

Причина резкого различия КПД для процессов горячего и холодного горения поддается вполне наглядному объяснению. Горение, будучи химической реакцией соединения атомов или молекул, сопровождается переходом электронов от одной частицы к другой. Но перемещение электронов из одного места в другое есть электрический ток. Поэтому каждый элементарный акт реакции горения сопровождается протеканием электрического тока, являющегося своеобразным током короткого замыкания между реагирующими частицами. Освобождающаяся при каждом акте электрическая энергия рассеивается, превращаясь в энергию хаотического движения частиц, т. е. в тепло. Наблюдаемая суммарная химическая реакция складывается из астрономически огромного числа элементарных процессов.

Другими словами, обычное — «горячее» — горение можно себе представить как беспорядочные отдельные процессы короткого замыкания, происходящие между бесчисленным количеством молекул или атомов с различными электрическими потенциалами. В результате химическая энергия исходных реагентов (фактически имеющая электрическую природу) переходит в тепловую. Однако тепловая энергия, будучи по своей сути энергией хаоса, с большим трудом переводится в энергию упорядоченного движения. По отдельности случайно движущиеся частицы обладают значительной кинетической энергией, но двигаются они в различные стороны и, как вошедшие в пословицу лебедь, рак и щука, никак не сопрягают свои усилия в одном направлении. По сути, именно в этом причина жесткого ограничения КПД тепловых машин: при превращении энергии хаоса в полезную работу потери принципиально неизбежны.

В топливном элементе все обстоит иначе: хаотические токи, связанные с протеканием химической реакции, вообще не возникают. Вспомним схему его работы: электроны от топлива (в рассматриваемом примере — водорода) непосредственно поступают в электрическую цепь. Там эти электроны совершают полезную работу, а соединяются с окислителем (в нашем примере — с кислородом) уже на другом электроде. Таким образом, между реагентами оказалась включена электрическая цепь, в результате чего беспорядочные электрические токи, характерные для «обычного» горения, непосредственно превратились в направленный электрический ток. Иными словами, хаоса в топливном элементе удается избежать на самой начальной стадии процесса горения (недаром оно холодное!) и за счет этого резко повысить значение идеального коэффициента полезного действия. Так, если сжигать уголь в кислороде не обычным путем, а электрохимическим, этот коэффициент, согласно расчетам, может достигать 99,8 %! При этом, поскольку в топливном элементе отсутствуют многочисленные промежуточные ступени преобразования энергии (каждая со своими «утечками», трущимися частями и т. д.), есть основания ожидать, что реальный КПД будет не слишком далек от идеального, т. е. близок к желанным ста процентам.

Открывающиеся здесь возможности были ясно осознаны уже в конце прошлого века, когда перед человечеством еще не маячили энергетический, экологический и другие кризисы. Крупнейший физико-химик того времени, Нобелевский лауреат Вильгельм Оствальд писал в 1894 году: «Путь, которым можно решить самый важный из всех технических вопросов — вопрос получения дешевой энергии,— должен быть найден электрохимией... Если мы будет иметь элемент, производящий электроэнергию непосредственно из угля и кислорода воздуха, это будет техническим переворотом, далеко превосходящим по своему значению изобретение паровой машины... Мы имеем здесь дело со случаем, когда наука заранее предсказывает полный успех».

Все в этих словах, написанных почти сто лет назад, абсолютно справедливо. И остановка, казалось бы, за малым — справиться с вопросами не принципиального, а чисто технического характера. Но это «малое» оказалось столь крепким орешком, что расколоть его до конца не сумели и по сей день.

Первая волна энтузиазма среди ученых и инженеров поднялась вскоре после вдохновляющего выступления Оствальда. Для реализации эффективного электрохимического сжигания угля были использованы самые разнообразные ухищрения: пытались применять не свободный кислород, а иные окислители; варьировали состав электролита, куда добавляли специальные вещества — переносчики окислителя; всячески модифицировали форму электрохимической ячейки и т. д. Известных успехов удалось добиться: коэффициент полезного действия некоторых установок действительно приближался к ста процентам. В целом, однако, решение проблемы ускользало из рук: маломощность, недолговечность и ненадежность работы, а также дороговизна мешали топливному элементу стать серьезным конкурентом быстро прогрессировавших методов получения энергии из горючего путем его традиционного сжигания. Динамомашины и двигатели внутреннего сгорания праздновали полную победу. Основные усилия ведущих исследователей неуклонно смещались в иную сторону, и проблема создания совершенного топливного элемента отодвинулась в тень.

В Советском Союзе исследования в области топливных элементов развернулись вскоре после окончания Великой Отечественной войны. Большая заслуга в этом принадлежит академику А. Н. Фрумкину, который многие десятилетия был главой советской электрохимической школы. Проблему создания топливных элементов удалось существенно продвинуть вперед, что было связано с успешным решением ряда научных задач (придание материалу электродов каталитических свойств, разработка теории пористых электродов (один кубический сантиметр пористого электрода может иметь развитую поверхностью площадью в десятки квадратных метров)).

Но подлинный перелом в судьбе топливных элементов наступил с началом космической эры, открытой запуском советского спутника. Почти сорок процентов его общей массы составляли химические источники тока. Отношение к топливным элементам теперь круто изменилось. Правда, «баловнями» оказались, в основном, кислородно-водородные элементы, функционирующие на принципе, открытом Гровом. Преграды, мешавшие широкому применению на Земле — в первую очередь дороговизна,— были теперь отброшены. Важнее оказались неоспоримые преимущества топливных элементов в космосе: малая масса при большой мощности, компактность, возможность придать удобную конфигурацию, нечувствительность к перегрузкам и т. д. Вновь на первый план выступили «старые» достоинства — отсутствие вредных выбросов, бесшумность работы, обнаружились и «новые» — отсутствие мешающих радионаводок и излучений. Итак, первое серьезное применение топливные элементы нашли не на самой Земле, а за ее пределами — на космических кораблях и станциях. Ныне они побывали даже на Луне.

После столь блестящего космического старта вновь возрос интерес к земным применениям топливных элементов. При этом отчетливо выявились неплохие перспективы у кислородно-водородных элементов. Например, электромобили на электрохимических генераторах тока имеют в условиях города ряд важных преимуществ по сравнению с привычными автомобилями с двигателями внутреннего сгорания. В первую очередь — это бездымность и бесшумность, что обеспечивает электромобилям конкурентоспособность, даже несмотря на более высокую (на сегодня) стоимость эксплуатации и меньшую автономность. По прогнозам специалистов, будущее здесь, скорее всего, именно за электромобилями, как на топливных элементах, так и на аккумуляторах.

Энергоустановки различной мощности на основе электрохимического сжигания водорода находят, естественно, применение не только на транспорте. Так, в США уже функционируют топливные элементы мощностью около 40 кВт для небольших предприятий.

Кислородно-водородные элементы начинают использоваться как важное звено при преобразовании солнечной энергии. Уже созданы солнечные батареи, достаточно эффективно превращающие энергию солнечного излучения в электрическую. Они, однако, могут работать только при солнечном свете, а энергия нужна круглые сутки. В связи с этим возникает проблема накопления получаемой энергии. Возможный здесь путь связан с использованием электроэнергии от солнечных батарей для получения электролизом водорода и кислорода. Это «горючее» может храниться достаточно долго, а холодное сжигание его в топливном элементе вновь даст электрическую энергию.

Итак, с кислородно-водородными источниками дело обстоит относительно благополучно. Практическое применение нашли также элементы, работающие на таком электрохимическом горючем, как гидразин (N_2H_4), метанол (метиловый спирт CH_3OH), этиленгликоль ($HOCH_2CH_2OH$).

Одним из перспективных направлений является привлечение биологических ферментов для ускорения электродных процессов (биоэлектрокатализ). Активация ферментами может быть использована для разработки так называемых биотопливных элементов.

Вернемся, однако, к сверхзадаче исследований в области топливных элементов, как она была сформулирована первоначально. Цель — осуществление холодного горения угля либо иного природного горючего, и в перспективе — решение на этой базе проблем большой энергетики. Поэтому исследователи-первопроходцы обратились к задаче электрохимического сжигания угля (углерода). И здесь их сразу поджидала серьезная трудность. Дело в том, что реакция окисления углерода протекает при комнатных температурах с ничтожной, практически нулевой скоростью. В этом ее существенное отличие от весьма быстрой реакции окисления водорода, что, в конечном счете, и позволило кислородно-водородным элементам вырваться вперед.

Здесь трудно удержаться, чтобы в который раз не удивиться гармоничности окружающего нас мира. Ведь практически все живое состоит из молекул углерода. И если бы углерод легко окислялся кислородом воздуха, жизнь была бы невозможна. С другой стороны, энергетическая проблема в живых организмах решается путем окисления (горения), причем при обычных температурах. Замечательно, что обязательным звеном в цепи окислительных процессов здесь оказывается именно холодное горение водорода, источником которого служит пища. Другими словами, кислородно-водородный топливный элемент в биологическом варианте — фундамент энергетики живого, а кислородно-углеродный, если бы он мог функционировать в обычных условиях, привел бы к гибели (а точнее — к «невозникновению») этого живого.

Теперь легко понять, что осуществление холодного горения угля наталкивается отнюдь не на случайную трудность. Приходится преодолевать созданный самой природой барьер, который охраняет живую материю. Таким образом, ставка на природное углеродное топливо требует перехода к высоким температурам. При этом вместо обычных водных растворов электролитов используются расплавы либо так называемые твердые электролиты.

Высокотемпературные топливные элементы предназначены для крупномасштабных стационарных установок большой мощности, которые могут длительное время работать непрерывно и обеспечивают высокую общую эффективность использования энергии природного топлива. Создание установок такого типа требует решения задач, стоящих на стыке многих областей знания — от математики и электрохимии до материаловедения и электроники. По своим масштабам и классу сложности эта проблема, взятая в целом, сопоставима с проблемой создания атомной энергетики. Достаточно полного ее решения можно ожидать лишь в следующих поколениях электрохимических энергоустановок. Вместе с тем, фундамент для будущего решения закладывается уже сейчас. Современные электрохимические генераторы конструируются на основе батарей высоко-

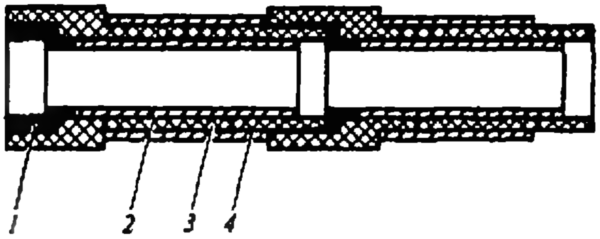


Рис. 2. Схема конструкции топливного элемента с твердым электролитом. 1 — отрицательный вывод, 2 — отрицательный электрод, 3 — твердый электролит с проводимостью по ионам кислорода, 4 — положительный электрод.

температурных топливных элементов. Эти батареи собирают из так называемых модулей, которые, в свою очередь, изготавливают последовательным соединением отдельных элементов. В элементах, представляющих собой электрохимические ячейки, происходит сгорание топлива.

Один из типов используемых элементов представлен на рисунке 2. Элемент состоит из фигурных керамических деталей (своеобразных «наперстков» без дна), собираемых в трубчатую батарею. Внутри трубки проходит топливный газ, отдающий электроны отрицательному электроду. Наружная стенка трубки контактирует с горячим воздухом. Окислитель (кислород) разряжается на положительном электроде; ионы кислорода, проходя сквозь слой твердого электролита, достигают отрицательного электрода, где и вступают в химическую реакцию с положительными ионами топливного газа. Электрохимическая цепь замыкается через токоотводы, соединенные с электродами.

Заметные успехи достигнуты, в частности, при использовании в качестве горючего оксида углерода и углеводородов в виде природного газа. Конечно, используемые горючие газы — это не просто уголь, как хотелось бы в идеале, но уже природное топливо. Рабочая температура достигает здесь нескольких сот градусов, и такое горение трудно назвать «холодным», но это именно электрохимический процесс, а не «обычное» горение.

Создание электрохимических энергоустановок на природном газе оказывается целесообразным уже сегодня. Особенно в больших городах, где наиболее реально выступают такие преимущества топливных элементов, как бесшумность, бездымность и «безводность». В одном из наиболее урбанизированных государств — Японии — планируется к концу нашего века с помощью установок с топливными элементами получать примерно 13 % требующейся энергии.

Если заглянуть еще дальше, лет на 20—30 вперед, то станет заметным конец эры нефтепродуктов и природного газа. Наступит, по-видимому, угольная эра или своеобразный угольный ренессанс. К этому времени следует ожидать не только появления, но и развития электрохимических генераторов, «сжигающих» уголь. Возможно, такие установки будут действовать совместно с газификаторами, где измельченный уголь обрабатывается водяным паром; в результате газификации образуется так называемый водяной газ (смесь окиси углерода и водорода), являющийся, в принципе, подходящим горючим. Однако на этом пути возникают свои проблемы: так, поскольку уголь обычно содержит примеси серы, при газификации дополнительно образуются и сернистые соединения, которые обладают неприятным свойством «отравлять» электроды. Требуется очистка, а это дополнительные расходы.

Есть и другие подходы и другие трудности. Но все они преодолимы. Одно не вызывает сомнения — процессу холодного горения еще предстоит серьезно послужить человечеству.

12
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

В этом году издательство «Наука» планирует выпустить в серии «Библиотечка «Квант» второе издание книги К. Ю. Богданова «Физик в гостях у биолога». Первое издание вышло в этой серии в 1986 году (выпуск 49), а в 1987 году на Всесоюзном конкурсе научно-популярной литературы книга была отмечена Почетным дипломом. Второе издание будет дополненным, и сегодня мы предлагаем нашим читателям несколько новых рассказов, которые в него войдут. Это рассказы о том, как выглядит движение животных с точки зрения физика.

БОЛЬШИЕ И МАЛЕНЬКИЕ НА ПРОГУЛКЕ

Кандидат физико-математических наук,
доктор биологических наук К. БОГДАНОВ

По воде, как посуху

Все мы привыкли делить животных на тех, которые обитают в воде, и на «сухопутных». Однако существует несколько видов насекомых, которые почти всю свою жизнь проводят на границе воды и воздуха. Одни из них — водомерки.

Водомерки быстро скользят по поверхности воды, напоминая конькобежцев на льду. Широко расставленные длинные лапки поддерживают тонкое продолговатое тело.

Поверхностная пленка воды с ее большим поверхностным натяжением служит для водомерки надежной опорой. Если же на пути ее движения попадется «полынья» — участок, где поверхностное натяжение будет много меньше,— насекомое погрузится в воду и будет беспомощно барахтаться в ней. Такую «полынью» можно устроить, капнув в воду немного гексана — его коэффициент поверхностного натяжения (на границе с воздухом) $\sigma = 18$ мН/м почти в четыре раза меньше, чем у воды ($\sigma_{\text{воды}} = 70$ мН/м). (Наблюдения показывают, что водомерки хорошо отличают «подходящую» водную поверхность от «неподходящей». Несколько упавших водяных капель нарушают гладкость поверхности, и водомерки сразу устремляются к берегу, где прячутся до тех пор, пока вода не станет спокойной.)

Попробуем оценить, каким запасом плавучести должна располагать водомерка. Длина ее туловища немногим более 5 мм. Она имеет две пары длинных лапок, которые, в основном, и держат ее на поверхности воды, и две коротких, которыми она манипулирует с добычей. Масса m большой водомерки не превышает 0,05 г. Силу поверхностного натяжения, удерживающую насекомое на плаву, можно оценить как произведение $\sigma_{\text{воды}} L$, где L — длина кривой, вдоль которой она действует. Из равенства $mg = \sigma_{\text{воды}} L$ (это условие удержания на поверхности воды) следует, что L должна быть равна $0{,}5\ \text{мН}/70\ \text{мН} \times \text{м}^{-1} \approx 7{,}1$ мм. Что же на самом деле?

Посмотрите на рисунок 1, где в двух проекциях изображено место касания воды одной из лапок водомерки. Секрет способности насекомого держаться на поверхности воды скрыт в концах его ножек. Они густо покрыты водоотталкивающими волосками. Так как у водомерки всего шесть лапок, то максимальная длина кривой, перпендикулярно к которой действует сила поверхностного натяжения (T), составляет около 12 мм.

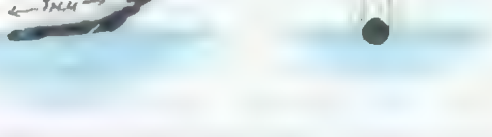


Рис. 1. Лапка водомерки на поверхности воды.

Интересно, что некоторые из насекомых, обитающих на поверхности воды (например, жук стенус), в опасных для себя ситуациях испускают струю жидкости с низким поверхностным натяжением. Пускаясь наутек, они создают позади себя «непроходимую» область, в которой преследователи начинают тонуть.

Отважные стеклолазы

Как могут мухи прогуливаться по вертикальной поверхности оконного стекла? Этот вопрос волновал еще Роберта Гука. Он полагал, что мухе помогают коготки, которые находятся на концах каждой из шести ее лапок. (В 1665 году Гук в своей работе «Микрография» подробно описал эти коготки.) Может быть, это и так, но только когда она ползает по шероховатой поверхности, а не по стеклу.

Английские ученые, вооружившись современной техникой, показали, что способность мух передвигаться по очень гладкой поверхности объясняется опять-таки силами поверхностного натяжения. Они обнаружили, что на конце каждой лапки между коготками находятся волоски, образующие щетину. Каждый из волосков оканчивается присоской, имеющей форму диска; площадь поверхности диска — около $2 \cdot 10^{-12}$ м^2.

Изучая следы мух, гуляющих по чистым поверхностям, ученые обнаружили, что они идентичны этим дискам. Отпечатки не испарялись, а их химический анализ показал, что это жиры. Несмотря на то, что жир скользкий, он способствует слипанию волосков и стекла. Это происходит из-за того, что поверхностное натяжение у жира очень велико. (Если лапки мухи обезжирить, опустив их на короткое время в гексан, то муха на некоторое время теряет способность передвигаться по стеклянной поверхности из-за скольжения.)

Были проведены измерения силы, удерживающей муху на горизонтальной стеклянной поверхности. Для этого муху прикрепляли на привязи к специальным весам и измеряли силу, необходимую для отрывания мухи от этой поверхности. Средний вес мухи составлял 0,72 мН. Когда она стояла на четырех лапках, для ее отрыва требовалась сила 1,03 мН, а если она опиралась на все шесть своих лапок, сила требовалась бо́льшая — 2,4 мН. Это и доказывало, что муху удерживали силы поверхностного натяжения. (Тот факт, что зависимость измеренной силы от количества лапок, касающихся поверхности, оказалась не линейной, по-видимому, объясняется различным количеством волосков на передних и задних лапках мухи.)

С ведром на голове

Если вам не доводилось путешествовать по Африке, по Азии, то уж в кино или по телевизору вы наверняка видели — женщины несут на голове грузы огромных размеров. Нередко вес такой поклажи достигает 70 % веса человека. Естественно, поднять себе на голову такую ношу женщина без посторонней помощи не может, и иногда двое мужчин с трудом поднимают груз, который после этого одна женщина с легкостью уносит. Неужели им легче переносить грузы на голове?

Известно, что показателем энергетических затрат человека может служить скорость потребления им кислорода, при этом 1 литр израсходованного кислорода соответствует энергии, равной 20,1 кДж. Ученые в опытах на добровольцах установили, что при обычном способе ношения груза (за спиной) потребление кислорода растет пропорционально увеличению ноши так, что груз, равный 50 % веса тела носильщика, увеличивает на 50 % его энергетические затраты. Такая же зависимость имела место и в тех случаях, когда добровольцев просили переносить груз на голове, чему их раньше не обучали.

Каково же было удивление ученых, когда они обнаружили, что африканские женщины при переносе на голове груза в 50 % собственного веса увеличивают потребление кислорода

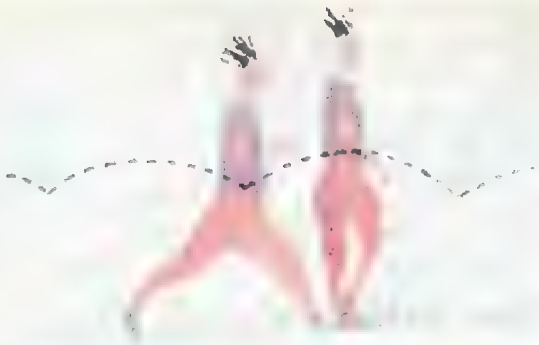


Рис. 2. Изменение положения центра тяжести при ходьбе.

лишь на 30 %! Как им это удается? Ответить на этот вопрос помогли наблюдения.

Обычная для тех мест картина — *женщина возвращается домой с* наполненным до краев сосудом на голове. Как это ни удивительно, но вода не расплескивается по дороге. А это значит, что при движении отсутствует (или почти отсутствует) вертикальная составляющая ускорения. Следовательно, и центр тяжести «носильщицы» не движется в вертикальном направлении.

Известно, что при обычной ходьбе высота центра тяжести заметно колеблется. На рисунке 2 схематически изображены положения человека и его центра тяжести в две последовательные фазы ходьбы. Если считать, что при ходьбе нога, соприкасающаяся с землей, выпрямлена, не согнута в колене, то очевидно, что центр тяжести будет располагаться ниже всего тогда, когда обе ноги касаются земли. Наивысшему положению центра тяжести будет соответствовать момент, когда соприкасающаяся с землей нога находится в вертикальном положении.

Можно считать, что центр тяжести движется по дуге окружности, радиус которой равен длине ноги, периодически поднимаясь и опускаясь на несколько сантиметров.

Естественно, что при каждом шаге на, вообще говоря, никому не нужное поднятие центра тяжести мы вынуждены затрачивать вполне определенную энергию. Поэтому такой (обычный для нас) способ ходьбы можно сравнить с ездой начинающего автолюбителя, который, пытаясь сохранить постоянную среднюю скорость движения, попеременно нажимает то на акселератор, то на тормоз, расходуя в результате гораздо больше топлива.

В отличие от европейцев, у многих жителей стран Азии и Африки выработалась такая походка, при которой они удерживают свой центр тяжести на постоянной высоте, что значительно уменьшает энергетические затраты при ходьбе.

Кое-что об аэробике

Каждый, наверное, помнит школьный урок физики, на котором речь шла о двух маятниках, подвешенных на одной перекладине. Колебания одного маятника уже через несколько циклов приводили к синфазным колебаниям другого. Что-то похожее можно встретить и в организме бегущего животного, когда происходит взаимодействие двух «маятников» — периодических движений животного, как целого, и его легких.

На рисунке 3 схематически показан дыхательный «маятник» кенгуру. При вдохе, когда легкие животного наполняются воздухом, центр масс брюшной полости сдвигается влево, а при выдохе — вправо. Эластические свойства диафрагмы и других тканей на схеме представлены пружиной, а органы, гасящие дыхательные колебания,— демпфером. Таким образом, органы брюшной полости служат своеобразным поршнем, колебания которого происходят синхронно с дыхательными движениями.

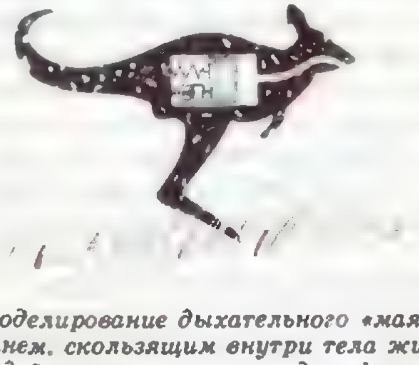


Рис. 3. Моделирование дыхательного «маятника» поршнем, скользящим внутри тела животного под действием пружины и демпфера.

Очевидно, что наименьшим энергетическим затратам при беге должен соответствовать тот случай, когда силы инерции, возникающие в теле животного при периодическом его ускорении и замедлении, помогают (а не препятствуют) совершать дыхательные движения. Подобные рассуждения приводят к мысли, что частота дыхания у животного должна быть очень близка к частоте его прыжков при беге.

В специальных опытах, проведенных на кенгуру, лошадях, зайцах и собаках, эта идея была проверена. Оказалось, что наиболее вероятным отношением частоты прыжков к частоте дыхания (особенно при быстром беге галопом) является 1:1. У человека связь между частотой бега и частотой дыхания выглядит более сложно. Это отношение у него может принимать целый спектр значений (4:1, 3:1, 2:1, 1:1, 5:2, 3:2), хотя отношение 2:1 представляется более вероятным.

Причина кажущейся независимости частот дыхания и бега у человека кроется, по-видимому, в вертикальном положении его тела. Дыхательные движения у него сопровождаются вертикальными перемещениями органов брюшной полости, а следовательно, силы инерции при беге, направленные горизонтально, влияют на дыхательный «маятник» человека в гораздо меньшей степени, чем это имеет место у четвероногих.

Возвращаясь к опыту с двумя маятниками, отметим, что вынужденные колебания второго маятника достигнут наибольшей амплитуды при равенстве периодов собственных колебаний маятников. Поэтому следует ожидать, что частота собственных колебаний дыхательного «маятника» должна быть близка к частоте бега. Так оно и оказалось. Опыты, проведенные на собаках, показали, что частота собственных колебаний дыхательного «маятника» составляет около 4 Гц, в то время как частота прыжков при беге галопом — 3,2 Гц.

Так как частота собственных колебаний дыхательного «маятника» есть величина постоянная для данного животного, то при изменении скорости бега частоту прыжков также следует сохранять неизменной. Этого требует минимизация энергетических затрат. И действительно, как у четвероногих бегунов, так и у двуногих (кенгуру) частота бега галопом остается постоянной, хотя длина прыжков может изменяться в несколько раз.

Как используют принцип Бернулли живые организмы

В соответствии с принципом Бернулли ($\rho v^2/2 + p = \mathrm{const}$, где ρ — плотность жидкости или газа, v — линейная скорость их движения и p — давление) изменение скорости потока приводит к изменению давления в нем. Как это нетрудно сообразить, принцип Бернулли прямо следует из закона сохранения механической энергии, так как величина $\rho v^2/2$ численно равна кинетической энергии единицы объема движущейся среды, а p — потенциальной энергии ее сжатия.

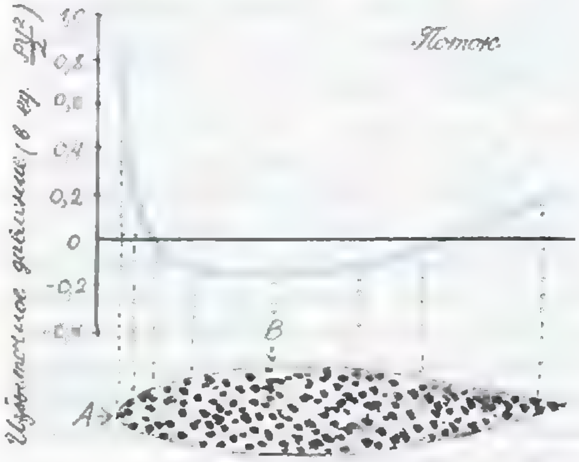


Рис. 4. Распределение давления жидкости, обтекающей тело вращения каплевидной формы. (Так как изменения давления всегда будут пропорциональны $\rho v^2/2$, эти изменения можно выражать в безразмерных единицах $2p/\rho v^2$.)

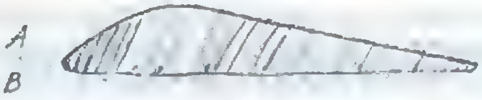


Рис. 5. Обтекание воздухом крыла самолета.

Из принципа Бернулли следует, что если какое-либо тело движется (или жидкость обтекает неподвижное тело), то давление жидкости, соприкасающейся с этим телом, будет неодинаково в различных точках потока. На рисунке 4 показано, как изменяется давление в потоке жидкости при обтекании им тела каплеобразной формы. В тех местах, где жидкость наталкивается на тело (точка *А* на рисунке 4), ее скорость уменьшается, и давление жидкости возрастает. Обтекая тело, жидкость ускоряется, и в некоторых областях, близлежащих к телу (точка *В*), она движется со скоростью большей, чем в остальных точках потока. Поэтому в точке *В* давление жидкости падает. Таким образом, высокое давление, действующее на часть тела, обращенную к потоку, будет стремиться сжать тело, а низкое давление вблизи боковых поверхностей — расплющить его.

Человек научился довольно эффективно использовать принцип Бернулли. На рисунке 5 изображено поперечное сечение крыла самолета. Рассмотрим движение двух частичек воздуха, которые до столкновения с крылом были рядом друг с другом. После того как они с разных сторон обойдут крыло, они опять окажутся вместе. Но частица *А* за этот интервал времени проделает путь больший, чем частица *В*; значит, при обходе средняя скорость частицы *А* больше. Поэтому из принципа Бернулли следует, что среднее давление над крылом должно быть меньше, чем под его плоскостью. Эта разница давлений и приводит к возникновению подъемной силы, зависящей от площади крыла и его профиля.

Как используют принцип Бернулли живые организмы? Конечно, самый наглядный пример — это парящий полет птиц. Аэродинамика этого полета, хотя она до сих пор еще не до конца изучена, мало чем отличается от полета их стальных собратьев. Однако в природе существует достаточно много других явлений, кажущуюся загадочность которых объясняет принцип Бернулли.

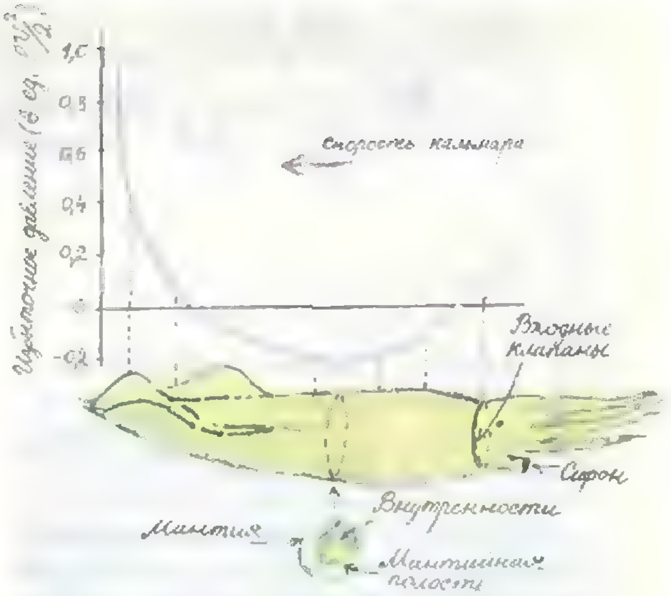


Рис. 6. Распределение давления воды вдоль поверхности движущегося кальмара. (Показано также поперечное сечение кальмара плоскостью, обозначенной пунктиром.)

Большинство читателей, конечно, знает, что кальмар, спасаясь бегством от преследующего его хищника, использует реактивный принцип движения, выбрасывая значительную массу воды из своей мантийной полости. Однако долгое время оставалось непонятным, как заполняется водой эта полость.

На рисунке 6 приведено схематическое изображение кальмара и указано направление его движения при выбрасывании струи воды из трубки (сифона), расположенной в головной части моллюска. Входные клапаны, через которые вода поступает в мантийную полость, находятся на боковой поверхности животного в центральной его части.

Все наши рассуждения о перепаде давлений жидкости, обтекающей тело, справедливы и в том случае, когда это тело — кальмар. Так что давление воды у поверхности плывущего кальмара будет минимальным в средней части его тела, вблизи мантийной полости (см. рис. 6). При этом давление жидкости у клапанов полости будет всегда несколько больше, чем среднее давление жидкости в полости. Считают, что из-за этой разности давлений и засасывается вода внутрь мантийной полости.

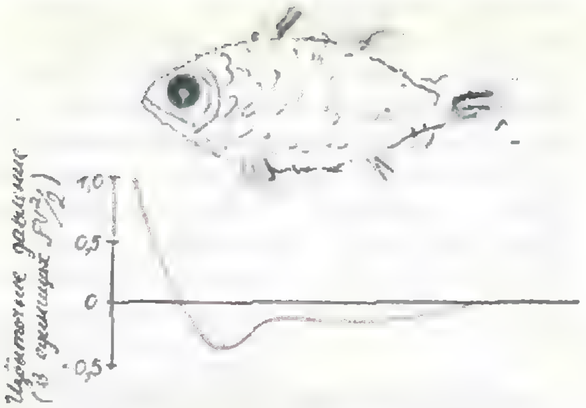


Рис. 7. Распределение давления вдоль боковой поверхности плывущей рыбы.

Насколько велик вклад принципа Бернулли в механизм заполнения мантийной полости удалось установить после проведения математического моделирования. Градиент давления (изменение давления на единице длины), даваемый формулой Бернулли, зависит от скорости движения кальмара и обеспечивает от 50 до 90 % необходимой величины, когда эта скорость увеличивается от 3 до 9 м/с. Этот расчет дает основания считать, что в действительности принцип Бернулли очень много значит для кальмара, так как обычно его скорость составляет 5—10 м/с.

Пожалуй, никто так эффективно не использует принцип Бернулли, как рыбы. Долгий ход эволюции так оптимизировал форму их тела, что величина падения давления вблизи центральной части плывущей рыбы стала почти такой же, как и его прирост перед ней (сравните рис. 4 и рис. 7). Ученые считают, что значительное падение давления, наблюдаемое вблизи того места, где у рыбы расположено сердце, может способствовать более эффективной работе последнего — меньшее давление в полостях сердца должно увеличивать приток крови к нему.

Кроме того, форма тела у рыбы такова, что есть место, где давление окружающей воды не зависит от скорости движения и всегда равно гидростатическому, и это место совпадает с положением глаз рыбы. Таким образом, глаза рыбы — наименее защищенные от деформации органы — никогда не испытывают на себе роста давления жидкости при увеличении скорости плавания.

Многим, наверное, известно, что некоторые жучки большую часть своей жизни проводят под водой. При этом они дышат воздухом, пузырек с которым таскают все время с собой. К таким «подводникам» относят, например, жучка Potamodytes tuberosus, обитающего в реках западной Африки. Обычно этот жучок вместе с пузырьком воздуха прикрепляется к поверхности камня, находящегося в струе воды. Как только жучок с пузырьком воздуха оказывается в спокойной (стоячей) воде, пузырек начинает медленно рассасываться и через пару часов исчезает, что заставляет жука искать новый. Поэтому, оседлав найденный пузырек воздуха, жучок старается всегда находиться в движущемся потоке воды.

Объяснить стабильность воздушного пузырька в потоке воды помогает опять-таки принцип Бернулли. Как следует из всего вышесказанного, давление воды, обтекающей продолговатый, вытянутый вдоль потока пузырек, должно быть меньше гидростатического почти вдоль всей его поверхности. Поэтому и давление воздуха в пузырьке оказывается меньшим, чем в том случае, когда вода вокруг неподвижна. Если глубина, на которой находится жучок, невелика, то движение воды может приводить к понижению давления воздуха в пузырьке ниже атмосферного. А это значит, что растворенный (при атмосферном давлении) в воде воздух будет входить в пузырек, где давление меньше. В результате пузырек будет расти.

Даже, когда жук в струе воды находится на глубине нескольких сантиметров, пузырек часто оказывается стабильным, несмотря на гидростатическое давление, которое препятствует этому. Расчеты показывают, что для такой стабильности на глубинах в 1 и 4 см необходимы скорости потока, бо́льшие соответственно 1 и 2 м/с.

МНОГОЧЛЕНЫ, НАИМЕНЕЕ УКЛОНЯЮЩИЕСЯ ОТ НУЛЯ

Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Я расскажу об одной из самых красивых задач о многочленах — задаче Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. Зафиксируем некоторый отрезок числовой оси, скажем, отрезок $[-2;\ 2]$ (говоря «скажем», я немного лукавлю — именно для этого отрезка получаются наиболее простые формулы). Пусть

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

— *приведенный* многочлен n-й степени (это значит, что его старший коэффициент равен 1). Множество значений $f(x)$ на отрезке $[-2;\ 2]$ — отрезок $[m;\ M]$, где m — минимум, а M — максимум многочлена. *Уклонением многочлена от нуля* называется наибольшее из чисел $|m|$, $|M|$. Если уклонение многочлена от нуля равно c, то его график содержится в полосе $|y|\leqslant c$ и не содержится ни в какой более узкой полосе со средней линией Ox.

Задача состоит в том, чтобы найти такой приведенный многочлен n-й степени $f_n(x)$, уклонение которого от нуля было бы минимальным (условие, что старший коэффициент равен 1, не позволяет сжать график произвольно близко к оси абсцисс). На первый взгляд, задача Чебышева вызывает мало энтузиазма: чтобы искать уклонение от нуля, нужно вычислять производные и решать уравнения n-й степени... Тем более удивительно, что эта задача решается геометрически — и почти без вычислений!

Давайте сначала, «не мудрствуя лукаво», разберем случаи малых степеней. При $n=1$ речь идет просто о линейной функции $f(x)=x+a$. Ее множество значений — отрезок $[-2+a;\ 2+a]$ длиной 4. Поэтому наименьшее уклонение от нуля равно 2, а $f_1(x)=x$.

Ненамного сложнее случай $n=2$ (случай квадратного трехчлена). График многочлена второй степени — отрезок параболы; и довольно очевидно, что параболу выгоднее всего расположить так, как изображено на рисунке 1. При этом $f(x)=x^2-2$, а уклонение от нуля снова оказывается равным 2.

Упражнение 1. Проверьте интуицию вычислением: докажите, что уклонение от нуля квадратного трехчлена не меньше 2.

Я мог бы предложить вам исследовать случай многочленов третьей степени и убедиться, что и в этом случае наименьшее уклонение от нуля равно 2. Эта задача еще допускает решение «в лоб». Но мне не терпится рассказать вам общее решение.

Предположим, что нам удалось обнаружить такой приведенный многочлен n-й степени $f_n(x)$, что его график лежит в полосе $|y|\leqslant c$ и содержит $n+1$ точку ее границы: самая правая лежит на прямой $y=c$, следующая — на прямой $y=-c$, следующая — снова на прямой $y=c$ и т. д. ($n=5$ на рисунке 2).

Теорема. *Уклонение от нуля любого приведенного многочлена n-й степени, отличного от $f_n(x)$, больше c.*

Вот геометрическое доказательство, которое и делает задачу Чебышева столь привлекательной. Пусть $g(x)$ —

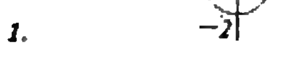


Рис. 1.

другой приведенный многочлен n-й степени, уклонение которого от нуля не превосходит c. Тогда его график тоже лежит в полосе $|y| \leqslant c$. Разобьем эту полосу вертикальными отрезками на n прямоугольников так, как показано на рисунке 3. Синяя кривая — график $f_n(x)$ — соединяет по диагонали противоположные вершины каждого прямоугольника. Поэтому красная кривая — график $g(x)$ — пересекает синюю внутри каждого из них. Следовательно, уравнение $f_n(x)-g(x)=0$ имеет не менее n корней. Но степень многочлена $f_n(x)-g(x)$ не больше, чем $(n-1)$. Если такой многочлен все же имеет n корней, то он тождественно равен нулю, т. е. $g(x)=f_n(x)$. Теорема доказана.

Вдумайтесь в это доказательство. Почти даром мы получили довольно много: хотя значение c нам еще не известно, мы уже знаем, что существует только один наименее уклоняющийся от нуля многочлен данной степени, и представляем, как выглядит его график.

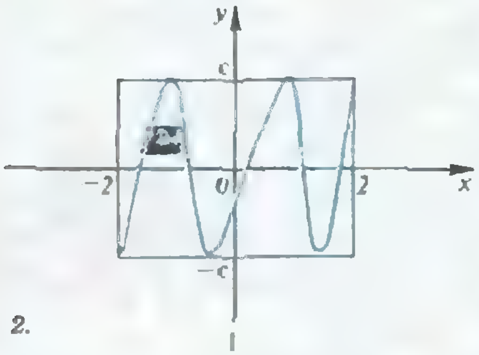


Рис. 2.

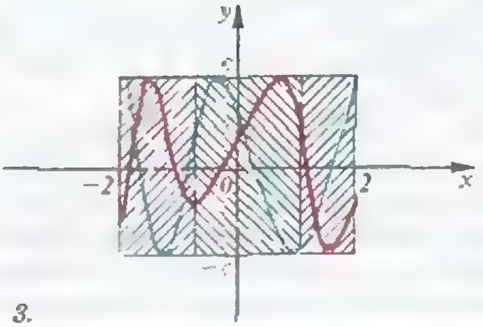


Рис. 3.

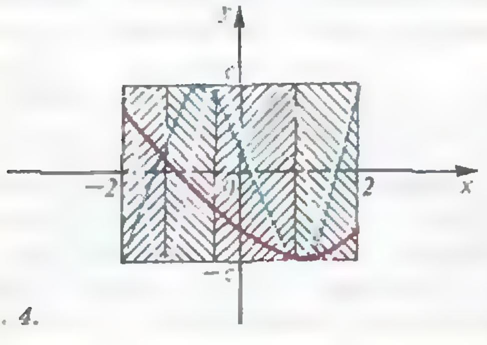


Рис. 4.

Упражнение 2. Приведенное доказательство содержит пробел (это — плата за красоту). Как быть в случае, если графики многочленов $f_n(x)$ и $g(x)$ касаются (рис. 4)?

Подсказка: вспомните определение кратного корня многочлена.

Итак, нам нужно предъявить многочлен $f_n(x)$, график которого ведет себя так, как изображено на рисунке 2. Этот рисунок не может не напоминать вам о тригонометрических функциях. И действительно, сейчас они вступают в игру!

Проще всего было бы взять в качестве f_n что-то вроде функции $\cos n\alpha$. Но, увы: косинус — не многочлен. На помощь приходит следующая

Лемма. *Функция $2\cos n\alpha$ выражается в виде приведенного многочлена n-й степени от функции $2\cos\alpha$:*

$$2\cos n\alpha = f_n(2\cos\alpha).$$

Например,

$$2\cos 2\alpha = 4\cos^2\alpha - 2 = (2\cos\alpha)^2 - 2,$$
$$\text{т. е. } f_2(x) = x^2 - 2;$$
$$2\cos 3\alpha = 8\cos^3\alpha - 6\cos\alpha = (2\cos\alpha)^3 -$$
$$-3(2\cos\alpha), \text{ т. е. } f_3(x) = x^3 - 3x.$$

Доказательство леммы проводится по индукции. Пусть ее утверждение доказано для чисел $n-1$ и n:

$$2\cos(n-1)\alpha = f_{n-1}(2\cos\alpha),$$
$$2\cos n\alpha = f_n(2\cos\alpha).$$

Из формулы

$$\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha =$$
$$= 2\cos\alpha\cos n\alpha$$

следует, что

$$2\cos(n+1)\alpha = (2\cos\alpha)(2\cos n\alpha) -$$
$$-2\cos(n-1)\alpha = (2\cos\alpha)f_n(2\cos\alpha) -$$
$$-f_{n-1}(2\cos\alpha).$$

Значит,

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) - f_{n-1}(x).$$

Лемма доказана, а заодно получена рекуррентная формула для вычисления многочленов $f_n(x)$.

(Окончание см. на с. 27).

ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВА И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Кандидат физико-математических наук
С. ГАШКОВ

От редакции. *В предыдущей статье рассказано о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля. В ней свойства многочленов Чебышева выводились из геометрии их графиков. В статье, которую мы предлагаем вашему вниманию, предлагается другой подход к этой задаче — подход, основанный на изучении тригонометрических многочленов. Что лучше — решайте сами. Мы исходили из того, что полезнее решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач — одним...*

Многочлены алгебраические и тригонометрические

Тригонометрическим многочленом называется функция

$$f(\alpha)=a_0+a_1\cos\alpha+a_2\cos 2\alpha+\ldots+a_n\cos n\alpha, \qquad (1)$$

где a_0, a_1, ..., a_n — числовые коэффициенты. Число n называется *степенью*, а число a_n — *старшим коэффициентом* тригонометрического многочлена.

У вас, вероятно, возникает вопрос: почему тригонометрическая функция (1) называется «многочленом»? Причина в том, что $f(\alpha)$ — *обычный, алгебраический многочлен от функции* $\cos\alpha$. В предыдущей статье «Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля» доказано, что $2\cos n\alpha$ является многочленом n-й степени от $2\cos\alpha$ со старшим коэффициентом 1. Если вы прочитали эту статью, то знаете, что это легко доказать по индукции; а если нет, предлагаю вам сделать это самостоятельно. Во всяком случае, при любом n

$$\cos n\alpha=p_n(\cos\alpha),$$

где $p_n(x)$ — многочлен n-й степени со старшим коэффициентом 2^{n-1}:

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha=x=p_1(x),\\
&\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2x^2-1=p_2(x),\\
&\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4x^3-3x=p_3(x), \qquad (2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\cos n\alpha=2^{n-1}x^n+\ldots=p_n(x),\\
&(x=\cos\alpha).
\end{aligned}$$

Умножая предыдущие равенства на коэффициенты a_0, a_1, ..., a_n и складывая, мы увидим, что всякий тригонометрический многочлен (1) является алгебраическим многочленом n-й степени от $\cos\alpha$.

Попробуем теперь «прочитать» равенства (2) справа налево и снизу вверх. Из последнего равенства следует, что

$$x^n=1/2^{n-1}\cos n\alpha+\ldots, \qquad (3)$$

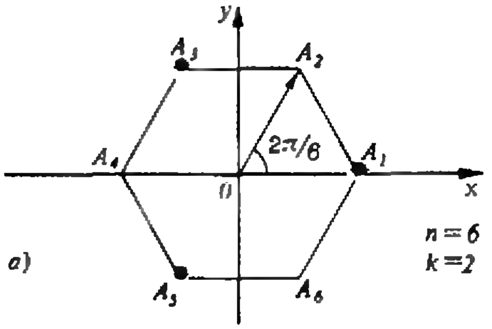
где многоточие обозначают одночлены x^k степени, меньшей n. Из предпоследнего равенства следует, что

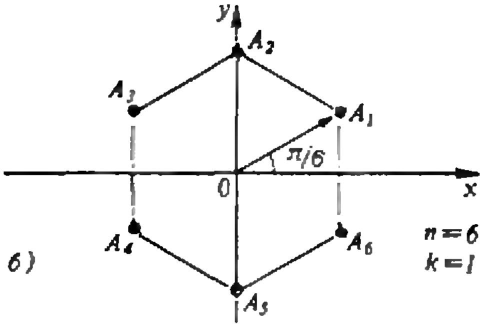
$$x^{n-1}=1/2^{n-2}\cos(n-1)\alpha+\ldots, \qquad (4)$$

где многоточие заменяет одночлены x^k степени, меньшей $n-1$. И так далее. Подставляя (4) и аналогичные им равенства вместо многоточий в (3), мы получаем следующий результат:

если $x=\cos\alpha$, *то* x^n *является тригонометрическим многочленом n-й степени со старшим коэффициентом* $1/2^{n-1}$.

Отсюда следует, что всякий алгебраический многочлен n-й степени $p_n(x)$ со старшим коэффициентом 1 при $x=\cos\alpha$ является тригонометрическим многочленом n-й степени со старшим коэффициентом $1/2^{n-1}$.





Среднее значение тригонометрического многочлена

Рассмотрим тригонометрический многочлен $f(\alpha)$ со старшим коэффициентом a_n. Разделим его область определения $[0;\ 2\pi]$ на $2n$ равных частей точками

$$0,\ \pi/n,\ 2\pi/n,\ 3\pi/n,\ \ldots,\ (2n-1)\pi/n$$

и рассмотрим его среднее значение в этих точках с чередующимися знаками:

$$1/2n(f(0)-f(\pi/n)+f(2\pi/n)-\\ -f(3\pi/n)+\ldots-f(2n-1)\pi/n)) \quad (5)$$

Лемма. *Это число равно a_n.*

Доказательство. Тригонометрический многочлен (1) состоит из слагаемых вида $g_k(\alpha)=\cos k\alpha$, где $0\leqslant k\leqslant n$. Мы докажем, что сумма (5) для всех g_k, кроме последнего, равна нулю. Если $k=0$; то $g_0(\alpha)=1$, так что

$$g_0(0)-g_0(\pi/n)+g_0(2\pi/n)-\ldots=\\ =1-1+1-\ldots-1=0.$$

Пусть теперь $0<k<n$. Сумма (5) равна разности двух слагаемых:

$$\cos(0)+\cos(2\pi k/n)+\cos(4\pi k/n)+\\ +\ldots+\cos((2n-2)\pi k/n), \quad (6_1)$$

$$\cos(\pi k/n)+\cos(\pi k/n+2\pi k/n)+\\ +\cos(\pi k/n+4\pi k/n)+\ldots+\cos(\pi k/n+\\ +(2n-2)\pi k/n). \quad (6_2)$$

Каждая из этих сумм равна нулю. Действительно, рассмотрим два правильных n-угольника (на рисунке $n=6$). Обойдем вершины n-угольника в таком порядке: A_1, A_{1+k}, A_{1+2k}, ... Через несколько шагов наш путь замкнется (на рисунке *а*) $k=2$). В силу симметрии сумма векторов с началом в центре многоугольника и концами в отмеченных точках равна нулю. Поэтому нулю равна и сумма их проекций на ось абсцисс. Но это и есть сумма (6_1)! Аналогичное рассуждение с рисунком *б*) — на нем $k=1$ — доказывает, что равна нулю и сумма (6_2).

Итак, остается вычислить сумму (5) при $f(\alpha)=a_n\cos n\alpha$. Но в этом случае

$$f(\pi k/n)=a\cos(\pi k)=(-1)^k a.$$

Поэтому сумма (5) равна

$$1/2n(1-(-1)+1-(-1)+\ldots)a_n=\\ =1/2n\cdot 2n\cdot a_n=a_n.$$

Лемма доказана.

Решение задачи Чебышева

Всякий труд вознаграждается: мы теперь в состоянии решить задачу Чебышева. Напомним, что уклонением функции от нуля на некотором интервале называется наибольшее значение ее модуля на этом интервале. Задача состоит в том, чтобы найти наименьшее возможное уклонение от нуля на отрезке $[-1;\ 1]$ многочлена n-й степени со старшим коэффициентом 1.

Прежде всего оценим снизу уклонение от нуля тригонометрического многочлена (1). Это делается так:

$$1/2n(|f(0)|+|f(\pi/n)|+|f(2\pi/n)|+\ldots\\ \ldots+|f((2n-1)\pi/n)|)\geqslant|1/2n(f(0)-\\ -f(\pi/n)+f(2\pi/n)-f(3\pi/n)+\ldots\\ \ldots-f((2n-1)\pi/n)|=|a_n|. \quad (7)$$

Неравенство означает, что сумма модулей не меньше, чем модуль суммы; а равенство — это утверждение леммы из предыдущего пункта. Из неравенства (7) следует, что хотя бы для одного k выполнено неравенство $|f(\pi k/n)|\geqslant|a_n|$. Поэтому *уклонение от нуля тригонометрического многочлена не меньше модуля его старшего коэффициента.*

Теперь задача Чебышева решается «в один ход». Согласно сказанному в начале статьи, приведенный многочлен n-й степени $p_n(x)$ при подстановке $x = \cos\alpha$ превращается в тригонометрический многочлен $f(\alpha)$ со старшим коэффициентом $1/2^{n-1}$; причем, когда α прибегает отрезок $[0;\ 2\pi]$, x пробегает отрезок $[-1;\ 1]$. С другой стороны, уклонение от нуля $f(\alpha)$ не меньше его старшего коэффициента. Значит,

уклонение от нуля приведенного многочлена n-й степени на отрезке $[-1;\ 1]$ *не меньше, чем* $1/2^{n-1}$.

Нетрудно видеть, что уклонение от нуля на отрезке $[-1;\ 1]$, равное $1/2^{n-1}$, имеет приведенный многочлен $p_n(x)$, для которого

$$p_n(\cos\alpha) = 1/2^{n-1}\cos n\alpha, \text{ т. е. } p_n(x) = 1/2^{n-1}\cos(n \arccos x).$$

В заключение — несколько задач.

1. Тригонометрический многочлен n-й степени имеет на отрезке $[0;\ \pi]$ не более n корней, а на отрезке $[0;\ 2\pi]$ — не более $2n$ корней.

2. Если два тригонометрических многочлена n-й степени имеют равные значения в $(n+1)$-й точке отрезка $[0;\ \pi]$, то они совпадают тождественно.

3. Единственный приведенный многочлен n-й степени с уклонением от нуля на отрезке $[-1;\ 1]$, равным $1/2^{n-1}$,— это многочлен Чебышева $1/2^{n-1}\cos(n \arccos x)$.

Подсказка: когда неравенство (7) обращается в равенство?

4. Докажите тождество:

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + x) + \cos(\alpha + 2x) + \ldots \\ \ldots + \cos(\alpha + nx) = \\ = \frac{\sin(\alpha + (n + 1/2)x) - \sin(\alpha - x/2)}{2\sin x/2}.$$

Подсказка: $\sin(\alpha + (k + 1/2)x) - \sin(\alpha + (k - 1/2)x) = 2\sin x/2 \cos(\alpha + kx)$.

5. Выведите из предыдущей задачи утверждение леммы.

6. Докажите, что тригонометрический многочлен без свободного члена $f(\alpha) = a_1\cos\alpha + a_2\cos 2\alpha + \ldots + a_n\cos n\alpha$ обязательно имеет корень.

Подсказка: чему равно среднее значение $f(\alpha)$?

7. Вспомните доказательство леммы и докажите, что последовательность вершин многоугольника замкнется после $n/\text{НОД}(n, k)$ шагов.

Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля

(Начало см. на с. 23)

Как вы догадались, многочлены $f_n(x)$ — это то, что нам нужно. Действительно, пусть α пробегает отрезок $[0;\ \pi]$. Тогда $n\alpha$ изменяется от 0 до $n\pi$, а функции $x = 2\cos\alpha$ и $f_n(x) = 2\cos n\alpha$ принимают значения на отрезке $[-2;\ 2]$. При этом x пробегает этот отрезок один раз, а $f_n(x)$ — n раз, поочередно принимая значения ± 2 при $x = \arccos\left(\frac{\pi k}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Значит, график многочлена $f_n(x)$ лежит в полосе $|y| \leqslant 2$ и содержит попеременно $n+1$ точку ее верхней и нижней границы. Т. е. $f_n(x)$ — многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-2;\ 2]$ (а уклонение равно 2). Эти многочлены называются *многочленами Чебышева.*

Из сказанного следует неожиданный вывод:

каким бы ни был приведенный многочлен g(x), найдется такая точка отрезка $[-2;\ 2]$*, в которой модуль его значения не меньше 2.*

Предвидеть такой результат, по-моему, было бы невозможно. После того как задача о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, решена на отрезке $[-2;\ 2]$, ее нетрудно решить и на любом другом отрезке. Для этого достаточно сделать в многочленах Чебышева линейную замену переменной.

Упражнение 3. Найдите наименьшее уклонение от нуля приведенных многочленов n-й степени на отрезках а) $[0;\ 4]$; б) $[-1;\ 1]$.

Многочлены Чебышева, безусловно, заслуживают более подробного разговора. Рассказ об их комбинаторных свойствах уже появлялся в «Кванте» — в № 1 за 1982 год. К нему я и отсылаю тех, кого заинтересовали многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1226—М1230, Ф1233—Ф1237

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 августа 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1226» или «Ф1233». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1226. Если квадрат повернуть относительно его центра на 45°, то полученный квадрат разделит стороны первоначального в некотором отношении. Возьмем произвольный выпуклый четырехугольник, разделим его стороны в том же отношении и через точки деления проведем прямые, образующие новый четырехугольник (рис. 1). Докажите, что площади этих четырехугольников равны.

А. Савин

М1227. Назовем шахматный турнир, в котором n игроков сыграли друг с другом по одной партии, логичным, если для любых двух игроков выполняется следующее условие: тот, кто набрал не больше очков, не выиграл и в личной встрече. (Напомним, что за победу дается 1 очко, за ничью — 1/2, за поражение — 0.) Докажите, что каков бы ни был турнир, тот же итог (распределение очков между участниками) можно получить и в некотором логичном турнире.

А. Зелевинский, С. Оревков

М1228*. Докажите для любых положительных чисел a, b, c, не больших 1, неравенство

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant 2.$$

Д. Фомин

М1229. Докажите, что при каждом натуральном m число

а) 4^m+5;
б) 8^m+9;
в) a^m+a+1 (где a — целое и не делится на 8)

не является квадратом целого числа.

Р. Хайруллаев

М1230. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

С. Генкин

Ф1233. Гонки мотоциклистов происходят по узкой круговой трассе. Трогаясь с места, мотоциклист стремится побыстрее набрать скорость. Какую часть круга он пройдет к моменту достижения максимальной скорости?

А. Черноуцан

Ф1234. Для охлаждения потока воздуха в цилиндрической трубе при нормальных условиях, в некотором ее сечении впрыскивают одинаковые капли жидкого азота, которые испаряются вниз по течению. Скорости газа и капель всюду равны между собой (их начальные значения $u_0=10$ м/с), стенки трубы не проводят тепла. Найти значения скорости, плотности и температуры потока после испарения всех капель, если их начальный секундный расход такой же, как и воздуха. Температура кипения жидкого азота при атмосферном давлении 77 К, удельная теплота парообразования $r=2\times10^5$ Дж/кг. Свойства газообразных воздуха и азота считать одинаковыми.

А. Стасенко

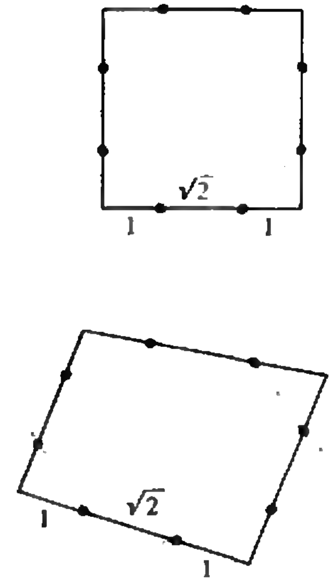


Рис. 1.

Ф1235. Длинная гирлянда составлена из одинаковых лампочек, подключенных к паре проводов на расстоянии 1 м друг от друга (рис. 2). Сопротивление 1 м провода составляет 0,2 Ом, лампочек в гирлянде 100. Какой ток потребляет гирлянда от источника напряжением 2,5 В?
Увеличим напряжение источника на 0,1 В. На сколько увеличится мощность, переходящая в тепло в отрезках проводов, которые соединяют источник с первой лампочкой гирлянды? Вольт-амперная характеристика лампочки приведена на рисунке 3.

А. Зильберман, И. Потеряйко

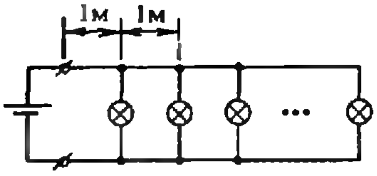


Рис. 2.

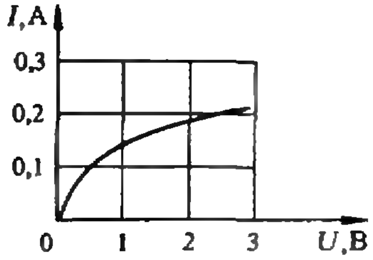


Рис. 3.

Ф1236. Электромагнитное реле имеет обмотку индуктивностью 1 Гн с сопротивлением 100 Ом. Обмотка реле подключена к источнику напряжением 20 В последовательно с парой нормально замкнутых контактов, которые размыкаются при срабатывании реле. Параллельно обмотке реле включен диод, как показано на рисунке 4. Ток срабатывания реле составляет 0,1 А, ток отпускания 0,09 А. Зачем может понадобиться такое устройство и для чего в нем используется диод? Рассчитайте параметры устройства. При каком минимальном напряжении источника оно может работать?

З. Рафаилов

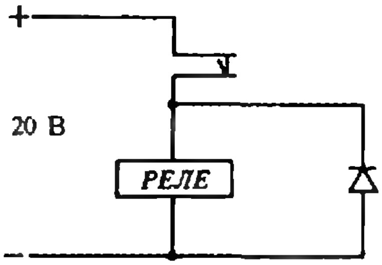


Рис. 4.

Ф1237. Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления $n=1{,}6$. Радиус сферической поверхности $R=10$ см, толщина линзы $d=0{,}2$ см. На плоскую поверхность параллельно главной оптической оси линзы направляют параллельный пучок и фокусируют его на экране, открыв только небольшую часть линзы около оси («задиафрагмировав» линзу). После этого диафрагму убрали. Найти диаметр пятна на экране.

Р. Александров

Решения задач

М1201—М1205, Ф1213—Ф1217

М1201. *В парламент Анчурии нужно избрать по одному депутату от каждого из 999 избирательных округов с одинаковым числом избирателей. В Ан-*

Кандидаты от партии C, очевидно, смогут пройти во всех 999 округах (рис. 1). Оценим сверху число округов, в которых партия C может проиграть. Если в x округах C имеет менее чем по $N/2$ сторонников, то общее число ее сторонников (равное по условию $0{,}55\cdot999\,N$; N — число избирателей в округе) не превосходит *чурии создано три партии A, B, C, выдвигающие своих кандидатов. Партию A поддерживает всего 15 % избирателей, партию B — 30 %, C — 55 %. Если на первом туре выборов в округе ни один из кандидатов не набирает 50 % голосов, то во второй тур проходят двое, набравшие наибольшее число голосов. Во втором туре партии A и B поддерживают друг друга, а сторонники C голосуют за кандидата партии A. Какое наибольшее и какое наименьшее число кандидатов от каждой из партий может быть избрано в парламент?*

A B C

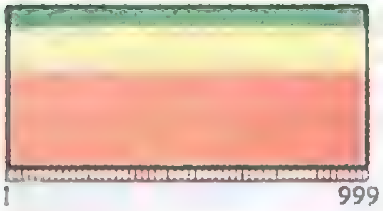


Рис. 1.

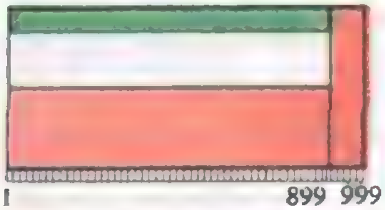


Рис. 2.

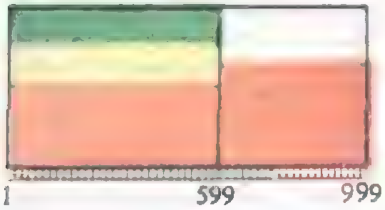


Рис. 3.

$xN/2+(999-x)N=999N-xN/2$. Отсюда получаем оценку $x \leqslant 899$.

Пример, когда C получает 100 мест, приведен на рисунке 2; здесь в каждом из 899 округов партия C имеет $(N/2-3)$ сторонников, A — $(N/6+1)$, B — $(N/3+2)$; чтобы сторонники C составляли 55 %, должно выполняться соотношение $899\,(N/2-3)+100N=0{,}55\cdot N\cdot 999$, откуда $N=6\cdot 8990$.

Таким образом, партия C может получить от 100 до 999 мест в парламенте.

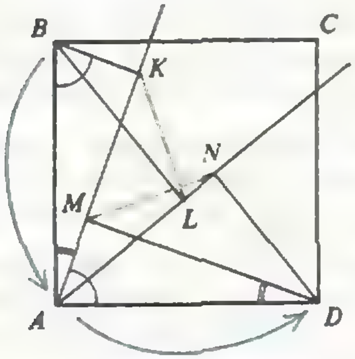
Ясно, что число мест, полученных каждой из партий A и B, может оказаться равным 0 и не превосходит 899. Что касается партии B, то она может получить все 899 мест: если ко второму туру во всех этих округах остаются лишь кандидаты партий B и C, то всюду в них победит B (поддержанная A). Это показано на рисунке 2. Таким образом, B может получить от 0 до 899 мест.

Выясним, в каком числе y округов может победить кандидат партии A. Для победы в округе нужно иметь не менее $N/4$ сторонников (иначе в нем либо будет избран кандидат в первом туре, либо на долю двух партий, идущих на втором и третьем местах, придется более 50 % голосов, и пройдет кандидат, имеющий более 25 % голосов). Итак, $y\cdot N/4$ не превосходит общего числа сторонников A, равного по условию $0{,}15\cdot 999N$. Отсюда получаем оценку $y \leqslant 599$. Пример, когда A побеждает в 599 округах, показан на рисунке 3 (в каждом из этих округов A имеет $(N/4+8)$ сторонников, B — $(N/4)$, C — остальных $(N/2-8)$, и чтобы A имела всего 15 % сторонников, должно выполняться соотношение $599\,(N/4+8)=0{,}15\cdot 999N$, откуда $N=2\cdot 5990$; поскольку N делится на 20, легко обеспечить при этом и нужное соотношение для партий B и C). Таким образом, A может получить от 0 до 599 мест.

Первой задачей в Задачнике «Кванта» М1 (1970 г.) была также задача о выборах: в ней демонстрировалось, что в результате многоступенчатых «демократических» выборов президент Мирафлорес может победить, опираясь лишь на 1 % населения. Мы вспомнили про Анчурию через 20 лет, чтобы продемонстрировать другой эффект демократических выборов: при голосовании по округам может сильно нарушаться пропорциональность представительства отдельных партий (этот эффект возникает не только при выбранных в задаче достаточно произвольных условиях — он возникает практически всегда, когда сторонники оппозиции рассредоточены по разным округам). Поэтому выборы от «общественных организаций» (партий), разумеется, с демократическим — пропорциональным числу поданных голосов избирателей — представительством, в большей степени обеспечивают права меньшинства и позволяют отразить в парламенте различные точки зрения.

Н. Васильев

M1202. *Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK, BL, DM, DN из вершин B и D. Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны.*



Рассмотрим поворот R вокруг центра квадрата на 90°, при котором точки B и A перейдут соответственно в A и D. Покажем, что при этом повороте отрезок KL перейдет в отрезок MN (см. рисунок) — тем самым задача будет решена. Поскольку $\angle KBA = 90° - \angle KAB = \angle KAD$ и, аналогично, $\angle KAB = \angle ADM$, луч BK при этом повороте перейдет в луч AM, а луч AK — в DM. Следовательно, точка K пересечения лучей BK и AK перейдет в точку M пересечения лучей AM и DM, т. е. $R(K)=M$. Точно так же доказывается, что $R(L)=N$.

В. Дубровский

M1203. *Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 км на а) 31 квадрат; б)* 30 квадратов так, чтобы один из них имел сторону не более 1 м.*

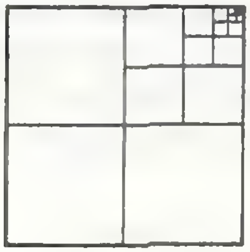


Рис. 1.

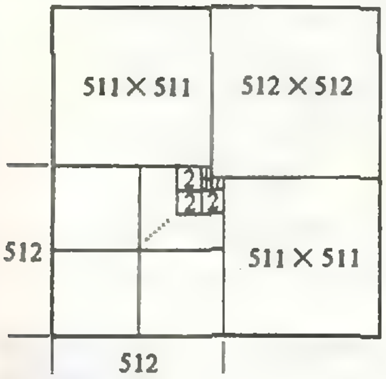


Рис. 2.

Ответ: в обеих задачах — можно.

Самая естественная идея — разрезать квадрат на 4 квадрата поменьше; один из получившихся квадратов снова «четвертовать» и т. д. (рис. 1). Каждая такая операция увеличивает число квадратов на 3, после десятого раза квадратов станет $3\cdot 10+1=31$, а сторона наименьшего будет в $2^{10}=1024$ раза меньше стороны исходного квадрата. Условие пункта а) выполнено.

Для того чтобы ответить на вопрос пункта б), рассмотрим наш процесс «наоборот» — не как разрезание большого квадрата на маленькие, а как составление из маленьких квадратов (начиная с квадрата 1×1) большого. Перед последним шагом у нас получится квадрат 512×512, составленный из 28 меньших квадратов. Из трех квадратов, которые мы собираемся прибавить, один попробуем взять чуть больше других — так, чтобы он поглотил маленький квадратик в углу. Один квадрат мы при этом сэкономим, а сторона большого квадрата теперь в 1023 раза больше стороны маленького (рис. 2).

Задача решена, однако естественно возникает вопрос — каким же должно быть «наилучшее» разбиение, точнее:

при каком максимальном n квадрат $n\times n$ можно разрезать на k квадратов, минимальный из которых имеет размеры 1×1?

Автор собрал «коллекцию» рекордных разбиений, среди которых есть, в частности, разбиение квадрата 1121×1121 на 27 квадратов. Идеи, используемые при построении подобных разбиений, достаточно интересны, и мы надеемся вернуться к этой теме на страницах журнала, познакомившись с письмами читателей.

С. Елисеев

М1204*. *На плоскости заданы точки A, B, C — центры трех кругов. Каждый круг равномерно раздувается (радиус увеличивается с одинаковой для всех кругов скоростью). Как только два круга касаются друг друга, они «лопаются» — их радиусы уменьшаются до 0 — и начинают расти снова. Верно ли, что если расстояния AB, BC, CA — целые числа, то этот процесс будет периодическим? Изучите, как может развиваться этот процесс, если треугольник ABC а) равносторонний; б) равнобедренный; в)* прямоугольный со сторонами 3, 4, 5. Начальное состояние может быть произвольным (не только «нулевым»).*

Рис. 1.

Будем рассматривать общий случай: исходные радиусы пузырей произвольны.

а) *Треугольник ABC равносторонний.* После первого хлопка радиусы двух пузырей будут равны нулю. При втором хлопке лопнут все три пузыря. Затем процесс будет периодически повторяться.

б—1) *Треугольник ABC равнобедренный, основание меньше боковой стороны.* Тогда при первом или втором хлопке лопнут два пузыря, центры которых лежат в основании треугольника. Далее их радиусы будут равны (рис. 1). Вскоре лопнут одновременно все три пузыря, после чего начнется периодический процесс. Количество хлопков в периоде (цикле) зависит от отношения длин боковой стороны и основания.

Теперь рассмотрим с более общих позиций оставшиеся случаи: б—2) *(основание больше боковой стороны)* и в). Мы увидим, что в этих случаях процесс, как правило, не будет периодическим.

Обозначим длины отрезков BC, AC и AB через a, b и c соответственно. Пусть для определенности $a \leqslant b < c$. (Вариант $b = c$ мы уже рассмотрели.) Заметим, что пузыри с центрами в точках A и B (короче: пузыри A и B) могут соприкоснуться разве лишь в самом начале процесса. После этого в каждом хлопке участвует пузырь C. Таким образом, конкретное значение величины c не играет никакой роли (лишь бы выполнялось условие $b < c$). Понятно также, что важны не сами по себе длины a и b, а их отношение $r = b/a$. Поэтому будем в дальнейшем рассматривать треугольник ABC с боковыми сторонами $BC = 1$, $AC = r \geqslant 1$ и основанием $AB > r$.

Обозначим через x и y радиусы пузырей A и B сразу после произвольного хлопка. Одна из этих двух величин заведомо равна нулю. Каким будет следующий хлопок, зависит от того, что больше — длина стороны, противолежащей уцелевшему пузырю, или разность между другой боковой стороной и радиусом этого пузыря. Таким образом, преобразование величин x и y происходит по правилу, указанному в таблице 1.

Таблица 1

	Текущее состояние	Преобразование
1	$y=0,\ r-x>1$	$x_{\text{нов}}=x+\frac{1}{2},\ y_{\text{нов}}=0$
2	$y=0,\ r-x=1$	$y_{\text{нов}}=0,\ x_{\text{нов}}=0$
3	$y=0,\ r-x<1$	$y_{\text{нов}}=(r-x)/2,$ $x_{\text{нов}}=0$
4	$x=0,\ 1-y<r,\ y\neq 0$	$x_{\text{нов}}=(1-y)/2,$ $y_{\text{нов}}=0$

Здесь $x_{\text{нов}}$ и $y_{\text{нов}}$ — новые значения x и y сразу после очередного хлопка. Вариант $x = 0$, $1 - y \geqslant r$ не вошел в таблицу, так как он невозможен при $r > 1$, а в случае

$r=1$ возможен лишь второй вариант $x=0$, $1-y=r$ (т. е. $y=0$), который описывается строкой 2.

Изучение таблицы показывает, что из состояния 3 (и только из него) мы всегда попадаем в состояние 4. Поэтому строки 3 и 4 можно объединить в одну (помня, что ей соответствует два хлопка). Теперь рассмотрение сосредоточивается на состояниях с $y=0$ (см. таблицу 2).

Таблица 2

	Состояние	Преобразование	Число хлопков
1	$x<r-1$	$x_{\text{нов}}=x+\frac{1}{2}$	1
2	$x=r-1$	$x_{\text{нов}}=0$	1
3	$x>r-1$	$x_{\text{нов}}=(2-r+x)/4$	2

Таким образом, последовательность значений переменной x, фиксируемых в моменты хлопков пузырей B и C, определяется рекуррентно по формуле $x_{\text{нов}}=f(x)$, где функция f определена на интервале $[0;\ r]$ в соответствии с таблицей 2:

$$f(x)=\begin{cases} x+1/2, & \text{если } x<r-1, \\ 0, & \text{если } x=r-1, \\ (2-r+x)/4, & \text{если } x>r-1. \end{cases}$$

Для случая $r=1$ (пункт б—2) задачи) график функции f приведен на рисунке 2. Из рисунка видно, что итерационный процесс периодичен при исходных значениях $x=0$ и $x=\frac{1}{3}$ (в периоде соответственно один двойной хлопок или два одинарных). В остальных случаях процесс стремится к «устойчивому» состоянию $x=\frac{1}{3}$, и тем самым он *непериодичен*. Поскольку исходные расстояния a, b и c (при сделанных предположениях $a=b<c$) вполне могут быть целыми, ответ на первый вопрос задачи отрицательный.

Для пункта в) r равно $4/3$. График соответствующей функции f изображен на рисунке 3. На графике выделен единственный цикл, включающий 5 хлопков. Конкретные значения чисел x_1, x_2, x_3 (см. рис. 2) могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} x_2=x_1+\frac{1}{2} \\ x_3=\frac{x_2}{4}+\frac{1}{6}, \\ x_1=\frac{x_3}{4}+\frac{1}{6}. \end{cases}$$

Они равны: $x_1=\frac{23}{90}$, $x_2=\frac{34}{45}$, $x_3=\frac{16}{45}$.

Рассмотрев несколько случаев выбора исходного значения x, нетрудно показать, что любая «траектория» процесса приближается к описанному циклу. Если,

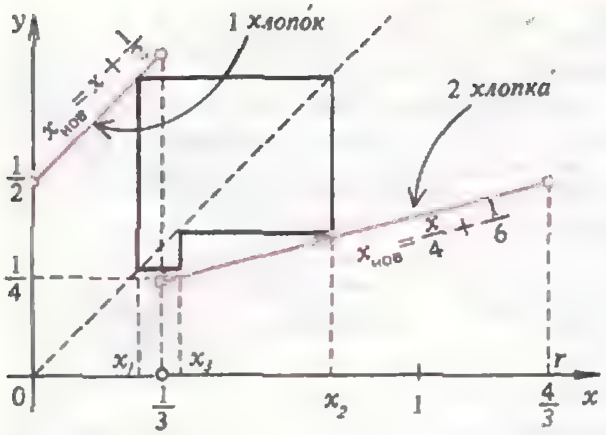


Рис. 2.

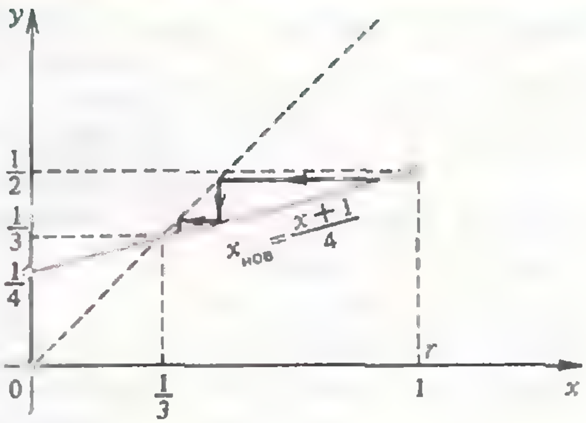


Рис. 3.

скажем, $x = x_1 + \varepsilon$, где ε достаточно мало, то на следующем шаге $b = f(x_1 + \varepsilon) = x_2 + \varepsilon$, затем $x = f(x_2 + \varepsilon) = x_3 + \frac{1}{4}\varepsilon$, после чего $x = f(x_3 + \frac{1}{4}\varepsilon) = x_1 + \frac{1}{16}\varepsilon$. Таким образом, разность $x - x_1$ уменьшается за 5 хлопков в 16 раз, и процесс быстро приближается к «предельному циклу».

Вспомним, что в начале решения мы разделили все линейные размеры на a (в данном случае — на 3). С учетом этого ответ для пункта в) можно сформулировать так: если в момент первого касания пузырей B и C радиус пузыря A равен $\frac{23}{30}$, $\frac{34}{15}$ или $\frac{16}{15}$, то процесс будет периодичным; иначе — нет.

Аналогичным образом может быть рассмотрен и общий случай (произвольный треугольник). Хотя технические трудности здесь резко возрастают, принципиально новых типов поведения процесса не обнаруживается. Для случая четырех и более пузырей ответ (даже в качественной форме) неизвестен.

С. Фомин

М1205. *Мальчик и девочка играют в такую игру: мальчик рисует на плоскости не налегающие друг на друга многоугольники, а девочка их раскрашивает. Если два многоугольника имеют общий отрезок стороны, то они должны раскрашиваться в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов заведомо хватит девочке, чтобы следовать этим правилам,*

Назовем многоугольник М соединимым с подобным ему многоугольником M_1, если можно построить цепочку подобных им многоугольников, начинающуюся с M и кончающуюся M_1, в которой соседние многоугольники соприкасаются по отрезку. Достаточно научиться раскрашивать только совокупность соединимых между *собой* многоугольников (несоединимые соприкасаться не могут).

а) Ответ: хватит двух цветов. Все равносторонние треугольники, соединимые с данным треугольником $\triangle$, будут либо одинаково повернуты с $\triangle$ (как $\triangle_1$ на рисунке 1), либо повернуты на 180° относительно $\triangle$ (как $\triangle_2$ *на рисунке* 1). Треугольники первого типа красятся одним цветом, второго — другим. Тогда одно-

если мальчик рисует только
а) равносторонние треугольники;
б) равнобедренные прямоугольные треугольники;
в) одинаковые квадраты?

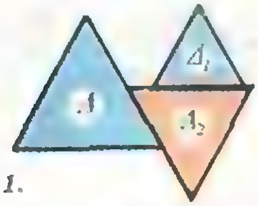


Рис. 1.

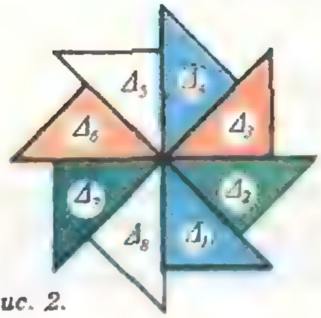
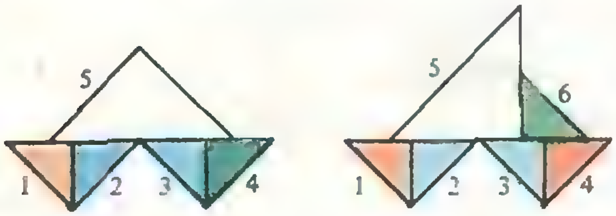


Рис. 2.

цветные треугольники всегда будут одинаково повернуты и не могут соприкасаться.

б) Ответ: хватит четырех цветов. Любой равнобедренный прямоугольный треугольник, соединимый с данным треугольником Δ_1, будет одинаково повернут с одним из 8 треугольников $\Delta_1, \ldots, \Delta_8$ на рисунке 2. Ясно, что если красить треугольник, одинаково повернутый с Δ_i, одним цветом с Δ_i, то одноцветные треугольники соприкоснуться не смогут. Таким образом, четырех цветов девочке будет достаточно. Покажем, что трех цветов не хватит. Пусть сначала рисуются треугольники 1—4 (рис. 3). Если покрасить их тремя цветами, то следующим нужно нарисовать треугольник 5 (рис. 3, а) — для него понадобится четвертый цвет. Если же треугольники 1—4 будут окрашены двумя цветами, то для треугольника 5 (рис. 3, б) нужен будет третий, а для треугольника 6 — четвертый цвет.

в) Ответ: хватит четырех цветов. Совокупность попарно соединимых многоугольников в этом случае состоит из квадратов с параллельными сторонами. Рассмотрим решетку, линии которой параллельны сторонам этих квадратов, а шаг равен длине стороны квадрата.



а б

Рис. 3.

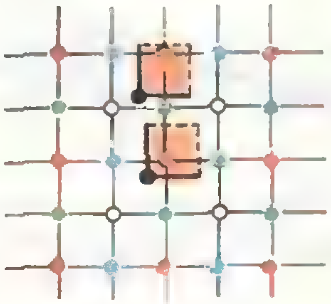
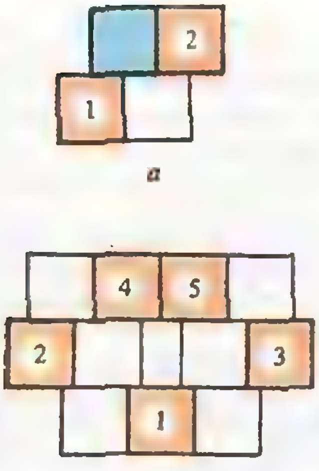


Рис. 4.



а

б

Рис. 5.

Раскрасим ее узлы в четыре цвета, как показано на рисунке 4. Чтобы определить, каким цветом надо красить очередной квадрат, выбросим из его границы верхнюю и правую стороны. Оставшийся «обструганный» квадрат всегда содержит ровно один узел решетки — цвет этого узла мы и возьмем. Очевидно, что «обструганные» квадраты, содержащие одноцветные узлы, соприкасаться не могут. Значит, правило игры будет соблюдено.

Если бы у девочки было только три краски, то квадраты 1 и 2 на рисунке 5, а пришлось бы окрашивать одинаково, а значит, на рисунке 5, б пары квадратов 1 и 2, 1 и 3, 2 и 4, 3 и 5 — тоже. Но квадраты 4 и 5 должны быть разноцветными. Следовательно, для раскраски квадратов на рисунке 5, б требуется не менее четырех цветов.

Предлагаем доказать, что в игре с квадратами произвольных размеров никакого конечного числа цветов девочке не хватит. Подумайте, сколько цветов понадобится ей в игре с равными правильными шестиугольниками.

Г. Кондаков

Ф1213. *Однородная нерастяжимая веревка подвешена за концы в точках A и B, находящихся на разной высоте (рис. 1). Натяжение веревки в точке A равно T_A. Найти натяжение веревки в точке B, если она находится на h выше точки A. Масса веревки m, длина l.*

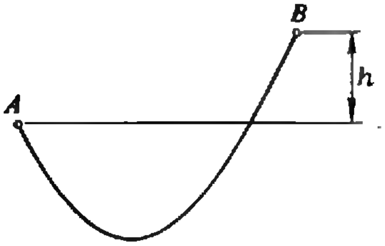


Рис. 1.

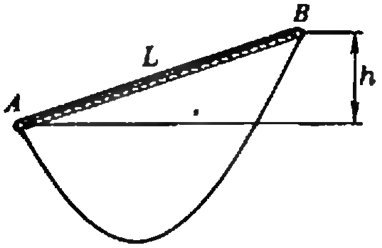


Рис. 2.

Приведем два решения этой задачи.

1) Представим, что у нас есть некоторый запас веревки в точке A. Выпустим веревку на малую длину Δl в точке A и выберем ту же длину Δl в точке B. Очевидно, что при этом будет совершена работа, равная $(T_B-T_A)\Delta l$, где T_B и T_A — силы натяжения веревки в точках B и A соответственно. Эта работа затрачивается на изменение потенциальной энергии участка веревки массой $m\Delta l/l$ при подъеме на высоту h. Согласно закону сохранения энергии,

$$mg\frac{\Delta l}{l}h=(T_B-T_A)\Delta l,$$

откуда получаем

$$T_B=T_A+\frac{mgh}{l}.$$

2) Соединим точки A и B гладкой наклонной плоскостью длиной L и замкнем веревку по этой плоскости (рис. 2). Понятно, что вся веревка должна находиться в равновесии. Участок веревки, лежащий на плоскости, поддерживается в равновесии разностью натяжений веревки в точках B и A:

$$T_B-T_A=\frac{mL}{l}g\frac{h}{L},$$

и

$$T_B=T_A+\frac{mgh}{l}.$$

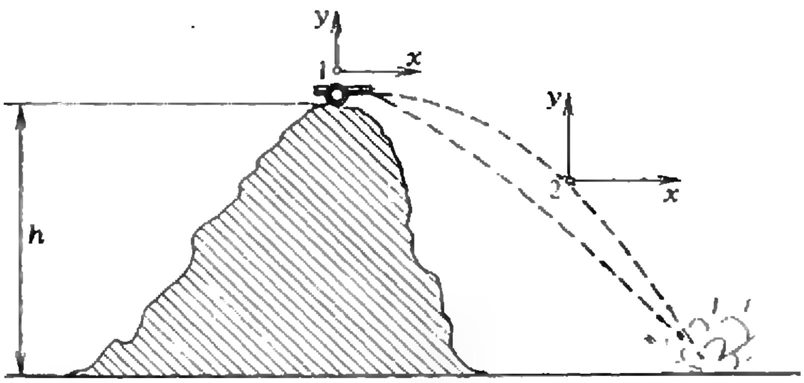
Е. Татаринова

Ф1214. *Вдогонку снаряду, выпущенному горизонтально с горы высотой $h=1$ км со скоростью $v_0=500$ м/с, через время $t_0=1$ с выпущен второй снаряд. Какой минимальной начальной скоростью он должен обладать и под каким углом вылететь, чтобы догнать первый снаряд?*

Сначала рассмотрим задачу в системе отсчета *1*, связанной с пушкой (считаем, что оба снаряда выпускаются одной и той же пушкой, расположенной на вершине горы (см. рисунок)). К моменту второго выстрела первый снаряд пройдет по горизонтали расстояние $x_0=v_0t_0$, а по вертикали $y_0=gt_0^2/2$. При этом он будет обладать скоростью, равной $v_1=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v_0^2+(gt_0)^2}$ и направленной под углом $\alpha=\mathrm{arctg}(gt_0/v_0)$ к горизонту. Представим, что второй снаряд был выпущен со скоростью v_1 под углом α к горизонту. В этом случае после второго выстрела оба снаряда двигались бы, находясь на одном и том же расстоянии $s_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ друг от друга.

Свяжем систему отсчета *2* со вторым снарядом, если бы он двигался так, как мы предположили. В этой системе второй снаряд догонит первый, если он будет приближаться к нему по прямой, соединяющей снаряды, с относительной скоростью $\vec{v}'$. Найдем ее величину и направление.

Понятно, что скорость сближения не может быть как угодно малой по величине, ибо время сближения должно быть заведомо меньше времени полета



$t=\sqrt{2h/g}$. Итак,

$$v' \geqslant \frac{s_0}{t} = s_0\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

Вектор относительной скорости $\vec{v}'$ должен составлять с горизонтом угол α' такой, что

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{y_0}{x_0} = \frac{gt_0}{2v_0}.$$

Теперь вернемся снова в неподвижную систему отсчета *1*. Здесь проекции искомой скорости $\vec{v}$ должны быть равны

$$v_x = v_0 + v'\cos\alpha',\ v_y = -gt - v'\sin\alpha',$$

где $v' \geqslant s_0\sqrt{g/(2h)}$. Минимальному значению скорости $v' = s_0\sqrt{g/(2h)}$, при котором встреча снарядов произойдет вблизи поверхности земли, соответствует угол

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}(v_y/v_x)\big|_{t=t_0} = 0{,}019\ \text{рад} = 1^\circ 5'.$$

отсчитываемый вниз от горизонтали. При этом искомая скорость второго снаряда равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\big|_{t=t_0} = 535{,}1\ \text{м/с}.$$

В. Никифоров

Ф1215. *В теплоизолированный сосуд с нагревателем внутри помещены 1 кг льда и 1 кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой. Сначала температура в сосуде была равна —40 °С, затем включили нагреватель, потребляющий постоянную мощность. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке. Удельная теплоемкость льда* $c_л = 2\times$

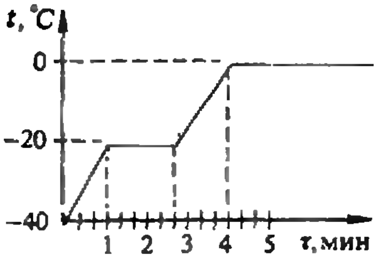
Наличие на графике «плато» (горизонтального участка), соответствующего температуре —20 °С, свидетельствует о том, что именно при этой температуре и происходит плавление неизвестного вещества. (Очевидно, что «плато» при 0 °С соответствует процессу таяния льда.)

Как видно из графика, для нагрева содержимого сосуда от начальной температуры $t_1 = -40$ °С до температуры $t_2 = -20$ °С потребовалось время $\tau_1 = 1$ мин $=$ $= 60$ с, при этом от нагревателя было получено количество теплоты, равное $P\tau_1$, где P — мощность нагревателя. Запишем уравнение теплового баланса для этого процесса:

$$(c_л + c)m(t_2 - t_1) = P\tau_1,$$

где $m = 1$ кг. Для полного расплавления вещества,

$\times 10^3$ Дж/(кг·К), твердого вещества — $c = 10^3$ Дж/(кг·К). Найти удельную теплоту плавления вещества и его удельную теплоемкость в расплавленном состоянии.



которое длилось $\tau_2 = 5/3$ мин $= 100$ с, понадобилось количество теплоты

$$m\lambda = P\tau_2.$$

Поделив это уравнение на предыдущее, найдем искомую удельную теплоту плавления неизвестного вещества:

$$\lambda = (c_л + c)(t_2 - t_1)(\tau_2/\tau_1) = 10^5 \text{ Дж/кг}.$$

Дальнейший нагрев смеси льда и расплава вещества до температуры $t_3 = 0$ °С проходил в течение промежутка времени $\tau_3 = 4/3$ мин $= 80$ с. Уравнение теплового баланса для этого процесса запишем в виде

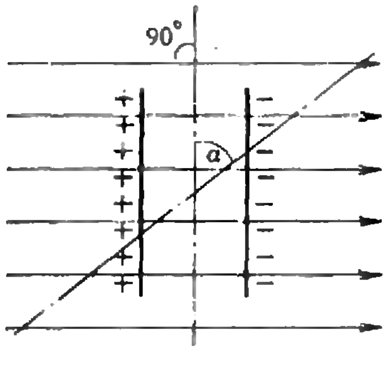
$$(c_л + c')m(t_3 - t_2) = P\tau_3,$$

где c' — удельная теплоемкость вещества в расплавленном состоянии. Сравнивая первый и третий этапы процесса, найдем

$$c' = (c_л + c)\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2}\frac{\tau_3}{\tau_1} = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

А. Буздин

Ф1216. *Плоский заряженный конденсатор внесли в область однородного электрического поля, напряженность которого направлена так, как показано на рисунке. Для этого необходимо было совершить работу A_1. Затем конденсатор повернули на угол α, совершив при этом работу A_2. Полагая заданным значение угла α, определить отношение работ A_2/A_1. Считать, что все собственное поле конденсатора однородно и сосредоточено внутри его объема.*



Обозначим через W_0 энергию внешнего однородного поля в отсутствие конденсатора, а через $W_к = \varepsilon_0 E_к^2 V/2$ — собственную энергию заряженного конденсатора (здесь $E_к$ — напряженность поля, созданного зарядами на обкладках конденсатора, V — объем конденсатора).

До внесения конденсатора во внешнее поле полная энергия системы была

$$W = W_0 + W_к.$$

После внесения конденсатора (в положение, изображенное на рисунке) энергия системы стала

$$W_1 = (W_0 - \varepsilon_0 E_0^2 V/2) + \varepsilon_0 (E_0 + E_к)^2 V/2,$$

где $\vec{E}_0$ — напряженность внешнего поля. Совершенная при этом работа A_1 равна изменению энергии системы:

$$A_1 = W_1 - W = \varepsilon_0 E_0 E_к V.$$

В результате поворота конденсатора на угол α энергия системы изменится до величины

$$W_2 = (W_0 - \varepsilon_0 E_0^2 V/2) + \varepsilon_0 |\vec{E}_0 + \vec{E}_к|^2 V/2 =$$
$$= (W_0 - \varepsilon_0 E_0^2 V/2) + \varepsilon_0 E_0^2 V/2 +$$
$$+ \varepsilon_0 E_к^2 V/2 + \varepsilon_0 E_0 E_к V \cos\alpha,$$

а совершенная при этом работа A_2 будет равна

$$A_2 = W_2 - W_1 = \varepsilon_0 E_0 E_к V(\cos\alpha - 1).$$

Искомое отношение работ

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\varepsilon_0 E_0 E_к V(\cos\alpha - 1)}{\varepsilon_0 E_0 E_к V} = \cos\alpha - 1.$$

Приведенное решение является приближенным: мы пренебрегаем перераспределением зарядов на пластинах конденсатора при его повороте на угол α.

В. Можаев

Ф1217*. *В последнее время широкое распространение получила новая конструкция контактных линз. (Контактные линзы используются для коррекции зрения вместо очков. Они представляют собой очень тонкие пластинки, одеваемые непосредственно на глазное яблоко.) Фокусировка света такой линзой основана на его волновой природе. Для этого вокруг центральной круговой прозрачной области линзы наносятся концентрические кольца с чередующейся прозрачностью (непрозрачное — прозрачное — и т. д.).*

а) Определить диаметр центральной прозрачной области.

б) Определить диаметры двух ближайших к центру линзы прозрачных колец при условии, что фокусное расстояние линзы равно $F=25$ см.

в) Зная, что контактная линза дает четкое изображение не только удаленных предметов (в фокальной плоскости), но также и точечного объекта, расположенного на конечном расстоянии от линзы, найти это расстояние.

Считать для определенности, что длина световой волны равна $\lambda=500$ нм, что линза плоская, очень тонкая, а кольца очень узкие.

Такого рода линзы, выполненные, например, в виде прозрачной пластинки с нанесенными на нее черными кольцами, используются уже давно. Их называют зонными пластинками. Если направить на такую пластинку параллельный пучок света (на волновом языке — плоскую волну), то он окажется сфокусированным — поместим экран на нужном расстоянии от пластинки, и на экране получим ярко освещенную точку. Поясним сказанное.

Возьмем прозрачную пластинку, поставим на расстоянии F от нее экран, выбрав на нем точку — будущий фокус нашей линзы, и найдем расположение непрозрачных колец, дающих нужный нам эффект фокусировки света.

Так как расстояния от нашего фокуса до различных участков пластинки не одинаковы, колебания от них будут приходить в различных фазах. Волны, идущие от одних участков, будут усиливать волну, распространяющуюся от ближайшей к фокусу точки пластинки, от других — ослаблять эту волну. Понятно, что усиление, т. е. фокусировка, света будет происходить в том случае, если волны приходят в одинаковых фазах, а ослабление — если в противоположных фазах. (Заметим, что обычная линза ведет себя точно так же — волны от разных участков линзы приходят в ее фокус в одинаковых фазах и усиливают друг друга. А в других точках происходит соответствующее ослабление света.) Теперь нам остается найти расположение не нужных нам участков и сделать их непрозрачными, а остальные участки — оставить прозрачными.

Разность хода лучей, идущих от центра пластинки и от точки на расстоянии x от оси, равна (рис. 1 на с. 42)

$$l=\sqrt{F^2+x^2}-F.$$

При $x\ll F$ можно упростить:

$$l=F\sqrt{1+x^2/F^2}-F=x^2/(2F).$$

Непрозрачными должны быть места, для которых разность хода (см. рис. 2 на с. 42)

$$(\lambda/4+n\lambda)<l<(3\lambda/4+n\lambda),$$

или

$$\sqrt{\lambda F(1+4n)/2}<x_n<\sqrt{\lambda F(3+4n)/2}.$$

Первое кольцо ($n=0$) имеет внутренний радиус $r_0=\sqrt{\lambda F/2}=0{,}25$ мм, наружный $r_0'=\sqrt{3\lambda F/2}=0{,}43$ мм, второе — 0,56 мм и 0,66 мм и т. д.

Итак, а) диаметр центральной прозрачной области равен

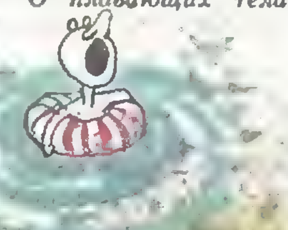
(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Тела более легкие, чем жидкость, опущенные в эту жидкость насильственно, будут выталкиваться вверх...

Тела более тяжелые, чем жидкость, опущенные в эту жидкость, будут погружаться, пока не дойдут до самого низа...

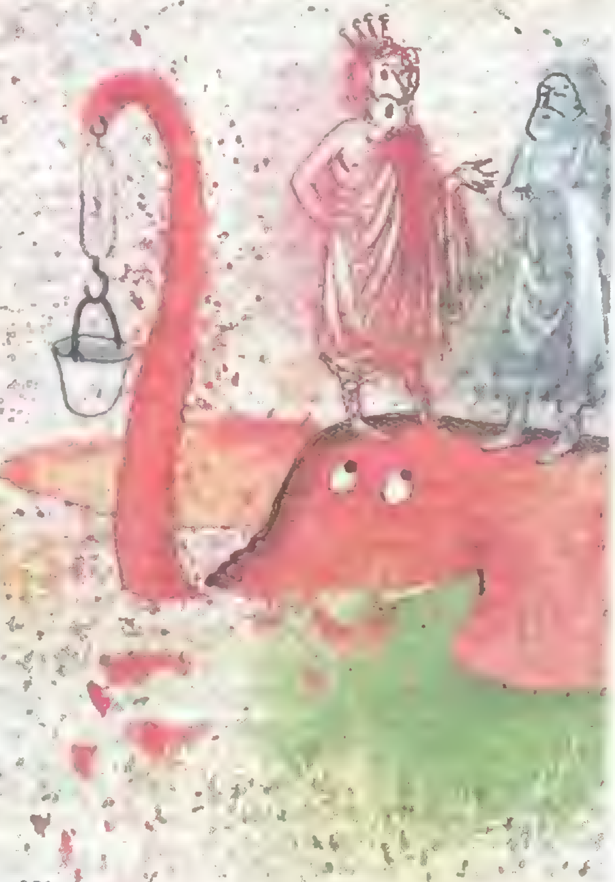
Архимед. О плавающих телах



А так ли хорошо знакома вам выталкивающая сила?

Герой этого выпуска «Калейдоскопа» — несомненно, Архимед. Древнегреческий ученый, с законом которого вы знакомитесь едва ли не в самом начале изучения физики, заложил научные основы гидростатики. Они были развиты лишь в XVI—XVII столетиях Стевином, Галилеем, Паскалем, а окончательную формулировку получили уже в XIX веке. Кстати, именно труды Архимеда оказали решающее влияние на становление Галилея как ученого. О практическом же применении результатов архимедовых исследований и говорить не приходится, они хорошо вам известны — от кораблестроения до воздухоплавания.

Однако наглядность и простота многих задач на закон Архимеда — кажущаяся, порой они требуют серьезных размышлений. Попробуйте свои силы, не забывая, что надежным помощником вам будет эксперимент — а для проведения опытов наступившее лето дает столько возможностей!



Вопросы и задачи

1. В сосуде с водой плавает в вертикальном положении брусок. Как изменится уровень воды в сосуде, если брусок перейдет в горизонтальное положение?

2. Однажды царь спросил у Архимеда, сколько нужно взять золота, чтобы его масса была равна массе слона. Как Архимед справился с задачей?

3. На крюке динамометра висит ведерко. Изменится ли показание динамометра, если ведерко наполнить водой и погрузить в воду?

4. Человек, несущий автомобильную камеру, решил облегчить ношу. Для этого он накачал камеру, увеличив ее объем и рассчитывая использовать выталкивающую силу воздуха. Достиг ли он цели?

5. Что тяжелее — тонна дерева или тонна железа?

6. Изменится ли уровень воды в сосуде, если нить, удерживающую свинцовый шарик, удлинить так, чтобы шарик полностью погрузился в воду? (ищи рисунок!)

7. Стальной шарик плавает в ртути. Изменится ли погружение шарика в ртуть, если сверху долить воды?

8. Рыбак для хранения живой рыбы сделал в своей лодке ящик с отверстием в дне лодки. Не потонет ли она, если спустить ее на воду?

9. В одном из сосудов с водой плавает кусок льда с пузырьком воздуха, в другом — с вмерзшим стальным шариком. Изменятся ли уровни воды в сосудах, когда лед растает?

10. Одна из бутылок наполнена водой, другая — ртутью. Потонет ли первая бутылка, если ее опустить в воду? Потонет ли вторая, если ее опустить в ртуть?

11. Что произойдет с уровнем воды в бассейне, если из лодки, плавающей в нем, бросить в него камень?

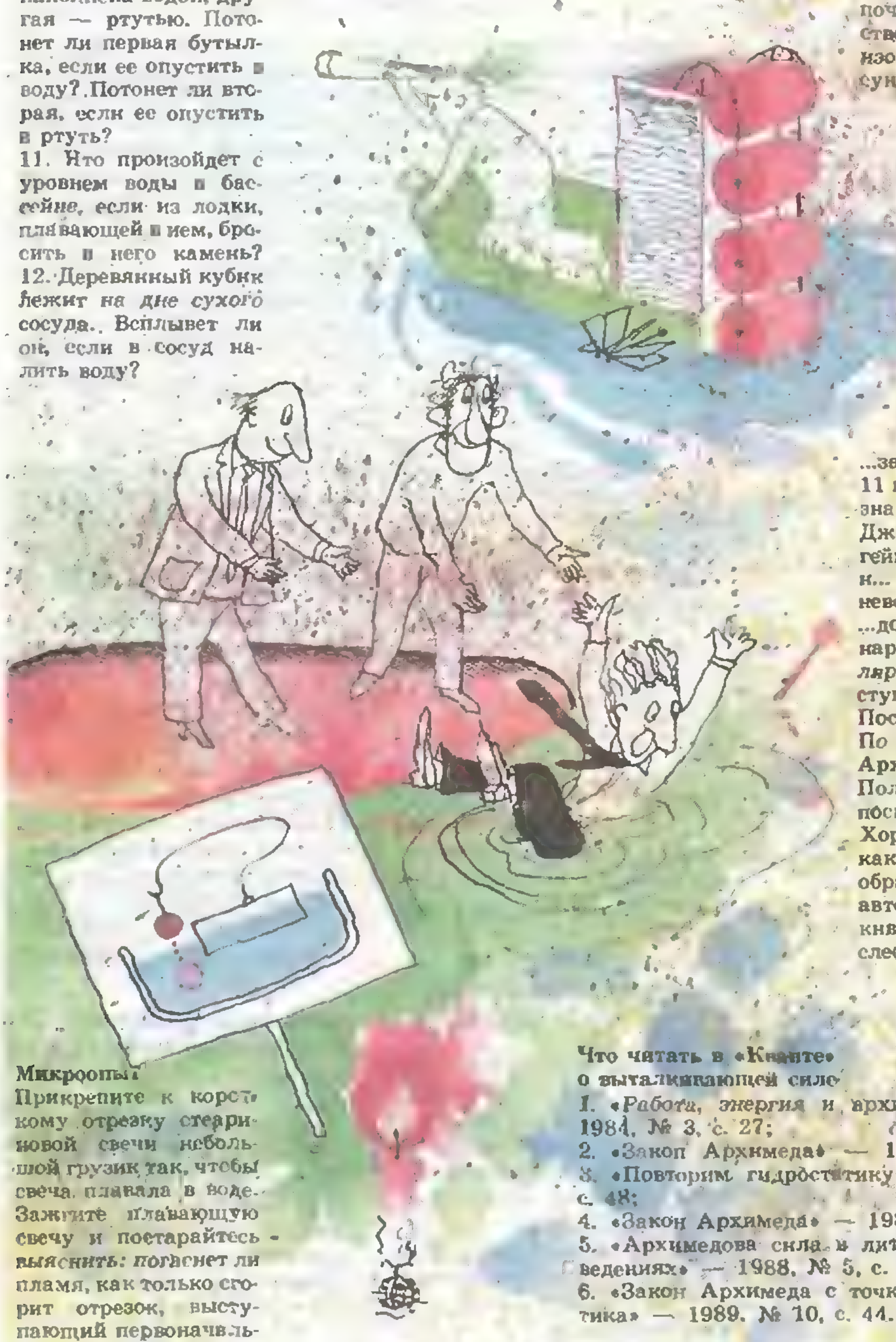
12. Деревянный кубик лежит *на дне сухого* сосуда. Всплывет ли он, если в сосуд налить воду?

Любопытно, что...

...история, *связанная с* короной царя Гиерона, добавила к прочим заслугам Архимеда почетное звание, по-видимому, первого известного нам ученого-детектива.

...в районах впадения рек в море встречаются бревна, длительное время плавающие внутри воды на *устойчивом расстоянии* от ее поверхности. Объясняется это меньшей, чем у морской, плотностью пресной воды. На разделе этих вод может оказаться древесина с промежуточной плотностью.

...на закон Архимеда многократно опирались авторы проектов «вечных» двигателей. Подумайте, кстати, почему не мог действовать «двигатель», изображенный на рисунке.



...задачу под номером 11 как-то предложили знаменитым физикам Дж. Гамову, Р. Оппенгеймеру и Ф. Блоху, и... все трое ответили неверно.

...до сих пор не обнаружен автор популярной школьной частушки:

После сытного обеда
По закону
Архимеда
Полагается
поспать...

Хорошо бы узнать, какие физические соображения позволили автору связать выталкивающую силу с послеобеденным сном?

Микроопыт

Прикрепите к короткому отрезку стеариновой свечи небольшой грузик так, чтобы свеча плавала в воде. Зажгите плавающую свечу и постарайтесь *выяснить:* погаснет ли пламя, как только сгорит отрезок, выступающий первоначально над водой?

Что читать в «Кванте» о выталкивающей силе

1. «*Работа, энергия и архимедова сила*» — 1984, № 3, с. 27;
2. «Закон Архимеда» — 1984, № 9, с. 30;
3. «Повторим гидростатику» — 1985, № 2, с. 48;
4. «Закон Архимеда» — 1987, № 1, с. 29.
5. «Архимедова сила в литературных произведениях» — 1988, № 5, с. 41;
6. «Закон Архимеда с точки зрения *математика*» — 1989, № 10, с. 44.

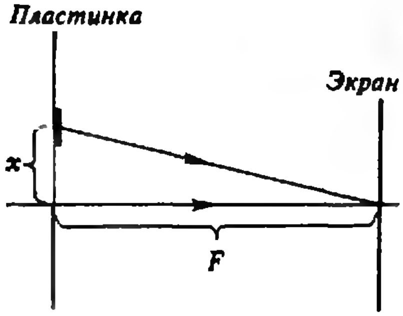


Рис. 1.

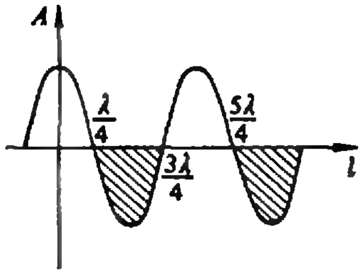


Рис. 2.

$$d_0=2r_0=2\sqrt{\lambda F/2}=0{,}5\ \text{мм};$$

б) наружные диаметры двух ближайших к центру прозрачных колец равны соответственно

$$d_1=2\sqrt{5\lambda F/2}=1{,}1\ \text{мм},$$
$$d_2=2\sqrt{9\lambda F/2}=1{,}5\ \text{мм}.$$

Теперь пункт в). Сходство с обычной линзой не исчерпывается тем, что зонная пластинка фокусирует параллельный пучок лучей. Рассмотрим точечный источник света, находящийся на оси пластинки на расстоянии a от нее. Поставим экран на расстоянии b с другой стороны пластинки и посмотрим, при каком b разность хода соответствующих лучей удовлетворяет такому же условию, как и для параллельного пучка:

$$l=(\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+x^2})-(a+b)=$$
$$=a(1+x^2/(2a^2))+b(1+x^2/(2b^2))-a-b=$$
$$=x^2(1/(2a)+1/(2b))=x^2/(2F).$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}.$$

Таким образом, если поставить экран на расстоянии b, определяемом полученной формулой, то пучок будет сфокусирован. Но эта формула — известная формула обычной тонкой линзы. Теперь по заданным свойствам глаза можно определить точку, изображение которой получится на глазном дне.

А. Зильберман

„Квант" улыбается

Сказки

Точка зрения на плоскость

В плоскости проходило много линий — и прямые, и кривые, и ломаные. И у всех были свои точки зрения на мир.

— Все в мире делится на возвышенное и униженное,— резала правду одна прямая.

— Нет,— отрубила другая,— все в мире — или правое, или неправое.

— Не ссорьтесь, девочки,— плавно изогнувшись, вмешивалась кривая,— все в мире диалектично: здесь ты правый, а тут — унижен.

Ломаные свое мнение высказывать стеснялись, а окружность формулировала так:

— Весь мир — или внутренний, или остальной. Ну, об остальном мне говорить неинтересно, зато мой внутренний мир очень богат. Только такие всесторонние, как я...

— Плоские личности так много болтают,— прерывала ее спираль,— а что касается мира — то он всего лишь прослойка между витками, чтоб они не перепутались...

И никто не спрашивал мнения маленькой, незаметной точки — единственной общей точки плоскости и линии, проходившей вне этой плоскости.

Всемирное тяготение

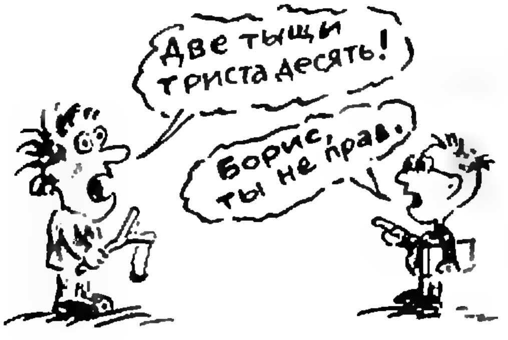
Раньше спутников у Земли не было. А когда спутник появился, им оказалась маленькая, беззащитная Луна.

И каждый метеорит, каждая космическая пылинка ранили ее — ведь у Луны нет атмосферы, которая могла бы ее защитить.

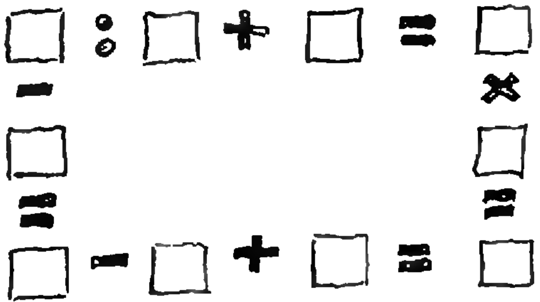
(Окончание см. на с. 76)

„Квант" для младших школьников

Задачи

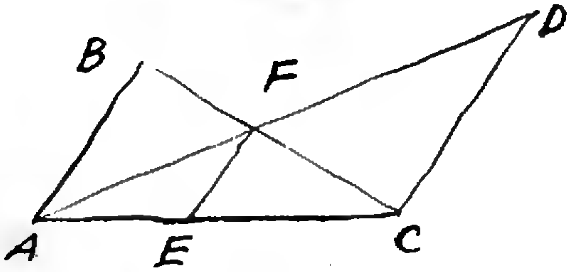

Две тыщи триста десять!
Борис, ты не прав.

1. Незнайка хвастал своими выдающимися способностями умножать числа в уме. Чтобы его проверить, Знайка предложил ему написать какое-нибудь число, перемножить его цифры и сказать ему результат. «2310» — немедленно выпалил Незнайка, лишь успев записать число. «Не может быть» — ответил, подумав, Знайка. Как он обнаружил ошибку, не зная исходного числа?



2. Впишите в клеточки рисунка все числа от 1 до 10 так, чтобы выполнялись указанные равенства.

3. На шхуне капитана Врунгеля «Победа» (а потом «Беда») был четырехзначный номер. Номер был примечателен тем, что являлся квадратом целого числа. Во время шторма смыло первую цифру, и номер стал кубом целого числа. После следующего шторма смыло следующую цифру, и номер стал четвертой степенью целого числа. Какой номер был на шхуне?



4. Отрезки AB, EF и CD, изображенные на рисунке, параллельны. Докажите, что $\frac{1}{EF}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}$.

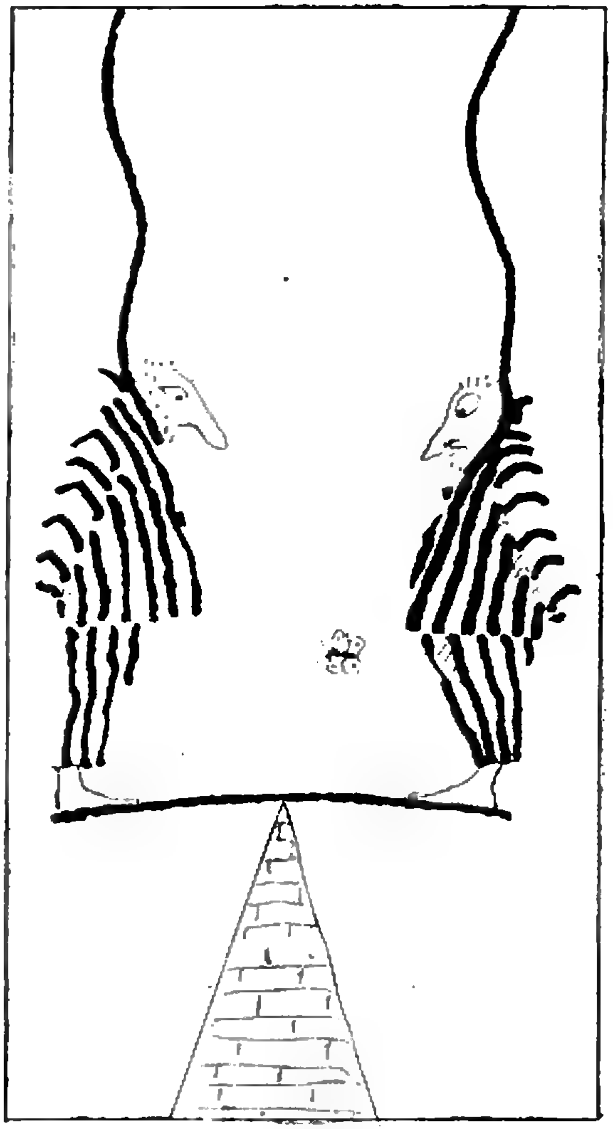
5. На дискотеку собрался почти весь класс — 22 человека. Рената танцевала с семью мальчиками, Ширинат — с восемью, Вера — с девятью и так далее до Ирины, которая танцевала со всеми мальчиками. Сколько мальчиков было на дискотеке?

Эти задачи нам предложили А. Савин, Л. Мочалов, ученик 11 класса ФМШ при ЕрГУ Арам Акопян и ученик 11 класса Яракской средней школы ДАССР Гисмат Магомедов.

«ТЫ — МНЕ, Я — ТЕБЕ»

или дилемма заключенного

(ПО Д. ХОФСТАДТЕРУ)*



После уроков вы с приятелем заигрались в школьном коридоре. И вдруг — «бам!» — со звоном разбилось стекло, некстати попавшееся вам на пути. Свидетелей не было, и вы, не сговариваясь, бросились вниз по лестнице в сторону раздевалки. И, как на зло, наткнулись прямо на директора школы.

С низко склоненными головами вы сидите в кабинете директора и ждете, что он вам скажет. «Я слышал, как разбилось стекло, и думаю, что его разбили вы. Если вы оба откажетесь признать свою вину, получите по замечанию в дневник за то, что бегали по школе. Если один из вас признается, а другой будет отрицать, что разбил стекло, я прощу того, кто признался, а другому придется расстаться с нашей школой. Наконец, если признаетесь оба, придется поставить вам «двойку» в четверти за поведение. Понятно?»

«Понятно»,— отвечаете вы хором: и директор разводит вас по разным комнатам, чтобы вы обдумали его предложение. Посоветоваться друг с другом вы не можете, и решение придется принимать каждому самостоятельно. Итак: признаваться или отрицать свою вину? Постараемся отвлечься от моральных соображений — предавать товарища, конечно, не годится,— и будем считать, что вы заинтересованы только в том, чтобы отделаться как можно легче. Вы рассуждаете так: «Если мой приятель решит сознаться, то сознаваться нужно и мне — иначе меня выгонят из школы. Если он решит не сознаваться, то мне все равно нужно признаться — тогда меня вообще не накажут. Как бы то ни было — нужно сознаваться!» И вы уверенно идете к директору, чтобы рассказать, как вы разбили стекло. Но ваш приятель рассуждал точно так же и тоже пришел к выводу, что нужно признать свою вину. В результате — у обоих «двойка» по поведению. А ведь если бы оба не сознались, то отделались бы всего-то замечанием в дневнике. Получается парадоксальная ситуация — совершенно правильные рассуждения приводят к нежелательному исходу.

Это и есть знаменитый парадокс, известный как «дилемма заключенного» (обычно рассказывают историю о двух заключенных, сидящих в разных камерах, а роль директора играет судья). Этому парадоксу посвящены многочисленные статьи философов и математиков — специалистов по логике и теории игр. Но убедительного решения, похоже, так и нет.

---

*) «Scientific American», май 1983 года

Если вам кажется, что вопрос этот не очень-то серьезный — какое нам дело до каких-то заключенных! — подумайте еще об одном варианте этого парадокса. На этот раз в нем участвуют две враждующие державы, которые могут нанести противнику ракетно-ядерный удар. Если наносят обе страны одновременно, обе несут огромный ущерб. Если одна сторона нападает неожиданно, а вторая к ответу не готова, то начавший войну первым добивается победы. Наконец, если обе страны отказываются от нападения, то обе несут незначительный ущерб: продолжается гонка вооружений и военное противостояние. Неужели и в этом случае логика подсказывает выбор агрессивного поведения? Об этом даже подумать страшно...

Парадокс заключенного можно сформулировать на языке теории игр. Играют двое, и оба одновременно делают один из двух возможных ходов: «признаться» (или коротко «*П*») или «отрицать» (коротко «*О*»). Если оба делают ход *П*, то получают мало; если оба выбирают ход *О*, то получают больше; если же один игрок делает ход *П*, а другой *О*, то первый получает еще больше, а второй не получает ничего. Все это можно описать в виде таблицы.

Таблица

1-й игрок \ 2-й игрок	*О*	*П*
О	(3; 3)	(0; 5)
П	(5; 0)	(1; 1)

Величины выигрышей (1, 3, 5) выбраны более или менее произвольно. Из таблицы ясно видно, что при любом ходе первого игрока второй игрок получит больше, если сделает ход *П*, а не ход *О* — это и есть приведенное выше рассуждение.

В 1979 году ученый из Мичигана Роберт Аксельрод решил исследовать парадокс заключенного с помощью компьютера. Он обратился к ведущим специалистам с предложением провести турнир компьютерных программ в описанную игру. На его призыв откликнулись 14 человек. Турнир был организован так: каждая программа играла 5 серий по 200 игр с другими программами; в том числе и сама с собой. Принципы составления программ могли быть произвольными (например, очередной ход *П* или *О* можно просто выбирать случайно), но большинство программ помнили все предыдущие ходы «противника» и выбирали очередной ход, исходя из этого. Авторы программ старались составить их так, чтобы поощрять «сотрудничество» противника (т. е. выбор хода *О*), и к тому же зарабатывать очки, «предавая».

Результат турнира оказался ошеломляющим: его выиграла самая простая из предложенных программ «Ты — мне, я — тебе», придуманная Анатолием Раппопортом из Торонто. Играет она так:

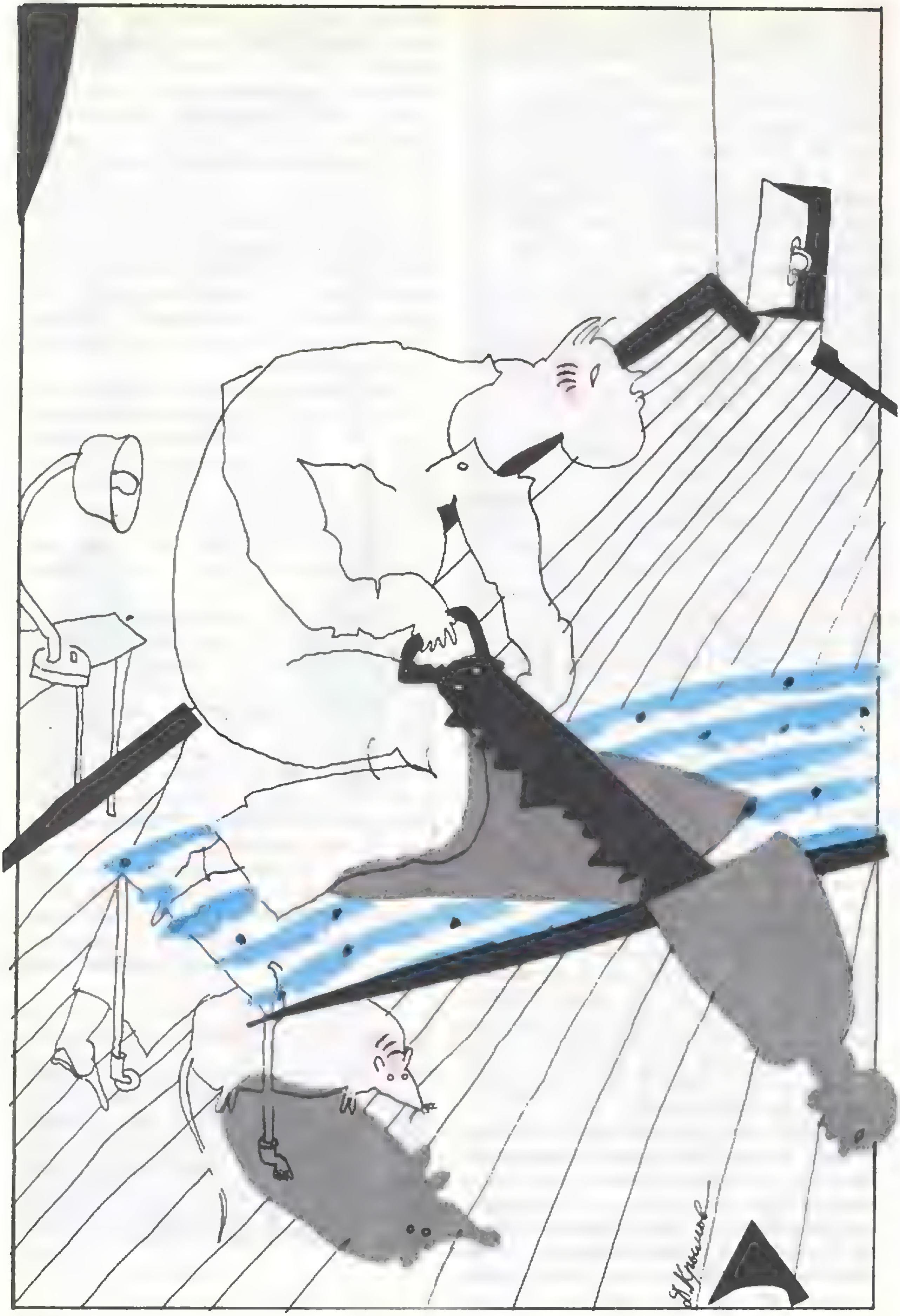
первый ход в игре — *О*;
каждый следующий ход повторяет предыдущий ход противника.

Вот и все!

Заметим, что программа «Ты — мне, я — тебе» не способна выиграть ни одной игры, состоящей из серии ходов любой длины; лучшее на что она может надеяться,— это ничья. Действительно, пока противник отвечает на ее «доброжелательные» ходы *О* своим *О*, оба набирают очки; а как только противник «обманывает» программу «Ты — мне, я — тебе», сделав ход *П*, она мстит за это ходом *П*, в лучшем случае возвращая себе потерянные очки. Но «Ты — мне, я — тебе» не злопамятна: как только противник возвращается к «сотрудничеству», делая ход *О*, она отвечает тем же.

Почему же «Ты — мне, я — тебе» выигрывает в турнире? Рассмотрим мини-соревнование, в котором участвует еще одна, довольно зловредная программа «Предатель», всегда делающая ход *П*. Пусть игра состоит из 10 ходов. Всего проводятся 3 игры: «Ты — мне, я — тебе» против себя самой, «Ты — мне, я — тебе» против «Предателя» и «Предатель» против самого себя. В первой игре «Ты —

(Окончание см. на с. 56)



ЦВЕТЫ ДЛЯ ЭЛДЖЕРНОНА

(фантастический рассказ)

Д. КИЗ (США)

20 апр. Я себя очень плохо чувствую. Не так, что мне нужен доктор, а в груди у меня как-то пусто, будто у меня вышибли внутренности, и к тому же еще у меня изжога.

Я не собирался об этом писать, но мне кажется, это все-таки следует сделать, потому что это важно. Сегодня в первый раз я не вышел на работу и остался дома.

Вчера вечером Джо Керп и Френк Рейлли пригласили меня на вечеринку. Там было много девушек и несколько ребят с фабрики. Я вспомнил, как мне было плохо в прошлый раз, когда я слишком много выпил, и поэтому я сказал Джо, что не хочу ничего пить. Вместо спиртного он дал мне чистую кока-колу. У нее был странный вкус, но я подумал, что это у меня просто неприятный привкус во рту.

Вначале нам было очень весело. Джо сказал, что я должен танцевать с Эллин, и она поучит меня разным па. Я несколько раз упал и никак не мог понять почему, ведь кроме меня и Эллин никто больше не танцевал. И я то и дело спотыкался, потому что все время кто-нибудь вытягивал ногу.

Поднявшись, я увидел на лице Джо такое выражение, что почувствовал что-то странное в животе.

— Да от него просто сдохнуть можно,— сказала одна из девушек.

Все расхохотались.

— Я так здорово не смеялся с того вечера у Маггси, когда мы послали его за газетой и смылись,— сказал Френк.

— Нет, вы только на него посмотрите. Какая у него красная рожа.

— Он краснеет. Чарли краснеет.

— Эй, Эллин, что ты сделала с Чарли? Я никогда его таким не видел.

Я не знал, что мне делать, куда себя девать. Все смотрели на меня и смеялись, и я почувствовал себя так, будто стою нагишом. Мне захотелось куда-нибудь спрятаться. Я выбежал на улицу, и меня вырвало. Потом я пошел домой. Странно, как я никогда не замечал, что Джо, Френку и другим нравилось все время таскать меня за собой для того, чтобы надо мной смеяться. Теперь я понимаю, что это значит, когда они говорят «свалять Чарли Гордона»!

Мне стыдно.

10. отчет о происходящем

21 апреля. Я все еще не вышел на работу. Я попросил миссис Флинн, мою хозяйку, позвонить на фабрику и сказать мистеру Доннегану, что я заболел. Последнее время миссис Флинн очень странно посматривает на меня, будто она меня боится.

Мне кажется, это хорошо, что я понял, как все надо мной смеются. Я много думал об этом. Это из-за того, что я такой недотепа и даже не замечаю, когда делаю глупости. Люди считают, что это смешно, когда глупый человек не может все делать так, как они.

Во всяком случае теперь я уже понимаю, что с каждым днем становлюсь умнее. Я знаю знаки препинания и могу правильно писать. Мне нравится отыскивать в словаре трудные слова, и я их запоминаю. Теперь я много читаю, и мисс Кинниен говорит, что я читаю очень быстро. Иногда я даже понимаю то, о чем читаю, и это остается в памяти.

Мисс Кинниен сказала, что кроме истории, географии и арифметики я буду учить иностранные языки. Доктор Штраусс дал мне несколько новых лент, чтобы я ставил их перед тем, как ложусь спать.

Сегодня мне значительно лучше, но кажется, я все еще немного сержусь на людей на то, что они всегда надо мной издевались и делали из меня посмешище, потому что я был глуп. Когда я, как говорит доктор Штраусс, поумнею и мой К. И.*) 68 утроится, быть может, я стану таким, как все, и люди будут любить меня и относиться ко мне по-дружески.

Мне не совсем ясно, что такое К. И. Доктор Немюр говорит, что К. И. измеряет степень умственных способностей человека — как весы в аптеке, на которых взвешивают фунты. Но доктор Штраусс не согласился с ним и сказал, что К. И.

Продолжение. См. «Квант» № 5.

*) К. И.— коэффициент интеллекта. *(Примеч. перев.)*

вовсе не взвешивает интеллект. Он сказал, что К. И. показывает, насколько можно повысить интеллект, что это вроде цифр на мензурке. По ним видно, сколько еще нужно жидкости, чтобы ее наполнить.

А когда я спросил об этом Берта, который проверяет мой интеллект и наблюдает за Элджерноном, он сказал, что они оба неправы (только я должен был пообещать, что не передам им его слова). Берт говорит, что К. И. измеряет множество различных вещей, в том числе и кое-что из того, что человек успел изучить, и что, честно говоря, этот К. И. никуда не годится.

Так я до сих пор толком и не знаю, что такое К. И., за исключением того, что мой вскоре превысит 200. Я промолчал, но мне все-таки непонятно, каким образом они узнают, сколько его у вас, если они не знают, что это такое или где это находится.

Доктор Немюр говорит, что мне нужно будет завтра пройти испытание Роршаха. Интересно, что это такое.

22 апреля. Я узнал, что такое Роршах. Это испытание, которое я проходил перед операцией,— то самое, с кляксами на кусках картона. И проводил его тот же человек.

Эти кляксы перепугали меня до смерти. Я знал, что он попросит меня найти картинки, и был уверен, что не смогу этого сделать. Я подумал про себя, что было бы неплохо как-нибудь узнать, какие же там скрыты картинки. А может, там вовсе не было никаких картинок. Вдруг это просто хитрость, чтобы выяснить, настолько ли я глуп, чтобы искать то, чего нет совсем. Стоило мне только об этом подумать, и я тут же обиделся на того человека.

— Так вот, Чарли,— сказал он,— ты уже видел однажды эти карточки, помнишь?

— Конечно, помню.

По моему тону он понял, что я рассердился, и это его явно удивило.

— Да, правда. А теперь я хочу, чтобы ты взглянул вот на эту карточку. Что это может быть? Что ты на ней видишь? Люди видят в этих кляксах самые разнообразные вещи. Скажи, что это тебе напоминает — о чем это заставляет тебя думать?

Я был потрясен. Его слова были для меня полной неожиданностью.

— Вы хотите сказать, что в этих кляксах нет никаких картинок?

Он нахмурился и снял очки.

— Что такое?

— Картинок. Скрытых в кляксах. Прошлый раз вы сказали мне, что все их видят и вы хотели, чтобы я их тоже нашел.

Он объяснил мне, что прошлый раз он говорил почти те же слова, что и теперь. Я не поверил ему и все еще подозреваю, что он нарочно тогда сбил меня с толку, чтобы позабавиться. Или... я уже ни в чем не уверен... Неужели я мог быть таким слабоумным?

Мы медленно просмотрели карточки. На одной из них клякса была похожа на пару летучих мышей, которые что-то тащат. На другой она напоминала двух сражающихся на шпагах мужчин. Я придумывал всевозможные вещи. Кажется, я увлекся. Но я больше не доверял ему и все время то так, то сяк вертел карточки и даже рассматривал их с обратной стороны, чтобы проверить, не было ли там чего-нибудь такого, что мне полагалось заметить.

Я до сих пор еще не вижу смысла в этом испытании. Мне кажется, что любой человек может солгать, выдумав то, чего он в действительности не видит. Откуда он мог знать, что я не вожу его за нос и не рассказываю о вещах, которые на самом деле вовсе не возникают в моем воображении? Быть может, я пойму это, когда доктор Штраусс разрешит мне читать про психологию.

25 апреля. Я придумал, как по-новому расположить на фабрике станки, и мистер Доннеган говорит, что это сэкономит ему в год десять тысяч долларов на рабочей силе и увеличении количества выпускаемой продукции. Он выдал мне 25 долларов премии.

Чтобы отпраздновать это событие, я пригласил Джо Керпа и Френка Рейлли позавтракать со мной, но Джо сказал, что ему нужно кое-что купить для жены, а Френк сказал, что завтракает со своей двоюродной сестрой. Мне думается, должно пройти какое-то время, пока они привыкнут к происшедшей во мне перемене. Все словно боятся меня. Когда я подошел к Эмосу Боргу и похлопал его по плечу, он прямо-таки подпрыгнул до потолка.

Люди со мной теперь мало разговаривают и не шутят, как прежде. Поэтому на работе как-то одиноко.

27 апреля. Сегодня, набравшись храбрости, я пригласил мисс Кинниен пообедать со мной завтра вечером и отпраздновать мою премию.

Сперва она было усомнилась, удобно ли это, но я спросил доктора Штраусса, и он сказал, что все нормально. Доктор Штраусс и доктор Немюр, видимо, не очень-то между собой ладят. Они без конца спорят. Сегодня вечером, когда я зашел туда, чтобы выяснить у доктора Штраусса насчет обеда с мисс Кинниен, я слышал, как они друг на друга кричали. Доктор Немюр утверждал, что это его эксперимент и его исследования, а доктор Штраусс кричал в ответ, что он вложил в это дело не меньше, чем доктор Немюр, так как это он нашел меня через мисс Кинниен и это он сделал мне операцию. Наступит день, заявил он, когда во всем мире тысячи нейрохирургов будут применять на практике разработанную им технику.

Доктор Немюр хочет в конце этого месяца опубликовать результаты эксперимента. Доктор Штраусс считает, что для большей уверенности следует еще немного подождать. Он заявил, что доктора Немюра больше интересует кафедра психологии в Принстоне, чем сам эксперимент. Доктор Немюр сказал, что доктор Штраусс не что иное, как оппортунист, который в погоне за славой пытается прокатиться на его, доктора Немюра, плечах.

Когда я потом ушел, я почувствовал, что меня бьет озноб. Я точно не знаю почему, но получилось так, словно я их обоих впервые увидел по-настоящему. Я вспоминаю, Берт говорил, что у доктора Немюра жена — сущая ведьма, которая все время подгоняет его. Берт сказал, что мечта всей ее жизни — иметь знаменитого мужа.

Неужели доктор Штраусс на самом деле пытается прокатиться на его плечах?

28 апреля. Не понимаю, почему я никогда не замечал, какая мисс Кинниен красивая. Ей только тридцать четыре года! У нее карие глаза и пушистые каштановые волосы, собранные на затылке. Я думаю, это потому, что с самого начала она казалась мне недостижимо гениальной — и очень, очень старой. А теперь с каждой нашей встречей она молодеет и становится все более привлекательной.

Мы пообедали и долго разговаривали. Когда она сказала, что я быстро иду вперед и скоро оставлю ее позади, я рассмеялся.

— Это правда, Чарли. Ты уже читаешь лучше меня. Ты одним взглядом можешь прочесть целую страницу, а я за то же время схватываю только несколько строк. И читая, ты запоминаешь каждую мельчайшую деталь. Я же, в лучшем случае, могу вспомнить только основные мысли и общий смысл прочитанного.

— Я не чувствую себя умным. Есть так много вещей, которые я не понимаю.

Она взяла сигарету, и я поднес ей горящую спичку.

— Тебе следует быть чуточку терпеливее. На то, что ты совершаешь за какие-нибудь дни и недели, у нормальных людей уходит полжизни. Именно это и поразительно. Ты впитываешь знания, словно огромная губка. Факты, цифры, общие сведения. И вскоре ты начнешь все это сопоставлять. Ты поймешь соотношение между различными отраслями знаний. Существует множество уровней, Чарли, это ступени гигантской лестницы, которая ведет тебя все выше и выше, и ты все лучше и лучше познаешь окружающий тебя мир.

Она нахмурилась.

— Я только надеюсь...

— А что такое?

— Неважно, Чарли. Я просто надеюсь, что, посоветовав тебе пойти на это, я не совершила ошибки.

Я расхохотался.

— Да как вы можете так говорить? Ведь все идет как надо. Даже Элджернон все еще умен.

Какое-то время мы сидели молча, и я знал, о чем она думает. Мне хотелось думать об этой возможности не больше, чем старикам хочется думать о смерти. Я знал, что это только начало. Я понимал, что она подразумевала под ступенями, потому что некоторые из них я уже прошел. При мысли о том, что я оставлю ее позади, мне стало грустно.

Я влюблен в мисс Кинниен.

11. отчет о происходящем

30 апреля. Я больше не работаю в «Компании по производству пластмассовых коробок» Доннегана. Мистер Доннеган твердо заявил, что всем будет лучше, если я уйду. За что они меня так возненавидели?

Я узнал об этом впервые, когда мистер Доннеган показал мне петицию. Восемьсот сорок подписей, все, кто имеет отношение к фабрике...

Снова я горю от стыда. Этот мой новый интеллект воздвиг стену между мной и всеми теми, кого я раньше знал и любил. Прежде они смеялись надо мной и презирали меня за мое невежество и тупость; теперь они ненавидят меня за мои знания и сообразительность. Господи, что же им от меня наконец нужно?

Они вышвырнули меня с фабрики. Теперь я еще более одинок, чем когда-либо...

15 мая. Доктор Штраусс очень зол на меня за то, что я две недели не писал своих отчетов. Он по-своему прав, ведь лаборатория теперь регулярно платит мне жалованье. Я сказал ему, что был слишком занят — много читал и думал. Когда я упомянул, что медлительность процесса письма выводит меня из терпения, он посоветовал научиться печатать на машинке. Теперь писать значительно легче, потому что я за минуту могу напечатать около семидесяти пяти слов. Доктор Штраусс постоянно напоминает мне о необходимости писать и говорить попроще, чтобы меня могли понять другие.

В прошлый вторник нас с Элджерноном продемонстрировали на заседании съезда Американской Ассоциации Психологов. Мы произвели крупную сенсацию. Доктор Немюр и доктор Штраусс очень нами гордились.

Я подозреваю, что доктор Немюр, которому шестьдесят (он на десять лет старше доктора Штраусса), считает нужным уже теперь пожать плоды своих трудов. Это, несомненно, результат давления со стороны миссис Немюр.

Вопреки впечатлению, которое сложилось у меня о нем раньше, теперь я понимаю, что доктор Немюр отнюдь не гений. У него большие способности, но ему мешает его неверие в себя. Он хочет, чтобы люди считали его гением. Поэтому для него важно знать, что его работа находит признание. По-моему, доктор Немюр боялся дальнейшей отсрочки именно потому, что кто-то другой мог бы сделать аналогичное открытие и лишить его этой чести.

Зато доктора Штраусса гением назвать можно, хотя я чувствую, что его знания слишком ограниченны. Его обучали в традициях слишком узкой специализации.

Я был потрясен, узнав, что из всех древних языков он умеет читать только по-латыни, по-гречески и по-древнееврейски и что он почти не знает высшей математики за пределами элементарных вариационных исчислений. Когда он мне в этом признался, я почувствовал некоторое раздражение. Я воспринял это так, словно, чтобы ввести меня в заблуждение, он до сих пор скрывал эту сторону своей личности, стараясь казаться (что, как я обнаружил, свойственно многим людям) не таким, каков он в действительности.

Доктор Немюр явно испытывает по отношению ко мне какую-то неловкость. Иногда, когда я пытаюсь заговорить с ним, он только странно смотрит на меня и отворачивается. Вначале я даже рассердился, когда доктор Штраусс объяснил мне, что из-за меня у доктора Немюра возникает чувство неполноценности. Я подумал, что он надо мной издевается, а я очень остро реагирую, когда из меня делают посмешище.

Откуда я мог знать, что такой высокоуважаемый психолог-экспериментатор, как Немюр, незнаком ни с языком хинди, ни с китайским? Ведь это нелепо, если принять во внимание те исследования, которые ведутся сейчас в Индии и Китае как раз в его области.

Я спросил доктора Штраусса, каким образом Немюр сумеет опровергнуть Рахаджамати, который раскритиковал его метод и результаты исследований, если он вообще не может прочесть его труды. Странное выражение, появившееся при этом на лице доктора Штраусса, могло означать только одно из двух. Или он не хочет говорить Немюру, что пишут в Индии, или же — и это меня очень беспокоит — доктор Штраусс не знает этого сам.

18 мая. Я очень взволнован. Вчера вечером я встретился с мисс Кинниен — до этого я не видел ее больше недели. Я старался не касаться высокоинтеллектуальных вопросов и вести беседу на простые каждодневные темы, но она растерянно посмотрела на меня и спросила, что я подразумеваю под изменением математического эквивалента в «Пятом концерте» Доберманна.

Когда я попытался объяснить это, она остановила меня и рассмеялась. Подозреваю, что разговариваю с ней не на том уровне. Какую бы я ни затронул тему, я не могу найти с ней общего языка. Я вижу, что уже почти не могу общаться с людьми. Хорошо, что есть на свете книги, музыка и проблемы, о которых я могу думать.

20 мая. Если бы не случай с разбитыми тарелками, я так и не заметил бы в закусочной, где я ужинаю, парнишку лет шестнадцати — нового мойщика посуды.

Тарелки с грохотом посыпались на пол, разбились вдребезги, и во все стороны под столы полетели осколки белого фарфора. Ошеломленный и испуганный, паренек замер на месте, не выпуская из рук пустого подноса. Свист и улюлюканье посетителей (крики: «Ого, вот так убыток!..», «Поздравляю!..» и «Не долго же он тут проработал...», которые, по-видимому, неизменно раздаются в ресторанах, когда бьют посуду), казалось, еще больше смутили его.

Когда на шум явился хозяин, паренек сжался от страха, словно ожидая, что его будут бить, и, как бы стремясь отразить удар, выбросил вперед руки.

— Ладно! Ладно, дурак,— заорал хозяин,— не стой столбом! Возьми щетку и вымети этот мусор. Щетку... щетку, ты, идиот! Она на кухне. Чтоб тут не осталось ни одного осколка.

Паренек понял, что его не собираются наказывать. С его лица исчезло испуганное выражение, и, вернувшись со щеткой, чтобы подмести пол, он уже улыбался и что-то мурлыкал под нос. Кое-кто из наиболее задиристых посетителей, развлекаясь, продолжал отпускать на его счет замечания.

— А ну-ка, сынок, вон там позади лежит славный осколок...

— Давай-ка еще раз...

— Не так уж он глуп. Разбить-то их легче, чем вымыть...

По мере того как его пустой взгляд переходил с одного веселящегося зрителя на другого, на его лице постепенно отражались их улыбки, и наконец он неуверенно ухмыльнулся на шутку, которой скорее всего даже не понял.

При виде этой тупой невыразительной улыбки, широко открытых детских глаз, в которых неуверенность сочеталась с горячим желанием угодить, мое сердце пронзила острая боль. Они смеялись над ним, потому что он был умственно отсталым.

И я тоже над ним смеялся.

Внезапно во мне вспыхнула ярость. Я вскочил и крикнул:

— Заткнитесь! Оставьте его в покое! Не его вина, что он ничего не понимает! Он не в силах быть другим! Ради бога... ведь это все-таки человек!

В помещении наступила тишина. Я проклял себя за то, что сорвался и устроил сцену. Стараясь не глядеть на парнишку, я заплатил по счету и вышел из закусочной, не притронувшись к еде. Мне было стыдно за нас обоих.

Как странно, что людям с нормальными чувствами, которые никогда не заденут калеку, родившегося без рук, без ног или глаз, что этим людям ничего не стоит оскорбить человека с врожденной умственной недостаточностью. Меня приводила в бешенство мысль, что не так давно я, совсем как этот мальчик, по глупости изображал из себя клоуна. А я почти об этом забыл.

Я спрятал от самого себя прежнего Чарли Гордона. Но сегодня, взглянув на этого мальчика, я впервые увидел, каким я был раньше. Я был точно таким же!

Я часто перечитываю мои отчеты и вижу безграмотность, детскую наивность, ничтожный, словно запертый в темную комнату интеллект, который жадно всматривается сквозь замочную скважину в сияющий снаружи ослепительный свет. Я вижу, что при всей своей тупости я понимал собственную неполноценность, понимал, что другие люди обладали чем-то, чего у меня не было, чем меня обделила судьба. В своей умственной слепоте я считал, что это было каким-то образом связано с умением читать и писать, и я был уверен, что, постигнув это искусство, я автоматически обрету разум.

Даже слабоумный хочет быть похожим на всех остальных людей.

Ребенок может не знать, как или чем накормить себя, но ему знакомо чувство голода.

Этот день пошел мне на пользу. Яснее увидев прошлое, я решил посвятить мои знания и способности исследованиям в области повышения интеллектуального уровня человека. Кто лучше всех подготовлен для этой работы? Кто еще жил в обоих мирах? Дайте мне возможность применить свое дарование и что-нибудь сделать для своих братьев.

Завтра я обсужу с доктором Штраусом вопрос о методе моей работы. Быть может, мне удастся помочь ему решить проблему широкого применения тех операций, первую из которых испробовали на мне. У меня есть по этому поводу кое-какие идеи.

Как много можно было бы сделать! Если меня сделали гением, то ведь таких тысячи! А какого фантастического уровня интеллекта можно было бы достигнуть у нормальных людей? А у гениев?

Сколько же открывается возможностей! Я сгораю от нетерпения.

12. отчет о происходящем

23 мая. Это произошло сегодня. Элджернон укусил меня. Я, как повелось, зашел в лабораторию навестить его, и, когда я достал его из клетки, он впился зубами мне в руку. Я посадил его обратно и некоторое время наблюдал за ним. Он был необычно беспокоен и озлоблен.

24 мая. Берт, в ведении которого находятся экспериментальные животные, сообщил, что Элджернон меняется. Он становится менее общительным; он отказывается бегать по лабиринту. И он не ест. Все недоумевают, что это может значить.

Перевод с английского С. Васильевой

(Окончание следует)

ЗОЛОТАЯ МЕДАЛЬ ФИЛДСА

27 ноября 1895 года крупный шведский инженер и промышленник Альфред Нобель подписал завещание, согласно которому: *«...капитал мои душеприказчики должны перевести в ценные бумаги, создав фонд, проценты с которого будут выдаваться в виде премии тем, кто в течение предшествующего года принес наибольшую пользу человечеству. Указанные проценты следует разделить на пять равных частей, которые предназначаются: первая часть тому, кто сделал наиболее важное открытие или изобретение в области физики, вторая — тому, кто совершил крупное открытие или усовершенствование в области химии, третья — тому, кто добился выдающихся успехов в области физиологии или медицины, четвертая — создавшему наиболее значительное литературное произведение, отражающее человеческие идеалы, пятая — тому, кто внесет весомый вклад в сплочение народов, уничтожение рабства, снижение численности существующих армий и содействие мирной договоренности».*

Как ни обиден этот факт, но математика не была упомянута в этом завещании. Сейчас, по-видимому, уже невозможно установить истинные причины того, что математика была выброшена Нобелем из первоначального варианта завещания, но определенная неприязнь к математикам у него, несомненно, была.

Человеком, решившим исправить эту несправедливость, был канадский

Альфорс Ларс Валериан *(р. 18.4.1907, Хельсинки). Премия 1936 г. за работы по комплексной геометрии.*

Шварц Лоран *(р. 5.3.1915, Париж). Премия 1950 г. за работы по математическому анализу.*

Кодаира Кунихико *(р. 16.3.1915, Токио). Премия 1954 г. за работы по алгебраической и дифференциальной геометрии.*

Том Рене Фредерик *(р. 2.9.1923, Монбельяр, Франция). Премия 1958 г. за работы по дифференциальной топологии.*

Дуглас Джессе *(р. 3.7.1897, Нью-Йорк — 7.10.1965). Премия 1936 г. за работы по вариационному исчислению.*

Сельберг Атле *(р. 14.6.1917, Лангесунн, Норвегия). Премия 1950 г. за работы по теории чисел и математическому анализу.*

Серр Жан Пьер *(р. 15.9.1926, Баж, Франция). Премия 1954 г. за работы по алгебраической топологии.*

Рот Клаус Фридрих *(р. 29.10.1925, Бреслау). Премия 1958 г. за работы по теории чисел.*

математик и лесопромышленник Джон Чарльз Филдс (1863—1932) — известный специалист по теории алгебраических функций, член Канадского и Лондонского математических обществ, член-корреспондент Национальной Академии Наук США, иностранный член-корреспондент АН СССР.

В 1932 году, незадолго до смерти, Филдс завещал свое состояние меж-

Милнор Джон Уиллард (р. 20.2.1931, Ориндж, Нью-Джерси, США). Премия 1962 г. за работы по дифференциальной топологии.

Хермандер Ларс (р. 24.1.1935, Мьёльбю, Швеция). Премия 1962 г. за работы по дифференциальным уравнениям.

Гротендик Александр (р. 28.3.1928, Берлин). Премия 1966 г. за работы по алгебраической геометрии.

Коэн Пол Джозеф (р. 2.4.1934, Лонг-Бранч, США). Премия 1966 г. за работы по теории множеств.

Смейл Стефен (р. 15.7.1930, Флинт, Мичиган, США). Премия 1966 г. за работы по топологии и дифференциальным уравнениям.

Атья Майкл Френсис (р. 22.4.1929, Лондон). Премия 1966 г. за работы по алгебраической топологии.

Бейкер Алан (р. 19.8.1939, Лондон). Премия 1970 г. за работы по теории чисел.

Томсон Джон Григс (р. 13.10.1932). Премия 1970 г. за работы по алгебре.

Хиронака Хейсуке (р. 9.4.1931, Ямагути, Япония). Премия 1970 г. за работы по алгебраической геометрии.

Новиков Сергей Петрович (р. 20.3.1938, Горький). Премия 1970 г. за работы по дифференциальной топологии.

Мамфорд Дэвид Брайант (р. 11.6.1937, Сассекс, Великобритания). Премия 1974 г. за работы по алгебраической геометрии.

Бомбьери Энрико (р. 26.11.1940, Милан). Премия 1974 г. за работы по теории чисел, комплексному анализу и дифференциальным уравнениям.

дународному математическому союзу для создания премиального фонда по математике.

Новую премию и золотую медаль было решено присуждать молодым математикам, не достигшим в момент награждения 40 лет, за результаты, оказавшие наибольшее влияние на развитие математики. В отличие от Нобелевских премий, присуждаемых ежегодно, Филдсовские премии вручаются раз в четыре года на международных математических конгрессах. Размер премии невелик — 1500 канадских долларов, но престиж ее в математическом мире огромен. Первое вручение Филдовских премий состоялось в 1936 году на математическом конгрессе в Осло. После большого перерыва, вызванного войной, международные конгрессы возобновились: Кембридж (США) — 1950 г. (были присуждены 2 премии),

(Окончание см. на с. 62)

Квиллен Даниэл (р. 27.6.1940, Ориндж, Нью-Джерси, США). Премия 1978 г. за работы по гомологической алгебре.

Делинь Пьер Рене (р. 3.10.1944, Брюссель). Премия 1978 г. за работы по алгебраической теории чисел.

Яу Шинтан (р. 4.4.1949, Гуаньдун, Китай). Премия 1983 г. за работы по дифференциальной геометрии.

Конн Ален (р. 1.4.1947, Даргиньян, Франция). Премия 1983 г. за работы по функциональному анализу.

Маргулис Григорий Александрович (р. 24.2.1946, Москва). Премия 1978 г. за работы по геометрии и математическому анализу.

Фефферман Чарлз Луис (р. 18.4.1949, Вашингтон). Премия 1978 г. за работы по комплексному анализу.

Терстон Уильям (р. 30.10.1946, Вашингтон). Премия 1983 г. за работы по дифференциальной топологии.

Фридман Майкл (р. 21.4.1951, Лос-Анжелес). Премия 1986 г. за работы по алгебраической топологии.

Фалтингс Герд (р. 28.7.1954, Гельзенкирхен, ФРГ). Премия 1986 г. за работы по алгебраической теории чисел.

Дональдсон Саймон Керван (р. 20.8.1957, Кембридж, Великобритания). Премия 1986 г. за работы по дифференциальной геометрии и топологии.

Много интересных явлений в жизни и в науке связано со стробоскопическим эффектом. Это и зрительная иллюзия остановившегося движения, и ощущение движения неподвижного объекта при прерывистом наблюдении, и использование красочной неоновой рекламы, и создание приборов для контроля и измерения частоты быстрых периодических процессов, и многое многое другое. Во всех случаях стробоскопический эффект обусловлен инерцией зрения, т. е. сохранением в сознании наблюдателя воспринятого им зрительного образа в течение некоторого времени (порядка 0,2 с) после того, как вызвавшая образ картина уже исчезла.

О стробоскопии написано много и научных, и популярных статей. Несколько опубликовано и в Лаборатории «Кванта». Например — статья Г. Гаврилова «Телескоп — стробоскоп» (1981, № 5), С. Гаврилова «Что такое стробоскоп» (1983, № 1), С. Белоусова и Р. Герасимова «Наблюдение и фотосъемка быстропротекающих процессов» (1988, № 2), В. Утешева «Как заметить незаметное» (1989, № 4). Почитайте эти статьи!

А теперь предлагаем вашему вниманию еще одну статью на эту же тему. Автор статьи Владислав Креймер — ученик 11 класса ФМШ № 35 г. Донецка.

Лаборатория „Кванта"

Как увидеть... несуществующее

В. КРЕЙМЕР

> *Если на клетке слона прочтешь надпись «буйвол», не верь глазам своим.*
>
> Козьма Прутков

Проделайте такой опыт. Встаньте перед включенным телевизором на расстоянии 1,5—2 м и посмотрите на колеблющиеся ножки вертикально расположенного пинцета. На фоне экрана вы увидите, что ножки волнообразно искривлены (рис. 1). Меняя расстояние между глазом и пинцетом, можно добиться наиболее четкого эффекта.

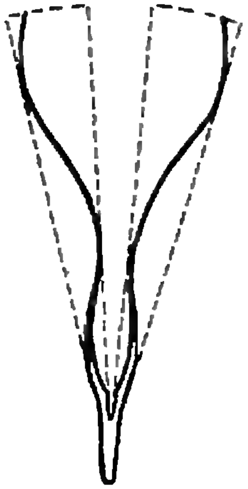


Рис. 1.

Очевидно, конечно, что искривление пинцета — чисто оптический эффект, ибо из-за большой жесткости ножек они так изгибаться не могут. Достаточно пинцет расположить горизонтально, и вы увидите, что при колебаниях его ножки остаются прямолинейными. Чтобы понять этот опыт, сначала разберем более простой случай.

Возьмите карандаш, поставьте его вертикально и начните быстро перемещать в горизонтальном направлении вдоль экрана. Карандаш будет казаться наклоненным в сторону, противоположную направлению движения (рис. 2). Почему? Оказывается, все дело тут в стробоскопическом эффекте. Луч, пробегая по экрану слева направо и сверху вниз, высвечивает в каждый момент времени лишь какой-то участок экрана. Поэтому весь карандаш сразу освещен быть не может, каждый раз освещенной будет только его малая часть. Пусть в некоторый момент времени луч осветил участок карандаша, близкий к точке *a* (см. рис. 2). Наш глаз запомнит этот освещенный участок примерно на 0,2 секунды. Находясь на следующей строке, луч осветит каран-

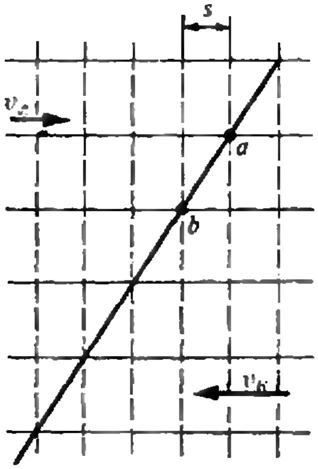


Рис. 2.

даш в точке b, смещенной относительно точки a на расстояние s. Этот путь пройдет карандаш за то время, пока луч пробежит расстояние от a до b, равное $l_с \pm s$, где $l_с$ — длина строки, знак «+» соответствует движению карандаша вправо, а «—» — влево. Аналогичное смещение произойдет и с другими участками карандаша.

После «склеивания» всех видимых участков карандаша он покажется нам как бы наклоненным. Угол наклона к горизонту будет равен

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{l_к(v_л \mp v_к)}{(N-1)\, l_с\, (\pm v_к)},$$

где $l_к$ — длина карандаша, $v_к$ — скорость движения карандаша (положительное значение скорости соответствует движению вправо), $v_л$ — скорость луча, N — количество строк, умещающихся на проекции карандаша.

Из этой формулы видно, что угол наклона карандаша уменьшается с ростом скорости карандаша и существенно зависит от направления его движения.

Таким образом, луч телевизора, освещая различные участки карандаша в различные моменты его поступательного движения, позволяет *одновременно* увидеть различные фазы движения карандаша, т. е. осуществляет развертку его движения во времени.

А теперь вернемся к опыту с пинцетом. При частоте колебаний порядка 10^2 Гц пинцет за то время, пока луч пройдет длину его проекции на экране, успевает сделать несколько колебаний. Благодаря развертке во времени, на фоне экрана будут одновременно видны различные фазы поперечных колебаний пинцета. Мгновенная скорость движения каждой его точки зависит от времени по синусоидальному закону, поэтому видимые волны на ножках пинцета тоже близки к синусоидальным, а искажения вызваны лишь изменением знака скорости при смене направления движения (см. выражение для угла α, приведенное выше). Интересно, что волны на ножках пинцета могут стоять на месте или перемещаться — в зависимости от соотношения между частотой колебаний пинцета и частотой кадровой развертки телевизора (50 Гц).

В заключение советуем вам провести аналогичные опыты с камертоном или с натянутой струной. В последнем случае эффект будет особенно четким и наглядным.

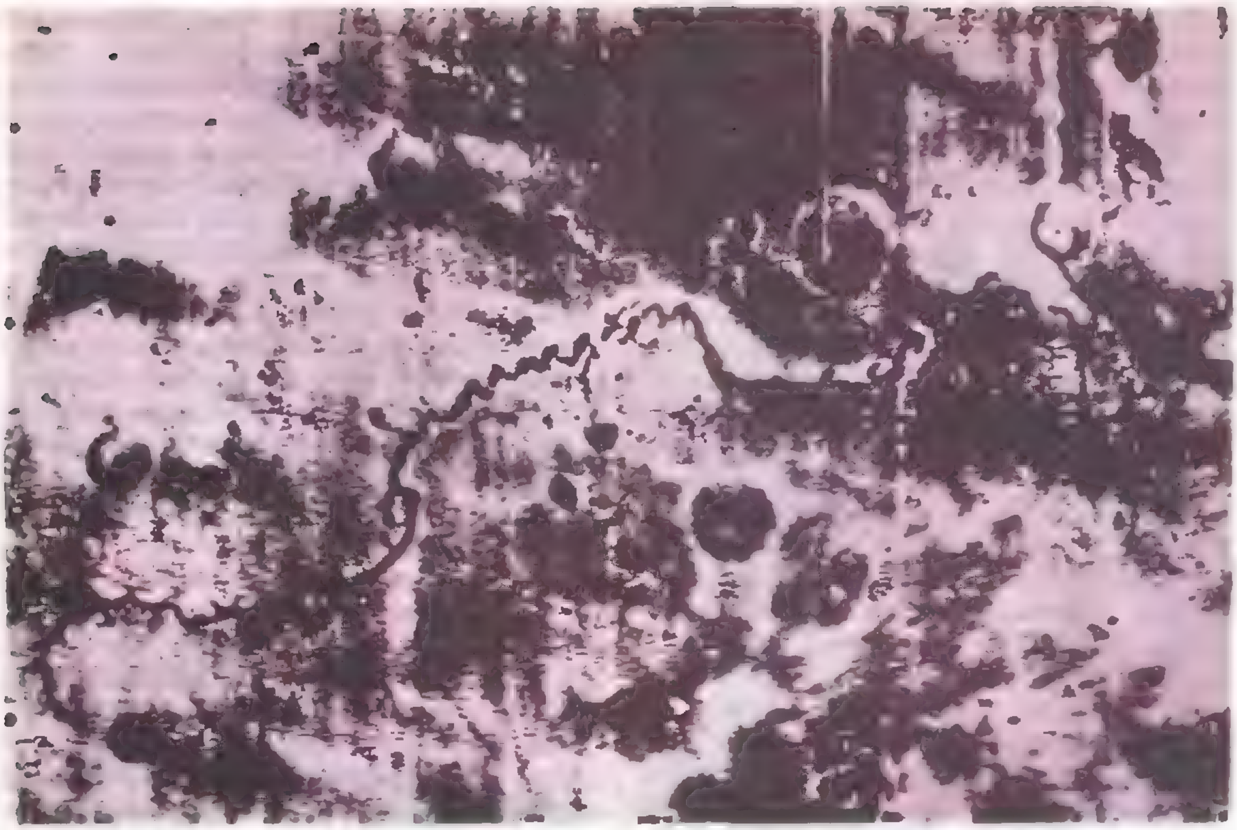
«Ты — мне, я — тебе»

(Начало см. на с. 44)

мне, я — тебе» набирает 30 очков, а во второй — 9. «Предатель» в игре с «Ты — мне, я — тебе» набирает 14 очков, зато играя с самим собой — всего 10 (проверьте эти числа!). Итого: «Ты — мне, я — тебе» финиширует с результатом 39 очков против 24 у «Предателя».

Если бы программа «Ты — мне, я — тебе» была человеком, ее можно было бы назвать доброжелательной, готовой к сотрудничеству, но не прощающей предательства. Именно эти свойства привели программу к успеху в этом, да и нескольких последующих компьютерных соревнованиях. По-моему, всем нам стоит сделать вывод из этого эксперимента!

Публикацию подготовил С. Табачников



Р-значит ракета

Полет на Марс

Доктор технических наук
Л. ГОРШКОВ

Полет человека на Марс. Что это — мечта или реальность? Во всяком случае, в настоящее время инженеры уже разрабатывают проект первого марсианского корабля.

Давайте рассмотрим некоторые особенности полета человека на соседнюю планету.

Земля и Марс вращаются вокруг Солнца почти в одной плоскости, и среднее расстояние между их орбитами примерно 80 млн. км.

Что же нужно для того, чтобы перелететь с орбиты Земли на орбиту Марса?

Представим, что межпланетный корабль находится на околоземной орбите, например, на такой, на которой сейчас летает станция «Мир», и скорость корабля при этом около 8 км/с. Если после включения двигателя скорость движения корабля увеличится на 3,5—5 км/с, он начнет перелет в сторону орбиты Марса. Если время включения двигателя выбрано соответствующим образом, то корабль придет на орбиту Марса в момент, когда, двигаясь по своей орбите, Марс окажется в том же районе. Остается только еще раз включить двигатель и перейти уже на околомарсианскую орбиту. С этого момента корабль будет вращаться вокруг Марса, так же, как он вращался перед этим вокруг Земли.

На рисунке 1 показаны возможные траектории перелета с околоземной орбиты на околомарсианскую.

Самая экономичная (по расходу топлива) траектория — полуэллиптическая (так называемая орбита Гомана — по имени ученого, предложившего такой перелет). Но зато полет по ней будет довольно длительный — около 9 месяцев.

Если бы Марс и Земля сохраняли свое относительное положение, были бы возможными перелеты по орбитам Гомана к Марсу и обратно. Но... Земля и Марс меняют свое относительное положение. Поэтому, если мы перелетели к Марсу по орбите Гомана, то для того, чтобы лететь обратно по такой траектории, нужно уже ждать несколько лет.

На рисунке 2 приведен пример траектории перелета к Марсу и обратно. Здесь показана траектория, когда за время перелета к Марсу и обратно Земля сделает почти полтора оборота вокруг Солнца, т. е. пройдет почти полтора года.

Какие двигательные установки способны переводить корабль на такие межпланетные траектории? Сегодня в ракетной технике широко используются жидкостно-реактивные двигатели. Они установлены на всех космических кораблях. Одной из главных характеристик двигателя является скорость истечения газов из реактивного сопла. Чем больше скорость истечения, тем меньше топлива требуется для разгона корабля. У жидкостно-реактивных установок скорость истечения не превышает 4500—4800 м/с.

Расчеты показывают, что если масса корабля без ракетной установки составляет 120—150 т, то начальная масса всего корабля с топливом жидкостных ракет должна быть 2000 т. Сегодня нет носителей, которые могли бы вывести на орбиту такой груз. Поэтому корабль надо будет собирать в космосе, выводя отдельные его части на околоземную орбиту. Для этого потребуется около 20 пусков ракеты-носителя «Энергия». Это будет очень дорогой вариант марсианской экспедиции.

В настоящее время разработаны электрореактивные двигатели со скоростью истечения газов 8—9 км/с. Такие скорости достигаются за счет ускорения рабочего тела (так называют вещество реактивной струи) в электростатическом поле. Это наиболее экономичные двигатели, для их работы нужно почти в 20 раз меньше топлива, чем для жидкостно-реактивных. Но в этом случае требуется мощная электростанция для создания электростатического поля.

Такая электростанция может быть построена на различных принципах. Один из вариантов — атомная миниэлектростанция на корабле. Другой вариант — электростанция, использующая солнечную энергию.

Наиболее простой способ — прямое преобразование солнечных лучей в электричество с помощью фотопреобразователей, аналогичных тем, которые установлены на космических кораблях и орбитальных станциях.

Можно создать большой параболоид, собирающий солнечные лучи в своем фокусе, где будет расположен

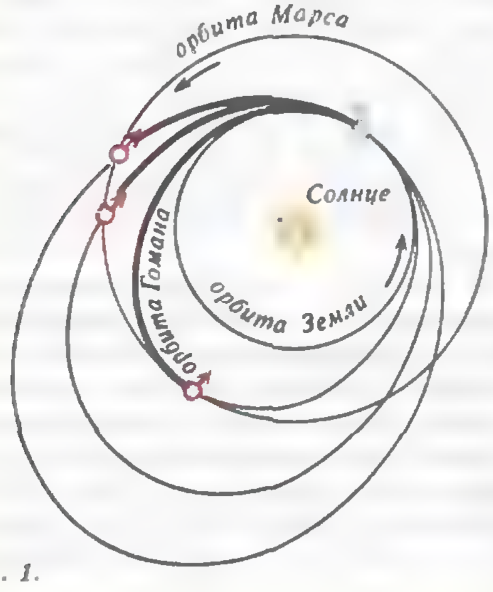


Рис. 1.

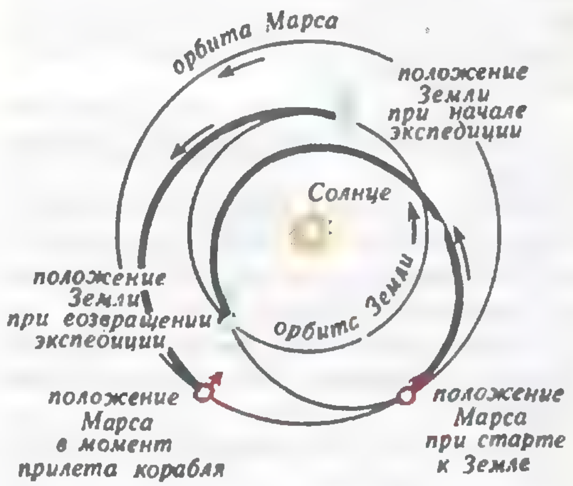

орбита Марса
положение Земли при начале экспедиции
Солнце
положение Земли при возвращении экспедиции
орбита Земли
положение Марса в момент прилета корабля
положение Марса при старте к Земле

Рис. 2.

приемник, который тоже преобразует тепло в электроэнергию.

Сегодня конструкторы склоняются к варианту марсианского корабля с электрореактивными двигателями и с электростанцией в виде больших солнечных батарей.

Межпланетный корабль состоит из трех частей: жилого блока, в котором в течение всего полета работает экипаж и где сосредоточена основная аппаратура управления; посадочного аппарата, в котором экипаж или его часть спускается и возвращается с поверхности планеты (это что-то вроде шлюпки на океанском корабле); двигательной установки для межпланетных перелетов (см. рис. 3).

Рассмотрим подробнее каждую из этих частей.

Жилой блок — это несколько герметичных отсеков. Здесь каюты для экипажа из четырех человек. Почему именно 4 человека? Ограничение диктуется соображениями экономии, тем, что увеличение экипажа резко усложняет работы по созданию корабля. А меньше четырех человек иметь нельзя из соображений безопасности: при посадке на Марс экипажу придется разделиться — часть должна спуститься на поверхность планеты, другая останется на корабле, и при этом ни на корабле, ни на поверхности Марса не должно быть меньше двух человек (необходима взаимопомощь). Вот и получается, что экипаж первой межпланетной экспедиции должен состоять из четырех человек.

В жилом блоке расположены системы, обеспечивающие экипаж водой, кислородом; здесь запасы пищи, средства удаления отходов. На рисунке 4 показана схема обеспечения экипажа водой и кислородом. Основной принцип — максимальное использование выделяемых человеком углекислого газа и воды.

Вода, поступающая в ассенизационное устройство, и водяной пар, выделяемый экипажем в атмосферу жилого блока, проходят через так называемую систему регенерации воды. Там вода очищается от вредных примесей, обогащается необходимыми солями и вновь готова для питья. Такие системы уже работают на орбитальной станции «Мир».

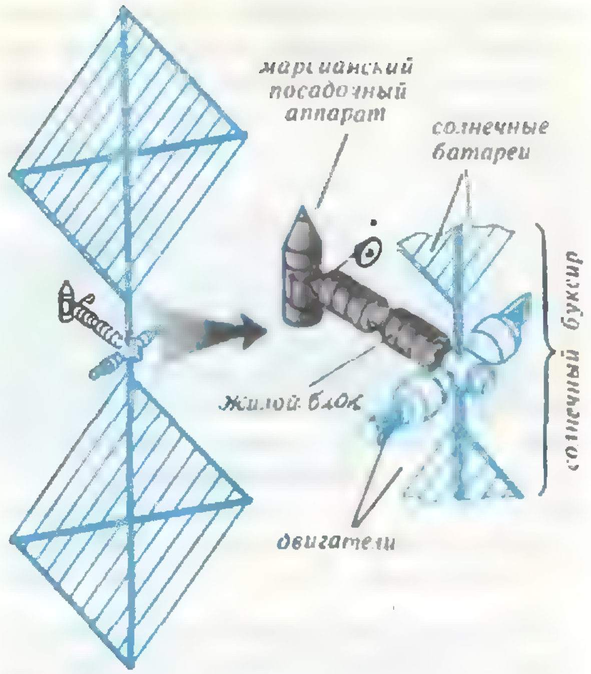


Рис. 3.

Кислород для дыхания получается электролитическим разложением воды — $2H_2O=2H_2+O_2$. На станции «Мир» работает такая система, она называется «Электрон». Водород в этой системе является побочным продуктом, он тоже будет использоваться, но уже в системе переработки углекислого газа — $CO_2+4H_2=CH_4+2H_2O$. Образующийся метан удаляется за борт, а вода направляется в систему электролиза для получения кислорода.

Таким образом, круговорот воды, организованный на станции, обеспечивает экипаж и кислородом для дыхания, и водой для питья. Но при этом неизбежны потери, которые компенсируются специальными запасами воды на борту.

Для нормальной работы экипажа и аппаратуры температура внутри жилого отсека должна быть постоянной, около 20 °С. Но отсек подвергается различным температурным воздействиям (солнечные лучи, выделение тепла экипажем, работающей аппаратурой). Воздействия эти переменны. Нагрев от солнечных лучей зависит от ориентации корабля и от расстояния до Солнца (на орбите Земли интенсивность солнечного излучения в два с лишним раза больше, чем на орбите Марса); выделение тепла внутри отсека зависит от того, какая аппаратура в этот момент включена. Для обеспечения нормального температурного режима предусматриваются специальная система терморегуляции и теплоизоляция. Оболочка жилого блока укутывается «шубой» — так называемой экранно-вакуумной теплоизоляцией. Это, по существу, многослойный термос из металлизированной пленки. А чтобы жилой блок не перегревался от тепла, выделяемого аппаратурой и экипажем, вводится регулируемый отвод тепла за борт.

Упрощенная схема регулирования приведена на рисунке 5. Снаружи жилого блока расположен радиатор, внутри — теплообменник, через который продувается воздух отсека. Между радиатором и теплообменником циркулирует жидкость. Потоком циркулирующей жидкости можно управлять: если нужно увеличить отвод тепла — увеличивают поток жидкости через теплообменник, если надо уменьшить охлаждение и поднять температуру в отсеке — уменьшают скорость циркуляции. Отражающая поверхность радиатора выполнена таким образом, что даже при освещении радиатора прямыми солнечными лучами он работает как излучатель.

Одной из опасностей, подстерегающих корабль, являются метеоры. Небольшие метеоры — так называемые микрометеоры — достаточно часто встречаются с космическими кораблями, но при той толщине оболочки, которой обладают эти корабли, такие встречи не страшны.

Однако не исключены и столкновения с более крупными метеорами, которые способны повредить герметичную оболочку. Чтобы предотвратить опасные последствия таких встреч, на некотором расстоянии от оболочки устанавливается специальный экран, служащий своеобразным зонтиком. Метеор ударяется в экран, выделяющееся при этом тепло испаряет вещество метеора, и в герметичную оболочку ударяет уже не метеор, а газовая струя. Конечно, экран не спасает оболочку при встрече с более крупными метеорами, но такая встреча крайне маловероятна. Если же все-таки произойдет пробой оболочки, в распоряжении экипажа будут средства заделки отверстия. Для большей безопасности жилой блок разделен на несколько отсеков, соединенных между собой люками. Вдоль цилиндрической оболочки расположены рамы с аппаратурой. Их можно отвести, для того чтобы обеспечить доступ к герметичной оболочке, если потребуется ее ремонт.

Еще одна опасность, характерная для межпланетного перелета,— космическая радиация. При полетах на

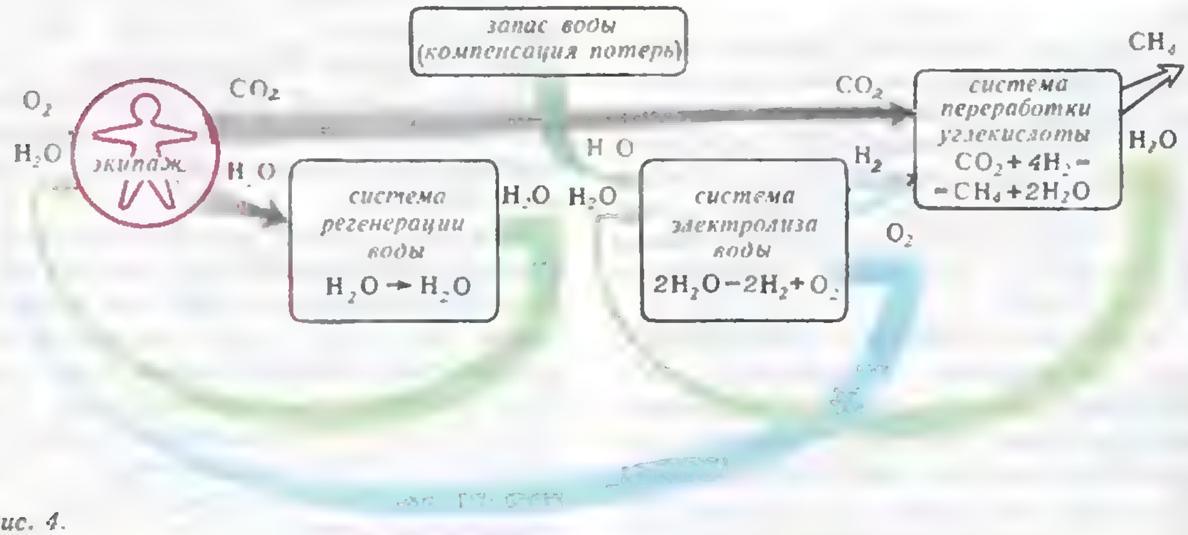


Рис. 4.

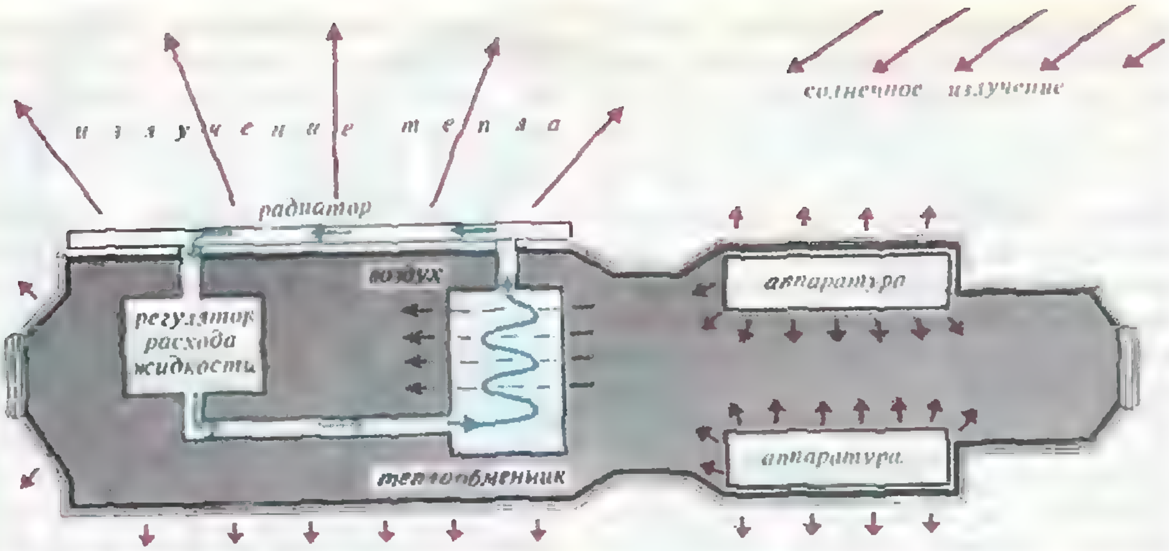


Рис. 5.

околоземных орбитах экипаж защищен радиационными поясами Земли, а при полете к Марсу этой защиты не будет. Особенно мощному радиационному излучению жилой блок будет подвергаться во время солнечных вспышек. При коротких экспедициях, например на Луну, вероятность попасть под мощную солнечную вспышку невелика. За время же длительного, почти двухлетнего, путешествия такие вспышки будут обязательно. На этот случай в жилом блоке предусматривается специальное помещение с радиационной защитой.

Вообще нужно сказать, что жилой блок очень похож на орбитальную станцию, только размеры больше. И это понятно: ведь задачи жилого блока почти такие же, как и орбитальной станции — обеспечить условия для длительной работы экипажа и аппаратуры.

Аппарат для посадки на поверхность Марса состоит из кабины экипажа, посадочной и взлетной двигательных установок. Предусмотрено специальное помещение, в котором экипаж живет в комфортных условиях в течение нескольких дней, которые выделены для работы на поверхности планеты. Посадочный аппарат имеет такую аэродинамическую форму, которая обеспечивает торможение в атмосфере Марса, плотность которой в 100 раз меньше плотности земной атмосферы. При этом используется и жидкостно-реактивная двигательная установка. Она-то и позволяет совершить мягкое «примарсение». Жизнеобеспечивающие системы аппарата построены на тех же принципах, что и системы жилого блока.

Двигательная установка корабля — солнечный буксир — состоит из электрореактивных двигателей, баков с «рабочим телом» и электростанции с двумя большими солнечными батареями размерами 200×200 м каждая. Тонкая пленка фотопреобразователей натянута на ферменную раму, подобную той конструкции, которую разворачивали космонавты на станции «Салют-7» (она называлась «Маяк»). Батареи имеют возможность поворачиваться относительно корпуса корабля таким образом, чтобы их плоскость все время была направлена на Солнце, а двигатели создавали тягу в нужном направлении.

Вот и весь межпланетный корабль.

Как же будет проходить полет?

В начале на околоземную орбиту выводятся части марсианского корабля. Для этого потребуется 4—5 пусков ракеты-носителя «Энергия». Эти части собираются на орбите с использованием автоматической системы сборки (система уже обеспечила безотказную стыковку со станциями «Салют» и «Мир» более 50 кораблей «Прогресс»).

Затем проводятся тщательные предстартовые проверки корабля. Когда все в порядке, в заданное время включаются электрореактивные двигатели, и корабль начинает свой полет. Так как тяга электрореактивных двигателей довольно мала (ее суммарная величина около 300 Н), то прежде чем выйти на траекторию полета к Марсу, корабль около трех месяцев будет двигаться по развертывающейся спирали, медленно удаляясь от Земли. Но вот корабль выходит из сферы тяготения Земли и начинает движение по направлению к Марсу. Восемь-девять месяцев будет длиться перелет на орбиту Марса. Достигнув ее, корабль по свертывающейся спирали начнет снижаться, пока не выйдет на рабочую орбиту вокруг Марса высотой 500—700 км.

Здесь два члена экипажа переходят в марсианский посадочный аппарат, отстыковываются от корабля и совершают спуск.

Какой район будет выбран для посадки? Русло древней реки или интересное нагромождение скальных пород? Сейчас трудно сказать. Неизвестно и то, какие открытия ждут первых землян на соседней планете.

После окончания работ экипаж вновь занимает места в марсианском аппарате и возвращается на корабль.

Теперь межпланетная экспедиция направляется в обратный путь. Снова по раскручивающейся спирали корабль выходит из сферы притяжения Марса и затем по межпланетной траектории движется к Земле.

Общее время полета (включая участки «спиральных» разгонов и торможений) будет составлять около двух лет.

После того как корабль выйдет на околоземную орбиту, возвращение экипажа будет такой же обычной транспортной операцией, как смена экипажа на орбитальной станции. Но до этого возвращения ему необходимо будет пройти тщательный карантин. Дело в том, что не исключено наличие на Марсе каких-то форм жизни, которые могут быть опасны для Земли. Поэтому осторожность здесь обязательна: длительные исследования должны подтвердить отсутствие такой опасности, прежде чем космонавты вернутся на Землю.

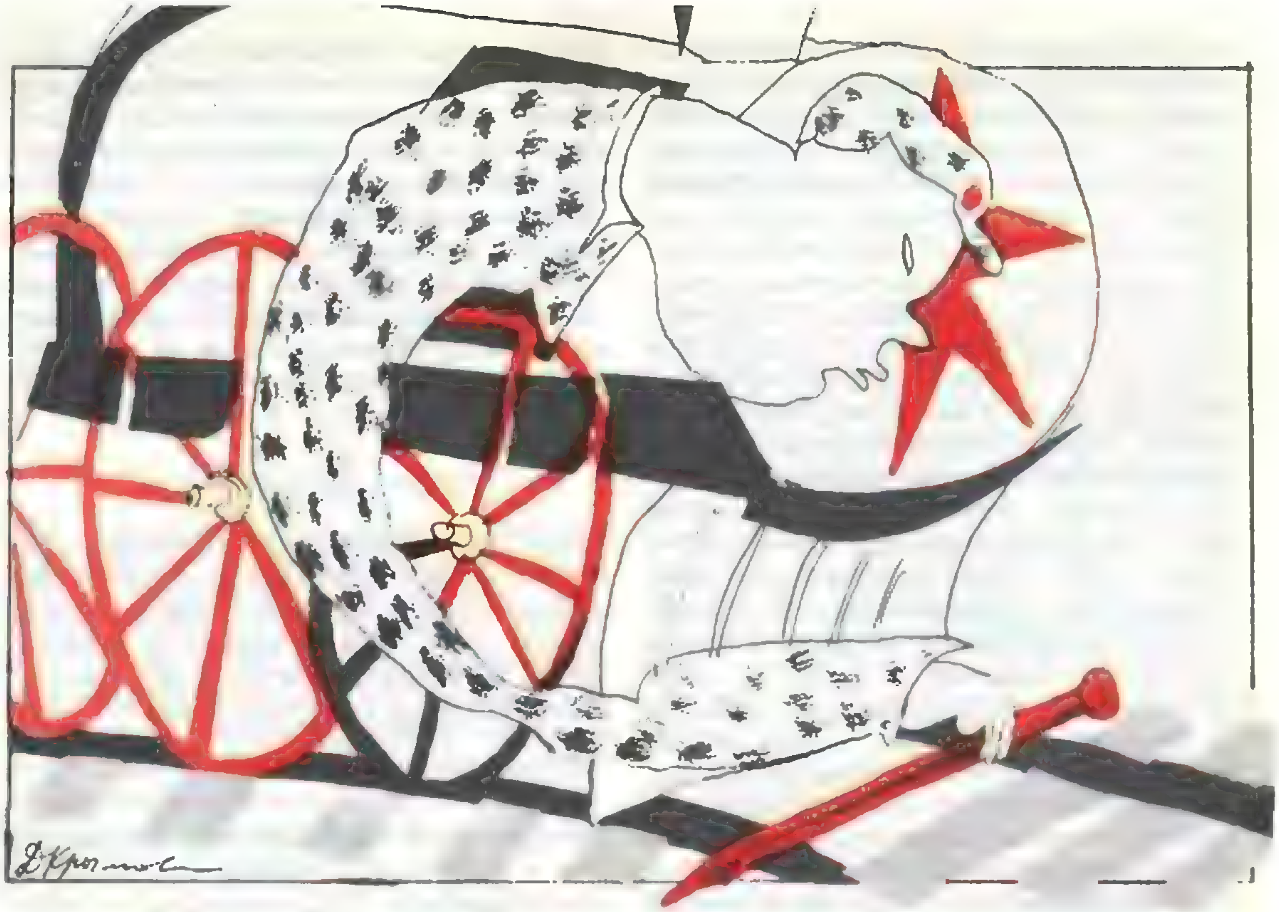
Сегодня конструкторы разрабатывают проект первого межпланетного корабля, а его экипаж, возможно, еще только учится в школе. Но время первой межпланетной экспедиции все ближе и ближе...

Золотая медаль Филдса

(Начало см. на с. 62)

Амстердам — 1954 г. (2 премии), Эдинбург — 1958 г. (2 премии), Стокгольм — 1962 г. (2 премии), Москва — 1966 г. (4 премии), Ницца — 1970 г. (4 премии), Ванкувер — 1974 г. (2 премии), Хельсинки — 1978 г. (4 премии), Варшава — 1983 г. (3 премии), Беркли — 1986 г. (3 премии). Итак, к настоящему времени всего лишь тридцать человек достигли математического Олимпа, двое из них — наши соотечественники. Следующий международный математический конгресс состоится 21—29 августа этого года в японском городе Киото. Надеемся, что среди новых филдсовских лауреатов будут читатели нашего журнала.

Ю. Соловьев



Практикум абитуриента

Явление самоиндукции

А. ЗИЛЬБЕРМАН

Начнем со стандартной задачи, которая есть чуть ли не во всех задачниках.

Задача 1. *Параллельные проводящие рельсы соединены резистором сопротивлением R и помещены во внешнее магнитное поле, индукция которого равна B_0 и перпендикулярна плоскости рельсов (рис. 1). Еще один проводник, замыкающий рельсы, движется вдоль них с постоянной скоростью v_0. Считая, что все сопротивление цепи сосредоточено в резисторе, найдите индукционный ток, протекающий по цепи.*

Приведем обычное решение. Ток определяется электродвижущей силой индукции, а она — изменением магнитного потока. За малый промежуток времени Δt проводник сдвинется на $v_0\Delta t$, поток изменится на $\Delta\Phi = B_0 l v_0 \Delta t$, и ток будет равен

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\Delta\Phi/\Delta t}{R} = \frac{B_0 l v_0}{R}.$$

Внимание! Это решение содержит грубую ошибку, и ответ неверен! Подумайте — все ли мы учли, когда рассчитывали магнитный поток? Конечно, нет. Магнитный поток Φ в за-

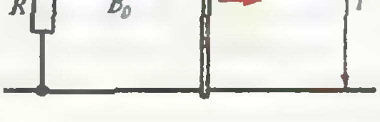


Рис. 1.

коне Фарадея — это полный поток, который определяется не только внешним полем, но и полем собственного тока — тока индукции. Но, может быть, в данном случае индукционным полем (и его потоком) можно пренебречь? А вот это уже зависит от того, как велико сопротивление резистора R. При очень большом сопротивлении ток индукции будет совсем мал и не будет заметно влиять на ЭДС. Если же R невелико, индукционным током пренебрегать нельзя, иначе можно ошибиться во много раз. Совсем плохо дело будет в случае $R=0$ (сверхпроводящий контур) — магнитный поток собственного тока становится определяющим. В общем, нельзя пренебрегать явлением самоиндукции (именно о нем и идет речь) — ток индукции дает добавку в полный магнитный поток и эта добавка важна. (Часто этим пытаются пренебречь просто по той причине, что не очень легко провести соответствующий расчет.)

Самоиндукция — частный случай общего явления электромагнитной индукции, выделяют его скорее по традиции. В чистом виде явление самоиндукции встречается в электротехнике и радиотехнике, где обычно контур изображают на схемах в виде катушки (так и резисторы, независимо от их конкретного устройства, на схемах выглядят одинаковыми прямоугольниками). Нужно иметь в виду, что магнитное поле возникает вокруг любого проводника с током, а значит, в любом случае можно говорить о магнитном потоке, энергии магнитного поля и т. д. Иными словами, даже небольшой кусочек провода имеет определенную индуктивность, которой далеко не всегда можно пренебрегать.

Разберем еще одну полезную задачу.

Задача 2. *Плоский контур сделан из проволоки, имеющей полное сопротивление r; его площадь S и индуктивность L. Первоначально контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией, равной B_0 и направленной перпендикулярно плоскости контура. Внешнее поле очень быстро убирают. Каким станет ток в контуре сразу после выключения внешнего поля? Какой полный заряд протечет по контуру за большое время?*

Начальное значение магнитного потока, пронизывающего контур, было равно $\Phi_0=B_0S$, но после того, как поле убрали скачком, поток не мог мгновенно измениться и в контуре возник ток, который скомпенсировал изменение потока:

$$I_0=\frac{\Phi_0}{L}=\frac{B_0S}{L}.$$

Если бы контур был сверхпроводящим, ток в дальнейшем не менялся бы, оставаясь равным I_0. Однако в нашем случае есть сопротивление r, значит, падение напряжения составит $U=I_0r$. Возникающая ЭДС индукции

$$\mathscr{E}=U=\frac{B_0Sr}{L}.$$

Теперь, из-за наличия сопротивления, ток в цепи начнет спадать. При этом уменьшится и ЭДС индукции — если бы она оставалась неизменной, ток уменьшался бы по линейному закону и упал до нуля за время

$$\tau=\frac{LI_0}{rI_0}=\frac{L}{r}.$$

Обратите внимание на то, что этот отрезок времени не зависит от начального магнитного поля и определяется только параметрами самого контура — его индуктивностью и омическим сопротивлением. Разумеется, за такое время ток до нуля не спадет — чем меньше ток, тем меньше ЭДС индукции и тем медленнее ток спадает. Формально говоря, он вообще никогда до нуля не упадет, однако за время в 3—5 раз большее, чем τ, он уменьшится во много раз, и его энергия (именно за счет этой энергии и поддерживается ток в контуре) тоже составит очень малую часть начальной величины. В общем, на практике можно считать, что время спадания тока до нуля в цепи с катушкой составляет $(3-5)\tau$.

Мы не ответили еще на один вопрос — какой заряд протечет по контуру за большое время. Если отвечать «в лоб», то пришлось бы находить закон изменения тока в цепи со временем, а потом брать интеграл — для нахождения заряда. Однако тут есть возможность применить красивый искусственный прием, сравнив совершенно разные выражения — для изменения магнитного потока за некоторый малый отрезок времени и протекшего за этот же промежуток времени заряда:

$$\Delta\Phi_i = \Delta B_i S,$$

$$\Delta q_i = I_i \Delta t_i = \frac{\mathcal{E}_i}{r}\Delta t_i = \frac{\Delta\Phi_i}{r}.$$

Мы видим, что суммарный заряд, протекший по контуру, прямо выражается через сумму изменений магнитного потока (полного потока, включая и собственный). Но собственный поток первоначально был равен нулю (до начала процесса ток в контуре отсутствовал) и через большое время тоже станет равным нулю, т. е. сумма изменений полного потока равна Φ_0. Значит, весь протекший заряд

$$q = \frac{\Delta\Phi}{r} = \frac{\Phi_0}{r} = \frac{B_0 S}{r}.$$

Обратите внимание на то, что это заряд, протекший за большое время — время спадания тока в контуре, т. е. внешнее поле убрали за малое время, а контур еще долго «не мог прийти в себя». Для магнитных явлений это обычное дело — на практике приходится предвидеть и принимать меры для того, чтобы последствия резкого изменения режима цепи, накопившей значительную энергию магнитного поля (пример — линия электропередачи), не оказались разрушительными.

Еще одна задача.

Задача 3. *Катушку, индуктивность которой L, подключают к источнику с напряжением U_0. Считая сопротивление цепи пренебрежимо малым, найдите ток в катушке через время t после подключения.*

Напряжение на катушке после подключения к источнику равно U_0. А чему равна ЭДС самоиндукции? Она тоже равна U_0. Собственно, напряжение, возникшее на концах идеальной катушки при включении ее в цепь, это и есть ее ЭДС самоиндукции (если катушка обладает сопротивлением, то напряжение на ее концах отличается от ЭДС самоиндукции на величину падения напряжения на сопротивлении). Теперь все просто:

$$I' = \frac{U_0}{L}, \quad I(t) = \frac{U_0}{L}t.$$

(Мы учли, что при подключении катушки к источнику ток через нее не мог измениться скачком — при скачке тока и связанном с ним скачке магнитного поля возникла бы бесконечно большая ЭДС самоиндукции.) Ясно, что пренебрегать сопротивлением цепи можно только при не очень больших токах. Идеальный источник — это упрощенная модель. Так что даже при очень малом сопротивлении цепи ток все же установится, а не будет возрастать до бесконечности.

При размыкании цепи с катушкой ЭДС индукции может достигать весьма больших значений, и это часто используют в технике для получения высоких напряжений — например, в цепях зажигания двигателей внутреннего сгорания.

Разберем такую задачу.

Задача 4. *В схеме, изображенной на рисунке 2, катушку подключают к источнику на время $t = 0{,}1$ с, а затем отключают. До какого напряжения зарядится конденсатор? Элементы цепи будем считать идеальными, $L = 1$ Гн, $C = 1$ мкФ, $U_0 = 10$ В.*

Перед размыканием цепи ток через катушку достигнет значения

$$I_к = \frac{U_0 t}{L}.$$

После размыкания ключа ток через катушку не прекратится, он найдет себе другой путь — через диод, заряжая конденсатор. По мере зарядки конденсатора напряжение на ка-

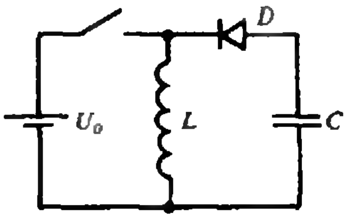


Рис. 2.

тушке (диод — идеальный, пока он открыт, катушка и конденсатор соединены параллельно) возрастает, ток спадает. Диод закроется в тот момент, когда ток упадет до нуля. Потерь энергии нет, значит, можно воспользоваться законом сохранения:

$$\frac{LI_н^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}, \quad U_m = \frac{U_0 t}{\sqrt{LC}} = 10^3 \text{ В}.$$

Если бы не диод, в цепи возникли бы колебания, а в нашем случае — энергия, накопленная в контуре, перекачалась бы в конденсатор.

Если ключ замыкать и размыкать периодически, то напряжение конденсатора можно использовать для питания высоковольтных цепей, что часто и делают (конечно, применяя не механические, а электронные переключатели).

И наконец, разберем задачу посложнее.

Задача 5. *Через катушку, индуктивность которой 2L, течет постоянный по величине ток I_0 от внешнего источника. Параллельный контур, составленный из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L, подключают параллельно первой катушке, после чего размыкают внешнюю цепь (рис. 3). Каким окажется максимальное напряжение конденсатора? Чему равно максимальное значение тока через катушку индуктивностью L?*

При подключении контура конденсатор заряжаться не будет, и ток через катушку индуктивностью L не потечет, так как при постоянной величине тока I_0 напряжение между концами катушки индуктивностью $2L$ равно нулю. Изменения начнутся после размыкания внешней цепи: конденсатор начнет заряжаться, и появится ток через катушку индуктивностью L (рис. 4). Катушки соединены параллельно, поэтому изменения магнитных потоков будут одинаковы для обеих катушек:

$$2L(I_0 - I_1) = LI_2$$

(тут учтены направления токов, показанные на рисунке 4). Элементы цепи считаем идеальными — потерь энергии нет:

$$\frac{2LI_0^2}{2} = \frac{2LI_1^2}{2} + \frac{LI_2^2}{2} + \frac{CU^2}{2}.$$

Если токи в катушке не равны, то конденсатор либо заряжается, либо разряжается. Условие максимальности напряжения на конденсаторе:

$$I_1 = I_2.$$

Тогда систему этих уравнений можно решить и найти U_m:

$$U_m = I_0\sqrt{\frac{2L}{3C}}.$$

Условие максимальности (и минимальности) токов через катушки можно получить, если вспомнить, что нуль производной тока дает ЭДС индукции, равную нулю. Значит, в такие моменты конденсатор не заряжен (он подключен параллельно катушкам, и его напряжение равно ЭДС индукции любой из них) и вся энергия сосредоточена в катушках:

$$\frac{2LI_0^2}{2} = \frac{2LI_{1m}^2}{2} + \frac{LI_{2m}^2}{2}.$$

Объединив это уравнение и уравнение для потоков, получим

$$I_{2m} = \frac{4}{3} I_0.$$

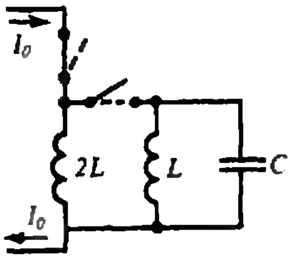


Рис. 3.

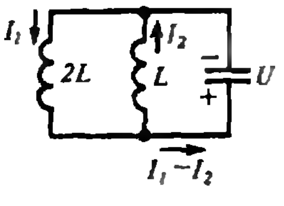


Рис. 4.

Упражнения

1. Резистор сопротивлением $R = 100$ Ом подключен параллельно катушке индуктивностью $L = 2$ Гн. В данный момент по этому контуру течет ток $I_0 = 1$ А. Через какое время ток спадет до $I = 0{,}99$ А? Какое количество теплоты за это время выделится в резисторе? Какое количество теплоты выделится в резисторе за следующие 5 секунд?

2. Катушка состоит из 10 витков тонкого провода, намотанных на деревянный цилиндр вплотную друг к другу (получившаяся толщина катушки существенно меньше диаметра цилиндра). Домотаем в ту же сторону еще один виток. Во сколько раз увеличится индуктивность? А если этот виток домотать, сменив направление намотки на противоположное?

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1989 году

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Азербайджанский (1), Горьковский (2), Казанский (3), Киевский (15), Омский (4), Саратовский (5), Ташкентский (6) и институты — Горьковский политехнический (7), Киевский педагогический (8), Минский радиотехнический (9), Московский инженерно-строительный (10), Московский институт тонкой химической технологии (11), Рижский политехнический (12), Томский политехнический (13), Ярославский педагогический (14).

Математика

Алгебра

1 (6). В РОВД работают 140 сотрудников, 15 % из них имеют высшее юридическое образование, 3/14 окончили среднюю спецшколу милиции, остальные подали документы на юридический факультет. Сколько человек подали документы на юрфак?

2 (9). Найдите число, зная, что 10 % его составляют 20 % от 16,5.

3 (3). На сколько процентов увеличится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 20 %, а другое — на 40 %?

4 (5). Дед старше своего внука в 5 раз. Если бы он был моложе на 16 лет, то он был бы старше своей внучки в 4 раза. Сколько лет деду, внуку и внучке, если про внука и внучку можно сказать, что отношение их возрастов есть число целое.

5 (9). Найдите двузначное число, у которого цифра единиц больше цифры десятков на 5, а утроенная сумма цифр равна самому числу.

6 (9). Проехав за час половину пути, шофер увеличил скорость машины на 15 км/ч и поэтому вторую половину пути проехал за 45 минут. Какой (в км) путь прошла машина?

7 (5). Первое целое число больше второго на 4, а число обратное к первому, более чем на 5/4 превосходит обратное ко второму числу. Найдите эти числа.

8 (9). Два крана, работая одновременно, наполняют бассейн за 6 часов. За сколько часов наполнит этот бассейн первый кран, если известно, что он наполняет бассейн на 5 часов дольше, чем второй?

9 (8). Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через два часа. Сколько времени потратил на путь AB каждый, если тот, что вышел из A, пришел в пункт B на 1 ч. 40 мин. позже, чем другой пришел в A?

10 (6). Когда патрульная машина группы захвата получила приказ о преследовании преступника, расстояние между ней и машиной преступника было 3 км. Машина преступника уходит от машины группы захвата со скоростью 72 км/ч, а машина группы преследует ее со скоростью 75 км/ч. Какое расстояние будет между машинами через 4 мин.?

11 (6). Турист проехал в лодке по реке из города A в город B и обратно, затратив на это 10 часов. Расстояние между городами 20 км. Найдите скорость течения реки, зная, что турист проплывал 2 км против течения за такое же время, как 3 км по течению.

12 (8). Два всадника выезжают одновременно из A и B навстречу друг другу, и один прибывает в B через 27 минут, а второй в A через 12 минут после встречи. За какое время проехал каждый всадник путь AB?

13 (8). Уборку урожая с участка начал один комбайн. Через 2 часа к нему присоединился другой комбайн, и после 8 часов работы вместе они собрали 80 % урожая. За сколько часов мог бы собрать урожай с участка каждый комбайн, если известно, что первому на это необходимо на 5 часов больше, чем второму?

14 (9). Если на заводе будут ежедневно сжигать 3,6 т топлива, то расходы на топливо за полгода составят 3333 рубля. Сколько рублей будет сэкономлено на топливе за тот же период, если ежедневно будут сжигать на 600 кг меньше?

15 (6). Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве?

16 (2). Два автобуса вместили более 24 человек. Если из второго автобуса выйдут 15 человек, то удвоенное число оставшихся там людей будет меньше числа людей в первом автобусе. Если из первого автобуса выйдут 5 человек, то в 7 раз увеличенное число оставшихся там людей будет меньше числа людей во втором автобусе. Сколько людей в каждом автобусе?

17 (5). Бригаде водителей тяжелых грузовиков сообщили, что им предстоит перевезти груз от 170 до 195 т. Однако два грузовика оказались поломанными в пути, поэтому, чтобы доставить весь груз, пришлось в остальные грузовики догрузить по одной тонне. Сколько тонн груза было перевезено, если все грузовики были одинаково загружены?

18 (5). Некто решил накопить деньги на цветной телевизор, который может стоить от 550 до 640 рублей. Для этого он откладывал каждый месяц одну и ту же сумму денег. После того

как покупка была сделана, он рассудил что, если бы он откладывал ежемесячно на 5 рублей меньше, то копить пришлось бы всего на 4 месяца дольше. Сколько стоил телевизор?

19 (5). На одинаковых грузовиках перевезли 10560 кг груза. Число легковых автомобилей, на которых перевезли 560 кг, было на 6 меньше, чем грузовиков. Сколько было легковых автомобилей, если каждый из них перевозил груза меньше, чем грузовик, более чем на 1 т (транспорт грузился равномерно)?

20 (5). Известно, что в коробке лежит 40 карандашей. Число синих карандашей в 4 раза больше числа зеленых, а числа красных и зеленых карандашей кратны. Если в коробку добавить 22 синих карандаша, то их станет в 5 раз больше красных. Сколько лежит в коробке карандашей цвета, отличного от красного, синего и зеленого?

21 (1). Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов равна 189. Определите второй член этой прогрессии.

22 (1). Сумма первых 12 членов арифметической прогрессии равна 354. Отношение суммы членов, стоящих на четных местах, к сумме членов, стоящих на нечетных местах, равно 32:27. Найдите разность этой прогрессии.

23 (1). Числа m, n, p, отличные от нуля, образуют геометрическую прогрессию, а числа $m+n$, $n+p$, $p+m$ — арифметическую. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

24 (1). Три отличных от нуля действительных числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель этой геометрической прогрессии.

25. Вычислите

а) (9). $100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$.

б) (8). $\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3}-\frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}$.

в) (3). $\log_a bc$, если $\log_b a=4$, $\log_{c^2} a=2$.

г) (9). $\frac{5^{\lg 20}}{20^{\lg 5+1}}$.

д) (12). $2^{\log_4(2-\sqrt{3})^2}+3^{\log_9(2+\sqrt{3})}$.

е) (3). $\sin 150^\circ-\cos 120^\circ+\operatorname{ctg} 315^\circ+$
$+\operatorname{tg}(-135^\circ)$.

ж) (4). $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

з) (12). $\sin(90^\circ-\alpha)$, если $\sin\alpha=\sqrt{0,51}$, $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

26 (9). Найдите $x+y$, если x^2-4x+y^2-
$-6y+13=0$.

27. Упростите выражения

а) (1). $(1-a^2):\left(\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\right.\right.$
$\left.\left.-\sqrt{a}\right)\right)+1-{}_{1-a}$.

б) (13). $\left(\frac{(a^{3/4}-b^{3/4})(a^{3/4}+b^{3/4})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\sqrt{ab}\right)\times$
$\times\frac{\sqrt{2,5}(a+b)^{-1}}{10^{-0,5}}$.

в) (8). $\frac{1-m^{-2}}{m^{1/2}-m^{-1/2}}-\frac{2}{m^{3/2}}+\frac{m^{-2}-m}{m^{1/2}-m^{-1/2}}$.

г) (9). $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$.

28. Решите уравнения

а) (6). $x^2+2x+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$.

б) (12). $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$.

в) (12). $\frac{27}{x+5}+\frac{1}{x-5}=2$.

г) (12). $\sqrt{6x+1}-\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$.

д) (13). $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$.

е) (14). $\sqrt{x-7}-\frac{21}{\sqrt{x-7}}+\sqrt{2x}=0$.

ж) (10). $\frac{25-9x}{3}+(\sqrt{3x-2}-3)(\sqrt{3x-2}+$
$+1)=2$.

з) (9). $\sqrt{8-2x+x^2}=\sqrt{x^2+2}+\sqrt{6-2x}$.

и) (3). $4^{x-2}+2\cdot 4^{x-1}=9$.

к) (13). $2^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{0,5\sqrt{x}}=24$.

л) (10). $3\cdot 5^{x+1}+6\cdot 5^{-(x+1)}=\frac{81}{5^{x-1}}$.

м) (1). $\left(\sqrt[3]{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$.

н) (10). $\lg^2 x-2\lg 10x-6=0$.

о) (7). $81\cdot 3^{2x}+45\cdot 6^x=9\cdot 2^{2x+2}$.

п) (5). $\sqrt{\log_2 x}+\sqrt{\log_x 2}=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

р) (10). $2\log_{0,3}\sqrt{2-x}=\log_{0,3}(5+x-x^2)$.

с) (9). $2x\log_2 3=\log_2(\lg^2 x+9^x-1)$.

т) (5). $\sqrt{\log_3(9x-3)}=\log_3\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

у) (13). $5^{\log_3 x}+x^{\log_3 5}=50(4-2^{0,5\log_2 9})$.

ф) (1). $2^{\log_3 x}+3\cdot x^{\log_3 2}=4$.

х) (1). $x^{2\log_4^2 x}=4x^3$.

ц) (12). $9\cdot x^{2-\log_3 x}=(\sqrt{3})^{2\log_3 x-8}$.

29. Решите тригонометрические уравнения

а) (6). $8\sin^2 x-7\cos^2 x=8$.

б) (6). $8\cos^2 x-7\sin 2x=5$.

в) (1). $\cos 9x-\cos 7x+\cos 3x-\cos x=0$.

г) (1). $\cos 2x(\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 6x)=4\sin 6x\cdot\sin 8x$.

д) (2). $\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin x+\sqrt{3}$.

е) (12). $\sin x+\operatorname{tg} x=\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{2\sin x}$.

ж) (4). $\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$.

з) (5). $1-(\cos x+\sin x)\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\left(\frac{3}{2}x\right)$.

и) (5). $\cos^2 3x+\cos^2 2x=\sin^2 6x+\sin^2 7x$.

к) (1). $\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}=3\cos^2\frac{x}{2}$.

л) (8). $4(1+\cos x)=3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

м) (10). $\cos^2 3x-\cos^2 5x=\cos(\pi+10x)$.

н) (14). $5\sin^2 2x=2\cos^2 x+1+5\cos^2 2x$.

о) (13). $3\sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 1.$

п) (5). $\dfrac{2\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x + 2\sin x} = \sin x.$

р) (2). $2(\sin^3 x - \cos^3 x) = 1 + (\sin x + \cos x)^2.$

с) (2). $\sin\dfrac{x}{4} + 3\cos x = 4.$

т) (1). $16\cos z \cdot \cos 2z \cdot \cos 4z \cdot \cos 8z = 1.$

30. Решите неравенства

а) (10). $x(x-1) - \dfrac{(x-4)^2}{4} > \dfrac{5x+4}{2}.$

б) (2). $4x^4 - 9x^2 + 2 \leqslant 0.$

в) (9). $x^2 - 4(\sqrt{x})^2 - 12 \leqslant 0.$

г) (9). $\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 + 4x - 32} < 0.$

д) (5). $\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{x+2}.$

е) (5). $|5x+1| - |2x-4| \geqslant 3.$

ж) (5). $x^2 + |5x-4| - 1 \leqslant |3x-2|.$

з) (5). $x^2 + 2|x-1| + 7 \leqslant 4|x-2|.$

и) (9). $|x^2 - 6x + 8| > x^2 - 6x + 8.$

к) (5). $\sqrt{x^2 + 3x - 18} > 2x + 3.$

л) (9). $\sqrt{-x^2 + 10x - 16} + 3x^2 > -1.$

м) (12). $(x-2)\sqrt{-x^2 + 4x + 5} \geqslant 0.$

н) (3). $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2 + x - 3} \leqslant \dfrac{8}{27}.$

о) (4). $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}.$

п) (5). $2x \cdot 7^{x-1} \geqslant |x|.$

р) (5). $x \cdot 3^{|x-1|} \geqslant 5x.$

с) (13). $8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \geqslant 9^{\sqrt{x}}.$

т) (7). $3^{x-2} < \dfrac{3}{9^{1/x}}.$

у) (12). $(x-2)^{2x^2 - 5x} > 1.$

ф) (10). $(\sqrt{2})^{2x^2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{7-6x} > 1.$

х) (10). $\dfrac{4^x - 2}{2^{2x} - \sqrt{2}} < 1.$

ц) (13). $\lg^2 x - 2\lg x - 8 \leqslant 0.$

ч) (9). $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_{\sqrt{2}} \dfrac{2\sqrt{2}}{x} \geqslant 2.$

ш) (10). $2\log_2(x+2) < \log_2(x+5) + 2.$

э) (2). $\log_3(3^x - 8) \leqslant 2 - x.$

ю) (7). $\log_x \sqrt{x+12} > 1.$

я) (2). $\log_3 \log_{27} \log_2(x^2 + x + 2) \leqslant -1.$

31. Решите тригонометрические неравенства

а) (4). $3\sin x > 2\cos^2 x.$

б) (4). $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0.$

в) (2). $\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{3}\cos x - 2 \leqslant 0$

при условии $|x| \leqslant \dfrac{\pi}{4}.$

г) (8). $\dfrac{15}{\cos x + 1} < 11 - 2\cos x.$

д) (8). $\dfrac{2}{\operatorname{ctg} x + 1} > 2 - \operatorname{ctg} x.$

32. Решите системы уравнений

а) (4). $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2}, \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1. \end{cases}$

б) (8). $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = \dfrac{4}{3}, \\ xy = 9. \end{cases}$

в) (8). $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64. \end{cases}$

г) (2). $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ \dfrac{1}{9} \cdot 3^y = 3^x. \end{cases}$

д) (2). $\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ 4\sin x \cdot \sin y = 3. \end{cases}$

33 (5). При каких a имеет решение система

$$\begin{cases} 3^{2x+y} + 3^{x+3y} = 3, \\ 3^y + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x+3y} = 3^{a-2x}? \end{cases}$$

34 (5). При каких a система имеет единственное решение? Найдите это решение.

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2^{2x-y} = 1 - 2^a, \\ 2^{4x} - 2^{x+3y+1} = 3 \cdot 2^{a+2y} - 2^{2y+2}. \end{cases}$$

35 (9). При каком значении a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 31y = -23, \\ 2x + 2ay = 23. \end{cases}$$

не имеет решений?

36 (6). Составьте квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения $9x^2 - 18x + 1 = 0.$

37 (9). x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - x + q = 0$. Найдите q, если $x_1^3 + x_2^3 = 19.$

38 (3). Сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + p = 0$ равна 12. Найдите p.

39 (9). Сколько существует целых значений a, при которых уравнение $1 + a\cos x = (a+1)^2$ имеет хотя бы одно решение?

40 (11). Найдите наибольшее целое значение a, при котором уравнение $x^4 - 2x^2 + 0{,}125a = 0$ имеет 4 действительных различных корня.

41 (11). Найдите число b, при котором один из корней уравнения $x^3 - 5x^2 + 3x + b = 0$ равен $2 + \sqrt{5}.$

42 (11). При каком значении a уравнение $|\log_3(x+2)| = -(x+a)^2$ имеет решения?

43 (11). При каком значении a графики функций

$$f_1(x) = 3^{2-|x|} \quad \text{и} \quad f_2(x) = x^2 + a$$

пересекаются в точке, лежащей на оси OY?

44 (11). При каком значении a графики функций

$$f_1(x) = |\log_4(a-x)| \quad \text{и} \quad f_2(x) = -|x-3|$$

пересекаются в точке, лежащей на оси OX?

45 (5). Найдите наибольшее число x, удовлетворяющее для некоторого натурального n системе уравнений

$$\begin{cases} 3nx + y = -30, \\ \dfrac{y}{2n} - \dfrac{3x}{2} = n + \dfrac{15}{n} + 196. \end{cases}$$

Анализ

1 (13). Постройте графики функций $y=x|x|+1$ и $y=3$ и найдите число их точек пересечения.

2 (4). Постройте график функции

$$y=x^2-|x|+2.$$

3 (7). Постройте фигуру, ограниченную графиками функций

$$y=|x-1|-|x+1| \quad \text{и} \quad y=x^2-1.$$

4 (7). Найдите производную функции $y=1+x+\operatorname{tg} 2x$.

5 (1). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3-3x^2+3$ на отрезке $[-1; 1]$.

6 (10). Найдите точки максимума и минимума функции $f(x)=-x^3-9x^2+3$.

7 (12). Найдите наименьшее значение функции $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

8 (10). Найдите интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=x^4-32x^2-26$.

9 (11). При каком значении x функция

$$f(x)=5^{(2x+1)^2}+\frac{}{5^{(2x+1)^2}+1}+2$$

принимает наименьшее значение?

10 (6). Найдите наименьшее значение функции $y=2x\ln x-x\ln 49$ на отрезке $[1; 7]$.

11 (11). Среди всех треугольников, тупой угол которых равен 150°, а сумма сторон, образующих этот угол, равна 1,6, найдите тот, площадь которого максимальна. В ответе укажите площадь этого треугольника.

12 (11). Боковая сторона равнобочной трапеции равна ее меньшему основанию, длина которого равна 13. Какова должна быть длина большего основания, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

13 (11). Среди всех правильных четырехугольных пирамид с боковой поверхностью 4 найдите ту, у которой боковое ребро минимально. В ответе укажите длину стороны основания такой пирамиды.

14 (11). Вычислите площадь фигуры, образованной осями координат и касательными, проведенными из точки M (3; 4) к кривой $y=4x-x^2$.

15 (7). Найдите радиус основания R и высоту H цилиндра, имеющего при данном объеме $V=16\pi$ наименьшую полную поверхность.

16 (2). Рассматриваются всевозможные цилиндры заданного объема V. В каждый из них вписана правильная 7-угольная призма. Найдите высоту той из этих призм, площадь полной поверхности которой минимальна.

17 (4). Каковы должны быть размеры открытого бассейна объемом 32 м^3 с квадратным дном, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала?

Геометрия

1 (7). Даны вектор $\vec{a}=(-2; 1; 4)$ и точка M $(1; 0; -1)$. Найдите координаты точки N, если $2\vec{a}+3\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

2 (7). В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$. Разложите по векторам $\vec{m}$ и $\vec{n}$ вектор $\overrightarrow{BM}$ (точка M делит отрезок AC в отношении $AM:MC=1:3$).

3 (14). Выясните, подобны ли треугольники, если вершины одного находятся в точках A (2; 1; —2), B (—1; 4; 1), C (3; —1; 5), а другого — в точках M (—3; —7; 0), K (—1; 3; 2), P (5; 0; —1).

4 (14). Вычислите координаты центра M $(x; y)$ окружности, описанной около треугольника ABC, если известны координаты его вершин: A (2; 1), B (—1; 4), C (3; —1).

5 (1). В треугольнике ABC $\angle A=90°$, $\angle B=30°$. Радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите расстояние между вершиной C треугольника и точкой касания окружности с катетом AB.

6 (9). Высота равнобедренного треугольника, проведенная к боковой стороне, равна 4. Угол при вершине равен $\frac{2}{3}\pi$. Найдите длину основания треугольника.

7 (3). В равносторонний треугольник ABC вписана окружность и проведен отрезок MN, который касается ее и параллелен стороне AB. Определите периметр трапеции $AMNB$, если длина стороны AB равна 18.

8 (2). Из точки, расположенной внутри правильного треугольника ABC, длина стороны которого равна a, опущены перпендикуляры на стороны AB, BC, CA. Длины перпендикуляров соответственно равны m, n, k. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

9 (2). Точка N лежит на стороне BC треугольника ABC, точка M на продолжении стороны AC за точку A, при этом $AM=AC$, $BN:NC=3:4$. В каком отношении прямая MN делит сторону AB?

10 (9). Площадь параллелограмма со сторонами 5 и 8 равна 32. Чему равен косинус большего угла параллелограмма?

11 (6). На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a. Поворотом в этой плоскости данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь четырехугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

12 (5). В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AD равна 8. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность с центром в точке O, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке L. Найдите величину угла KOL, если длина KL равна 2.

13 (2). Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, длина боковой стороны BC равна b. Найдите площадь трапеции.

14 (3). Сумма квадратов параллельных сторон трапеции равна 288. Определите длину отрезка, параллельного этим сторонам и делящего площадь трапеции пополам.

15 (5). В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 4. Биссектриса угла BAD пе-

ресекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке O, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке N. Найдите величину угла MON, если длина отрезка MN равна 2.

16 (2). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна a, сторона AC равна b. Из вершин B и C опущены перпендикуляры BK и CN на диагональ AD, причем $AK<AN$. Найдите отношение $OC:OA$, где O — точка пересечения диагоналей четырехугольника, если $AK=k$, $AN=n$.

17 (2). В правильной треугольной пирамиде известны высота H и величина двугранного угла 2α, образованного боковыми гранями. Найдите длину стороны основания.

18 (8). Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

19 (12). Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60°. Сторона основания 2. Определите боковую поверхность пирамиды.

20 (5). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной 2. Боковое ребро пирамиды SA перпендикулярно плоскости основания. На ребре SC выбрана точка L так, что $|SC|=3|SL|$. Найдите расстояние между прямой SA и прямой, проходящей через точку L и середину ребра SB.

21 (5). Найдите плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

22 (5). Длина стороны правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, равна 3. Одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а площади двух других боковых граней равны 5 и 4. На какие по величине отрезки высота пирамиды делит сторону основания?

23 (5). В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и углом ACB, равным 120°. Боковая грань, опирающаяся на AB, перпендикулярна основанию пирамиды. Площади двух других боковых граней равны 3 и 2. Найдите стороны треугольника ABC, если сторона AB делится высотой пирамиды на отрезки, длины которых относятся как 2:1.

24 (11). В правильной треугольной пирамиде через сторону основания и середину противоположного бокового ребра проведена плоскость, которая оказалась перпендикулярной этому ребру. Найдите высоту боковой грани (апофему) пирамиды, если сторона основания равна 1.

25 (8). Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 5 и 8. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°. Найдите высоту пирамиды.

26 (5). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC. Боковое ребро пирамиды SA перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, если величина угла между прямой SA и прямой, проходящей через точку C и середину ребра SB, равна 60°, а расстояние между этими скрещивающимися прямыми равно 2.

27 (1). Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный d. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен β.

28 (1). Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен α. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол β. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R. Найдите объем пирамиды.

29 (1). Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует со стороной основания угол α. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен R. Найдите полную поверхность этой пирамиды.

30 (4). В шар вписана пирамида, основанием которой является прямоугольник с диагональю 10. Боковые ребра пирамиды наклонены к основанию под углом β. Найдите площадь поверхности и объем шара.

31 (4). Найдите двугранный угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α.

32 (14). Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при точке B; ребро $AD=a$ и перпендикулярно основанию; ребра AD и CD составляют с ребром BD углы α и β. Определите объем пирамиды и расстояние от точки C до плоскости ABD.

33 (10). Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует с высотой пирамиды угол 45°. Длина бокового ребра равна 2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

34 (13). Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной 6 и острым углом в 30°. Двугранные углы при основании равны 60°. Найдите полную поверхность пирамиды.

35 (6). В основании пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит равнобочная трапеция $ABCD$ с меньшим основанием $AB=a$ и острым углом α. Высота SO пирамиды равна h. Прямая AO пересекает сторону CD основания в точке K, являющейся ее серединой. Найдите угол, образованный боковой гранью SBC с плоскостью основания, если $AO:OK=8:1$ и $\angle AOB=90°$.

36 (1). Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм со сторонами a, b и углом между ними 30°. Найдите объем параллелепипеда, если его боковая поверхность равна S.

37 (5). В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб с острым углом 60°. Под каким углом пересекает плоскость сечения боковые ребра параллелепипеда?

38 (10). Основание наклонного параллелепипеда — прямоугольник с длинами сторон 5 и 12. Боковое ребро равно диагонали основания и образует с плоскостью основания угол 30°. Найдите объем параллелепипеда.

39 (14). Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб со стороной a

и острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с основанием угол β. Определите объем параллелепипеда.

40 (5). Через диагональ *AC* квадрата, лежащего в основании прямого параллелепипеда, и вершину другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник *ABC* с углом при вершине *B* в два раза большим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите угол *ABC*.

41 (5). В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб. Найдите внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен 30°.

42 (13). Высота конуса равна 8, а образующая — 10. Определите радиус вписанного шара.

43 (8). Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной *a*; одна из боковых граней перпендикулярна к основанию и является ромбом, меньшая диагональ которого равна *c*. Найдите объем призмы.

Физика*)

Механика

1(9). Пловец переплывает реку по прямой, перпендикулярной берегу. Определите скорость течения, если численное значение скорости пловца относительно воды в $\sqrt{2}$ больше скорости течения. Скорость пловца относительно берега $v=0{,}5$ м/с.

2(10). Тело, падающее с высоты h на поверхность земли, проходит за последнюю секунду падения 1/4 часть всего пути. Определите высоту и время падения.

3(9). С какой минимальной скоростью следует бросить под углом $\alpha=45°$ к горизонту камень, чтобы он достиг высоты $h=2{,}5$ м? Сопротивление воздуха не учитывать.

4(9). Два тела одновременно брошены из одной точки. Начальная скорость первого тела равна $v_1=10$ м/с и направлена вертикально вверх, второго — $v_2=20$ м/с и направлена под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определите расстояние между телами спустя секунду. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5(7). С наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, без трения соскальзывает тело. Начальная скорость тела равна нулю. Определите (выведите формулу), как зависит скорость тела от пройденного пути s. За какое время от начала движения тело достигнет основания наклонной плоскости, если в начальный момент тело находилось на высоте h от основания?

6(13). Шкив, радиус которого $R=20$ см, приводится во вращение грузом, подвешенным на нерастяжимой невесомой нити, постепенно сматывающейся со шкива. В начальный момент груз был неподвижен, а затем стал опускаться с ускорением $a=2$ см/с^2. Определите угловую скорость шкива в момент времени, когда груз пройдет путь $s=100$ см.

7(9). Масса некоторой планеты в 2 раза больше массы Земли, а радиус равен радиусу Земли. Определите модуль ускорения свободного падения на поверхности этой планеты.

8(13). Груз массой $m=50$ кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы, равной $F=300$ Н и направленной под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu=0{,}1$. Определите ускорение движения груза.

9(9). К телу массой $m=0{,}5$ кг, лежащему на поверхности земли, прикрепили вертикально расположенную невесомую пружину, жесткость которой $k=300$ Н/м. Определите модуль силы давления тела на поверхность, если пружина сжата на $\Delta l=2$ см.

10(7). Чему должен быть равен минимальный коэффициент трения скольжения между шинами колес автомобиля и поверхностью наклонной дороги с уклоном $\alpha=30°$, чтобы автомобиль мог двигаться по ней вверх с ускорением $a=1$ м/с^2? При движении колеса проскальзывают относительно дороги.

11(9). Три грузика массой $m=0{,}02$ кг каждый связаны двумя нитями и подвешены с помощью третьей нити к потолку. Найдите модуль силы натяжения той нити, которая растянута менее других. Жесткости нитей одинаковы.

12(2). Тело, закрепленное на невесомом нерастяжимом шнуре длиной $l=60$ см, движется по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 1). Шнур образует с вертикалью угол $\alpha=45°$. Найдите период вращения тела.

13(9). Однородная лестница массой $m=6$ кг и длиной $l=3$ м приставлена к стенке и образует с ней угол $\alpha=30°$. Определите момент силы тяжести, действующей на лестницу, относительно оси, проходящей через нижний ее конец параллельно ступенькам.

14(9). На тело массой $m=1$ кг, брошенное с поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=11$ м/с, действует постоянная сила сопротивления, равная $F=1$ Н. Определите работу силы тяжести за время подъема тела до максимальной высоты.

15(9). Максимальная высота подъема тела массой $m=2$ кг, брошенного с поверхности земли с начальной скоростью $v_0=10$ м/с, составляет $h=3$ м. Определите кинетическую энергию тела в момент достижения максимальной высоты. Сопротивлением воздуха пренебречь.

16(9). Какую минимальную среднюю мощность должен развить кузнечик массой $m=0{,}01$ кг для прыжка на высоту $h=1$ м относительно поверхности земли? Время отталкивания $\tau=0{,}2$ с. Размерами кузнечика пренебречь.

17(2). На дощечке укреплен ствол пружинного пистолета (рис. 2). Дощечка положена на гладкий горизонтальный стол. Пистолет заряжен шариком массой $m=20$ г, а масса дощечки вместе с пистолетом $M=200$ г. Легкая пружина жесткостью $k=2{,}2$ Н/см сжата до длины $l=5$ см при свободной длине $l_0=10$ см. Определите скорости разлета шарика и дощечки после выстрела. Оцените время выстрела (время выталкивания шарика пружиной).

---

*) Во всех задачах табличные данные считайте известными.

18(7). По рельсам катится тележка массой M со скоростью v. Человек массой m а) прыгает с места на тележку перпендикулярно рельсам; б) прыгает с тележки перпендикулярно рельсам. Как изменяется скорость тележки в обоих случаях? Трение пренебрежимо мало.

19(3). Абсолютно упругий шарик, подвешенный на нити длиной l, отклоняют на угол α и отпускают (рис. 3). В нижней точке он сталкивается с таким же шариком, висящим на нити длиной R. При каком минимальном значении угла α второй шарик после удара будет двигаться по окружности радиусом R вплоть до точки A?

20(15). Колена U-образного сосуда удалены друг от друга на $l=15$ см. Найдите максимальную разность уровней воды в них, если сосуд движется с горизонтальным ускорением $a=6$ м/с^2.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1(10). В баллоне емкостью $V=100$ л при нормальных условиях содержится $m=8{,}9\times10^{-3}$ кг газа. Определите молярную массу этого газа.

2(7). Определите плотность идеального газа при температуре $t=100$ °C и давлении $p=10^5$ Па. Определите также массу одной молекулы этого газа, если известно, что молярная масса газа $M=32\cdot10^{-3}$ кг/моль.

3(2). Посередине запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длиной $L=100$ см находится столбик ртути длиной $l=20$ см. Трубку ставят вертикально, и столбик ртути смещается на $h=10$ см. До какого давления был откачан воздух в трубке?

4(9). В ходе изохорического охлаждения давление газа уменьшилось на $\Delta p=100$ кПа. Определите (в килопаскалях) начальное давление, если абсолютная температура газа уменьшилась в 1,5 раза.

5(7). На дне цилиндра, заполненного газом, лежит шар. До какого давления надо сжать газ, чтобы шар поднялся наверх? Считать, что газ при больших давлениях подчиняется уравнению Менделеева—Клапейрона. Температура газа постоянна и равна $t=20$ °C, молярная масса газа $M=29\cdot10^{-3}$ кг/моль, плотность шара $\rho=7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3.

6(3). Два одинаковых сосуда соединены трубкой, объемом которой можно пренебречь. Система наполнена газом под давлением p_0. Во сколько раз нужно изменить температуру газа в одном из сосудов, чтобы давление во всей системе стало p_1?

7(9). Два моля идеального одноатомного газа расширяются без теплообмена с окружающей средой. Температура газа в ходе расширения уменьшилась на $\Delta T=10$ К. Определите работу, совершенную газом при расширении.

8(7). Один моль идеального газа участвует в некотором процессе, изображенном на рисунке 4 в p, V координатах, проходя последовательно состояния *1, 2, 3, 4, 1*. При этом $V_1=V_3=2V_0$, $V_4=V_0$, $V_2=4V_0$, $p_1=p_2=2p_0$, $p_3=p_4=p_0/2$. Найдите работу, совершенную газом за этот цикл (выразив ее через p_0 и V_0).

9(9). В p, V координатах, где p — давление в килопаскалях, а V — объем в литрах, график циклического процесса в идеальном газе имеет вид прямых, соединяющих точки (100; 3), (200; 3) и (200; 5). Определите работу газа за цикл.

10(9). В цилиндрическом сосуде поршень массой $m=100$ кг и площадью $S=0{,}01$ м^2 начинает двигаться вверх. Давление газа под поршнем постоянно и равно $p=600$ кПа, атмосферное давление $p_0=100$ кПа. Определите скорость поршня, когда он пройдет путь $l=1{,}8$ м. Трение не учитывать.

11(9). Тепловая машина работает по циклу Карно, и ее КПД $\eta=60$ %. Во сколько раз количество теплоты, полученное при изотермическом расширении рабочего вещества, больше количества теплоты, отданного при изотермическом сжатии?

12(13). Чтобы охладить $V=4{,}5$ л воды от $t_1=30$ °C до $t_2=10$ °C, в воду бросают кусочки льда при температуре $t_3=0$ °C. Какое количество льда потребуется для охлаждения воды?

13(13). Свинцовая гиря падает на землю и ударяется о препятствие со скоростью $v=330$ м/с. Какая часть гири (в процентах) расплавится, если все тепло, выделяемое при ударе, поглощается гирей? Температура гири в момент удара $t=27$ °C.

14(15). В одной комнате площадью $S_1=10$ м^2 относительная влажность воздуха $\varphi_1=65$ %, в смежной, площадью $S_2=15$ м^2, — $\varphi_2=40$ %. Вычислите относительную влажность после объединения комнат в одну. Температура воздуха постоянна.

Основы электродинамики

1(3). Два одинаковых заряженных шарика притягиваются друг к другу. После того как

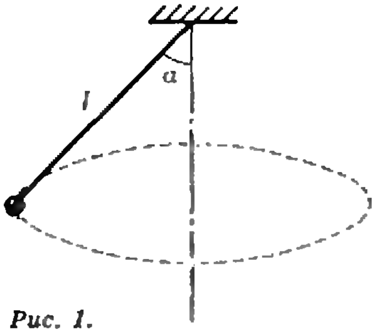


Рис. 1.

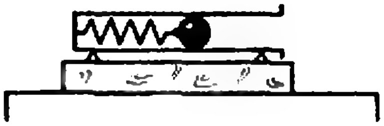


Рис. 2.

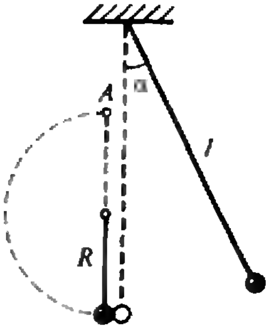


Рис. 3.

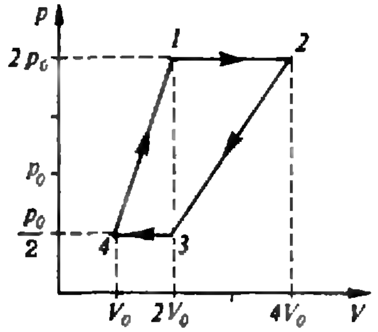


Рис. 4.

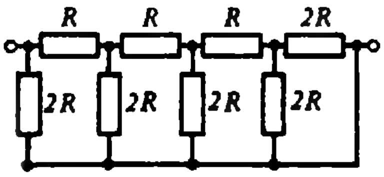


Рис. 5.

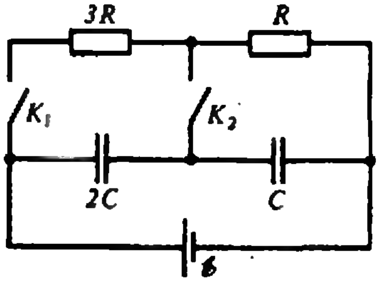


Рис. 6.

шарики были приведены в соприкосновение и раздвинуты на расстояние в $n=2$ раза большее, чем прежде, сила взаимодействия между ними уменьшилась в $m=12$ раз. Каков был заряд первого шарика до соприкосновения, если заряд второго шарика был $q=1$ Кл?

2(15). Металлическая сфера радиусом R имеет положительный заряд q. Электрон поместили на расстоянии h от поверхности сферы и отпустили. С какой скоростью в вакууме он достигнет поверхности сферы? Эффектов СТО не учитывать.

3(9). Электрон с кинетической энергией $W=120$ эВ влетает в плоский конденсатор под углом $\alpha=30°$ к пластинам. Определите разность потенциалов электрического поля между точками влета и вылета электрона из конденсатора, если электрон вылетает из конденсатора под углом $\beta=45°$ к пластинам.

4(3). Из куска проволоки сопротивлением $R=100$ Ом сделано кольцо. В каких точках следует присоединить провода, подводящие ток, чтобы сопротивление между ними стало $r=9$ Ом?

5(3). Определите общее сопротивление электрической цепи, изображенной на рисунке 5.

6(13). Вольтметр, внутреннее сопротивление которого $R_1=50$ кОм, подключен к источнику вместе с дополнительным сопротивлением $R_2=120$ кОм. При этом вольтметр показывает напряжение $U=100$ В. Определите напряжение на зажимах источника.

7(2). В схеме, изображенной на рисунке 6, ЭДС батареи $\mathscr{E}=60$ В, ее внутреннее сопротивление равно нулю. Определите разности потенциалов на конденсаторах в случаях:

а) ключи K_1 и K_2 замкнуты;
б) ключ K_1 замкнут, K_2 разомкнут;
в) ключ K_1 разомкнут, K_2 замкнут.

8(13). Рассчитайте длину никелиновой проволоки кипятильника, с помощью которого можно в течение $\tau=1$ ч довести до кипения $m=10$ кг воды, взятой при температуре $t=10$ °С, если его КПД $\eta=84$ %, напряжение в сети $U=120$ В, поперечное сечение проволоки $S=5\cdot10^{-7}$ м^2.

9(9). Обмотка электродвигателя постоянного тока сделана из провода общим сопротивлением $R=2$ Ом. По обмотке работающего двигателя, включенного в сеть с напряжением $U=110$ В, течет ток $I=11$ А. Определите КПД двигателя (в процентах).

10(10). Сколько цинка было получено при электролизе раствора $ZnSO_4$, если затрачена энергия $W=2$ квт. ч и разность потенциалов между зажимами ванны $U=2$ В?

11(9). За $\tau=1$ ч на площади $S=1$ м^2 железного листа при электролизе осаждается $m=576$ г двухвалентного цинка. Плотность тока в электролитической ванне $j=500$ А/м^2. Найдите по этим данным число Фарадея (в килокулонах на моль).

12(9). Проволочный квадрат с током находится в однородном магнитном поле. Плоскость квадрата перпендикулярна магнитным линиям. Определите (в градусах) угол между силами Ампера, действующими на противоположные стороны квадрата.

13(15). Протон влетает в однородное магнитное поле, занимающее полупространство $x\geqslant 0$, со скоростью $\vec{v}$, перпендикулярной вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Вычислите период T вращения протона в поле и расстояние от точки влета до точки, где он будет через время $t={}^3/_4T$.

14(7). Прямой проводник (рис. 7) длиной l и массой m подвешен горизонтально на двух легких нитях ($OO'=l$) в однородном магнитном поле, вектор индукции B которого направлен вертикально и перпендикулярен проводнику. Каждая нить разрывается при нагрузке, превышающей T. Определите силу, действующую на проводник со стороны магнитного поля при пропускании по проводнику тока I_1. Определите угол, который составит с вертикалью каждая нить, если по проводнику пропустить ток I_2. Какой величины ток надо пропустить через проводник, чтобы одна из нитей разорвалась в тот момент, когда проводник придет в неподвижное состояние?

15(2). С какой скоростью надо перемещать перемычку AB длиной L (рис. 8) в однородном магнитном поле B перпендикулярном плоскости $ABCD$, чтобы поддерживать разность потенциалов U между точками C и D?

16(13). В однородном магнитном поле с индукцией $B=0,1$ Тл расположен плоский проволочный виток, площадь которого $S=10^3$ см^2, а сопротивление $R=2$ Ом, таким образом, что его плоскость перпендикулярна магнитным линиям. Виток замкнут на гальванометр. Полный заряд, протекший через гальванометр при повороте витка, равен $q=2,5\cdot 10^{-8}$ Кл. На какой угол (в градусах) повернули виток?

17(7). Из провода длиной $l=2$ м, обладающего сопротивлением $R=4$ Ом, спаян квадрат (рис. 9). В две стороны квадрата включены источники с ЭДС $\mathscr{E}_1=10$ В и $\mathscr{E}_2=8$ В. Цепь помещена в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости квадрата и направленное за чертеж. Индукция магнитного поля равномерно увеличивается на $\Delta B=16$ Тл за каждую секунду (т. е. изменяется по закону $B=kt$). Определите величину возникающей ЭДС индукции. В каком направлении протекал бы индукционный ток, если бы источники с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ отсутствовали? Найдите силу тока в цепи, если пренебречь внутренним сопротивлением источников.

18(7). На горизонтальных проводящих стержнях, расположенных на одном уровне, лежит проводящая перемычка массой m (рис. 10). Коэффициент трения между стержнями и перемычкой μ. Стержни замкнуты на резистор сопротивлением R. Сопротивления стержней и перемычки пренебрежимо малы. Система находится в магнитном поле, индукция которого направлена вертикально вверх и равномерно меняется с течением времени по закону $B=At$ (A имеет размерность Тл/с). Определите направление индукционного тока. Найдите величину возникающей ЭДС индукции в моменты времени, когда перемычка покоилась. В какой момент перемычка начнет двигаться по стержню? Геометрические размеры l и h известны.

Колебания и волны

1(9). Два математических маятника с периодами колебаний $T_1=6$ с и $T_2=5$ с соответственно одновременно начинают колебания в одинаковых фазах. Через какое наименьшее время фазы их колебаний снова будут одинаковыми?

2(15). Висящее на пружине тело имело период вертикальных колебаний T_1. Увеличение его массы изменило период колебаний до значения T_2. Вычислите смещение положения равновесия конца пружины под действием тела после увеличения его массы.

3(3). В кабине подъемника на длинной нити висит шарик. Когда кабина неподвижна, период его колебаний $T=1$ с. В движущейся с постоянным ускорением кабине период колебаний равен $T'=1{,}2$ с. Определите величину и направление ускорения кабины.

4(10). Спиральная пружина под действием подвешенного к ней груза растянулась на $x=6{,}5$ см. Если груз оттянуть вниз, а затем отпустить, то он начнет колебаться вдоль вертикальной оси. Определите период таких колебаний.

5(8). Подставка совершает в вертикальном направлении гармонические колебания с амплитудой $A=0{,}5$ м (рис. 11). Каким должен быть наименьший период колебаний, чтобы лежащий на подставке предмет не отделялся от нее?

6(9). Конденсатор емкостью $C_1=200$ мкФ включен в цепь переменного тока с частотой $\nu_1=60$ Гц, а конденсатор емкостью $C_2=300$ мкФ включен в цепь с частотой $\nu_2=50$ Гц. Найдите отношение емкостного сопротивления первого конденсатора к емкостному сопротивлению второго конденсатора.

7(10). Электроемкость контура $C=300$ пФ. Какова должна быть индуктивность контура, чтобы он резонировал на частоту электромагнитных колебаний $\nu=10^6$ Гц?

8(3). Какова длина волны электромагнитного излучения колебательного контура, имеющего конденсатор емкостью $C=2$ пФ, если в нем возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}=0{,}04$ В? Скорость изменения силы тока в катушке индуктивности $\Delta I/\Delta t=4$ А/с.

Оптика

1(9). Определите абсолютный показатель преломления стекла, если скорость света в стекле $v=2\cdot10^8$ м/с.

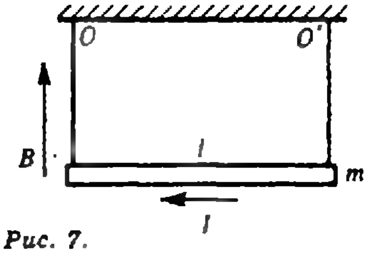


Рис. 7.

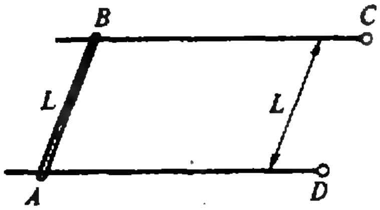


Рис. 8.

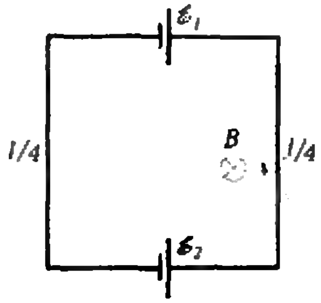


Рис. 9.

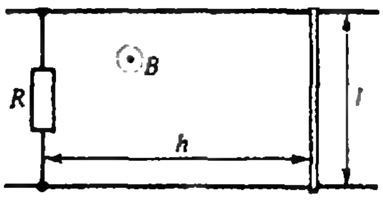


Рис. 10.

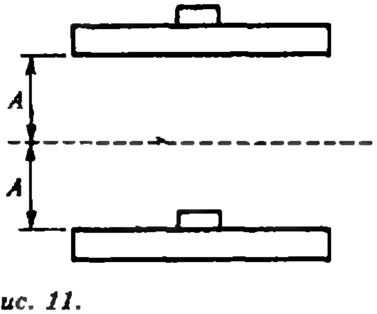


Рис. 11.

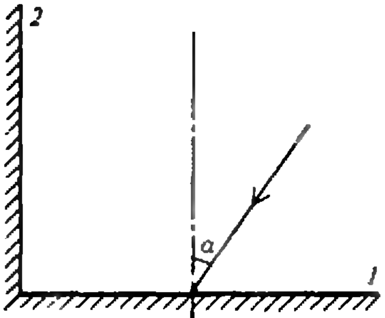


Рис. 12.

2(9). Луч света падает на систему двух взаимно перпендикулярных зеркал (рис. 12). Угол падения луча на первое зеркало $\alpha=17°$. Отражаясь от первого зеркала, луч падает на второе. Определите угол отражения луча от второго зеркала (в градусах).

3(7). Луч света падает на границу раздела двух сред под углом $\alpha=30°$. Показатель преломления первой среды $n_1=2{,}4$. Определите показатель преломления второй среды, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

4(10). Луч света переходит из стекла в воду. Угол падения луча постепенно увеличивается. Каков предельный угол полного отражения? Показатель преломления стекла $n_1=1{,}57$, воды $n_2=1{,}33$.

5(9). Оптическая сила тонкой собирающей линзы $D=4$дптр. Определите фокусное расстояние линзы (в сантиметрах).

6(13). Собирающая линза увеличивает изображение предмета в $\Gamma=4$ раза. Если этот предмет передвинуть на $l=10$ см, то увеличение уменьшится в 2 раза. Изображение в обоих случаях действительное. Найдите фокусное расстояние линзы.

7(15). Расстояние наилучшего видения для пожилого человека равно $d_1=60$ см. Вычислите оптическую силу очков, способных обеспечить ему уменьшение этого расстояния до $d_2=20$ см.

Элементы теории относительности

1(13). Чайник, содержащий $V=3$ л воды, нагрели от $t=10$ °C до кипения. На сколько изменилась масса воды (в пикокилограммах; 1 пкг$=10^{-12}$ кг)?

Квантовая физика

1(17). Определите энергию кванта света с длиной волны $\lambda=6\cdot10^{-7}$ м. Определите частоту колебаний напряженности электрического поля световой волны.

2(13). При освещении пластинки, изготовленной из некоторого металла, светом с частотой $\nu_1=8\cdot10^{14}$ Гц, а затем $\nu_2=6\cdot10^{14}$ Гц обнаружили, что максимальная кинетическая энергия электронов изменилась в три раза. Определите работу выхода электронов из этого металла (в электронвольтах; 1эВ$=1{,}6\times10^{-19}$ Дж).

3(10). Красная граница фотоэффекта для некоторого металла $\lambda_{max}=2{,}75\cdot10^{-7}$ м. Найдите работу выхода электрона из этого металла и максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны $\lambda=1{,}8\cdot10^{-7}$ м.

4(9). Энергия фотонов, вызывающих фотоэффект с поверхности цезия, возросла на 2 электронвольта. На сколько увеличилась при этом максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов?

5(9). Удельная энергия связи ядра гелия $E_{св\,уд}=7$ МэВ/нук. Найдите минимальную энергию гамма-кванта (в мегаэлектронвольтах), способного разделить это ядро на 4 свободных нуклона.

6(7). При переходе электрона в атоме водорода с одной орбиты на другую, более близкую к ядру, излучается фотон с энергией $E=3{,}0\cdot10^{-19}$ Дж. Определите частоту излучения атома и частоту колебаний напряженности электрического поля световой волны.

7(13). Атомный реактор приводит в действие турбогенератор мощностью $N=2\cdot10^8$ Вт. Определите КПД турбогенератора, если в течение суток расход урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ составляет $m=0{,}54$ кг, а при делении одного ядра этого элемента выделяется энергия, равная в среднем $\Delta E=3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж.

Публикацию подготовили А. Егоров,
В. Тихомирова

„Квант" улыбается

Сказки

(Начало см. на с. 42)

Задумалась Земля, склонилась земная ось. Казалось бы — Земле что? У нее и атмосфера, и даже вода — зачем же ей тревожиться? Но тревожится Земля: ведь рядом — планета, которую необходимо защитить.

Тревожится Земля, протягивает Луне свой воздух, свою воду — бери, Луна, мне не жалко. Тянется Земля к Луне. Тянется Луна к Земле.

Так возникли приливы. Так возникло то, что позже люди назовут бескорыстной дружбой.

Тяга к сильным ощущениям

Свет распространяется по прямой — если в пустоте. А если рядом яркая, большая звезда? Он хоть чуть—чуть, да искривит свой путь, чтобы пройти к ней поближе.

— Ну, я только чуточку, самую малость! Уж очень тянет взглянуть! — оправдывается свет.

А потом ему встречается черная дыра — коллапсар. Ни лучика не выпускает он из своих цепких объятий, свой свет от других, как скопидом, прячет, да еще и чужой норовит захватить. А тот и сам из любопытства к коллапсару искривляется.

— Ну, в самый последний разочек!

В самый последний.

Не искривляйте своего пути! Даже если очень тянет.

А. Филонов

Ответы, указания, решения

ние самоиндукции

1. $\Delta t = L\Delta I/(RI_0) = 2\cdot 10^{-4}$ с; $Q_1 = LI_0^2/2 - LI^2/2 \approx 0{,}02$ Дж; $Q_2 = LI_0^2/2 = 1$ Дж.

2. В 1,21 раза. Уменьшится в $100/81 \approx 1{,}23$ раза.

чи вступительных экзаменов в различные в 1989 году

Математика

Алгебра

1. 89. 2. 33. 3. 68 %. 4. 80, 16, 16. 5. 27. 6. 90 км. 7. 1 и —3, 3 и —1. 8. 15 ч. 9. 10/3 ч, 5 ч. 10. 2,8 км. 11. 5/6 км/ч. 12. 3/4 ч, 1/2 ч. 13. 20 ч, 25 ч. 14. 555,5 р. 15. 170 кг. 16. 7 и 18. 17. 180 т. 18. 600 р. 19. 2. 20. 24. 21. 6. 22. 5. 23. 1; —2. 24. $3\pm 2\sqrt{2}$; 1. 25. а) 5050; б) 2; в) 0,5; г) 0,05; д) 4; е) 1; ж) $3\pi/8$; з) 0,7. 26. 5. 27. а) 0; б) 100; в) $-(m^2+2)/m\sqrt{m}$; г) —1. 28. а) $\{0\}$; б) $\{-1;\ 1/3;\ 3\}$; в) $\{4;\ 10\}$; г) $\{4\}$; д) $\{-4;\ 4\}$; е) $\{14\}$; ж) $\{22/27\}$; з) $\{3\}$; и) $\{2\}$; к) $\{36\}$; л) $\{0\}$; м) $\{-3;\ 3\}$; н) $\{10^4;\ 10^{-2}\}$; о) $\{-2\}$; п) $\{\sqrt[3]{2};\ 8\}$; р) $\{-1\}$; с) $\{10;\ 1/10\}$; т) $\{28/3\}$; у) $\{9\}$; ф) $\{1\}$; х) $\{1/4;\ 2^{1+\sqrt{5}};\ 2^{1-\sqrt{5}}\}$; ц) $\{1/9;\ 27\}$.

29. а) $\pi/2+\pi k$, $k\in Z$; б) $\pm\operatorname{arctg} 0{,}1+k\pi$, $k\in Z$; в) $k\pi/3$, $(2k+1)\pi/6$, $k\in Z$; г) $k\pi/8$, $(-1)^n\pi/72+\pi n/12$, $k, n\in Z$, $k\neq 3p+1$; д) πk, $2\pi(3k-1)/3$, $k\in Z$; е) $\pm 2\pi/3+2k\pi$, $k\in Z$; ж) $\pi k/2$; $\pi(2k+1)/8$, $k\in Z$; з) $\pi(8k+5)/16$; $\pi(8k+3)/8$, $k\in Z$; и) $\pi(2k+1)/18$; $\pi(2k+1)/8$; $\pi(2k+1)/2$, $k\in Z$; к) $\pi(2k+1)$; $(-1)^k 2\arcsin 3/4+2k\pi$, $k\in Z$; л) $\pi(2k+1)$, $\pm 2\arccos 1/3+4k\pi$, $k\in Z$; м) $\pi(2k+1)/16$, $\pi(2k+1)/4$, $k\in Z$; н) $\pm 1/2\arccos(-3/5)+\pi k$, $\pm\pi/6+\pi k$, $k\in Z$; о) πk, $-\pi/4+\pi k$, $k\in Z$; п) $\pi(4k+1)/4$, $-\operatorname{arctg} 2+\pi k$, $k\in Z$; р) $\pi/4(1+(-1)^k)+\pi k$, $\pm 5\pi/4-\pi/4+2\pi k$, $k\in Z$; с) $2\pi(1+4k)$. Указание. Уравнение равносильно системе $\sin x/4=1$, $\cos x=1$; б) $\pi k/3$, $\pi(2k+1)/6$, $k\in Z$;

30. а) $(-\infty;\ -2)\cup(4;\ \infty)$; б) $[-\sqrt{2};\ -1/2]\cup[1/2;\ \sqrt{2}]$; в) $[0;\ 6]$; г) $(-8;\ 0)$; д) $(-2;\ (3-\sqrt{17})/2]\cup(0;\ 2)\cup[(3+\sqrt{17})/2;\ \infty)$; е) $(-\infty;\ -8/3]\cup[6/7;\ \infty)$; ж) $[4-\sqrt{11};\ 1]$; з) $\{-1\}$; и) $(2;\ 4)$; к) $(-\infty;\ -6]$; л) $[2;\ 8]$; м) $\{-1\}\cup[2;\ 5]$; н) $(-\infty;\ -3]\cup[2;\ \infty)$; о) $(-4;\ 0)$; п) $\{0\}\cup[1-\log_7 2;\ \infty)$; р) $[1-\log_3 5;\ 0]\cup[1+\log_3 5;\ \infty)$; с) $[0;\ 16]$; т) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 2)$; у) $(2;\ 5/2)\cup(3;\ \infty)$; ф) $(-\infty;\ -7)\cup(1;\ \infty)$; х) $(1/4;\ \infty)$; ц) $(0{,}01;\ 10\,000)$; ч) $[\sqrt{2};\ 2]$; ш) $(-2;\ 4)$; э) $(3\log_3 2;\ 2]$; ю) $(1;\ 4)$; я) $[-3;\ -1)\cup(0;\ 2]$.

31. а) $(\pi/6+2\pi k;\ 5\pi/6+2\pi k)$, $k\in Z$; б) $(-5\pi/6+2\pi k;\ -\pi/6+2\pi k)$, $k\in Z$, в) $[-\pi/4;\ -\pi/6]\cup[\pi/6;\ \pi/4]$; г) $(-\pi/3+2\pi k;\ \pi/3+2\pi k)$, $k\in Z$; д) $(\pi k;\ \pi/4+\pi k)\cup(\pi/2+\pi k;\ 3\pi/4+\pi k)$, $k\in Z$.

32. а) $\{(2;\ 1)\}$; б) $\{(9;\ 1);\ (1;\ 9)\}$; в) $\{(64;\ 1);\ (1;\ 64)\}$; г) $\{(-2;\ 0)\}$; д) $\{(\pm\pi/3+2\pi(k+n);\ \pm\pi/3+2\pi(k-n))\}$, $k, n\in Z$.

33. $\alpha>-1$. 34. 0, $\{(0;\ 0)\}$. 35. 31/2. 36. $x^2-18x+9=0$. 37. —6. 38. 2. 39. 4. 40. 7. 41. 1. 42. 1. 43. 9. 44. 4. 45. —69.

Анализ

1. 1 (см. рис. 1). 2. См. рис. 2. 3. См. рис. 3. 4. $1+2/\cos^2 2x$. 5. $\max f(x)=f(0)=3$, $\min f(x)=f(-1)=-1$. 6. $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-6$. 7. 1. 8. Промежутки возрастания: $(-4;\ 0)$ и $(4;\ \infty)$, промежутки убывания $(-\infty;\ -4)$ и $(0;\ 4)$. 9. —1/2. 10. $-14/e$. 11. 4/25. 12. 26. 13. 2. 14. 14. 15. $R=2$, $H=4$. 16. $\sqrt[3]{(4V\cos^2\pi/7)/\pi}$. 17. Сторона основания бассейна 4 м, глубина — 2 м.

Геометрия

1. $(7/3;\ -2/3;\ -11/3)$. 2. $\vec{BM}=-\vec{m}+\frac{1}{4}\vec{n}$. 3. Треугольники ABC и MKP подобны с коэффициентом подобия $k=1/\sqrt{2}$.

4. $(-13/2;\ -9/2)$. Указание. Пусть $O(x,\ y)$ — центр описанной около треугольника ABC окружности. Записав равенства $OA^2=OB^2=OC^2$, получите систему уравнений относительно x и y.

5. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$. 6. 8. 7. 48. 8. $\dfrac{a^2}{mk+nk+mn}$.

9. 3:2. 10. —3/5. 11. $a^2(\sqrt{2}-1)/2$.

12. $2\arccos\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}$. 13. $3ab/4$. 14. 12. 15. $2\pi/3$.

16. $\dfrac{\sqrt{(b^2-n^2)(a^2+b^2-2kn)+2\sqrt{(a^2-k^2)(b^2-n^2)}}}{n\sqrt{a^2-k^2}+k\sqrt{b^2-n^2}}$.

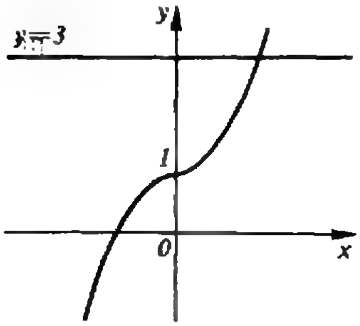


Рис. 1.

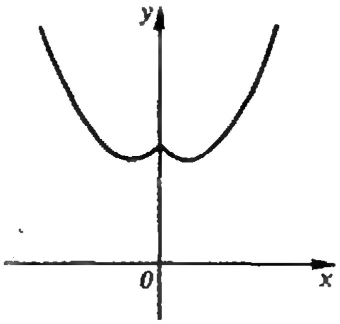


Рис. 2.

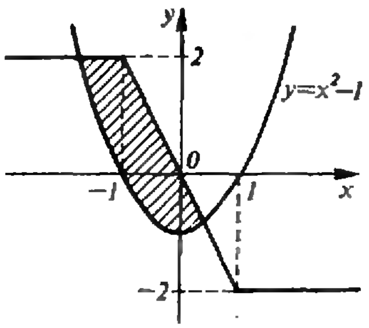


Рис. 3.

17. $H\sqrt{3(3\operatorname{tg}^2\alpha-1)}$. 18. $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/2\operatorname{tg}\alpha)$, $\operatorname{arctg}(1/2\operatorname{tg}\alpha)$.

19. 8. 20. $\sqrt{3/7}$. 21. $2\arcsin(\sqrt{7}-1)/2\sqrt{3}$.
22. 43/18, 11/18. 23. $\sqrt[4]{720}$, $\sqrt[4]{80}$, $\sqrt[4]{80}$.
24. 3/2. 25. $2\sqrt{3}$. 26. $16/\sqrt{3}$.

27. $$\frac{9\sqrt{3}d^3\operatorname{tg}^2\beta/2\sin\beta/2}{8\sqrt{\sin(\beta/2+\pi/6)\sin(\beta/2-\pi/6)}}.$$

28. $2/3R^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha$; $a^2\sin\alpha/\cos\beta$.
29. $-4R^3\sin 4\alpha$.
30. $100\pi/\sin^2 2\beta$, $500\pi/3\sin^2 2\beta$.
31. $2\arcsin(\sqrt{1+3\cos^2\alpha}/2)$.
32. $a^3\operatorname{tg}\beta/6\cos^2\alpha$, $a\operatorname{tg}\beta/\cos\alpha$.

33. $4\sqrt{3}$. 34. 54. 35. $\operatorname{arctg}\dfrac{3h}{a\sqrt{5}\sin(\alpha+\arcsin 2/3)}$. 36. $abS/4(a+b)$.

37. $\arcsin 1/\sqrt{3}$.

38. 390. 39. $2a^3\sin\alpha\sin\alpha/2\operatorname{tg}\beta$.
40. $2\arcsin(\sqrt{5}-1)/2$. 41. $2\operatorname{arctg}\sqrt{3}/2$, $\pi-2\operatorname{arctg}\sqrt{3}/2$.
42. 3. 43. $ac\sqrt{12a^2-3c^2}/8$.

Физика

Механика

1. $v_т=v=0{,}5$ м/с.
2. $h=272{,}7$ м; $t=7{,}46$ с.
3. $v_{min}=\sqrt{2gh}/\sin\alpha=10$ м/с.
4. $l=\sqrt{(v_1-v_2\sin\alpha)^2+(v\cos\alpha)^2}\;t=v_2\cos\alpha\cdot t=17{,}3$ м.
5. $v=\sqrt{2gs\sin\alpha}$; $t=\sqrt{2h/(g\sin^2\alpha)}$.
6. $\omega=\sqrt{2as}/R=10\ с^{-1}$.
7. $g_п=2g_з=20$ м/с^2.
8. $a=F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)/m-\mu g=4{,}5$ м/с^2.
9. $F_д=mg+k\Delta l=11$ Н.
10. $\mu_{min}=(a+g\sin\alpha)/(g\cos\alpha)=0{,}7$.
11. $F_{н\,min}=mg=0{,}2$ Н (меньше других растянута самая нижняя нить).
12. $T=2\pi\sqrt{l/(g\cos\alpha)}\approx1{,}8$ с.
13. $M=(mgl\sin\alpha)/2=45$ Н·м.
14. $A=-mg\,v_0^2/(2(g+F/m))=-55$ Дж.
15. $E_k=m(v_0^2/2-gh)=40$ Дж.
16. $N_{ср\,min}=0{,}5$ Вт.
17. $v_д=\sqrt{\dfrac{k(l_0-l)^2m}{M(M+m)}}=0{,}5$ м/с; $v_ш=\dfrac{M}{m}v_д=5$ м/с; $\tau\approx\dfrac{2mv_ш}{k(l_0-l)}\approx2\cdot10^{-2}$ с.
18. а) $\Delta v=-mv/(m+M)$; б) $\Delta v=0$.
19. $\alpha_{min}=\arccos(1-5R/(2l))$.
20. $\Delta h_{max}=la/g=9$ см.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $M=mRT/(pV)=2\cdot10^{-3}$ кг/моль (здесь $T=278$ К и $p=10^5$ Па — температура и давление при нормальных условиях).
2. $\rho=pM/(RT)=1{,}03$ кг/м^3; $m_0=M/N_A=5{,}4\cdot10^{-26}$ кг.
3. $p=15/8\,\rho gl=5{,}1\cdot10^4$ Па.
4. $p=3\Delta p=300$ кПа.
5. $p\geqslant\rho RT/M=6{,}55\cdot10^6$ Па.
6. $\alpha=p_1/(2p_0-p_1)$.
7. $A=3/2\nu R\Delta T=249$ Дж.
8. $A=9/4p_0V_0$.
9. $A=100$ Дж.
10. $v=\sqrt{2((p-p_0)S-mg)l/m}=12$ м/с.
11. $k=1/(1-\eta/100\,\%)=2{,}5$.
12. $m=\dfrac{\rho Vc(t_1-t_2)}{\lambda+c(t_2-t_3)}=1$ кг.
13. $\dfrac{\Delta m}{m}=\dfrac{v^2/2-c(t_{пл}-t)}{\lambda}100\,\%=68\,\%$.
14. $\varphi=(\varphi_1S_1+\varphi_2S_2)/(S_1+S_2)=50\,\%$.

Основы электродинамики

1. $q_1=-1/3$ Кл или $q_1=-3$ Кл.
2. $v=\sqrt{\dfrac{eqh}{2\pi\varepsilon_0 mR(R+h)}}$.
3. $U=W(\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)/e=60$ В.
4. Провода следует присоединить в точках, делящих длину проволоки в отношении 1:9.
5. $R_{общ}=R$.
6. $U_{ист}=U(1+R_2/R_1)=340$ В.
7. а) $U_C=1/4\mathscr{E}=15$ В, $U_{2C}=3/4\mathscr{E}=45$ В; б) $U_C=2/3\mathscr{E}=40$ В, $U_{2C}=1/3\mathscr{E}=20$ В; в) $U_C=0$, $U_{2C}=\mathscr{E}=60$ В.
8. $l=\eta U^2S\tau/(\rho cm(t_к-t))=13{,}7$ м.
9. $\eta=(1-IR/U)100\,\%=80\,\%$.
10. $m=kW/U=1{,}2$ кг.
11. $F=MjS\tau/(nm)=100$ кКл/моль (здесь $n=2$ — валентность цинка).
12. $\alpha=180°$.
13. $l=mv\sqrt{16+\pi^2}/(2qB)$; $T=2\pi m/(qB)$.
14. $F=BI_1l$; $\alpha=\operatorname{arctg}(BI_2l/(mg))$; $I_3=\sqrt{(2T)^2-(mg)^2}/(Bl)$.
15. $v=U/(BL)$.
16. $\alpha=\arccos(1-qR/(BS))=60°$.
17. $\mathscr{E}_{инд}=kl^2/16=4$ В; индукционный ток тек бы против часовой стрелки; $I=(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_{инд})/R=0{,}5$ А.
18. Индукционный ток направлен по часовой стрелке; $\mathscr{E}_{инд}=Ahl$; $\tau=mg\mu R/(A^2l^2h)$.

Колебания и волны

1. $\Delta t=T_1T_2/(T_1-T_2)=30$ с.
2. $\Delta l=g(T_2^2-T_1^2)/(4\pi^2)$.
3. Ускорение кабины направлено вниз и равно $a=3$ м/с^2.
4. $T=2\pi\sqrt{x/g}=0{,}5$ с.
5. $T_{min}=2\pi\sqrt{A/g}=1{,}4$ с.
6. $X_{C1}/X_{C2}=(C_2\nu_2)/(C_1\nu_1)=1{,}25$.
7. $L=1/(4\pi^2\nu^2C)=8{,}5\cdot10^{-6}$ Гн.
8. $\lambda=266$ м.

Оптика

1. $n=c/v=1{,}5$.
2. $\gamma=\pi/2-\alpha=73°$.
3. $n_2=n_1\operatorname{tg}\alpha=1{,}39$.
4. $\alpha_0=\arcsin(n_2/n_1)=58°$.
5. $F=1/D=25$ см.
6. $F=\Gamma l=0{,}4$ м.
7. $D=1/d_2-1/d_1\approx3{,}3$ дптр.

Элементы теории относительности

1. $\Delta m=c\rho V(t_к-t)/c_0^2=12{,}6$ пкг (здесь $c_0=3\cdot10^8$ м/с — скорость света).

Квантовая физика

1. $E=hc/\lambda=3{,}3\cdot10^{-19}$ Дж; $\nu=c/\lambda=0{,}5\cdot10^{15}$ Гц.
2. $A=h(3\nu_2-\nu_1)/2=2$ эВ.
3. $A=hc/\lambda_{max}=7{,}2\cdot10^{-19}$ Дж;

$v_{max}=\sqrt{2(hc/\lambda_{max}-A)/m}=9{,}1\cdot 10^5$ м/с.

4. $\Delta E_k=2$ эВ.

5. $E_{\gamma\,min}=4E_{св\,уд}=28$ МэВ.

6. $\nu=E/h=4{,}5\cdot 10^{14}$ Гц.

7. $\eta=(NtM/(\Delta EN_A m))100\,\%=39\,\%$.

[illegible]нт» для младших школьников
«Квант» № 5)

1. 5 литров. Очевидно, что сдавать следует в первую очередь пол-литровые бутылки, а купленное молоко нести в литровых бутылках.
2. 4 часа.
3. 1049+1049+1049+1049+1049=5245.
4. Сумма n последовательных натуральных чисел, первое из которых равно a, составляет $\frac{(2a+(n-1))n}{2}$. Поэтому из условия задачи получаем, что $(2a+(n-1))n=3980=4\cdot 5\cdot 199$. Заметим, что числа n и $(2a+(n-1))$ имеют разную четность, и число n больше единицы. Поэтому для решения задачи следует представить число 3980 в виде произведения двух положительных чисел разной четности. Это можно сделать шестью способами: $3980=4\cdot 995=5\cdot 796=20\cdot 199=199\cdot 20=796\cdot 5=995\cdot 4$. В первом случае имеем сумму четырех последовательных чисел, начинающихся с числа 496; во втором случае — сумму пяти последовательных чисел, начинающихся с числа 396, в третьем — сумму двадцати чисел, начинающихся с числа 90. Четвертый, пятый и шестой случаи приводят к рассмотрению отрицательных чисел. Поскольку в задаче идет речь о натуральных числах, мы должны ограничиться первыми тремя случаями.
5. Передвинем отрезки MN и PQ параллельно так, чтобы они проходили через центр квадрата. Сумма периметров рассматриваемых четырехугольников при этом не изменяется.

Редакция получает много писем с просьбами ответить на те или иные вопросы, касающиеся проблем развития науки и образования. Мы решили собрать «пакет» таких вопросов и передать его главному редактору академику Ю. А. Осипьяну с тем, чтобы он ответил на них на страницах журнала. Возможно, такие «интервью» станут регулярными. Поэтому в нашу анкету мы включили специальный пункт «Ваш вопрос главному редактору» (см. на обороте). Спрашивайте! И ждите ответа.

АНКЕТА 6—90

Дорогой читатель!

Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 6—90».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________
Ваша профессия (если Вы работаете): ____________
круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________

Ваш вопрос главному редактору:

АНКЕТА 6—90

3. Какие статьи и задачи из номеров 4—6 (номер укажите) Вам понравились?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 4—6 Вам больше всего понравилась?

6. Ваши общие замечания и пожелания:

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Буздин, А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов, С. Лухин,
Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Тишков,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор Л. Сомова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.03.90. Подписано к печати 4.05.90.
Т-06583. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,94.
Тираж 171903 экз. Заказ 490. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

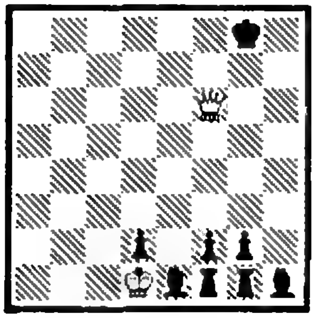
Шахматная страничка

НЕПОДВИЖНЫЙ КОРОЛЬ

Хорошо известна задача о неподвижном короле, которую придумал еще в прошлом веке И. Клинг (см. например, «Квант», 1981, № 11; 1987, № 8).

Белый король расположен на с3, и ему запрещено двигаться. На доске находятся также белый ферзь и черный король. Могут ли белые заматовать короля противника?

Профессор математики из Австрии И. Халумбирек придумал следующую конструкцию, где идея «неподвижного короля» реализуется при соблюдении всех правил шахматного кодекса.



И. Халумбирек, 1948 г.
Мат в 17 ходов.

Здесь белому королю никто не запрещает двигаться, но он сам не может себе это позволить (за редкими исключениями — об этом ниже): после Крс2 (е2) d1Ф+ черные фигуры вырываются на свободу, и хорошо еще, если ферзю удастся объявить вечный шах. Так что двигаться могут лишь белый ферзь и черный король.

При данном их положении мат дается на 17-м ходу. **1. Фе7! Крh8 2. Фg5 Крh7 3. Фе5! Крg8 4. Фf6 Крh7 5. Фf8 Крg6 6. Фе7 Крf5 7. Фd6 Кре4 8. Фс5 Крd3 9. Фb4 Кре3 10. Фс4 Крf3 11. Фd4 Крg3 12. Фе4 Крh3 13. Фе6+! Крg3 14. Фf5 Крh4 15. Фg6 Крh3 16. Фg5 Крh2 17. Фh4×.**

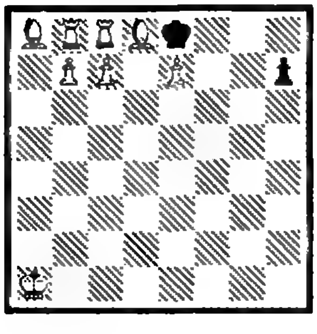
Сорок с лишним лет назад решение задачи (кратчайший путь к мату) искали «вручную». В наше время к исследованию позиций с небольшим числом фигур все чаще привлекается компьютер. Г. Риндер из ФРГ написал программу исследования конструкции Халумбирека. В результате удалось найти позицию, рекордную по длительности игры.

Переставим на предыдущей диаграмме черного короля на а4, а белого ферзя на d8 (Г. Мюллер, Г. Риндер, 1970 г.; мат в 32 хода). Вот как тогда протекает наилучшая игра обеих сторон.

1. Фа8+ Крb3 2. Фа1 Крb4 3. Фа2 Крb5 4. Фа3 Крb6 5. Фа4 Крb7 6. Фа5 Крb8 7. Фа6 Крс7 8. Фb5 Крс8 9. Фb6 Крd7 10. Фс5 Крd8 11. Фс6 Кре7 12. Фd5 Кре8 13. Фd6 Крf7 14. Фе5 Крf8 15. Фе6 Крg7 16. Фf5 Крh8 17. Фg5. Возникла знакомая позиция (после 2-го хода белых в предыдущем решении)... **31. Фg5 Крh2 32. Фh4×.**

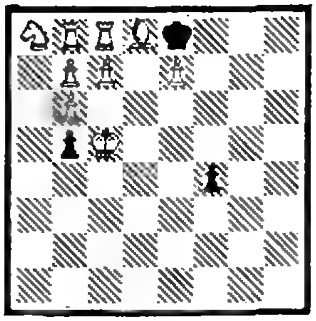
Компьютер доказал, что если черный король находится вне квадрата а1—а2—b2—b1, то ферзь заманивает его на поле h2 и ставит мат не позднее 32-го хода. Если же король прорвется в левый нижний угол, то из этой крепости его не прогнать. Впрочем, неожиданно выяснилось (и ЭВМ тут ни при чем), что при черном короле на а1 и белом ферзе на одном из девяти полей, с которых он контролирует поле d1 (d3, d5—d8, e2, f3, g4, h5), король получает мат в самом «надежном» месте: **1. Крс2! d1Ф+** (при 1...Кра2 следует мат по линии «а») **2. Ф:d1+ Кра2 3. Фb1+ Кра3 4. Фb3×.**

Благодаря сотрудничеству с ЭВМ М. Шлоссер предложил забавную ничейную схему (конструкция Халумбирека с переменой цветов).



Ничья.

Белый король вне квадрата черной пешки, но пока пешка движется в ферзи, король идет по диагонали а1—h8, успевая попасть в спасительную зону. А вот более эффективный пример.



М. Шлоссер, 1987 г.
Ничья.

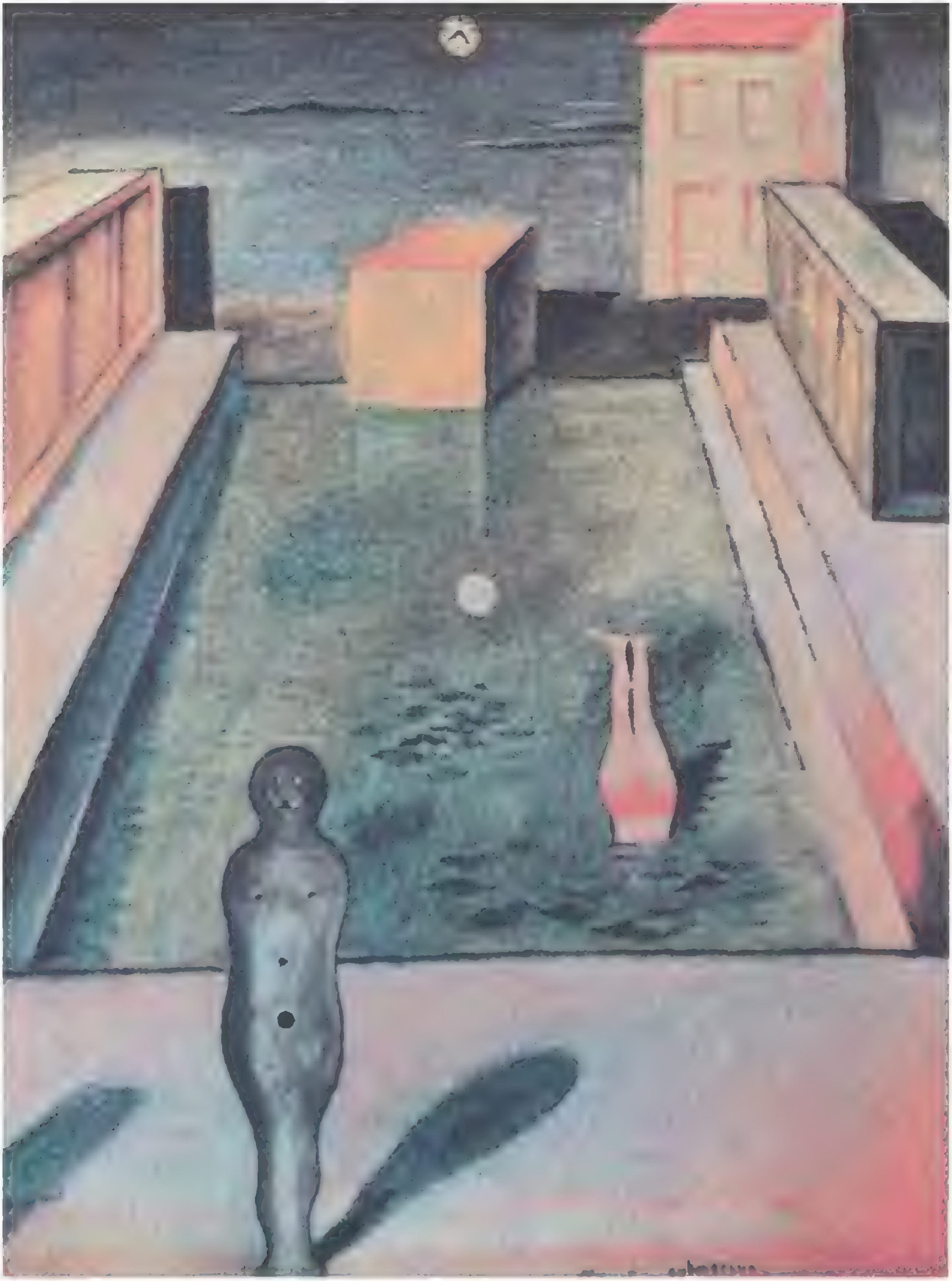
Соблазнительно взять пешку «b», но это ведет к гибели: 1. Кр:b5 f3 2. Кра6 f2 3. Кра7 (в надежде на пат, в противном случае появляющийся на доске ферзь загонит короля на а6 и в финале последует Фа4×) 3...f1Л! Неприятный сюрприз для белых. 4. Кра6 Лf5! (для реализации этой идеи и была изменена стандартная конструкция фигур) 5. Кра7 Ла5×.

1. Крd4! b4. Ничего не дает и движение другой пешки: 1...f3 2. Кре3 f2 3. Кр:f2 b4 4. Крf3 b3 5. Крg4 b2 6. Крg5 b1Ф 7. Крh6!, и король прорывается в желанный угол.

2. Кре4 b3 3. Кр:f4 b2 4. Крg5 b1Ф 5. Крh6 со знакомой ничьей.

Любопытно, что неточность белых на предыдущем ходу — 4. Крf5 привела бы их к печальным последствиям: 4...b1Ф+ 5. Крg5 Фh7! 6. Крg4 Фh6 7. Крg3 Фh5 8. Крg2 Фh4 9. Крg1 Фh3. Метод оттеснения нам уже известен, король медленно, но верно вынужден направиться в смертельную зону. 10. Крf2 Фg4 11. Крf1 Фg3 12. Кре2 Фf4 13. Кре1 Фf3 14. Крd2 Фе4 15. Крd1 Фе3 16. Крс2 Фd4 17. Крс1 Фd3 18. Крb2 Фс4 19. Кра1 Фb4 20. Кра2 Фd4! 21. Крb1 Фс3 22. Кра2 Фс1 23. Крb3 Фd2 24. Крс4 Фе3 25. Крd5 Фf4 26. Кре6 Фg5 27. Крd6 Фf5 28. Крс6 Фd7+ 29. Крс5 Фd8 30. Крb4 Фс2 31. Кра3 Фb1 32. Кра4 Фb2 33. Кра5 Фb3 34. Кра6 Фа4×.

Е. Гик



45 коп.

Индекс 70465

Сегодня мы предлагаем вам задачи на разрезание звездчатых многоугольников. Обычно в головоломках такого рода требуется разрезать данную фигуру на кусочки, из которых можно сложить другую указанную фигуру. (Это всегда возможно для двух равновеликих многоугольников.) Впрочем, первую часть работы — разрезание — мы уже проделали. Но любители особо трудных задач могут поискать нужное разрезание самостоятельно, скопировав только контуры данных фигур.

1. Превратить 12-конечную звезду, состоящую из 24 элементов (рис. 1), в 3 меньшие звезды одинакового размера и той же формы.

2. Из 5 кусочков 6-конечной звезды (рис. 2) нужно сложить треугольник. По-видимому, невозможно разрезать звезду на меньшее число частей так, чтобы из них складывался треугольник.

3. Правильную 10-конечную звезду (рис. 3) требуется превратить в правильную 10-конечную звезду другой формы.

4. Звезду, состоящую из 7 частей (рис. 4), необходимо перестроить в латинский крест. (Он образуется, если к трем сторонам квадрата 1×1 приставить такие же квадраты, а к четвертой стороне — прямоугольник 1×2.)

Д. К.

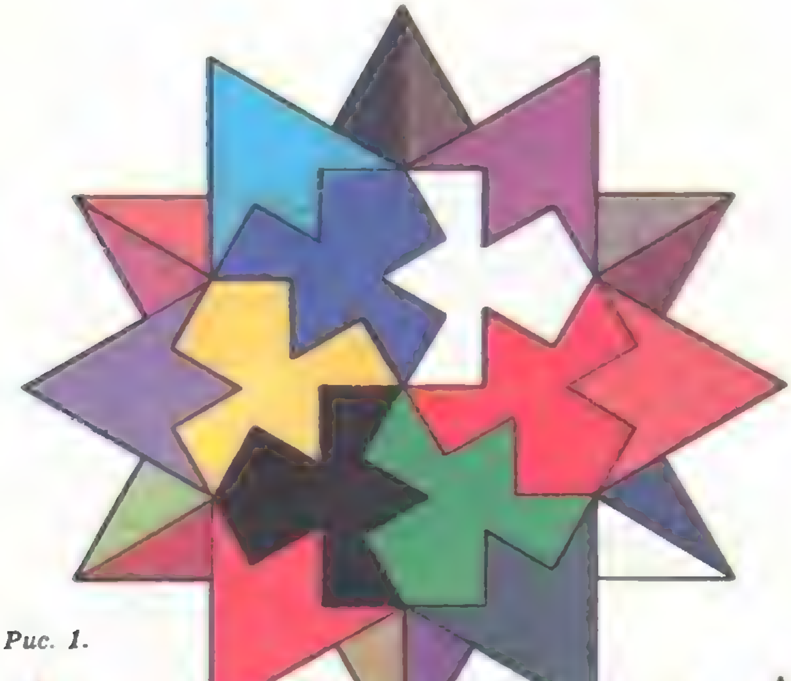


Рис. 1.

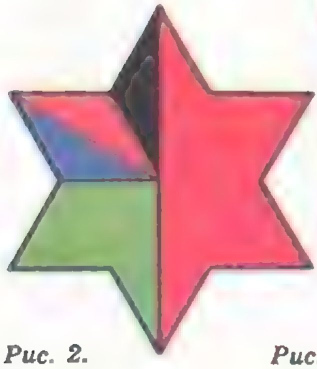


Рис. 2.

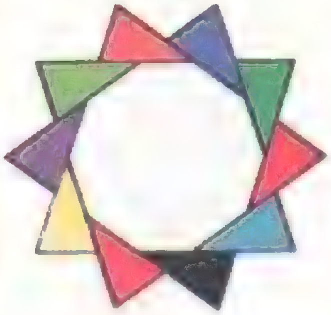


Рис. 3.

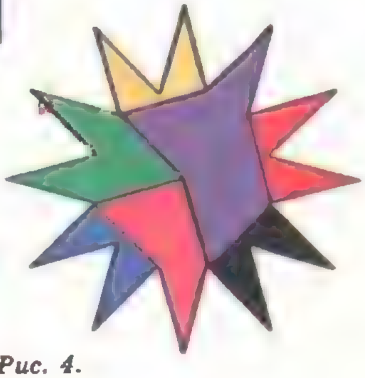


Рис. 4.

НОМЕР
7

Квант

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы*

7 1990

В номере:

2 Интервью с В. И. Арнольдом
8 *А. Кузин.* Антропный принцип — что это такое?
16 *С. Табачников.* Текстильная геометрия
24 *Ю. Котов, С. Табачников.* Сети Чебышева
26 *Д. Сигаловский.* Почему человек не стал великаном

Задачник «Кванта»

30 Задачи М1231 — М1235, Ф1238 — Ф1242
31 Решения задач М1206 — М1210, Ф1218 — Ф1222
42 Список читателей, приславших правильные решения
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

45 Задачи
46 *Я. Перельман.* Искуснее Колумба

Школа в «Кванте»

48 Указатель опубликованных статей

Практикум абитуриента

50 Указатель опубликованных статей

Лаборатория «Кванта»

51 *П. Михеев.* Вращающаяся жидкость

Математический кружок

54 *Р. Хонсбергер.* Старая японская теорема

Есть идея?!

58 Идея есть, и не одна

Фантастика

60 *Д. Киз.* Цветы для Элджернона

Р — значит ракета

65 *Л. Ксанфомалити.* Перспективы поиска обитаемых планет
69 Вместе к Марсу!

Игры и головоломки

70 *Д. Вакарелов, А. Калинин.* Превращения головоломки адмирала Макарова

Информация

76 Заочная школа при НГУ
79 **Ответы, указания, решения**
Реклама (*23*)
Смесь (*44*)
Нам пишут (*78*)

Наша обложка

1 *Вышивка московского инженера Е. Ольшинова (по мотивам М. Эшера). На фотографии видно, что через каждую точку ткани проходят 3 нити. О геометрии 3-тканей см. статью «Текстильная геометрия».*
2 *Иллюстрация французского художника Гранвиля (1803—1847) к роману Дж. Свифта «Путешествие Гулливера» и к статье Д. Сигаловского «Почему человек не стал великаном».*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Задачи о «суперузлах».*

© *Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1990*

Интервью с В. И. Арнольдом

Представляем нашим читателям Владимира Игоревича Арнольда — члена-корреспондента Академии наук СССР, лауреата Ленинской премии, главного научного сотрудника Математического института АН СССР, профессора МГУ, вице-президента Московского математического общества. Владимир Игоревич — один из самых активных математиков нашего времени с очень широким кругом научных интересов. Предлагаем вашему вниманию его ответы на вопросы нашего корреспондента.

— Как вы стали математиком? Какова роль семьи, школы, математических кружков, олимпиад? Расскажите, пожалуйста, о ваших учителях.

— Я всегда ненавидел зубрежку. Учительница в младших классах говорила поэтому родителям, что такому тупице как я никогда не одолеть таблицу умножения.

Первое математическое потрясение — когда появился настоящий учитель математики, Иван Васильевич Морозкин. Я помню задачу о двух старушках, вышедших одновременно навстречу друг другу, встретившихся в полдень и достигших чужого города — одна в 4 часа пополудни, а другая — в 9. Требовалось узнать, когда они вышли.

Алгебру тогда еще не учили. Придумав «арифметическое» решение (основанное на соображениях размерности или подобия), я впервые испытал ту радость открытия, стремление к которой и сделало меня математиком.

Первая математическая книжка была «Числа и фигуры» Радемахера и Теплица, в 12 лет. В день разбирал несколько страниц. Годом позже мой дядя, техник-буровик Н. Б. Житков, за один вечер рассказал мне, что такое математический анализ. Рассказ кончался определением формы поверхности воды во вращающемся стакане. После этого я сам разыскал и прочел учебник анализа Грэнвиля и Лузина, а затем читал уже без разбора все математические книги в библиотеке рано умершего отца (я — математик в четвертом поколении). Особенно нравились мне «Введение в анализ бесконечно малых» Эйлера (разбиения, производящие функции) и «Курс анализа» Эрмита (комплексный анализ, эллиптические интегралы).

А. А. Ляпунов организовал у себя дома ДНО («добровольное — или детское? — научное общество»). Математика и физика соседствовали здесь с химией и биологией, включая разгромленную только что генетику (сын одного из наших лучших генетиков учился со мной в одном классе и писал тогда в анкете: «мать — домохозяйка, отец — домохозяин»).

В то время *) в Университете процветали математические кружки для школьников 7—10 классов. По воскресеньям профессора читали для школьников лекции (многие из них изданы в серии «Популярные лекции по математике»). К концу школы мы уже имели довольно ясное представление о достоинствах (и недостатках) большинства лекторов. Школьники чувствовали фальшь и обман острее, чем студенты, так как еще не были приучены делать вид, будто понимают то, чего понять нельзя (нынешние забитые школьники, возможно, утратили это преимущество, да и лекций больше нет).

---

*) В середине 50-х годов.

Руководителями моего кружка были А. П. Савин, Н. Д. Введенская, Т. Д. Вентцель, И. А. Виноградова, известные сейчас математики, все бывшие в то время студентами. Тогдашние кружки давали куда меньше знаний, чем их современные эквиваленты, но зато каждое занятие было праздником. Господствовавший в кружках культ истины, красоты и самостоятельности («ученик — это не мешок, который надо наполнить, а факел, который надо зажечь») ограничивал количество знаний за счет качества. Именно здесь, в спорах при разборе задач, мы учились полному пониманию и математической строгости. Физика из-за этого отошла в сторону, красота математики ее надолго затмила.

Олимпиады, как и кружки и лекции, организовывались тогда Московским математическим обществом и собирали тысячи участников. Мои успехи росли от «похвального отзыва» в 7 классе до второй премии в 9 и в 10. Эмоциональное значение олимпиад было очень велико, но сейчас я больше помню кружки и лекции. До сих пор ценю прекрасно подобранные книги, полученные в виде наград на олимпиадах: «Наглядную геометрию» Гильберта и Кон-Фоссена, «Что такое математика» Куранта и Роббинса, «Введение в теорию линейных пространств» Шилова, «Теоретическую механику» и «Анализ» Валле-Пуссена с длинным прямоугольным штампом «Победителю Московской математической олимпиады».

— Вы активно занимаетесь математикой более 30 лет. Изменилось ли за это время общественное отношение к математике и математикам?

— Отношение общества (не только в СССР) к фундаментальной науке вообще и к математике в частности описано И. А. Крыловым в басне «Свинья под дубом». В тридцатые и сороковые годы математика пострадала у нас меньше других наук. Как известно, Виет был шифровальщиком и дешифровальщиком у французского короля Генриха IV. С тех пор некоторые области математики поощряются всеми правительствами, и даже Берия заботился о сохранении в стране математической культуры.

За последние 30 лет престиж математики в обществе упал во всех странах. Думаю, что в этом виноваты и сами математики (прежде всего Гильберт и Бурбаки*)), провозгласившие целью своей науки исследование всех следствий произвольных систем аксиом.

— Применимо ли к математике понятие моды?

— Развитие математики напоминает быстрое вращение колеса, брызги с которого летят во все стороны. Мода — это струя, уходящая от основной траектории по касательной. Эти струи эпигонских работ всего заметнее, и в них основная часть массы, но они неизбежно погибают через некоторое время, оторвавшись от колеса. Чтобы остаться на колесе, нужно все время прилагать усилия в направлении, перпендикулярном общему потоку.

— Меняются ли со временем критерии строгости математических рассуждений? Имеют ли отношение к «настоящей» теоретической математике компьютерные эксперименты (например, в теории фрактальных множеств — см. «Квант» № 5 за 1989 г.)? Нужен ли математику-исследователю компьютер? Используете ли вы компьютер в своих исследованиях? В последнее время в популярной литературе много говорится о новой

---

*) Никола Бурбаки — коллективный псевдоним группы французских математиков, написавших многотомный курс современной математики, в котором последовательно проводится аксиоматический метод.

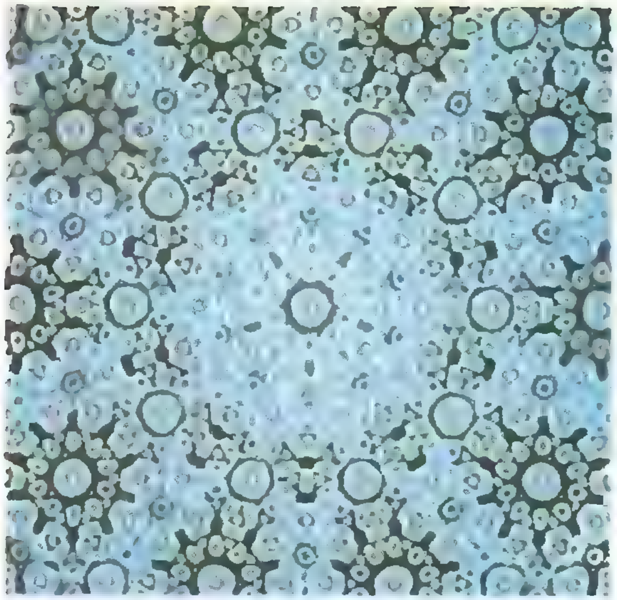


Рис. 1. Траектории различных точек P: замкнутые кривые и стохастическая паутина.

математической дисциплине — «теории катастроф». Что это — новая наука или очередной миф?

— Со времен Евклида критерии математической строгости, сколько мне известно, не менялись.

Компьютер дает огромные возможности для экспериментирования, и я его использую, наряду с логарифмической линейкой и таблицей умножения. Думаю, что без экспериментирования того или иного рода большинство математических результатов не было бы получено. Компьютерные эксперименты добавили кое-что к замечательным работам Жюлиа, Фату и др. об итерациях многочленов. Фрактальные множества — просто термин.

Математику трудно согласиться, что введение нового термина, не подкрепленное новыми теоремами, является существенным прогрессом. Однако успех «кибернетики», «фракталов», «синергетики», «теории катастроф» и «странных аттракторов» показывает плодотворность словотворчества как метода научной работы.

«Трудно поверить,— говорил Пуанкаре,— какую огромную экономию мысли может осуществить одно хорошо подобранное слово. Часто достаточно изобрести одно новое слово, и это слово становится творцом». Оставляя без перевода научные термины («файлы», «интерфейсы»...), мы теряем всю силу этого метода.

Что касается «теории катастроф», то этот термин изобретен для привлечения внимания широкой публики к действительно важным математическим достижениям — к теории особенностей гладких отображений и к теории бифуркаций*) динамических систем. Простейшие выводы теории катастроф (например, что непрерывное движение от плохого установившегося режима к хорошему приводит к ухудшению состояния, что скорость этого ухудшения растет по мере продвижения к лучшему режиму, что сопротивление системы изменению режима, вначале незначительное, при этом продвижении также возрастает и что в случае преодоления этого сопротивления система скачком переходит в лучшее состояние, а в противном случае — столь же катастрофически быстро возвращается в плохое состояние) — несомненно верны, но, к сожалению, не спасают от катастроф.

Рис. 2. Увеличенный фрагмент рисунка 1.

— Математика — важная и очень древняя часть человеческой культуры. Каково ваше мнение о ее месте среди других культурных ценностей?

---

*) Бифуркация — изменение качественных свойств исследуемого объекта, зависящего от параметра, при изменении этого параметра.

— Слово «Математика» означает наука об истине. Мне кажется, современная наука (т. е. теоретическая физика вместе с математикой) является новой религией — культом истины — основанной Ньютоном триста лет назад.

— *Когда вы доказываете* теорему, вы ее «создаете» или «открываете»?

— Я, безусловно, испытываю ощущение, что открываю нечто, существовавшее и без меня. Словами А. К. Толстого:

Тщетно, художник, ты мнишь, что
творений своих ты создатель,
Вечно носились они над Землею,
незримые оку...
Много в пространстве невидимых
форм и неслышимых звуков,
Много чудесных в нем есть сочетаний
и слова и света.

— Расскажите, пожалуйста, о ваших математических интересах. Есть ли среди ваших математических результатов такие, которые можно было бы объяснить читателям «Кванта»?

—*а*) Д. Гильберт говорил, что по-настоящему хороший математический результат всегда можно растолковать «человеку с улицы». Из одного из моих результатов следует принципиальная невозможность долгосрочного динамического прогноза погоды (при сколь угодно мощных компьютерах). Прохожий это, пожалуй, поймет, но стоящую за этим математику объяснять долго.

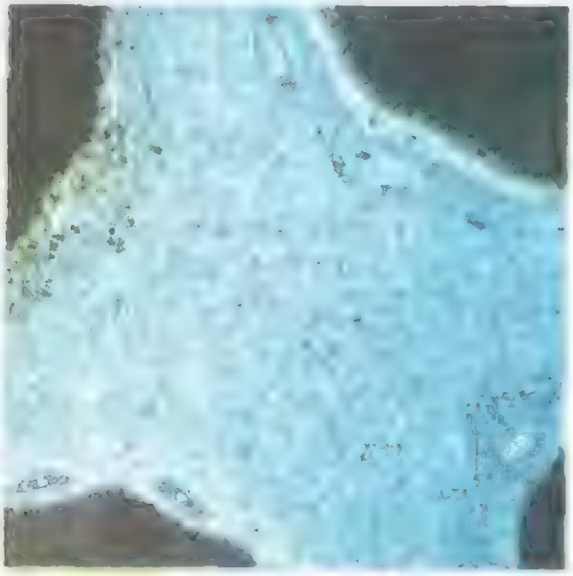


Рис. 3. Тонкая структура детали рисунка 2 (видны отдельные точки траектории и замкнутые кривые).

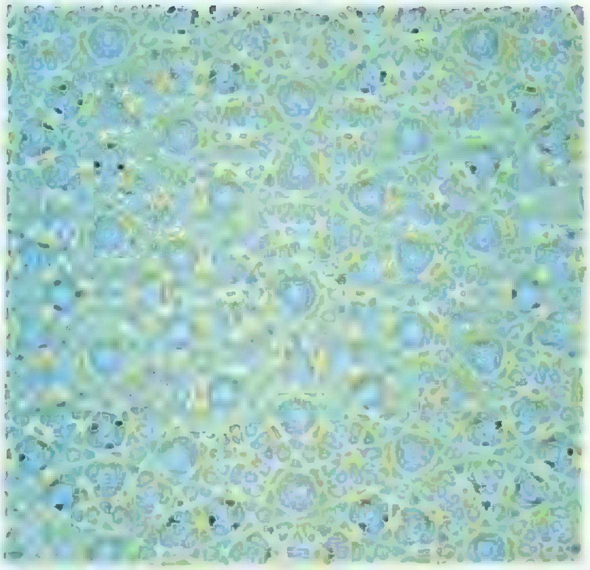


Рис. 4. Квазикристаллическая структура, аппроксимирующая стохастическую паутину рисунка 1.

б) Представим себе заряженную частицу, движущуюся со скоростью v в горизонтальной плоскости под действием вертикального магнитного поля $H(x, y)$. Если величина поля H постоянна, то орбита частицы — окружность, радиус которой равен Cv/H. Предположим теперь, что поле меняется от точки к точке. Тогда каждый виток орбиты будет похож на маленькую окружность, если начальная скорость мала. С точки зрения математики, эта орбита — просто плоская кривая, радиус кривизны которой в каждой точке имеет заранее предписанное значение Cv/H.

Поскольку при переменном радиусе витки, вообще говоря, не замкнуты, возникает медленный «дрейф» центра витка. Хотя за один оборот частица смещается незначительно, в течение многих оборотов дрейф накапливается, и частица может уйти далеко.

Куда именно она уйдет? Этот вопрос — простейшая модель проблем, встречающихся в разнообразных ситуациях: при исследовании движения заряженных частиц в ускорителях и в магнитных ловушках для удержания плазмы, при анализе влияния возмущений планет друг другом в небесной механике, при изучении устойчивости быстро вращающихся тел в теории гироскопов. В применении к нашей задаче о движении частицы на плоскости результат таков:

Теорема. *Орбита вечно остается в узком кольце между двумя близкими линиями уровня функции H, в предположении, что эти линии уровня замкнуты и что радиус Cv/H достаточно мал.*

Читатели, располагающие компьютером, могут проверить это экспериментально. Эксперимент проще провести с дискретным аналогом той же теории. Рассмотрим отображение $T=AB$ плоскости на себя, где A — поворот на угол $2\pi/q$, а $B(x, y)=(x, y+a\sin x)$ (q — целое число, скажем 5, a — малый параметр, скажем 0,05).

Теорема. *Точки (P, $T^q P$, $T^{2q} P$,...) лежат на гладкой замкнутой кривой для большинства начальных точек P (если параметр a достаточно мал).*

При «нетипичных» P траектория постепенно заполняет красивую неограниченную фигуру, которую Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев и их соавторы назвали *стохастической паутиной.*

Та же математическая теория доказывает и устойчивость колебаний перевернутого вверх ногами маятника, «точка подвеса» которого быстро колеблется в вертикальном направлении (речь идет о нелинейных колебаниях в отсутствие трения). Экспериментальную установку легко сделать на базе вибрационной электробритвы, или электрической швейной машины (П. Л. Капица), или ускорителя с жесткой фокусировкой (А. М. Будкер).

в) Формула для решения квадратного уравнения читателям хорошо известна. Уравнения степеней и 3 и 4 также решаются при помощи радикалов. Уравнения степени 5 уже не решаются в радикалах, но все их можно свести к одному специальному уравнению $f^5+xf+1=0$. Так что ответ выражается через арифметические операции, корни и одну специальную функцию $f(x)$ одной переменной x. Уравнение степени 6 таким же образом сводится к специальной функции двух переменных.

Из функций двух переменных, подставляя одну в другую, можно составить функции любого числа переменных (например, $f(g(x, y), h(z, y))$ — функция трех переменных). Д. Гильберт сформулировал свою 13-ю проблему так: *какие непрерывные функции трех переменных могут быть выражены суперпозициями непрерывных функций двух переменных?* Гильберт предполагал, что не представляется уже функция $f(x, y, z)$, определяемая уравнением $f^7+xf^3+yf^2+zf+1=0$.

Теорема. *Всякая непрерывная функция любого числа переменных представляется суперпозицией непрерывных функций двух переменных.*

Представимость функций большего числа переменных суперпозициями функций трех переменных открыл А. Н. Колмогоров, так что мне оставалось лишь перейти от трех переменных к двум.

Вопрос о представимости суперпозициями, состоящими из алгебраических функций, остается открытым и очень интересен. Ожидается, что «топологическая сложность» ветвления многозначной функции препятствует ее представимости.

г) Читатели «Кванта» знают, конечно, как выглядят кривые, заданные уравнением второй степени: эллипсы, гиперболы и параболы. Как могут выглядеть кривые высших степеней — неизвестно никому. Наибольшее число компонент (овалов), из которых может состоять кривая степени n, равно

$$N=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$$

(бесконечно удаленные точки учитываются наравне с обычными, так что гипербола, например, состоит из *одного овала*).

Вопрос о том, каким может быть взаимное расположение этих N овалов на плоскости, составляет часть 16-й проблемы Гильберта. При $n=4$ все $N=4$ овала расположены вне друг друга (почему?). Назовем овалы, находящиеся внутри четного числа других, четными, нечетного — нечетными (все четыре овала кривой четвертой степени четные).

Теорема. *Разность между числом четных и числом нечетных овалов кривой с максимально возможным при данной степени $n=2k$ числом овалов сравнима с k^2 по модулю 8.*

Пример. Из 11 овалов кривой степени 6 внутри других могут лежать либо один, либо 5, либо 9 (почему?). В частности, все 11 овалов не могут лежать вне друг друга.

История этой теоремы такова. Горьковский математик Д. А. Гудков исследовал все расположения овалов кривой степени 6. Он подметил, что указанное сравнение всегда выполнялось в разобранных им примерах, и высказал гипотезу, что оно выполняется всегда. И. Г. Петровский попросил меня проверить работу Гудкова, технически очень сложную. Гипотеза Гудкова меня поразила, так как никакой связи между расположением овалов и арифметикой видно не было. Но я вспомнил, что теоремы делимости на 8 встречаются в четырехмерной топологии. Оказалось, что расположением овалов плоской кривой $f(x, y)=0$ управляет четырехмерное многообразие, образованное комплексными решениями уравнения $f(x, y)=z^2$.

Открытие этой связи проблемы овалов с четырехмерной топологией (а через нее — с арифметикой целочисленных квадратичных форм) позволило доказать гипотезу Гудкова по модулю 4. После этого В. А. Рохлин, ведущий специалист по четырехмерной топологии, доказал гипотезу Гудкова в полном объеме. С тех пор в вещественной алгебраической геометрии получено много замечательных результатов (о некоторых даже рассказывалось в «Кванте»). Однако, каковы всевозможные расположения двадцати двух овалов кривой степени 8 — все еще неизвестно.

Конкретные топологические вопросы этого рода (для многочленов фиксированной степени) сводятся в принципе к конечным алгебраическим вычислениям. Но вычисления эти, по-видимому, превосходят возможности современных компьютеров — во всяком случае, до сих пор ни одного нового результата в этой области с помощью компьютеров не получено.

— Вы много занимаетесь популяризацией математики (пользуясь случаем, еще раз рекомендуем нашим читателям вашу книгу «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук». М.: Наука, 1989). Каково ваше мнение о жанре популяризации; назовите, пожалуйста, достоинства и недостатки этого нелегкого жанра. Читаете ли вы журнал «Квант»? Если да, то выскажите, пожалуйста, мнение о нашем журнале.

— Один из первых популяризаторов — Фарадей — пришел к выводу, что «популярное никогда не бывает поучительным, а поучительное — популярным». Этот эффект Фарадея легко объясним: как заметил Н. Бор (см. статью Р. Пайерлса в «Кванте» № 10 за 1988 год), ясность и истина квантово дополнительны.

Пытающийся преодолеть эту дополнительность «Квант» заслуживает всяческих похвал, но, к сожалению, несколько эклектичен — математическая и физическая части мало согласованы. Рядом с блестящей статьей М. П. Бронштейна о рентгеновских лучах многие современные популяризаторы, увы, выглядят беспомощными. Особенно унылы отделы, посвященные репетиторству и шахматам. Рисункам часто мешает цвет и ненужный, на мой взгляд, отход от традиций энциклопедистов 18 века. Задачи обычно хороши, особенно те, что для младших школьников.

— Многие читатели «Кванта» собираются стать математиками. Существуют ли показания (и противопоказания) к этому, или математиком может быть любой человек, интересующийся предметом? Обязательно ли для будущего математика успешное участие в олимпиадах?

— Рассказывая А. Н. Колмогорову о своем участии в Concours Général (что во Франции примерно соответствует нашим олимпиадам), девяностолетний Адамар все еще волновался и негодовал: он оказался тогда лишь

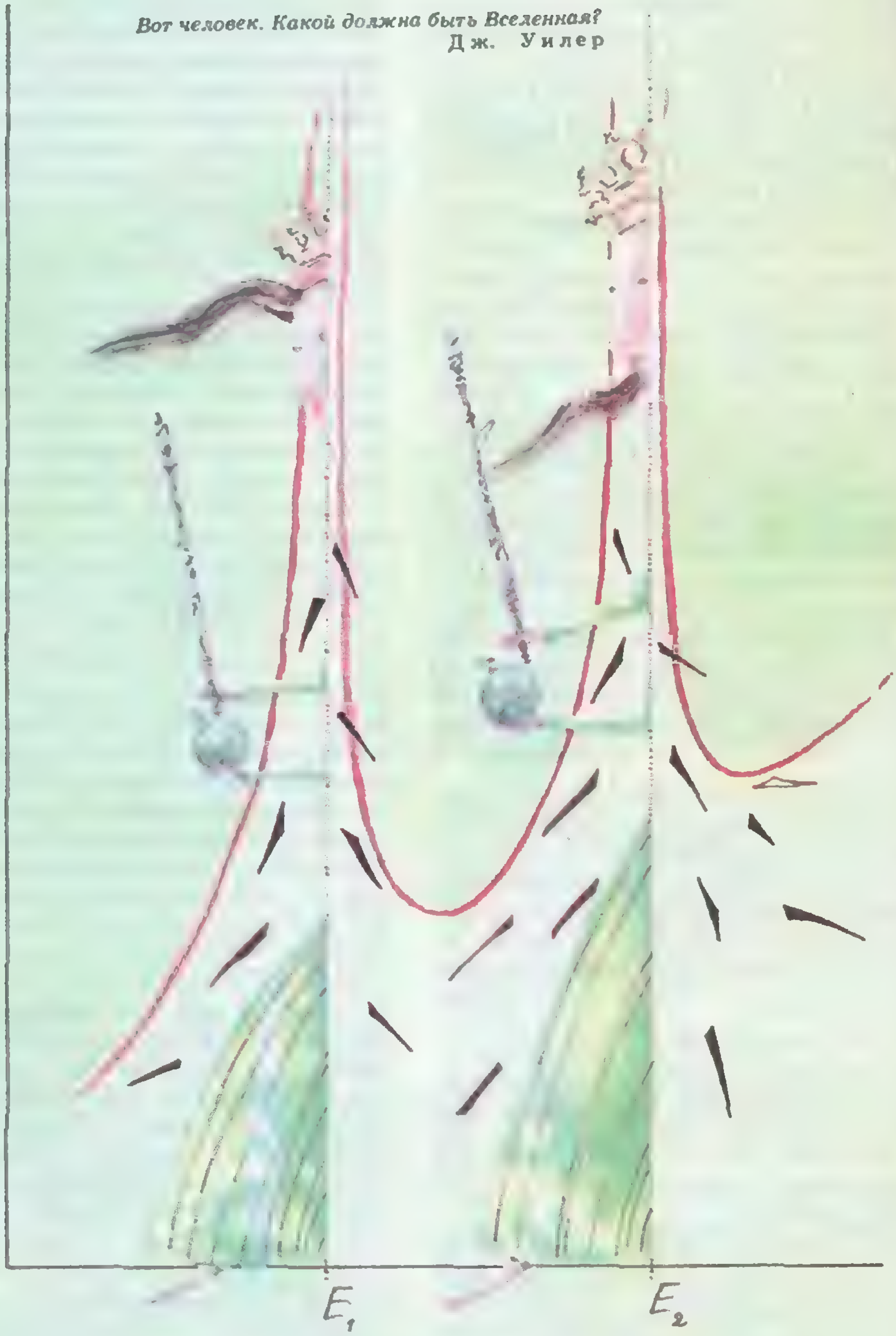
(Окончание см. на с. 15)

Вращается весь мир вкруг человека...

А. С. Пушкин

Вот человек. Какой должна быть Вселенная?

Дж. Уилер



АНТРОПНЫЙ ПРИНЦИП — ЧТО ЭТО ТАКОЕ?

А. КУЗИН

Маленькое вступление

Моя статья посвящена попытке науки ответить на один из вечных вопросов. Этот вопрос: значит ли что-нибудь в этом огромном мире маленький человек? Кто он — цель развития Вселенной, венец Творения или что-то случайное, ничем в принципе не отличающееся от остальных процессов природы? Является ли появление человека итогом всего развития Мироздания или же это какой-то случайный поворот? Приспособилась ли жизнь к внешним условиям, которые «и знать о ней ничего не знали», или же сами эти условия приспособлены для появления жизни?

Долгое время наука не располагала фактами для того, чтобы ответить на эти вопросы аргументированно (хотя в неаргументированных ответах не было недостатка). Сведения о мире, которыми располагала наука, были фрагментарны, общая картина развития Вселенной не просматривалась. Но почти четыре столетия организованных усилий ученых дали свои плоды. Теперь мы можем говорить всерьез о научной картине мира, о целостном взгляде на Вселенную. О, мы еще многого не знаем! Поэтому не надо думать, что данный ответ окончателен; это не судебный приговор, по которому человек «осужден» быть венцом Творения. Скептик всегда вправе сослаться на ограниченность научных знаний. Вопросы потому и вечные, что на них нельзя ответить раз и навсегда.

Научная постановка вопроса о мире и человеке

Антропный принцип — дитя мысленного эксперимента. Эксперимент такой: давайте мысленно что-нибудь изменим в законах природы и подумаем — сможет ли человек при этом существовать? При ответе на этот вопрос мы должны, конечно, сосредоточиться на чем-то главном в человеке — ведь ясно, что рассчитывать на его полную неизменность при изменении остального мира не приходится. Пожалуй, мы не ошибемся, если скажем, что два основных качества человека, без которых он и не мыслим как человек,— это разум и свобода. Свобода — способность оставаться самим собой, т. е. не определяться всецело тем, что в данную минуту находится вокруг тебя, а действовать изнутри, из себя. Разум есть условие свободы, поскольку без него невозможен активный отклик на окружающее (в этом смысле разум есть и у животных). Но заниматься вопросами о разуме и свободе в их общей постановке естественные науки не готовы. Нужно найти в этой глобальной проблеме нечто такое, за что они могли бы зацепиться. И вот эта зацепка.

Активно противостоять среде, понимая ее и изменяя сообразно требованиям своего существования, может только сложное существо. Степень сложности можно охарактеризовать количественно, а этим естественные науки и занимаются.

Антропный принцип является ответом на вопрос: всякий ли мыслимый миропорядок предполагает появление прогрессивно усложняющихся структур?

Подчеркну, что возникновение таких структур — только необходимое, а не достаточное условие появления человека. Но уже анализ этого необходимого условия дает нам очень много для понимания процесса эволюции.

Рассмотрим под этим углом зрения эволюцию Вселенной.

Краткий обзор эволюции Вселенной

Согласно современным представлениям Вселенная ограничена во времени и в пространстве, т. е. возраст ее конечен (около 15 млрд. лет), объем — тоже. Количество частиц во Вселенной оценивается учеными колоссальным, но все-таки конечным числом $N \sim 10^{80}$. Вселенная «стартовала» со страшно сжатого и горячего состояния, начальный радиус кривизны был $\sim 10^{-34}$ см. С тех пор Вселенная непрерывно расширяется, как надуваемый воздухом шарик, а «наполняющие» ее галактики, звезды, туманности (материя) удаляются друг от друга, подобно рисункам на шарике. Материя, пространство и время — взаимозависимы; они начались вместе, поэтому вопросы типа «что было до того, как появилась Вселенная?» или «что увидишь, если дойдешь до ее края?», сформулированы неверно. «До того» не было времени, а до пределов Вселенной дойти невозможно, как не дойдешь до пределов Земли.

В первые мгновения после «старта» температура настолько велика, что никаких устойчивых структур образоваться не может. Даже элементарные частицы непрерывно превращаются друг в друга. По мере расширения температура падает и образуются стабильные частицы — электроны, протоны, нейтроны. Это первая структура, и с ее появлением связано первое удивительное обстоятельство. Обстоятельство такое: в первоначальном кипящем котле частиц и античастиц было поровну, а вот при остывании симметрия нарушилась, и число частиц $N_{ч}$ оказалось бо́льшим, чем число античастиц $N_{а}$. Поэтому аннигиляция вещества и антивещества не оказалась полной, не вся материя превратилась в свет. Чудесно то, что $(N_{ч} - N_{а})/N_{ч} \sim 10^{-9}$, т. е. не превратилась в свет лишь одна миллиардная часть частиц (с этим числом мы еще встретимся по другому поводу).

При дальнейшем остывании образуются атомы простейших элементов — водорода и гелия. Для их существования нужен стабильный протон. Как известно, массы протона m_p и нейтрона m_n отличаются мало: $m_n - m_p \approx 2{,}5\ m_e$ (m_e — масса электрона). Более тяжелый нейтрон живет всего 16 минут, распадаясь затем на протон, электрон и электронное антинейтрино:

$$n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e.$$

Внутри ядер, где плотность ядерной материи и кинетическая энергия частиц велики, идет и обратная реакция. Поэтому внутри ядер нейтроны существуют в состоянии динамического равновесия. Будь нейтрон легче протона, протон стал бы распадаться —

$$p \rightarrow e^+ + n + \nu_e$$

(e^+ — позитрон, ν_e — нейтрино), и водорода, который служит главным топливом звезд и основой необходимой для жизни воды, не было бы.

Но пусть образование атомов элементов гарантировано. Заметим, что пока только еще простейших — водорода и гелия. Именно они синтезировались сразу везде, а для синтеза ядер более тяжелых элементов требуются уже специальные условия: для синтеза таких ядер нужны простейшие стабильные ядра как исходный материал и высокие температуры, при которых эти ядра только и могут слиться, причем эти температуры должны держаться продолжительное время (миллиарды лет) — термоядерные реакции идут не быстро. Но не только за миллиарды, а даже за сотни тысяч лет Вселенная уже оказывается в состоянии, весьма напоминающем современное,— средние плотность и температура в ней очень низки. Такие условия благоприятны для существования атомов (ведь при больших температурах электроны не удержатся около ядра), но не годятся для синтеза их ядер.

Итак, условия устойчивости атомов и синтеза ядер несовместимы. Для того чтобы процесс усложнения пошел дальше, необходимо, чтобы Вселенная потеряла пространственную однородность. Это и происходит из-за действия сил гравитации. В газе, заполняющем Вселенную, возникают сгущения — прообразы будущих галактик. Они, в свою очередь, дробятся на еще более мелкие сгущения — протозвезды. (Заметим, что гравитация должна «успеть» сформировать звезды, пока Вселенная еще не слишком расширилась.) По мере уплотнения протозвезды температура в ней растет, пока начавшиеся термоядерные реакции, сопровождающиеся мощным выделением энергии, не остановят сжатия.

Важно, что первые звезды состоят в основном из водорода (пропорция «водород:гелий» в молодой Вселенной равна приблизительно 3:1) — и это именно потому, что, поскольку протоны легче нейтронов, их больше и они не идут все целиком на образование гелия. Гелиевые звезды были бы очень горячими и жили бы недолго, недостаточно долго для того, чтобы на их планетах могла идти биологическая эволюция.

В недрах звезд идут «алхимические» превращения — ядра легких элементов, сталкиваясь, слипаются и превращаются в ядра элементов более тяжелых. И здесь процесс усложнения обусловлен весьма тонкой «подстройкой» сил ядерных и электромагнитных взаимодействий. Без этой подстройки цепочка реакций, ведущая от гелия через углерод и кислород к железу и далее, могла бы оборваться на первых звеньях.

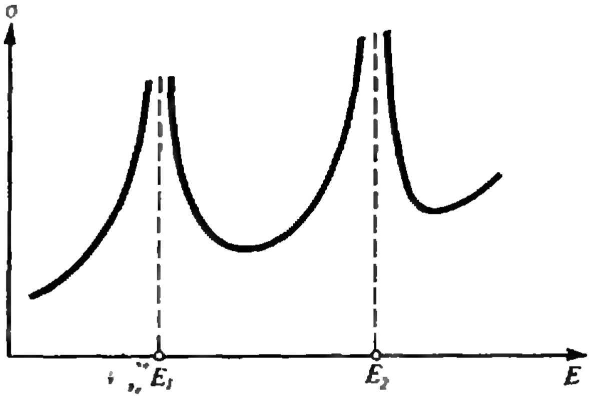
Приведу наиболее разительный пример, поясняющий суть дела. При температурах $T \sim 100$ млн. К в недрах звезд гелий превращается в углерод:

$$3\,{}^{4}\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + 2\gamma \qquad (1)$$

(значок γ означает гамма-квант). Вероятность встречи трех ядер ^{4}He в разреженной плазме звезды очень мала (время, за которое протекает реакция,— всего 10^{-21} с), и реакция (1) должна идти очень медленно, во всяком случае — недостаточно быстро для того, чтобы образовалось такое количество углерода, которое необходимо для формирования планеты типа Земля.

Но оказывается, что реакция (1) идет в два этапа. На первом этапе два ядра ^{4}He образуют ядро ^{8}Be:

$$2\,{}^{4}\text{He} + (99 \pm 6)\,\text{кэВ} \rightarrow {}^{8}\text{Be}. \qquad (2)$$



Указание энергии в скобках *) означает, что без подвода энергии реакция (2) не идет; значит, ^{8}Be выгодно распасться. (Если бы это ядро было стабильным, то «второй» этап, приводящий к образованию ^{12}C, со временем становился бы все менее вероятным — ^{4}He «исчерпывался» бы на образование ^{8}Be.) Не успевшее еще распасться ядро ^{8}Be слипается с ядром ^{4}He:

$$^{8}\text{Be} + {}^{4}\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + 2\gamma. \qquad (3)$$

Вероятность двуэтапной реакции (2—3) много больше вероятности реакции (1) потому, что ядро ^{8}Be «живет» в 10 000 раз дольше, чем продолжается столкновение ядер гелия. Но не только поэтому. Тут играет роль еще одно удивительное обстоятельство. Скорости ядерных реакций не монотонным образом зависят от энергии E сталкивающихся частиц. Резкое увеличение скорости реакции называют резонансом, а энергии, при которых это происходит (E_1, E_2 на рисунке), называют энергиями резонанса. Эти энергии определяются только структурой ядра-продукта реакции. Так вот, реакция (3) оказывается резонансной: энергия резонанса ядра ^{12}C (7,656±0,008 МэВ) лишь немного превышает сумму энергий покоя ядер ^{8}Be и ^{4}He (7,3667 МэВ) — этот разрыв преодолевается благодаря высокой температуре в недрах звезды.

Не «прогорит» ли, однако, образовавшийся углерод? Ведь существует и такая реакция:

$$^{12}\text{C} + {}^{4}\text{He} \rightarrow {}^{16}\text{O}. \qquad (4)$$

Нет, не прогорит! Реакция (4) ока-

---

*) Энергия в ядерной физике измеряется в электронвольтах: 1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

зывается нерезонансной и идет очень медленно (резонансная энергия ядра ^{16}O равна 7,1187 МэВ, что меньше суммы энергий покоя ядер ^{16}C и ^{4}He (7,1616 МэВ), а высокая температура и, следовательно, большая кинетическая энергия этих ядер только увеличивают «расстройку» резонанса.

Таким образом, благодаря ряду «совпадений» (нестабильность ядра ^{8}Be и вместе с тем сравнительно большой срок его «жизни», резонансный характер реакции (3) и нерезонансный — реакции (4)) цепочка реакций не обрывается, и углерода, столь важного для формирования жизни во Вселенной, получается много.

Когда ядро звезды достаточно обогащается тяжелыми элементами, звезда взрывается с резким увеличением светимости (превращается в сверхновую) и «сбрасывает» большую часть своей массы. Из этого «праха» формируются звезды нового поколения, еще более богатые тяжелыми элементами, и т. д. Космологи установили, что наше Солнце принадлежит к четвертому поколению звезд. Так как возраст Вселенной ~15 млрд. лет, то из этого, казалось бы, следует, что средний срок жизни звездного поколения ~3 млрд. лет. Но этого времени никак не хватит для биоэволюции (возраст Земли ~5 млрд. лет). Значит, наше Солнце принадлежит к довольно редкому типу сравнительно долгоживущих звезд. Большинство звезд живут меньше (срок жизни звезды зависит от ее массы), смысл их существования в том, чтобы обеспечить звезды солнечного типа материалом из тяжелых элементов.

Древние говорили о гармонии сфер: ход космических процессов, представляющийся слаженным и осмысленным философствующему уму, как бы звучит для него, подобно оркестру. И жизнь звезды подобна концерту этого оркестра, где роль оркестрантов играют силы природы, у каждой из которых свой инструмент и своя партия. Виолончель — ядерные силы — и скрипка — электромагнитные — ведут весь концерт; время от времени попискивает флейта — слабые внутриядерные силы; гравитация — контрабас — остается как бы на заднем плане, отсчитывает такт. Концерт заканчивают «слабые» взаимодействия — отложив в сторону флейту и взяв валторну, они играют соло — это стремительный поток нейтрино из ядра взорвавшейся сверхновой уносит прочь внешнюю оболочку звезды.

Итак, таблица Менделеева «сделана». Дальнейший процесс усложнения идет через образование молекул, и неограниченный характер этого процесса обеспечен наличием удивительного элемента углерода. На его основе могут возникать цепи молекул огромной длины. Углерод идеально для этого приспособлен*). Он четырехвалентен и углы между его валентными связями равны ~90°; атомы углерода, цепляясь друг за друга, как бы образуют строчку, а на оставшиеся две валентности садятся другие атомы и молекулы — возникает что-то вроде «надписи». Весь космический процесс до образования цепей углерода был как бы процессом формирования «букв»; с образованием органических молекул «буквы» — атомы — начинают объединяться в «слова» — молекулы. Но слова — это еще не речь. Между мешаниной «слов»-молекул и осмысленной «речью» живого организма лежит бездна. Однако, прежде чем коснуться вопроса о жизни, я должен сказать несколько слов о неорганической эволюции.

Чем дальше идет процесс усложнения структур, тем жестче требования на условия его протекания. Ядра не распадаются вплоть до температур в миллиарды градусов, атомы не выдерживают даже нескольких тысяч, а у молекул речь идет уже о сотнях градусов. Температура — это мера хаоса, а хаос враждебен структуре. Но процесс организации не может обойтись без хаоса — ведь это именно процесс, ему нужно движение, а именно тепло его и дает. И вот процесс зажат между двумя полюсами — жара и холода: перегреться — значит развалиться, переохладиться — значит застыть. На уровне возникновения жизни это общее противоречие процесса усложнения становится настолько острым, что для существования жизни на основе органических молекул остается узенький-узенький интервал температур. Мы не знаем сейчас точно, какой именно — может быть, это всего десяток-другой градусов. То, что такой интервальчик существует, не является чем-то само собой разумеющимся. Это существование обеспечивается очень тонкой «подстройкой» законов природы. Но одной принципиальной возможности здесь мало, нужно еще найти место, где эта возможность становится действительностью. А где найти такое место, где бы на протяжении миллиардов (!) лет поддерживалась температура $+20\pm15$ °С, где была бы в свободном состоянии вода (в другой среде органический «бульон» не «сваришь»), не было бы убийственной ультрафиолетовой радиации звезд и т. п.? Здесь уже дело не в законах природы, а в конкретном совпадении. И условия Земли как нельзя лучше подходят для жизни. Но малейшее ее перемещение относительно Солнца уже грозит жизни катастрофой. Если расстояние Земля — Солнце увеличить, то понижение температуры будет лавинообразным: рост полярных шапок увеличит отражательную способность земной поверхности, а это приведет к дальнейшему понижению температуры, и т. д. (возможно, даже до полного оледенения). Напротив, незначительное приближение к Солнцу, небольшое первоначальное повышение температуры также может кончиться значительным ее скачком; условия на Земле станут схожи с венерианскими. Уникальное положение Земли оставляет мало надежд на то, что где-либо в обозримой близости может найтись вторая такая планета.

---

*) За недостатком места я не могу обсуждать вопрос, почему другие четырехвалентные элементы, например кремний, не так для этого хороши.

Обсуждать происхождение жизни и ее эволюцию я не буду, так как это слишком сложный и непонятный предмет, о котором мы мало знаем. Ограничусь лишь следующим замечанием. Гипотеза о происхождении жизни «методом проб и ошибок», т. е. путем случайного перемешивания молекул, должна быть отвергнута по двум причинам. Первая: для обеспечения самовоспроизведения нужно иметь очень много молекул вполне определенного сорта. Даже минимальная живая ячейка уже настолько сложна, что ее правильное устройство осуществляет выбор из $\sim10^{120}$ вариантов. Вторая причина: жизнь на Земле возникла очень быстро, практически «сразу» после того как планета остыла. (На основании последнего факта В. И. Вернадский считал, что жизнь существует во Вселенной вечно, но такая гипотеза, очевидно, противоречит теории горячей Вселенной.)

Возникновение жизни для нас не ясно, но законы ее развития более-менее познаны. То же самое приходится сказать и о происхождении разума — как и возникновение живого среди неживого, возникновение разумного среди неразумного выглядит чудесным. Здесь, как и при всяком переходе с одной ступеньки сложности на другую, работает одно и то же правило: все более сложное в начале своего появления требует специальных условий, его нужно, так сказать, выпестовать, взлелеять, пока оно еще не вошло в силу. Взрослый человек умнее лошади и может быть более нее приспособленным к изменению условий существования, но грудной младенец, конечно же, более беспомощен, чем она.

«Совпадения», создающие условия для возможности усложнения, могут быть сформулированы на языке математики. Понятие о такой формулировке я постараюсь дать в следующем разделе.

Антропный принцип как система уравнений на физические константы

Математическая формулировка почти каждого закона природы включает в себя некий параметр, который не определяется нами, а принимается как данность. Вот простейший пример: то, что любой заряд кратен заряду электрона, выражается формулой $Q=Ne$ (N — целое число). Здесь параметр — заряд электрона e. Или еще пример: сила притяжения двух масс m_1 и m_2 суть

$$F=G\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}.$$

Здесь параметр — гравитационная постоянная G. Еще пример: энергия фотона пропорциональна его частоте ω: $E=\hbar\omega$. Параметр — постоянная Планка $\hbar$.

Величины типа e, $\hbar$, G, c (скорость света) и т. д. называются в физике мировыми константами. Сами по себе числовые значения этих констант ничего не значат, так как меняются при переходе от одной системы единиц к другой. Но вот их безразмерные комбинации имеют универсальное значение. Например, из e, $\hbar$ и c можно составить единственную безразмерную комбинацию — число $\alpha=e^2/\hbar c\approx 1/137$. Это число называется постоянной тонкой структуры; оно характеризует «силу» электромагнитного взаимодействия. Характерные энергии взаимодействия электронов в атомах и свободных электронов между собой являются лишь малой (порядка α в какой-либо степени) поправкой к их энергии покоя m_ec^2. Например, энергия электронов в атоме с атомным номером Z суть

$$E\sim m_ec^2(Z\alpha)^2.$$

Благодаря малости α процессы, при которых электрон превращается в другие частицы, маловероятны. Малость α обеспечивает устойчивость электрон-протонных структур — атомов, твердых тел. Тяжелые атомы с $Z\gtrsim\alpha^{-1}=137$ неустойчивы: электромагнитное поле у поверхности ядра настолько усиливается, что начинает рождать пары электрон-позитрон, которые экранируют «избыток» заряда ядра, приводят его значение к величине меньшей $e\alpha^{-1}$.

Аналогичные безразмерные константы можно написать и для всех прочих взаимодействий — сильного (S), слабого (W) и гравитационного (G). Для последнего

$$\alpha_G=Gm_p^2/\hbar c\sim 10^{-39}$$
(m_p — масса протона).

Известно, что $\alpha_S\sim 15$, $\alpha_W\sim 10^{-5}$. Оба этих взаимодействия осуществляются только на расстояниях порядка радиуса ядра.

Итак, четыре взаимодействия — четыре свободных параметра α_k ($k\to e, G, S, W$). К ним можно добавить размерность нашего пространства $d=3$, число частиц во Вселенной $N\sim 10^{80}$, отношение числа фотонов к числу частиц $S\sim 10^9$ и отношение масс электрона и протона $m_e/m_p\approx 1/1837$. Последнее число в принципе должно выражаться через α, α_S и α_W, но мы этого делать пока не умеем. Вообще, заветная мечта физиков — вывести все названные числа из какого-то одного числа. Но пока это еще только мечта.

Для того чтобы жизнь была возможна, между свободными параметрами должен выполняться ряд соотношений. Я приведу несколько примеров, просто как иллюстрацию.

Оптимальная скорость расширения Вселенной, при которой успевают образоваться звезды, обеспечивается соотношением

$$N\alpha_G^2\sim 1.$$

Возможность существования звезд типа Солнца — не слишком горячих и не слишком холодных — держится на соотношении

$$\alpha_G\sim\alpha^{12}(m_e/m_p)^4.$$

Чтобы поток нейтрино (они участвуют только в слабых взаимодействиях) мог сбросить оболочку сверхновой звезды, необходимо условие

$$\alpha_W^4\sim\alpha_G(m_p/m_e)^6.$$

Для того чтобы в ходе эволюции Вселенной атомы образовались до того, как успела развиться гравитационная неустойчивость, делающая Вселенную неоднородной, необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$S\sim\alpha^{-2}(m_p/m_e),$$
$$S\lesssim\alpha^{10}(m_p/m_e)\alpha_G^{-1}.$$

Вспомним также о ядерных реакциях в звездах, о которых мы говорили в предыдущем разделе,— описанные там «совпадения» также, в принципе, могли бы быть сформулированы в терминах соотношений мировых констант.

Главным для нас здесь является вот что: число требований (или число уравнений) на константы намного превосходит количество этих констант. Это очень важный факт. Не любая система уравнений, в которой число неизвестных меньше числа уравнений, имеет решение. Для того чтобы решение существовало, нужно, чтобы «лишние» уравнения как-нибудь выражались через остальные.

Значит, в самой структуре законов природы скрыт какой-то очень важный принцип. Мы не знаем пока его математической формулировки (это должна быть, по-видимому, какая-то симметрия уравнений на мировые константы). Такая формулировка выражала бы «идею» Вселенной, основной принцип ее развертывания в пространстве и времени и закон эволюции ее структур. Все, что мы знаем сейчас, это лишь следствия этого принципа. Все частные законы природы объединяет один всеобщий закон: человек должен появиться.

Интервью с В. И. Арнольдом

(Начало см. на с. 2)

вторым, а тот, первый, тоже сделался математиком, но несравненно более слабым.

Некоторые победители олимпиад не делают впоследствии ничего путного, а многие выдающиеся математики вовсе не имели олимпиадных успехов.

Математики сильно различаются своими шкалами времени: некоторые очень хороши в 15-минутных задачах, другие — в часовых, суточных, недельных, требующих месяца размышлений, года, десятилетий... А. Н. Колмогоров считал своим потолком две недели интенсивных размышлений.

Олимпиадный успех во многом зависит от скоростных, спринтерских характеристик, в то время как в серьезной математической деятельности требуется несравненно бóльшая стайерская выносливость («хорошая теорема,— говорил Б. Н. Делоне — требует не 5, как на олимпиаде, а 5000 часов»).

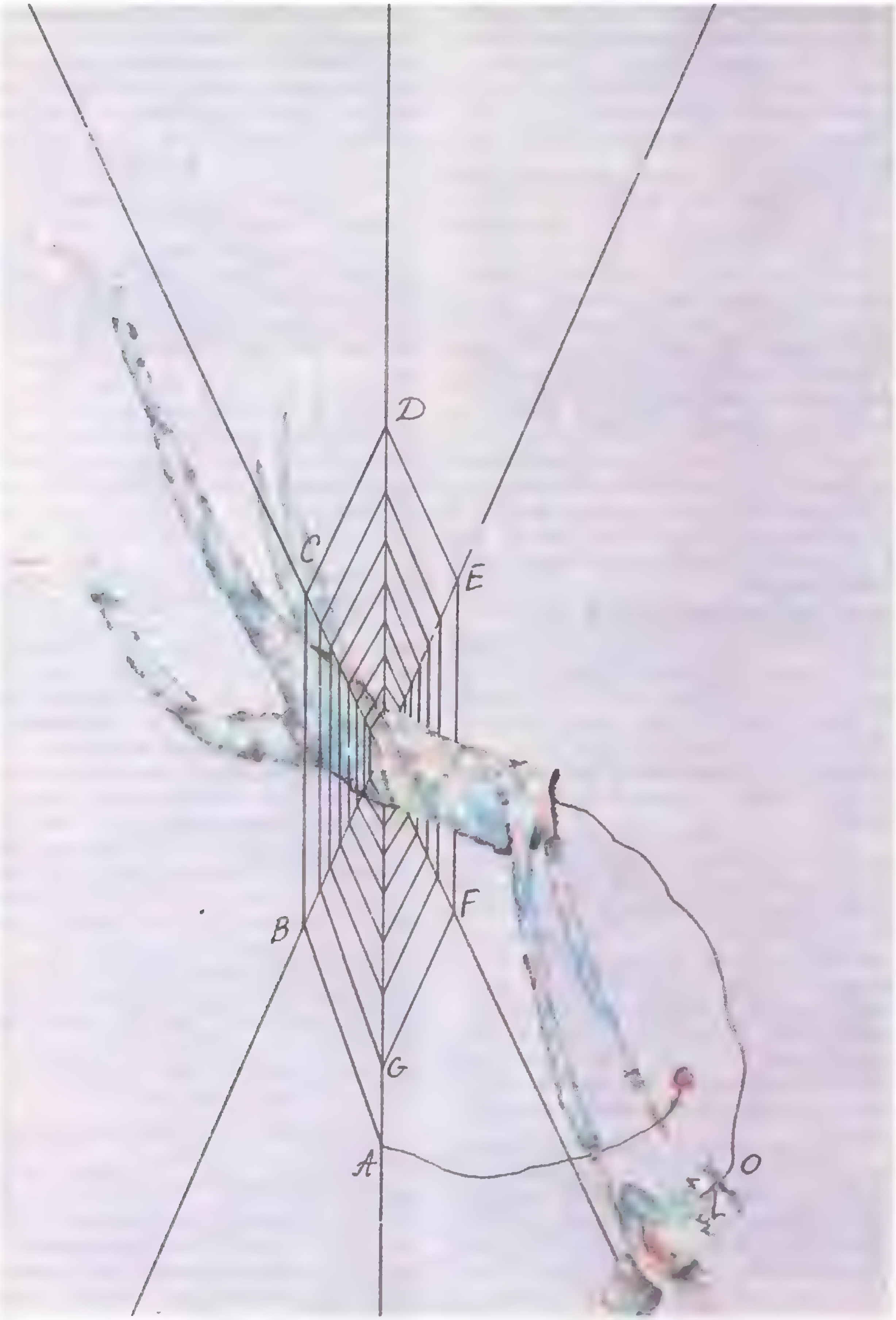
Противопоказания к тому, чтобы стать творчески работающим математиком, есть. Главное противопоказание — отсутствие любви к математике. Кроме того, как сказал поэт,

При каждом деле есть случайный мальчик,
Кому судьба таланта не дала.
И к ним с тупой неласковостью мачех
Относятся любимые дела.

Но математические таланты бывают очень разные — геометрически-интуитивные и алгебраически-вычислительные, логически-дедуктивные и индуктивно-естествоиспытательские. И все нужны. Мне кажется, трудности с таблицей умножения или с определением полуплоскости не должны преграждать путь к математике. Важнейшее условие серьезных занятий математикой — крепкое здоровье.

— Расскажите, пожалуйста, о роли спорта в вашей жизни.

— Когда задача не решается, я становлюсь на лыжи. После сорока километров решение (или хотя бы идея) всегда появляется. При проверке часто обнаруживается ошибка. Но это уже новая трудность, и она преодолевается тем же методом.


D
C
E
B
F
G
A
O

ТЕКСТИЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Как-то так получилось, что творчество ряда немецких математиков 20—30-х годов нашего века оказалось связано с текстильным делом. Эмиль Артин, работая по контракту с текстильной фабрикой, построил одну из самых популярных в современной математике теорию — *теорию кос* (см. статью «Косы и узлы», «Квант» № 2 за 1989 год). Эта статья посвящена другому предмету — *геометрии тканей*, созданной Вильгельмом Бляшке. Геометрия тканей не имеет отношения к реальным тканям — это просто раздел геометрии, связанный множеством нитей с другими областями математики. (Название, тем не менее, вводит в заблуждение; и Бляшке получал приглашения на совещания работников текстильной промышленности. Он даже решил переименовать свое детище в «геометрию сот».)

Определение ткани

В некоторой области на плоскости задана *ткань из d нитей* (или, попросту, *d-ткань*), если в этой области заданы d семейств попарно не касающихся кривых и через каждую точку области проходит ровно по одной кривой из каждого семейства. Кривые каждого из семейств называются нитями ткани. Две ткани считаются одинаковыми, если одну можно превратить в другую с помощью произвольной деформации (запрещаются только разрывы и склейки). Примеры 1 и 2-тканей изображены на рисунках 1 и 2. (Нити разных семейств изображаются разными цветами.)

Приступим к изучению d-тканей. При $d=1$ исследовать нечего: подходящая деформация мгновенно превращает 1-ткань в семейство параллельных прямых (см. рис. 1). Не лучше обстоит дело и с 2-тканью. После выпрямления первого семейства кривых у нас остается возможность двигать каждую точку вдоль проходящей через нее прямой нити. Этого достаточно, чтобы выпрямить и второе семейство (см. рис. 2), поэтому все 2-ткани тоже устроены одинаково. Содержательная теория начинается со случая 3-тканей.

Несколько примеров

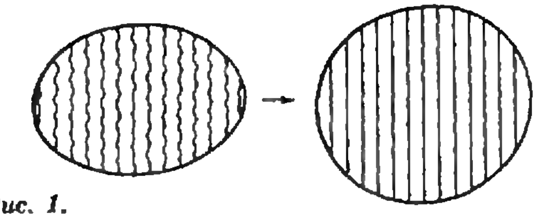


Рис. 1.

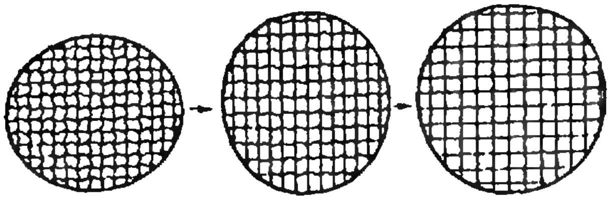


Рис. 2.

0°. Простейший пример — это три семейства параллельных прямых (рис. 3). Такую, а также всякую получающуюся из нее деформацией 3-ткань, мы будем называть тривиальной. Три семейства прямых на рисунке 3 можно задать уравнениями

$$x=\mathrm{const},\quad y=\mathrm{const},\quad -(x+y)=\mathrm{const},$$

(каждой константе отвечает своя прямая). И вообще «достаточно хорошее» уравнение $f(x, y)=\mathrm{const}$ задает на плоскости семейство кривых. 3-ткань можно задать тремя функциями:

$$f(x, y)=\mathrm{const},\ g(x, y)=\mathrm{const},\ h(x, y)=\mathrm{const}.$$

Теорема. *Если эти функции удовлетворяют уравнению*

$$f(x,\ y)+g(x,\ y)+h(x,\ y)=0, \qquad (1)$$

то соответствующая 3-ткань тривиальна.

Доказательство. Рассмотрим деформацию, которая переводит точку с координатами (x, y) в точку $(x', y')=(f(x,\ y),\ g(x,\ y))$. Эта деформация превращает семейство кривых $f=\text{const}$ и $g=\text{const}$ в семейство вертикальных и горизонтальных *прямых* $x'=\text{const}$ и $y'=\text{const}$. В силу уравнения (1), третье семейство кривых выпрямится автоматически, так как будет задаваться уравнением $x'+y'=\text{const}$.

1°. Рассмотрим 3-ткань строго внутри треугольника ABC, составленную из окружностей. Окружности каждого из трех семейств проходят через две из трех вершин треугольника (рис. 4, *а*). Положение точки M внутри треугольника задается тремя углами α, β, γ, под которыми из M видны стороны треугольника (рис. 4, *б*). Окружности каждого семейства задаются условиями:

$$\alpha=\text{const},\ \beta=\text{const}\ \text{и}\ \gamma=\text{const},$$

так как вписанный угол, опирающийся на фиксированную хорду, имеет постоянное значение. Поскольку $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, для функций

$$f(M)=\alpha-2\pi/3,\ g(M)=\beta-2\pi/3,\ h(M)=\gamma-2\pi/3$$

выполнено уравнение (1). Следовательно, ткань тривиальна (хотя совсем и не похожа на ткань на рисунке 3).

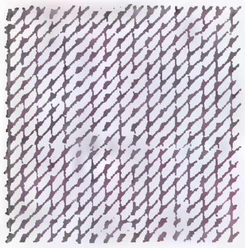


Рис. 3.

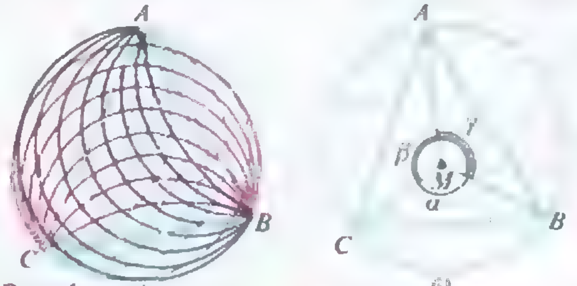


Рис. 4. а) б)

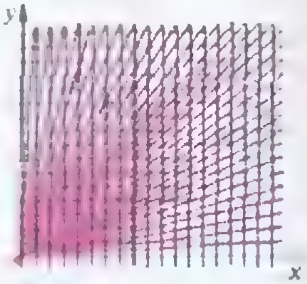


Рис. 5.

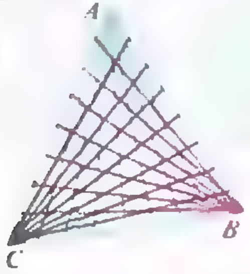


Рис. 6.

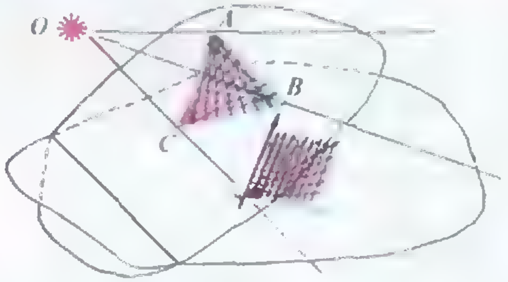


Рис. 7.

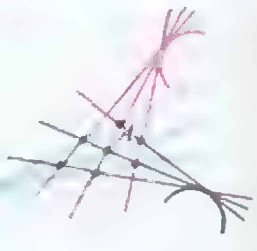


Рис. 8.

2°. Следующий пример — ткань, строго внутри первого координатного угла, состоящая из трех семейств прямых линий. Первые два семейства состоят из вертикальных и горизонтальных прямых, а третье — из прямых, проходящих через начало координат (рис. 5). *Последнее семейство* задается условием

$$y/x=\text{const};$$

поэтому его можно задать и уравнением

$$h(x,\quad y)=\ln(y/x)=\ln y-\ln x=\text{const}.$$

Если задать первые два семейства условиями

$$f(x,y)=\ln x=\text{const}\ \text{и}\ g(x,y)=-\ln(y)=\text{const},$$

то будет выполнено уравнение (1). Следовательно, ткань тривиальна.

3°. Более интересный пример изображен на рисунке 6. На этот раз ткань состоит из трех пучков прямых, проходящих через три вершины треугольника ABC. Эту ткань можно превратить в ткань из предыдущего примера. Для этого приподнимем плоскость и осветим ее точечным источником света O так, как изображено на рисунке 7. Тень, которая возникает на экране, параллельном плоскости OAB, будет совпадать с тканью из примера 2°. Поэтому ткань на рисунке 6 тоже тривиальна.

4°. В двух предыдущих примерах *мы имели дело с прямолинейными* тканями, т. е. с тканями, составленными из прямых. Вот общий способ построения таких тканей. Возьмем три кривые на плоскости и пусть A — такая точка, из которой можно провести касательную к каждой кривой. Тогда из точек, достаточно близких к A, тоже можно провести касательные ко всем трем кривым. Эти касательные и образуют в окрестности точки прямолинейную ткань (рис. 8).

Я назвал этот способ построения прямолинейной ткани общим. И вот почему. Семейство прямых, не проходящих через одну точку и не параллельных между собой, касается некоторой кривой — *огибающей* семейства. Значит, каждое общее семейство прямых состоит из касательных к *некоторой кривой*. Прямолинейная 3-ткань — это 3 семейства прямых, заданные своими огибающими. Как вы увидите, такая ткань, как правило, оказывается нетривиальной.

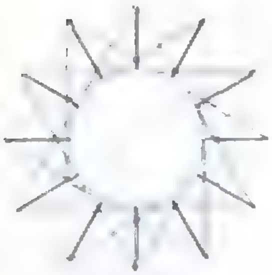


Рис. 9.

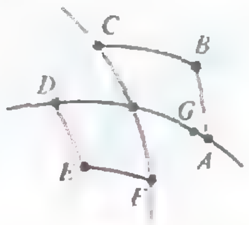


Рис. 10.

Рис. 11.

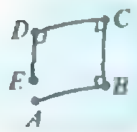


Рис. 12.

Упражнения

Докажите тривиальность 3-ткани:

1. составленной из касательных к данной окружности и прямых, проходящих через ее центр (рис. 9);

2. составленной в окрестности точки (1; 1) из вертикальных и горизонтальных прямых и гипербол $xy=\text{const}$.

Шестиугольные ткани

Все рассмотренные до сих пор ткани были тривиальными. И у вас даже могло создаться впечатление, что других тканей вообще не бывает. В действительности, тривиальность 3-ткани — это, скорее, «несчастный случай», чем общее правило: случайно взятая ткань будет нетривиальной. Но как доказать нетривиальность какой-либо ткани? Для этого хорошо бы придумать величину, обращающуюся в ноль, если ткань тривиальна, и отличную от нуля в противном случае.

Проведем через точку O три нити ткани. На одной из них выберем точку A (рис. 10) и проведем через нее нить второго семейства, до пересечения в точке B с нитью третьего семейства, проходящей через O. Через B проведем нить первого семейства до пересечения в точке C с нитью второго семейства, проходящей через O. И так далее. Мы построим точки D, E, F и G; причем для ткани на рисунке 3, а значит, и для любой тривиальной ткани, точки A и G совпадают. Для произвольной же 3-ткани это вовсе не обязательно.

Незамкнутость шестиугольника $ABCDEFG$ — это *препятствие* к тривиальности ткани. Предлагаю вам вооружиться циркулем и линейкой и проверить, что для ткани, составленной из касательных к двум концентрическим окружностям и прямых, проходящих через их общий центр, шестиугольные фигуры не замыкаются (рис. 11). Значит, эта ткань нетривиальна.

Степень незамкнутости шестиугольника, т. е. расстояние между точками A и G, измеряет отличие 3-ткани от тривиальной. Аналогично обстоит дело в дифференциальной геометрии, где степень искривленности поверхности можно измерять так: пройдем кратчайшим путем из точки A в точку B, удаленную от A на расстояние ε; повернем на 90°; еще раз пройдем расстояние ε — попадем в точку C;

еще раз повернем на 90°; и так — еще два раза. Точка E, в которую мы в итоге попадем, не обязательно совпадет с A и отстоит от нее тем дальше, чем больше кривизна поверхности (рис. 12).

Ткань называется *шестиугольной*, если для любых исходных точек O и A шестиугольник на рисунке 10 замыкается. Шестиугольность не только необходима, но и достаточна для тривиальности ткани. Идея доказательства: достроим шестиугольник до треугольных «сот» (рис. 13). Эти соты можно превратить деформацией в три набора параллельных прямых. Устремляя размеры исходного шестиугольника к нулю, мы в пределе получаем деформацию шестиугольной ткани в ткань, составленную из параллельных линий.

Упражнения

3. Рассмотрим треугольник, составленный из кривых 3-ткани. Докажите, что существует единственный вписанный в него треугольник, тоже составленный из кривых ткани (рис. 14).

4. Рассмотрим два треугольника с общей стороной и впишем в каждый из них по треугольнику (рис. 15). Обязательно ли их вершины, лежащие на общей стороне, совпадают?

5. Ткань составлена из вертикальных и горизонтальных прямых и графиков $y=f(x)+$ $+\mathrm{const}$, где $f(x)$ — некоторая функция (рис. 16). Докажите, что эта ткань шестиугольная.

6. Проверьте с помощью циркуля и линейки, что 3-ткань, составленная из прямых, проходящих через две данные точки, и касательных к некоторой окружности, нетривиальна (рис. 17).

Отступление: конфигурация Паппа

Я обещал показать вам, как геометрия тканей связана с другими разделами математики. В этом и следующем пункте мы поговорим о ее взаимоотношениях с проективной и алгебраической геометрией.

Возьмите линейку и проведите две прямые. На каждой из них отметьте по 3 точки: A, B, C и D, E, F (рис. 18). Теперь соедините пары точек: AE, AF, BD, BF, CD, CE. На чертеже возникнут три новые точки: K, L и M. А сейчас — внимание: приложите к этим точкам линейку и вы увидите, что *они лежат на одной прямой*. Это утверждение — знаменитая *теорема Паппа*, а конфигурация, изображенная на рисунке 18, называется *конфигурацией Паппа*.

Я не буду доказывать теорему Паппа. Не потому, что это слишком трудно, а потому, что это увело бы нас далеко от основного сюжета статьи. Доказательство этой теоремы, а также других утверждений этого пункта вы можете прочитать в статье «Гексаграммы Паскаля и кубические кривые» в «Кванте» № 8 за 1987 год. Советую вам ознакомиться с этой очень содержательной статьей — ее тема тесно связана с геометрией прямолинейных *тканей*.

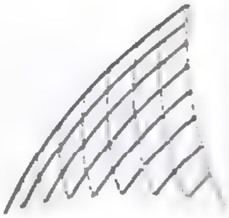


Рис. 13.

Рис. 14.

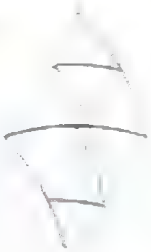


Рис. 15.

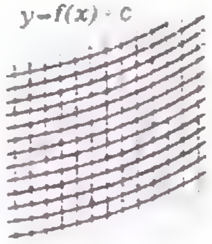


Рис. 16.

Теорема Паппа допускает обобщение, относящееся к алгебраической геометрии — разделу математики, исследующему геометрические образы с помощью задающих их уравнений. Рассмотрим *кубическую кривую*, т. е. кривую, заданную в координатах (x, y) уравнением третьей степени:

$$ax^3+bx^2y+ \dots +l=0$$

(всего 10 членов). Нужное нам свойство этой кривой состоит в следующем:

> *если кубическая кривая проходит через 8 из 9 точек конфигурации Паппа, то она проходит и через ее 9-ю точку* (рис. 19).

Доказательство вы сможете прочитать в упомянутой выше статье. Теорема Паппа является частным случаем сформулированного утверждения. Действительно, в ней речь идет о трех прямых, каждую из которых можно задать своим линейным уравнением. Объединение прямых задается произведением этих уравнений, т. е. уравнением третьей степени. Значит, объединение трех прямых — частный случай кубической кривой.

Прямолинейные ткани и кубические кривые

Сейчас мы опишем все шестиугольные 3-ткани, составленные из прямых. Невертикальную прямую на плоскости с координатами (x, y) можно задать уравнением

$$y=px+q. \qquad (2)$$

Рассмотрим вспомогательную плоскость с координатами (p, q). Каждой ее точке *отвечает прямая* исходной плоскости (x, y), заданная уравнением (2). Зафиксируем точку (x, y). Пучок проходящих *через нее прямых* задается тем же уравнением (2). Это линейное относительно p и q уравнение определяет на *вспомогательной* плоскости прямую; так что пучок прямых, проходящих через точку исходной плоскости, *изображается в* (p, q)-координатах прямой. (Подробнее об этом см. в статье «Геометрия уравнений», «Квант», № 10 за 1988 год.)

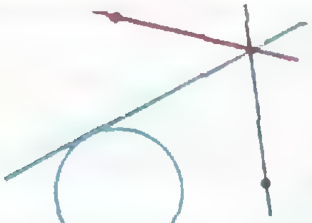


Рис. 17.

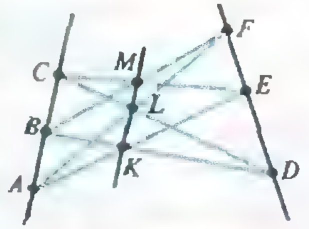


Рис. 18.

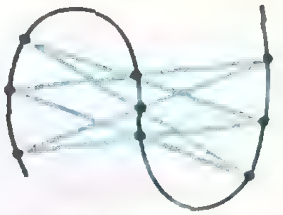


Рис. 19.

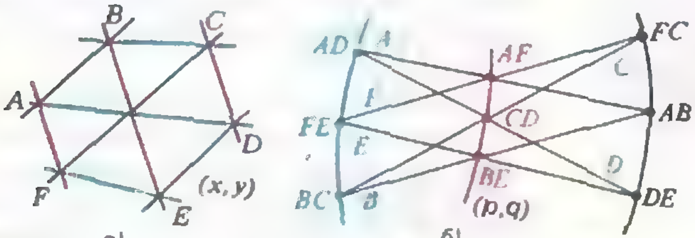


Рис. 20. а) б)

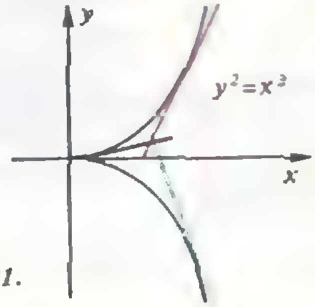


Рис. 21.

Возьмем какую-нибудь точку и рассмотрим *прямолинейную* 3-ткань в ее окрестности. 3-ткань — это 3 семейства прямых, каждое из которых зависит *от одного параметра*. Прямой одного семейства отвечает точка (p, q)-плоскости, а все вместе они образуют в этой плоскости *кривую*. Трем семействам нитей ткани отвечают три кривые в (p, q)-плоскости. Посмотрим, какая фигура *отвечает шестиугольнику*, составленному из нитей ткани. На рисунке 20, *а* изображена исходная, а на *рисунке 20, б — вспомогательная* (p, q)-плоскость. Каждой прямой на левом рисунке отвечает точка на правом, *обозначенная той же парой* букв; а каждой точке — прямая. Если какая-либо точка слева лежит на какой-либо прямой, *то справа* — все наоборот: соответствующая прямая содержит соответствующую точку. Это и означает, что фигура на рисунке 20, *б* отвечает шестиугольнику на рисунке 20, *а*.

«Позвольте,— скажете вы, — ведь на рисунке 20, *б* изображена конфигурация Паппа!» Вы совершенно правы. И из основной теоремы предыдущего пункта следует, что прямолинейная ткань будет шестиугольной, если три отвечающие ей кривые на рисунке 20, *б* являются частями одной кубической кривой. То есть, если коэффициенты p и q уравнений прямых $y=$

$=px+q$, из которых составлена ткань, удовлетворяют некоторому уравнению 3-й степени. Более того, других шестиугольных тканей, «сотканных» из прямых, нет (но этого мы доказывать не будем).

Упражнения

7. Докажите, что ткани на рисунке 6 отвечает в (p, q)-плоскости конфигурация, изображенная на рисунке 18, и, следовательно, из тривиальности этой ткани следует теорема Паппа.

8. Докажите шестиугольность ткани, составленной из троек касательных к полукубической параболе $y^2=x^3$ (рис. 21).

9. Докажите, что ткани на рисунке 9 отвечает в (p, q)-плоскости кубическая кривая.

Ткань в пространстве

Всякая 2-ткань на плоскости тривиальна. А в пространстве дело обстоит совершенно иначе. Говорят, что в трехмерной области задана 2-ткань, если эта область двумя способами представлена в виде объединения попарно не касающихся кривых (боюсь, что это мало напоминает ткань — вспоминается скорее железная арматура в куске бетона). Тривиальная 2-ткань — это просто два семейства прямых, параллельных осям Ox и Oy.

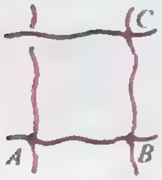


Рис. 22.

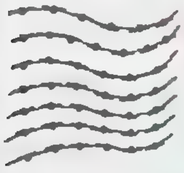


Рис. 24.

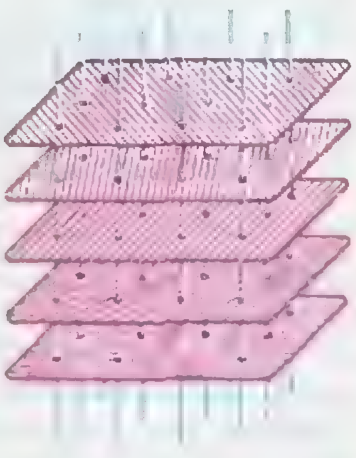


Рис. 23.

Препятствие к тривиальности пространственной ткани построить еще проще, чем на плоскости. Возьмем произвольную точку A, проведем через нее кривую первого семейства и выберем на ней точку B. Через B проведем кривую второго семейства и возьмем на ней точку C. Теперь проведем через C кривую первого, а через A — второго семейства (рис. 22). Пересекутся ли эти кривые? В тривиальной ткани — да, а в произвольной — вовсе не обязательно.

Пример нетривиальной 2-ткани строится так. Первое семейство состоит из вертикальных прямых, а второе — из горизонтальных. Прямые, лежащие в горизонтальной плоскости $z=c$, параллельны между собой и составляют с фиксированным горизонтальным направлением угол в c радиан (рис. 23). Чтобы построить такую ткань, нужно передвигать горизонтальную плоскость с нанесенными на ней параллельными прямыми вдоль вертикальной оси, поворачивая ее с постоянной скоростью. Что эта ткань нетривиальна, т. е. ни один четырехугольник на рисунке 22 для нее не замыкается, предлагаю вам убедиться самостоятельно.

Незамкнутость четырехугольников из нитей ткани на рисунке 23 влечет неожиданное следствие. Построим в каждой точке пространства маленькую плоскую площадку, содержащую две проходящие через эту точку нити построенной ткани.

Теорема. *Не существует никакой (даже сколь угодно малой) поверхности, которая в каждой своей точке касалась бы соответствующей площадки.*

Доказательство. Если бы такая поверхность существовала, то достаточно малый четырехугольник из нитей ткани лежал бы на этой поверхности и должен бы быть замкнутым.

Итак, в пространстве существует поле плоскостей, для которого нет ни одной касающейся его поверхности. Этот неожиданный факт противоречит интуиции, выработанной при работе с плоскостью: на плоскости для любого поля направлений существуют касающиеся его кривые (рис. 24). Поля плоскостей, для которых не существует касательных поверхностей, называются *контактными структурами* и являются очень популярным предметом исследований в современной математике.

ОРФО — *высокоинтеллектуальная система для компьютеров типа* IBM PC/XT/AT

ОРФО

ОРФО *осуществляет автоматизированную грамматическую проверку и коррекцию русскоязычных текстов*

ОРФО *поможет вам выучить русский язык*

ОРФО *избавит ваши тексты от опечаток и от ошибок в орфографии, в согласовании слов и т. д.*

ОРФО *снабжена словарем русского языка (120 000 слов) и способна расширять свой словарь*

ОРФО *совместима с любым текстовым редактором*

ОРФО *проста в обращении*

***Обращаться** по адресу: 103104, Москва, ул. Остужева, д. 7, стр. 2, МРНТО «Информатик». Наши телефоны: 299-99-04, 290-35-24*

СЕТИ ЧЕБЫШЕВА

Ю. КОТОВ,
кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Вам, вероятно, приходилось примерять карнавальные костюмы, сделанные из бумаги. И вы замечали, что такие костюмы плохо сидят, носить их неудобно. Причина — в том, что лист бумаги нерастяжим и не способен плотно прилегать к искривленной поверхности (см. статью «Геометрия листа бумаги» в «Кванте» № 9 за 1988 год). Зато ткань прекрасно облегает выпуклости и вогнутости человеческого тела. Как же устроена ткань?

Она соткана из двух практически нерастяжимых нитей, образующих прямоугольную решетку (рис. 1). Если прижать кусочек ткани к искривленной поверхности, то составляющие ее прямоугольники искажаются, превращаясь в параллелограммы (рис. 2 и 3). Деформацию ткани можно произвести и не выходя из плоскости — для этого достаточно растянуть кусочек ткани по диагонали.

Математики любят точные определения; дадим их и мы.

Сеть Чебышева *) — это два семейства попарно не касающихся линий на поверхности; при этом через каждую точку поверхности проходит ровно по одной линии каждого семейства и длины сторон каждого криволинейного четырехугольника, образованного кривыми, равны (рис. 4). Последнее означает, что линии, составляющие сеть, нерастяжимы.

Простейший пример — это сеть на плоскости, образованная двумя семействами параллельных прямых (ячейки такой сети — параллелограммы). Более содержательный пример плоской сети Чебышева строится так. Возьмем две кривые m и n, пересекающиеся в точке O. Для каждой точки A, лежащей на кривой n, сделаем параллельный перенос кривой m на вектор OA. Аналогично, для каждой точки B на кривой m перенесем кривую n на вектор OB (рис. 5).

В результате получится некоторая сеть; и мы утверждаем, что это — сеть Чебышева. Действительно, из рисунка 5 следует, что $OBCA$ — параллелограмм. Поэтому дуга AC кривой m' получается из дуги OB кривой m параллельным переносом на вектор OA и имеет с ней равную длину. Аналогично — для дуг OA и BC. То же соображение применимо к произвольной ячейке построенной сети.

Итак, две кривые на плоскости, пересекающиеся под ненулевым углом, достраиваются в некоторой окрестности их точки пересечения до сети Чебышева. Кроме того, касательные к кривым одного семейства,

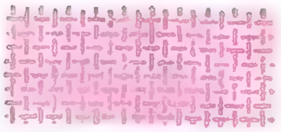


Рис. 1.

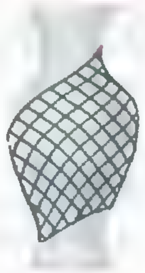


Рис. 2.

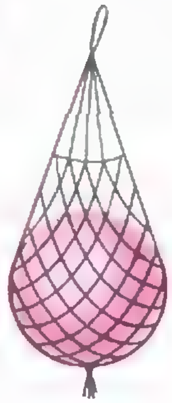


Рис. 3.

---

*) Это понятие ввел знаменитый русский математик П. Л. Чебышев. О его творчестве «Квант» уже рассказывал в этом году: см. статьи «О постулате Бертрана» — в № 1, «Инверсоры» — в № 4, «Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля» и «Задача Чебышева и тригонометрические многочлены» — в № 6. Сеть Чебышева — математическая модель ткани, сотканной из *конечного* числа нитей.

проведенные в точках их пересечения с любой кривой другого семейства, *параллельны.* Это прямо следует из построения.

Описанная конструкция нуждается в дополнении: по двум кривым m и n сеть Чебышева *строится единственным* образом. Для доказательства мы еще раз построим эту сеть, но на этот раз способом, исключающим произвол.

Приблизим исходные кривые ломаными со звеньями длиной ε (рис. 6, *а*) и попробуем достроить их до сети Чебышева. Ячейки сети Чебышева с прямолинейными сторонами — параллелограммы, поэтому ломаные на рисунке 6, *а* однозначно достраиваются до «сот», состоящих из параллелограммов со стороной ε (рис. 6, *б*). Устремляя ε к нулю, мы в пределе получим сеть Чебышева, содержащую кривые m и n. Конечно, следовало бы сказать что-то о существовании и единственности предела. Доказывать это было бы скучновато; мы надеемся, что рисунок 6, *б* и так выглядит достаточно убедительно.

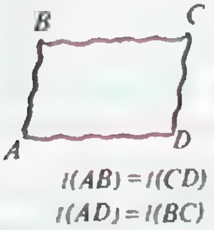


Рис. 4.

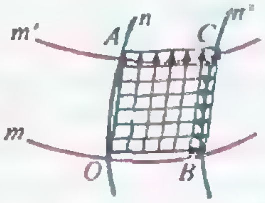
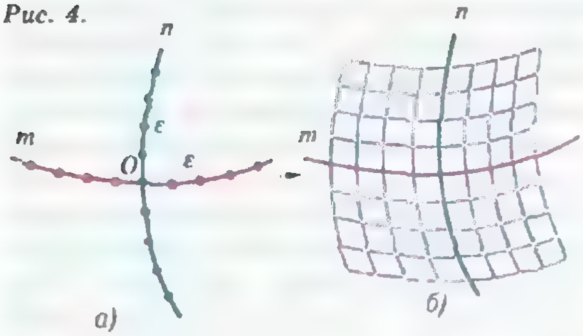


Рис. 5.



а) б)

Рис. 6.

Сети Чебышева на «кривой» поверхности обладают теми же свойствами, что на плоскости: каждые две пересекающиеся кривые однозначно достраиваются «в малом» до сети Чебышева. (Хотите знать, как это доказывается? Конструкцией, аналогичной изображенной на рисунке 6 — продумайте детали!) Сохраняет силу и вывод о параллельности касательных к одному семейству линий вдоль кривой другого семейства — только слово «параллельность» нужно понимать так, как это принято в дифференциальной геометрии (об этом рассказано в статье «О кривизне» в «Кванте» № 5 за 1989 год). Мы не будем входить в детали; вместо этого предлагаем вам конструкцию искривленной поверхности вместе с сетью Чебышева на ней.

Строится она так. Возьмем в пространстве две кривые m и n и для каждой пары точек $A \in m$ и $B \in n$ отметим *середину* C отрезка AB (рис. 7) Когда точки A и B пробегают кривые m и n, точка C заметает некоторую поверхность. На этой поверхности отмечены два семейства линий, которые получаются, если в описанной конструкции *зафиксировать* одну из точек — A или B. Мы утверждаем, что эти два семейства образуют сеть Чебышева.

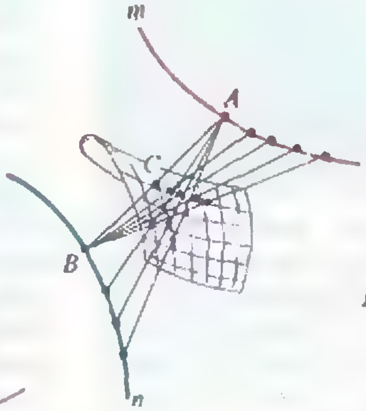


Рис. 7.

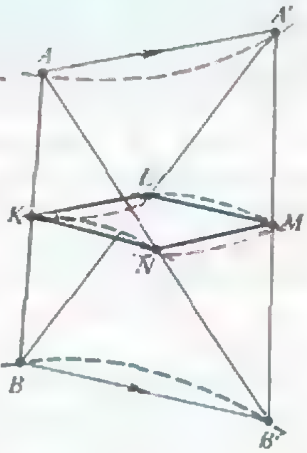


Рис. 8.

Действительно, пусть точки A и A' — *лежат на кривой* m, *а* B *и* B' — на кривой n (рис. 8). Середины соответствующих отрезков — точки K, L,

(Окончание см. на с. 47)

ПОЧЕМУ ЧЕЛОВЕК НЕ СТАЛ ВЕЛИКАНОМ

Д. СИГАЛОВСКИЙ

Кто из нас в детстве не читал о Гулливере, о его приключениях сперва в королевстве Лилипутия, а затем в королевстве Бробдингнег. В Лилипутии все предметы, звери, растения были совершенно такими же, как в нашем мире, но в двенадцать раз меньше. Зато в королевстве Бробдингнег все было в двенадцать раз больше, чем в привычном нам мире. Жизнь в обоих королевствах протекала так же, как в нашем мире в восемнадцатом веке, когда Джонатан Свифт писал свое «Путешествие Гулливера». А как вы думаете, могут ли в земных условиях существовать на самом деле Лилипутия и Бробдингнег? Почему человек не стал великаном?

Мы живем в мире, где действует тяготение. И размеры всего живого (и не только живого) на Земле так или иначе связаны с тяготением. А как оно сказалось бы на лилипутах и бробдингнегах? Физическое строение у них совершенно такое же, как у Гулливера, т. е. у обычного человека, только все линейные размеры у первых уменьшены в 12 раз, а у вторых — во столько же раз увеличены. Вес тела пропорционален его объему, поэтому вес великана из книги Свифта будет в $12^3 \approx 1700$ раз больше веса Гулливера, а вес лилипута — во столько же раз меньше. Значит, если обычный человек весит, скажем, 600 Н, то великан будет весить около 1 000 000 Н. Какой же скелет выдержит такой вес?

Это зависит от прочности костей. Прочность пропорциональна площади поперечного сечения, т. е. квадрату линейных размеров. Так что при прочих равных условиях кости великана будут только в 144 раза прочней костей человека, и поэтому на каждую кость будет приходиться нагрузка в 12 раз бо́льшая, чем у человека. (Представляете, как бы вы себя чувствовали, если бы на плечах у вас сидело 11 человек!) Это, кстати, понимал еще Галилей. Вот что он писал: «Если бы кто-нибудь пожелал сохранить в громадном великане те же пропорции конечностей, что и у обычного человека, то он должен был бы подыскать более твердый и более прочный материал для костей или согласиться на меньшую крепость великана по сравнению с человеком среднего роста; если бы великан был необыкновенно большой высоты, то он бы упал и был бы раздавлен собственной тяжестью».

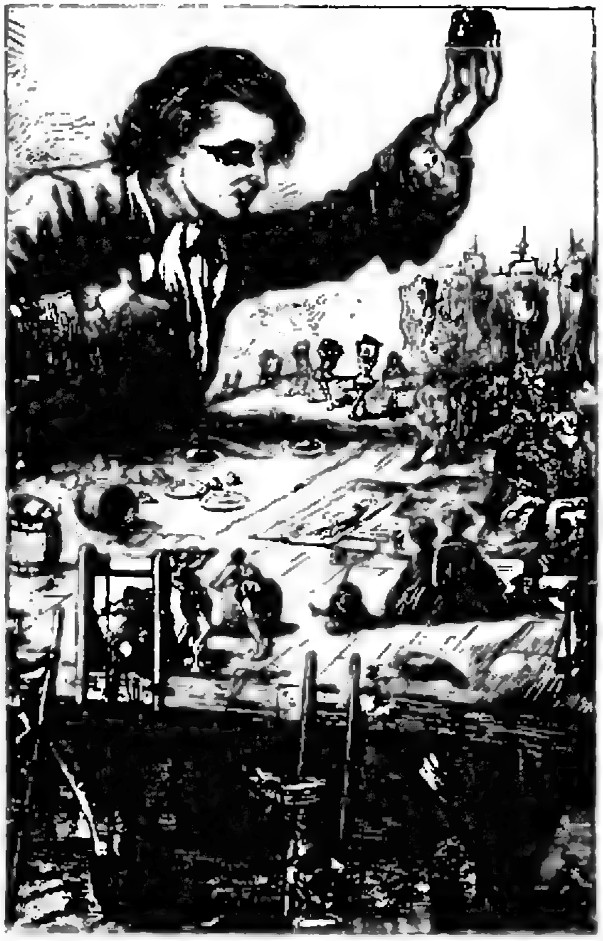
Теперь вы понимаете, почему на суше нет животных крупнее слона? А вот в океане живут и гораздо более крупные животные. В среде, где тяготение хотя бы частично компенсируется действием других сил, животные достигают огромных размеров. Поэтому в океане и развились такие гигантские млекопитающие, как китообразные, масса которых во много раз превышает массу самых крупных животных, обитающих на суше. Так, масса слона достигает 6 тонн, а масса кита может достигать и 100 тонн. Кстати, если сравнить кости близких по строению животных разных размеров, например льва и кошки, то окажется, что кости льва отнюдь не являются увеличенной копией костей кошки. В них нарушен масштаб изменений, они гораздо толще, чем полагалось бы при их длине.

Размер любых сооружений на Земле также ограничен прочностью применяемых материалов. Вес конструкции не должен превышать некоторой предельной величины, иначе она будет раздавлена собственным весом.

А вот в космосе нагрузка, которую испытывают конструкционные материалы, будет определяться уже не действием гравитационного поля Земли, а действием сил тяготения между частями конструкции. Если части эти очень велики и массивны, то при расчетах нужно учитывать силы тяготения между ними.

Итак, мы пришли к выводу, что существование великанов невозможно и причиной этого является тяготение. Но у лилипутов с точки зрения прочности скелета все обстоит благополучно; более того, у них даже имеется двенадцатикратный запас прочности. Выходит, чем меньше живое существо, тем оно прочнее. Почему же не существует теплокровных животных меньших, чем землеройка?

Именно потому, что они теплокровные. Теплокровное животное, в том числе человека, нельзя рассматривать как чисто механическую систему. При довольно значительных колебаниях температуры внешней среды теплокровные практически сохраняют постоянную температуру тела (за исключением состояния анабиоза, в которое в зимнее время впадают некоторые животные, например медведи). Постоянство температуры тела является важнейшим условием существования высокоорганизованной жизни. Мы все время излучаем тепло, теряем его при выдыхании нагретого в легких воздуха, за счет испарения влаги с поверхности тела, расходуем на совершение работы. Потерянную энергию мы восполняем пищей. Экспериментально установлено, что по отношению к живым организмам полностью справедливо первое начало термодинамики, иначе говоря — закон сохранения энергии. В теле животного при окислении пищевых продуктов освобождается такое же количество энергии, как и при простом сжигании этих продуктов до тех же конечных веществ вне организма. Только около трети химической энергии переваренной нами пищи превращается в мышечную энергию, бо́льшая же часть тратится на другие нужды — поддержание постоянной температуры тела, питание и возобновление тканей, образование жировых отложений («сберегательного банка» организма на случай голодовки или болезни). Любое превращение энергии в организме — будь то пищеварение или мышечная деятельность — завершается преобразованием в тепло. Это тепло непрерывно уходит в более холодную окружающую среду. Устанавливается тепловой баланс между организмом и окружающей средой.

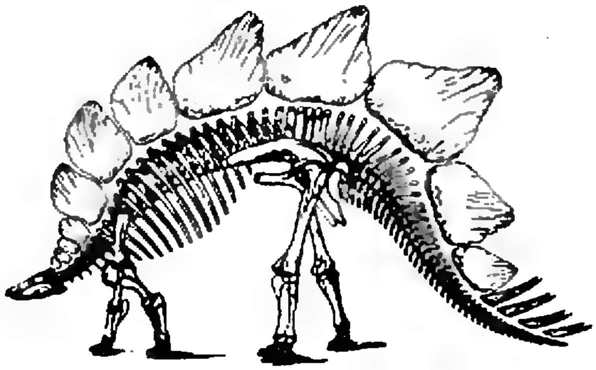


«Гольбасто момарен эвлем гердайло шефинмоллиоллигу, могущественнейший император Лилипутии» выделял Гулливеру столько еды и питья, сколько требовалось для прокормления 1728 лилипутов. А это ведь могло погубить Гулливера...

Размеры животного имеют самое непосредственное отношение к этому тепловому балансу. Образование тепла более или менее равномерно происходит в объеме тела, т. е. пропорционально кубу линейного размера. А теплоотдача происходит в основном через поверхность тела, и потому она пропорциональна квадрату линейного размера. Вы догадываетесь, к чему это может привести? Если одно животное крупнее другого в 10 раз, то при равной скорости образования тепла крупное животное должно «генерировать» в 1000 раз больше тепла, чем мелкое, а теплоотдача у крупного больше всего в 100 раз. Крупное животное может просто «зажариться» в собственной шкуре. Природа, однако, предусмотрительно «позаботилась» о том, чтобы этого не случилось,— у крупных животных обмен веществ протекает менее интенсивно и скорость образования тепла в теле у них меньше. А поскольку, как мы знаем, тепло в организме млекопитающих образуется в результате окисления пищи, то мерой образования тепла может служить потребление кислорода. Оказывается, мелкие животные потребляют в минуту воздух, объем которого близок к объему их тела, а чем животное крупнее, тем меньшую часть их собственного объема составляет объем вдыхаемого ими воздуха. Поэтому чем меньше животное, тем интенсивнее протекает у него обмен веществ, тем больше частота дыхания и сердцебиения.

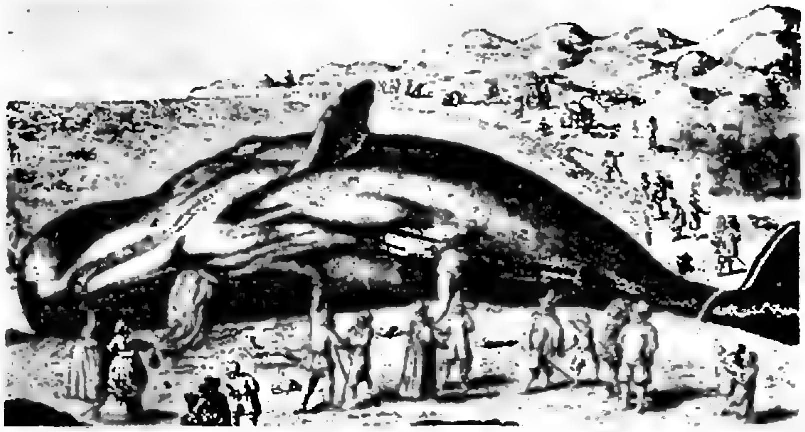
Но если у мелкого животного интенсивнее происходит обмен веществ, т. е. увеличивается скорость образования тепла в теле на единицу его массы, то «зажариться» в собственной шкуре должно как раз мелкое животное. Между тем у всех теплокровных животных температура тела примерно одинакова. Как же это объяснить?

С уменьшением размеров животного возрастает не только интенсивность образования тепла, но и интенсивность потерь. Это связано с тем, что с уменьшением размеров тела возрастает роль его поверхности по сравнению с объемом. Возьмем тот же пример: одно животное крупнее другого в 10 раз. Пусть их характерные линейные размеры соответственно 1 м и 0,1 м. Тогда отношение площади поверхности тела к его объему для крупного животного равно



единице, а для мелкого — десяти. А теплоотдача как раз и определяется площадью поверхности тела. (Кстати, именно поэтому дети мерзнут сильнее взрослых). Потерянное тепло, как мы знаем, восполняется в процессе химических реакций в организме. Поэтому для поддержания температуры тела, обеспечивающей нормальную жизнедеятельность, меньшие животные нуждаются в большем количестве пищи на единицу массы тела. Мелкие животные все время испытывают чувство голода и жажды. Это делает их беспокойными и подвижными, много времени они проводят в поисках пищи. Такое поведение как раз и характерно для мелких теплокровных, например грызунов. Потому-то на суше и не существует теплокровных меньших, чем землеройка, питающаяся насекомыми — меньшие теплокровные просто не успевали бы запасать и переваривать пищу.

Выходит, великана легче прокормить, чем лилипута? Легче, но только в мире великанов. Займемся опять расчетами. Скажем, обычный человек съедает в день трехсотграммовую булку. Это составляет примерно 1/200 часть его собственной массы. Так как потери энергии пропорциональны квадрату линейного размера, то потребность в пище в мире великанов в 144 раза больше нашей. А объем и вес всего съедобного возросли в 1700 раз. Значит, для утоления голода великану понадобится только 1/12 часть великаньей булки. Нетрудно подсчитать, что это будет всего около



Гипотез о причинах вымирания гигантских древних животных много, но факт остается фактом — исполины остались только в океане.

40 кг и при массе великана в 100 тонн составит лишь очень малую часть его собственной массы. Теперь посмотрим, как обстоит дело с питанием в мире лилипутов. Их потребность в пище в 144 раза меньше нашей, но объем и вес всего съедобного уменьшились в 1700 раз. Значит, чтобы насытиться, лилипуту нужно съесть 12 лилипутских булок, 12 порций супа и т. д.

Теперь обсудим еще один вопрос. Почему самые мелкие водные млекопитающие все же крупнее самых мелких теплокровных обитателей суши?

Дело в том, что водные млекопитающие, даже имеющие изолирующий жировой слой, отдают очень много тепла воде, и их существование становится возможным только при достаточно большом объеме тела.

Главным механизмом, регулирующим температуру тела, является его «центральное отопление» — система кровообращения. Кровь доставляет тепло от внутренних органов к капиллярам под кожей, а она уже отдает избыток тепла окружающему воздуху. Например, для человека в покое при температуре тела 37 °С и температуре среды 18 °С потери тепла распределяются таким образом: приблизительно 75 % теряется за счет излучения в инфракрасном диапазоне с длиной волны 9—10 мкм, остальное — за счет потовыделения и выдоха нагретого в легких воздуха. С повышением температуры среды потери тепла излучением уменьшаются: при 30 °С они составляют около 30 %. Перегрев организма при этом устраняется обильным потоотделением — на испарение каждого грамма влаги с поверхности кожи требуется около 2500 джоулей. Интересно отметить, что удельная мощность человека (т. е. мощность, приходящаяся на единицу его массы) составляет около 200 Вт/кг, что почти в 10 000 раз больше удельной мощности Солнца.

Система терморегуляции очень гибка и в условиях тропиков обеспечивает человеку возможность обходиться без одежды. Вообще организм человека и многих других животных лучше приспособлен к охлаждению, чем к перегреву. Снижение температуры тела на 10—12° еще не смертельно, тогда как при повышении температуры на 5—6° начинают сворачиваться белки. (Вот почему на медицинском термометре нет делений выше 42 °С.) Для человека смерть наступает при температуре тела выше 43 °С или ниже 25 °С. За миллионы лет эволюции человек «обзавелся» системой терморегуляторов, которые помогают ему поддерживать температуру на постоянном уровне.

Теперь вы понимаете, почему человек такой, какой он есть, а не великан и не лилипут?

Задачник „Кванта"

Задачи

M1231 — M1235, Ф1238 — Ф1242

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 сентября 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1231» или «Ф1238». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи Ф1240 и Ф1241 предлагались на заключительном этапе XXIV Всесоюзной олимпиады по физике (Вологда, 1990).

M1231. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость Oxy графики n квадратных трехчленов вида $y=ax^2+bx+c$ $(n=1, 2, 3,...)$?

Н. Васильев

M1232. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите следующие случаи:

а) p и q — взаимно простые числа;

б) p и q имеют наибольший общий делитель d.

Д. Фомин

M1233. В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна боковой стороне BC, H — середина основания AB. Пусть l — прямая, проходящая через H, а P и Q — точки пересечения прямой l с прямыми AD и BD соответственно. Докажите, что углы ACP и QCB равны или составляют в сумме 180°.

И. Шарыгин

M1234. Можно ли любой треугольник разбить а) на 7, б)* на 5 подобных между собой треугольников?

А. Сойфер (США)

M1235*. Пусть $p=2\cdot q+1$ — простое число. Докажите, что число $2^{3q}q!-(-1)^q(2q-1)!!$ делится на а) p; б) p^2; в) p^3 (при $p>3$). (Здесь $q!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot q$; $(2q-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2q-1)$.)

И. Вайнштейн

Ф1238. В середине длинной цилиндрической трубки с глицерином находится небольшой воздушный пузырек. Если поставить трубку вертикально, то пузырек будет двигаться с постоянной по величине скоростью $v_0=1$ см/с.

Трубку расположили горизонтально и разогнали ее вдоль длинной стороны до скорости $v=20$ м/с. Где остановится пузырек? Куда он сместится, если скорость плавно увеличить до 30 м/с? Где он окажется после того, как трубку затормозят?

А. Андрианов

Ф1239. В вертикальном теплоизолированном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0. Начнем сжимать газ, опуская поршень. После того, как совершили работу A, поршень отпустили, и он остановился в новом положении равновесия. Найти температуру T_x в этом состоянии.

В. Уздин

Ф1240. В схеме, приведенной на рисунке 1, емкости конденсаторов равны C, сопротивления резисторов R и

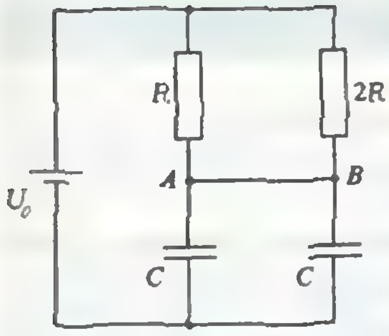


Рис. 1.

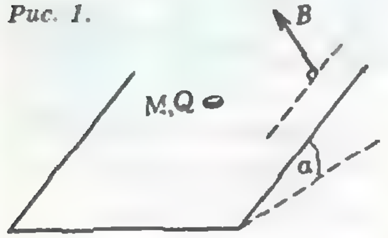


Рис. 2.

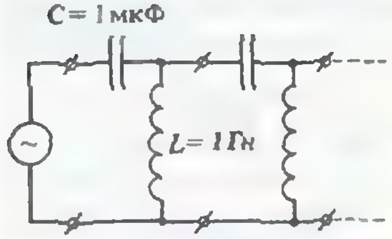


Рис. 3.

Задачник «Кванта»

$2R$. Какой заряд протечет через перемычку AB после подключения батарейки с напряжением U_0? А если между точками A и B включен резистор R? Все элементы считать идеальными.

А. Зильберман

Ф1241. На наклонной плоскости с углом α и коэффициентом трения μ лежит небольшая шайба массой M, на которой помещен заряд Q. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно наклонной плоскости, как показано на рисунке 2. Шайбу отпускают без начальной скорости. Определите величину и направление ее установившейся скорости.

А. Алексеев

Ф1242. Из нескольких одинаковых CL-звеньев, подключенных друг за другом, собрана цепь для измерений на частоте 50 Гц (рис. 3). К выходу последнего звена был подключен конденсатор, после чего ток, потребляемый всей цепью от источника, и разность фаз между этим током и приложенным напряжением перестали зависеть от числа подключенных звеньев. Какую емкость C_x имел подключенный конденсатор? Можно ли дать однозначный ответ на этот вопрос?

А. Зильберман

Решения задач

М1206—М1210, Ф1218—Ф1222

М1206. *В круге проведены два перпендикулярные друг другу диаметра AE и BF. На дуге EF взята точка C. Хорды CA и CB пересекают диаметры BF и AE соответственно в точках P и Q (рис. 1). Докажите, что площадь четырехугольника APQB равна квадрату радиуса круга.*

Одно из наиболее простых решений получается прямым вычислением по формуле $S_{APQB}=AQ\cdot BP/2$. Если $\angle CAE=\alpha$, а $\angle CBF=\beta$, то $AQ=AO+OQ=R(1+\operatorname{tg}\beta)$, $BP=R(1+\operatorname{tg}\alpha)$, где O — центр, а R — радиус данного круга, и

$$S_{APQB}=\frac{1}{2}R^2(1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta).$$

Теперь надо доказать, что величина в скобках равна 2, т. е. что $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)/(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=1$. В левой части

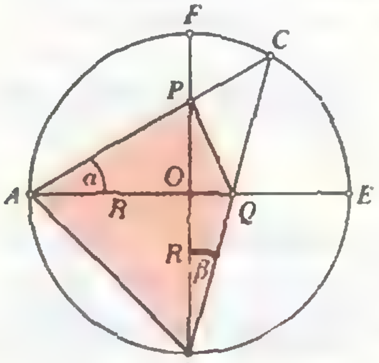


Рис. 1.

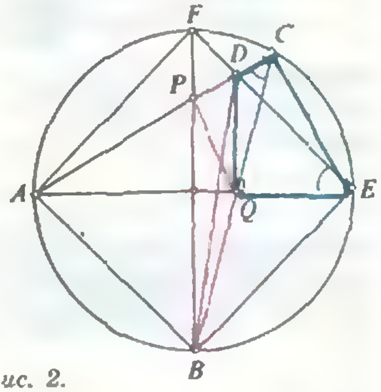


Рис. 2.

этого равенства стоит выражение для $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$. Остается заметить, что $\alpha+\beta=\angle CAE+\angle CBF=45^\circ$ (углы CBF и CAE опираются на дуги CF и CE, в сумме составляющие 90°), а $\operatorname{tg} 45^\circ=1$.

Наметим и «чисто геометрическое» решение. Пусть D — точка пересечения хорд AC и EF (рис. 2). Тогда, очевидно, $S_{ABD}=S_{ABEF}/2=R^2$, и мы должны доказать, что $S_{ABD}=S_{ABPQ}$, т. е. что $S_{BDP}=S_{BQP}$. Точки Q, E, C и D лежат на одной окружности ($\angle QED=45^\circ=\angle QCD$); поэтому $\angle DQE=180^\circ-\angle DCE=90^\circ$. Следовательно, прямые DQ и BP параллельны, а значит, треугольники BDP и BQP равновеликие.

В. Дубровский

М1207. *Докажите, что для любых x, y и любого натурального m выполняется неравенство*

$$(x^2+y^2)^m \geqslant 2^m x^m y^m + (x^m-y^m)^2.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что числа x и y положительны (поскольку $|x|^m|y|^m \geqslant x^m y^m$). Поделим обе части неравенства на $x^m y^m$ и положим $t=x/y$, тогда оно примет вид

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)^m \geqslant 2^m+\left(\sqrt{t^m}-\frac{1}{\sqrt{t^m}}\right)^2,$$

или

$$f_m(t)=\left(t+\frac{1}{t}\right)^m-t^m-\frac{1}{t^m}\geqslant 2^m-2.$$

Последнее неравенство докажем индукцией по m.

При $m=1$ оно, очевидно, выполнено. Пусть теперь известно, что $f_{m-1}(t)\geqslant 2^{m-1}-2$ при всех $t>0$. Тогда

$$f_m(t)=f_{m-1}(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)+t^{m-1}+\frac{1}{t^{m-1}}\geqslant$$
$$\geqslant(2^{m-1}-2)\cdot 2+2=2^m-2$$

(здесь использовано известное неравенство $a+1/a\geqslant 2$ при $a>0$), что и требовалось.

Неравенство превращается в равенство только при $t=1$, т. е. $x=y$.

В. Дубровский

М1208. *Последовательность чисел h_n задана условиями $h_1=1/2$ и $h_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-h_n^2}}{2}}$ для каждого n. Докажите, что сумма любого количества чисел h_n не превосходит 1,03.*

Чтобы решить задачу, надо догадаться сделать тригонометрическую подстановку: если $h_n=\sin\alpha$, $0<\alpha<\pi/2$, то

$$h_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sin\alpha/2.$$

По условию $h_1=1/2=\sin\pi/6$, следовательно, $h_n=\sin(\pi/3\cdot 2^n)$. В силу известного неравенства $\sin x<x$ (при $0<x<\pi/2$)

$$h_1+h_2+\ldots+h_n=\frac{1}{2}+\sin(\pi/3\cdot\ 2^2)+\ldots+\sin(\pi/3\cdot\ 2^n)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3\cdot 2^2}+\ldots+\frac{\pi}{3\cdot 2^n}<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}<$$

$$<(1+3{,}15)/2<1{,}03.$$

И. Акулич

M1209*. *Числовой треугольник, первая строка которого состоит из N единиц, вторая — из $N-1$ целых чисел, составляется по следующему правилу: для любых четырех чисел m, n, q, p, стоящих в вершинах ромбика (n и p — соседние числа в строке), выполняется равенство $np=mq+1$. Докажите, что*

а) если все числа в треугольнике отличны от 0, то все они целые;

б) если все числа в треугольнике натуральные, то в нем встречается не менее $N/4$ различных чисел.

а) Легко проверить, что в первых четырех строках стоят целые числа; на рисунке 1

$$d=ab-1,\ e=bc-1,\ fb=(ab-1)(bc-1)-1=$$
$$=ab^2c-ab-bc,\ \text{т. е.}\ f=abc-a-c\ (\text{если}\ b\neq 0).$$

Для следующих строк будем доказывать утверждение по индукции. Пусть все числа на рисунке 2, кроме x, целые (и отличны от 0). Так как $bc=ae+1$, $de=bg+1$, $ef=ch+1$, то

$$gh=(ae+1)gh-aegh=bcgh-aegh=$$
$$=(de-1)(ef-1)-aegh=e(def-f-d-agh)+1.$$

С другой стороны, $gh=ex+1$, т. е. (если $e\neq 0$) $x=def-f-d-agh$ — целое число.

б) Будем считать N четным (для нечетного N рассуждение аналогично). Рассмотрим квадрат, состоящий из $N/2$ «строк» и $N/2$ «столбцов» (наклоненных под углом 45°, рис. 3).

Докажем, что если всего различных чисел в квадрате меньше чем $N/4$, что найдутся две «строки», в пересечении которых с двумя разными «столбцами» стоят пары равных чисел. Действительно, в каждой «строке» есть по крайней мере $N/4$ пар равных чисел, значит, всего таких пар по крайней мере $(N/4)(N/2)=N^2/8$. Каждой такой паре сопоставим пару «столбцов», в которых стоят равные числа пары; поскольку всего пар «столбцов»

$$\frac{1}{2}\,\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)<\frac{N^2}{8},$$

найдутся нужные две равные пары чисел (в вершинах голубого прямоугольника на рис. 3). Но равенство $mq=np$ невозможно, поскольку всегда $mq<np$; для квадратиков 1×1 это неравенство очевидно, а в общем случае оно получается перемножением соответствующих неравенств для всех квадратиков, составляющих голубой прямоугольник: все «лишние» буквы сокращаются.

Д. Фомин

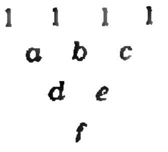


Рис. 1.

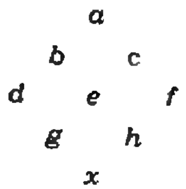


Рис. 2.

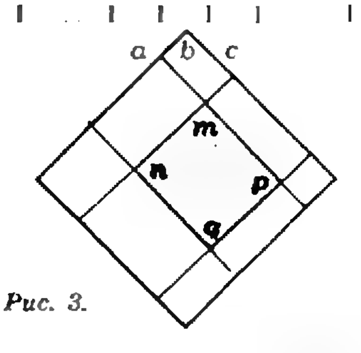


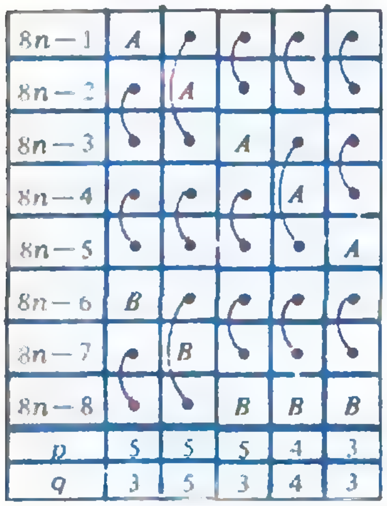
Рис. 3.

M1210*. *Имеется кучка из M спичек и лист бумаги, на котором написано число M. Двое играют в такую*

Ответ: начинающий игрок (назовем его A) выигрывает во всех случаях, когда M не делится на $m=4[k/2]$, т. е. на $m=4$ при $k=2$ и на $m=8$ при $k=5$; если M кратно m, то выигрывает второй игрок (назовем его B).

игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок берет из кучки себе или возвращает в кучку от 1 до k спичек и записывает на листе, сколько спичек стало в кучке. (Вначале все имеющиеся спички лежат в кучке — у игроков спичек нет.) Проигравшим считается тот, кто не может сделать ход или вынужден записать число, уже имевшееся на листе ранее. Кто из игроков выигрывает при правильной игре, если

а) $k=2$; б) $k=5$?



A — первый ход игрока A в восьмерку ($8n-1$, $8n-8$), B — ответ игрока B; дужками показано разбиение на пары; p — запас спичек у игрока B, создаваемый после первого ответа, q — запас спичек, достаточный для повторных ответов.

Идея выигрышной стратегии игрока B при M кратном m ($M=ms$) относительно проста. Все числа от $M-1$ до 0 разбиваются на пары, и на каждый ход соперника игрок отвечает выписыванием парного числа. Сложность в том, чтобы гарантировать возможность ответа на любой ход, а для этого при $k>2$ разбиение приходится производить постепенно, в зависимости от ходов A.

Пусть теперь M не кратно m: $M=ms+n$. Если $1\leqslant n\leqslant k$, то игрок A первым ходом берет n спичек, а дальше действует по выигрышной стратегии второго игрока для $M=ms$. Если же $M=ms+n$, где $k<n<m$, то A сразу начинает играть по этой стратегии для $M=m(s+1)$, условно считая, что первым ходил B, взяв $m-n$ спичек ($m-n<2k-k=k$). Это обеспечило бы выигрыш A, даже если бы у B действительно были эти $m-n$ спичек, и тем более, когда их у B нет.

Теперь объясним подробнее, как должен играть второй игрок при $M=ms$, если а) $k=2$ и б) $k=5$.

а) Разобьем числа от $M-1$ до 0 на четверки последовательных чисел ($M=4s$), а каждую четверку — на две пары вида ($4n-1$, $4n-3$) и ($4n-2$, $4n-4$). На каждый ход A игрок B отвечает парным числом, поэтому новую четверку всегда будет «открывать» A, выписывая одно из двух ее старших чисел — $4n-1$ или $4n-2$. После своего ответа на этот ход игрок B приобретет 2 спички, которые он зарезервирует для ответа на возможный повторный ход A в эту четверку (если это будет ход $4n-3$ или $4n-4$). Таким образом, для B всегда обеспечен ответный ход, а значит, и общий выигрыш.

б) Стратегия второго игрока при $k=5$ в целом такая же, как и при $k=2$. По-другому только делается разбиение на пары. Из чисел от 0 до $M-1$ образуются не четверки, а группы по $m=8$ штук. Каждая восьмерка разбивается на пары после того, как будет выписано какое-то число из нее. Как и в п. а), это будет одно из $k=5$ старших чисел этой восьмерки и выпишет его игрок A. Ответ B и разбиение на пары для всех пяти вариантов приведены на рисунке. Коротко можно сказать так: в ответ на ход, «открывающий» новую группу, игрок B выписывает наименьшее возможное число из этой группы, а оставшиеся ее $m-2$ чисел разбивает на пары соседних (без учета двух выписанных). Это правило годится для всех значений k. Запаса спичек, создаваемого после первого ответного хода B, будет достаточно, чтобы обеспечить возможность ответа на все дальнейшие ходы A в эту группу; при $k=5$ это видно непосредственно из рисунка (запас состоит из 5, 4 или 3 спичек), а в общем случае это несложно проверить, причем здесь важно, что $m=4[k/2]$.

Таким образом, ответ, сформулированный в начале решения, справедлив при всех значениях k.

К. Кохась

Ф1218. *Цилиндр массой M находится между подвижной горизонтальной поверхностью и закрепленной под углом α наклонной плоскостью (рис. 1). Коэффициент трения цилиндра о горизонтальную поверхность* μ_1, *о наклонную —* μ_2. *Горизонтальную поверхность равномерно двигают влево. Какую минимальную силу приходится для этого прикладывать?*

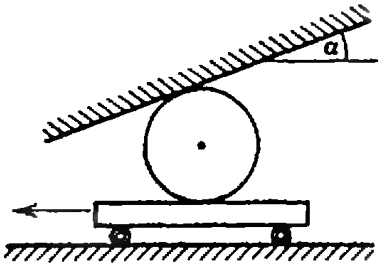


Рис. 1.

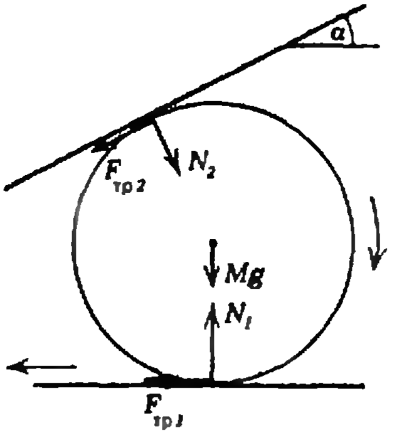


Рис. 2.

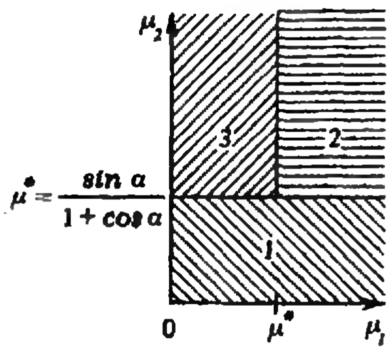


Рис. 3.

Очевидно, что у цилиндра есть две возможности: вращаться или не вращаться. Предположим первое. Тогда при равномерном движении горизонтальной поверхности влево цилиндр будет вращаться с постоянной угловой скоростью. Следовательно, сумма моментов действующих на цилиндр сил относительно его центра равна нулю; поэтому (см. рис. 2) $F_{тр1}=F_{тр2}$. Кроме того ускорение центра масс цилиндра и, следовательно, векторная сумма действующих на него сил тоже равны нулю. Проектируя на горизонтальную ось, получаем

$$N_2\sin\alpha-F_{тр2}\cos\alpha-F_{тр1}=0. \tag{1}$$

Проекция на вертикальную ось дает

$$N_1-Mg-N_2\cos\alpha-F_{тр2}\sin\alpha=0. \tag{2}$$

Обозначим $F_{тр1}=F_{тр2}=F$. Тогда из равенства (1) находим

$$F=N_2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \tag{3}$$

а из равенства (2) получаем

$$N_1-Mg-N_2\cos\alpha-N_2\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}=0,$$

или

$$N_1=Mg+N_2. \tag{4}$$

В зависимости от соотношения между μ_1, μ_2 и α возможны два случая.

Случай 1. Пусть $\mu_1N_1>\mu_2N_2$. При этом цилиндр вращается, и $F=\mu_2N_2$. Тогда из равенства (3) следует, что

$$N_2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\mu_2N_2.$$

Возникают две возможности:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}>\mu_2$; при этом $N_2=0$ и $F=0$. Условие $\mu_1N_1>\mu_2N_2$ соблюдается для любых μ_1 и μ_2.

б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}<\mu_2$; при этом происходит заклинивание цилиндра. Условие $\mu_1N_1>\mu_2N_2$ соблюдается, если $\mu_1>\mu_2$.

Случай 2. Пусть $\mu_1N_1<\mu_2N_2$. Тогда цилиндр не вращается, и $F=\mu_1N_1$. Из равенств (3), (4) получаем

$$\mu_1N_1=N_2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}, \text{ или } \mu_1(Mg+N_2)=N_2\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

откуда

$$N_2=\frac{\mu_1Mg}{\sin\alpha/(1+\cos\alpha)-\mu_1}.$$

Снова возникают две возможности:

а) $\mu_1\geqslant\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; при этом происходит заклинивание. Условие $\mu_1N_1<\mu_2N_2$ соблюдается, если $\mu_1<\mu_2$.

б) $\mu_1<\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; тогда

$$F=\mu_1 N_1=\mu_1(N_2+Mg)=\frac{\mu_1 Mg}{1-\mu_1(1+\cos\alpha)/\sin\alpha}.$$

Условие $\mu_1 N_1<\mu_2 N_2$ выполняется, когда

$$\mu_1(Mg+N_2)<\mu_2 N_2,\text{ или }\mu_2>\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Представим окончательный ответ графически.

Изобразим плоскость (μ_1, μ_2) и разделим ее на три области (рис. 3). В области *1* (случай 1, *а*) искомая сила

$$F=0.$$

В области *2* (случаи 1, *б* и 2, *а*) происходит заклинивание, и

$$F\to\infty.$$

В области *3* (случай 2, *б*)

$$F=\frac{\mu_1 Mg}{1-\mu_1(1+\cos\alpha)/\sin\alpha}.$$

М. Цыпин

Ф1219. *Погремушка в виде полого стального шара объемом 0,2 л содержит внутри 300 стальных шариков радиусом 1 мм. Ее трясут так, что шарики внутри непрерывно сталкиваются между собой и со стенками, издавая ужасный шум. Считая скорость погремушки равной 1 м/с, оцените число соударений между шариками за 1 минуту. Излучаемая звуковая мощность равна 10 Вт, выделением тепла при ударах пренебречь.*

Заметим, что 10 ватт — это очень большая мощность (обычные громкоговорители имеют КПД порядка долей процента и при подводимой к ним мощности, скажем, 100 ватт излучают мощность намного меньше 1 ватта), так что трясти придется очень энергично. Сделаем оценку минимальной частоты, с которой нужно трясти погремушку.

Пусть за время τ движения погремушки в одну сторону внутри все успевает установиться, и центр масс шариков получает скорость v_0. Тогда среднюю силу $F_{\text{ср}}$ можно оценить из соотношения для импульсов — за время τ импульс всех шариков изменится на $2Nmv_0$:

$$F_{\text{ср}}\tau=2Nmv_0,\quad F_{\text{ср}}=2Nmv_0/\tau.$$

Мощность этой силы должна быть равна $P=10$ Вт:

$$F_{\text{ср}}v_0=P,\quad \tau=2Nmv_0^2/P.$$

Массу шарика найдем, зная его радиус r и плотность ρ:

$$m=4\pi\rho r^3/3.$$

Тогда

$$\tau=0{,}002\text{ с}.$$

Ясно, что «голыми руками» так трясти не получится — нужно применить какое-нибудь механическое устройство (на самом деле мы дали оценку времени τ сверху — движение не обязательно успевает установиться).

Обсудим теперь физическую модель явления. Подкачка энергии в систему происходит за счет внешних сил — средняя энергия шариков, ударяющихся о подвижную стенку, меняется, а скорость корпуса остается по условию постоянной. Из этих соображений можно посчитать работу внешних сил (учитывая изменение энергии шариков и число ударов о каждую из сторон корпуса — набегающую и убегающую).

Будем считать, что в установившемся режиме средняя квадратичная скорость шариков остается практически неизменной, существенно превышая по модулю скорость корпуса, а скорость центра масс шариков практически равна нулю. Эти предположения мы в конце должны будем проверить.

Ясно, что, ударившись о набегающую стенку, шарик увеличит свою энергию, а после удара об убегающую — уменьшит ее. Движение корпуса происходит вдоль одной оси — изменяется при ударе только эта составляющая скорости. Поэтому вместо сферы можно взять цилиндр такого же поперечного сечения S, движущийся вдоль своей оси, и учесть удары шариков о его торцы. Для теряющего энергию шарика

$$\Delta E_1 = m u_x^2/2 - m(u_x - 2v_0)^2/2,$$

для получающего

$$\Delta E_2 = m(u_x + 2v_0)^2/2 - m u_x^2/2,$$

где u_x — проекция скорости шарика на ось цилиндра. Расчет числа ударов о торец проведем стандартным способом:

$$N_1 = nS(u_x - v_0)\Delta t/2, \quad N_2 = nS(u_x + v_0)\Delta t/2,$$

где n — «концентрация» шариков в сосуде.

В установившемся случае средняя энергия системы остается постоянной; значит, изменение энергии шариков за единицу времени и есть мощность P. Рассчитаем скорости шариков из этого соотношения:

$$P\Delta t = \Delta E_2 N_2 - \Delta E_1 N_1 = 4nSmv_0^2 u_x,$$

$$u_x = P/(4nmSv_0^2) \approx 30 \text{ м/с}.$$

Это — одна компонента скорости, а средняя квадратичная скорость шарика

$$u = u_x\sqrt{3} \approx 50 \text{ м/с}.$$

Она и в самом деле существенно превышает скорость корпуса. А предположение о том, что скорости шариков не успевают стать в среднем равными скорости корпуса, должно проверяться иначе. Поскольку для такого установления требуется достаточно много ударов между шариками, нужно найти длину свободного пробега и время между ударами. Собственно, это и требуется в задаче.

Длина свободного пробега

$$\lambda = V/(4\pi r^2 N) \approx 5 \text{ см}.$$

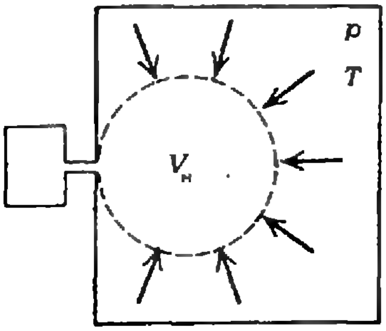
За время пролета этого расстояния каждый шарик в среднем испытывает одно соударение; значит, всего за это время произойдет $N^2/2$ ударов (в каждом ударе участвуют два шарика). Окончательно число ударов за время $\tau = 1$ мин равно

$$N_{\text{общ}} = 2\pi r^2 N^2 u\tau/V \approx 10^7.$$

А. Зильберман

Автор признателен А. Ходулеву за полезное обсуждение условия задачи и ее решения.

Ф1220. *Небольшой баллончик с остатками неона для пополнения подсоединяют на короткое время к большому резервуару, где давление p в два раза выше, чем в баллончике. Баллончик отсоединяют сразу после его заполнения. Каким будет окончательное давление газа в баллончике? Теплообменом газа со стенками баллончика при его заполнении пренебречь.*



Сначала в баллончике находится газ под давлением $p/2$ при температуре T:

$$\frac{p}{2}V=\nu RT,$$

где V — объем баллончика, ν — количество газа. После подсоединения из большого резервуара в баллончик перейдет порция газа ν_1, которая доведет давление внутри баллочника до значения p при первоначально установившейся температуре T_x:

$$pV=(\nu+\nu_1)RT_x.$$

Для расчета примем, что «наружный» газ совершил над вошедшей порцией газа некоторую работу при постоянном давлении p, и за счет этой работы увеличилась внутренняя энергия газа в баллончике. Это позволит нам записать соотношение, в которое войдут полное количество газа в баллончике и установившаяся температура.

Через некоторое время температура внутри баллончика уравняется с температурой в резервуаре, а давление p_x установится окончательно — оно упадет по отношению к p во столько же раз, во сколько упадет температура газа:

$$\frac{p_x}{p}=\frac{T}{T_x}.$$

Теперь проведем расчеты.

Выделим (см. рисунок) тот объем $V_н$ «наружного» газа, который затем окажется внутри баллончика, и запишем выражение для работы:

$$A=pV_н.$$

Объем $V_н$ выразим из уравнения состояния газа:

$$V_н=\frac{\nu_1 RT}{p}.$$

Поскольку неон — одноатомный газ, изменение внутренней энергии газа, оказавшегося в баллончике, можно записать в виде

$$\Delta U=\frac{3}{2}(\nu+\nu_1)RT_x-\frac{3}{2}(\nu+\nu_1)RT.$$

Из закона сохранения энергии

$$A=\Delta U,$$

учитывая уравнения состояния газа, получим

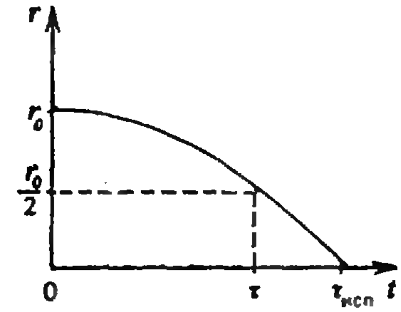
$$T_x=5/4\ T.$$

Тогда окончательно

$$p_x=pT/T_x=0{,}8\ p.$$

Е. Бутиков

Ф1221. *В прошлом веке русский ученый Б. И. Срезневский исследовал испарение капель жидкости в воздухе. Пусть это испарение происходит при постоянной разности температур за счет подвода тепла к капле от окружающей среды. Считая поток тепла на единицу поверхности шаровой капли пропорциональным разности температур и обратно пропорциональным радиусу капли, найти зависимость радиуса капли от времени. За какое время окончательно испарится капля, радиус которой уменьшился в два раза за 10 минут?*



Согласно условию задачи, за малое время Δt к поверхности шаровой капли площадью $4\pi r^2$ подводится количество теплоты

$$\Delta Q = \frac{\alpha(T_в - T_к)}{r} 4\pi r^2 \Delta t.$$

Здесь r — радиус капли, α — постоянный коэффициент, зависящий от теплопроводности окружающей среды, $T_в$ и $T_к$ — температуры воздуха и капли ($T_в > T_к$). Это тепло затрачивается на испарение некоторой массы жидкости Δm. Если обозначить L удельную теплоту испарения жидкости, то можно записать закон сохранения энергии в виде

$$L\Delta m = -\Delta Q = -\alpha(T_в - T_к)4\pi r \Delta t$$

(знак минус в правой части указывает на то, что с течением времени масса жидкости убывает).

Но $m = 4/3\pi r^3 \rho_0$, где ρ_0 — плотность вещества капли; поэтому

$$\Delta m = 4\pi r^2 \rho_0 \Delta r.$$

Подставив последнее соотношение в уравнение для энергии, получим

$$r\Delta r = -\frac{\alpha(T_в - T_к)}{L\rho_0}\Delta t,$$

или

$$(r^2)' = -\beta,$$

где $\beta = 2\alpha(T_в - T_к)/(L\rho_0)$ — положительная постоянная.

Отсюда видно, что квадрат радиуса капли линейно убывает со временем:

$$r^2 = r_0^2 - \beta t,$$

где r_0 — значение радиуса в начальный момент времени $t=0$, а сам радиус убывает по закону (см. рисунок)

$$r = \sqrt{r_0^2 - \beta t}.$$

По условию, за время $\tau = 10$ мин $= 600$ с радиус капли уменьшился вдвое, т. е. стал $r_0/2$, так что

$$\frac{r_0^2}{4} = r_0^2 - \beta\tau,$$

$$\beta = \frac{3}{4}\,\frac{r_0^2}{\tau}.$$

Обозначим время полного испарения через $\tau_{исп}$. Оно находится из условия

$$r = 0 \text{ при } t = \tau_{исп},$$

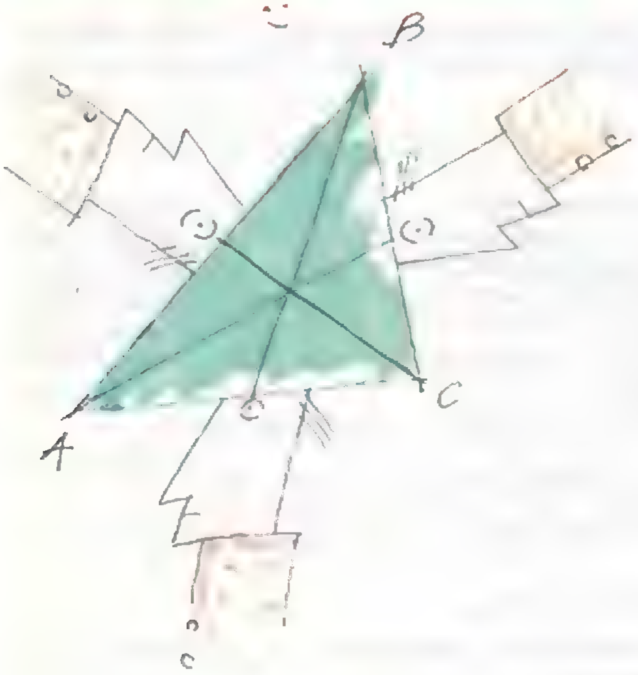
откуда

$$\tau_{исп} = \frac{r_0^2}{\beta} = \frac{4}{3}\tau = 800 \text{ с}.$$

А. Стасенко

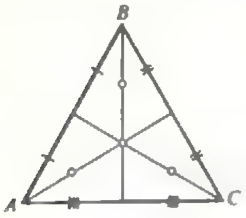
(Окончание см. на с. 42)

„Калейдоскоп Кванта"

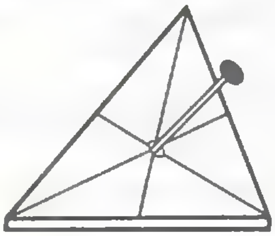


Медианы треугольника

Как известно, медианами треугольника называются отрезки, соединяющие его вершины с серединами противоположных сторон. Все три медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 1:2.

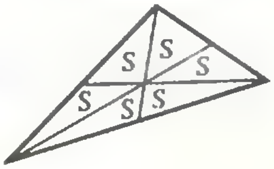


Точка пересечения медиан является также центром тяжести треугольника. Если подвесить картонный треугольник в точке пересечения его медиан,



то он будет находиться в состоянии равновесия.

Любопытно, что все шесть треугольников, на которые всякий треугольник разбивается своими медианами, имеют одинаковые площади. Медианы треугольника через его стороны выражаются так:

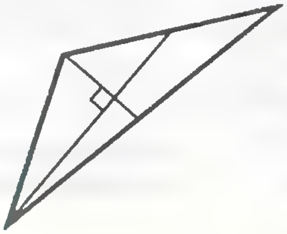


$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2},$$

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}}{2},$$

$$m_c = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}}{2}.$$

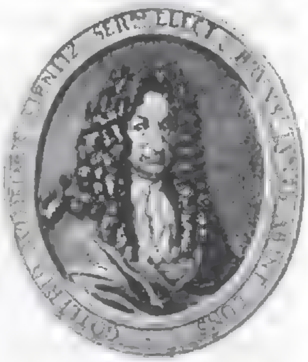
Если две медианы перпендикулярны, то сумма квадратов сторон, на которые они опущены, в 5 раз больше квадрата третьей стороны.



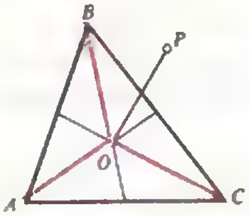
Построим треугольник, стороны которого равны медианам данного треугольника, тогда медианы построенного треугольника будут равны 3/4 сторон первоначального треугольника.

Данный треугольник назовем первым, треугольник из его медиан — вторым, треугольник из медиан второго — третьим и т. д. Тогда треугольники с нечетными номерами (1, 3, 5, 7, ...) подобны между собой и треугольники с четными номерами (2, 4, 6, 8, ...) также подобны между собой.

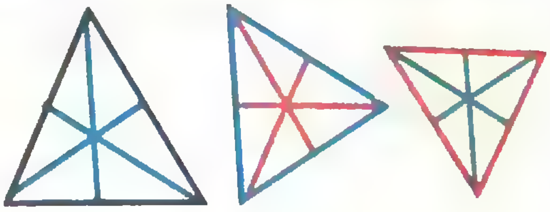
Сумма квадратов длин всех медиан треугольника равняется 3/4 суммы квадратов длин его сторон.



Знаменитый немецкий математик Г. Лейбниц обнаружил замечательный факт: сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до вершин треугольника, лежащего в этой плоскости, равняется сумме квадратов расстояний от точки пересечения медиан до его вершин, сложенной с утроенным квадратом расстояния от точки пересечения медиан до выбранной точки.

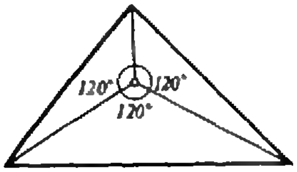


Из этой теоремы следует, что точка на плоскости, для которой сумма квадратов расстояний до вершин данного треугольника является минималь-

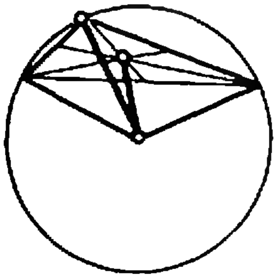


ной,— это точка пересечения медиан этого треугольника.

В то же время минимальная сумма расстояний до вершин треугольника (а не их квадратов) будет для точки, из которой каждая сторона треугольника видна под углом в 120°, если ни один из углов треугольника не больше 120° (точка Ферма), и для вершины тупого угла, если он больше 120°.



Из теоремы Лейбница и предыдущего утверждения легко найти расстояние d от точки пересечения медиан до центра описанной окружности. Действительно, это расстояние по теореме Лейбница равно корню квадратному из одной трети разности между суммой квадратов расстояний от центра описанной окружности до вершин треугольника и суммой квадратов расстояний от точки пересечения медиан до вершин треугольника. Получаем, что $d=\sqrt{R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}}$.



Попробуйте решить следующие задачи на построение:
Постройте с помощью циркуля и линейки треугольник по:

1.1. Двум сторонам и медиане, опущенной на третью сторону.

1.2. Двум сторонам и медиане, опущенной на одну из них.

2.1. Стороне и двум медианам, опущенным на другие стороны.

2.2. Стороне и двум медианам, одна из которых опущена на эту сторону.

3.1. По трем медианам.

Нетрудно совершить построение с помощью циркуля и линейки в аналогичных задачах, полученных из этих заменой слова «медиана» словом «высота», но при замене слова «медиана» словом «биссектриса» указанное построение в ряде случаев произвести оказывается невозможно.

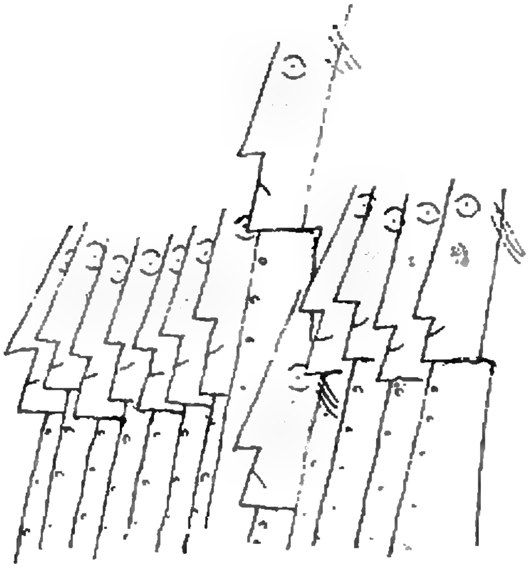
Точка M пересечения медиан треугольника ABC является единственной точкой треугольника, для которой сумма векторов $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ равна нулю. Координаты точки M (относительно произвольных осей) равны средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника. Из этих утверждений можно получить доказательство теоремы о медианах. Кстати, в первом номере «Кванта» за этот год вы можете найти целых шесть доказательств этой теоремы.

Медианы бывают не только в геометрии, но и в математической статистике. Пусть нужно найти среднее значение некоторого набора чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Можно, конечно, за среднее принять среднее арифметическое $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.

Но иногда это неудобно. Допустим, что нужно определить средний рост второклассников Москвы. Опросим наугад 100 школьников и запишем их рост. Если один из ребят в шутку скажет, что его рост равен километру, то среднее арифметическое записанных чисел окажется слишком большим. Гораздо лучше в качестве среднего взять *медиану* чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Предположим, что чисел — нечетное количество, и расставим их в неубывающем порядке. Число, оказавшееся на среднем месте, называется медианой набора. Например, медиана набора чисел 1, 2, 5, 30, 1, 1, 2 равна 2 (а среднее арифметическое значительно больше — оно равно 6). Статью о применении понятия медианы в статистике мы планируем поместить в одном из ближайших номеров «Кванта».

Оказывается, можно говорить о медианах не только для треугольника, но и для тетраэдра — дело в том, что отрезки, соединяющие центры тяжести граней тетраэдра с противоположными вершинами, всегда пересекаются в одной точке. В этой точке пересекаются еще четыре отрезка, соединяющие середины противоположных ребер (эти отрезки иногда называют бимедианами). Эта точка — центр тяжести тетраэдра. В точке пересечения медианы тетраэдра делятся в отношении 3:1. Это можно доказать, например, из механических соображений, поместив в каждую из четырех вершин тетраэдра грузики единичной массы.



Ф1222. *Катушку индуктивности с L=10 Гн подключают к сети 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (рис. 1). Нарисовать график тока в катушке в зависимости от времени. Чему равно максимальное значение тока? Как зависит вид графика от момента подключения цепи к сети?*

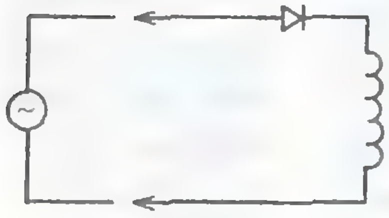


Рис. 1.

Действительно, вид графика тока в катушке существенно зависит от момента подключения цепи к сети.

Так, в случае если напряжение в сети в этот момент отрицательное, диод, включенный в цепь, будет закрыт до тех пор, пока напряжение не сменит знак. Затем диод откроется и будет открыт до того момента, когда ток в катушке упадет до нуля — пока катушка обладает энергией, она не даст диоду закрыться (создавая необходимое напряжение — ЭДС самоиндукции).

Теперь построим график (рис. 2). Сначала тока в катушке нет. Когда диод откроется, напряжение на катушке будет равно напряжению сети. Такой же будет и ЭДС самоиндукции. Учтем ее связь с производной тока по времени: $\mathcal{E}_i = -LI'$ и найдем ток как первообразную. Таким образом, график зависимости тока в катушке от времени представляет собой приподнятую над осью синусоиду. Характерно, что диод будет открыт все время (если угодно, он закрывается лишь в моменты, когда $I=0$).

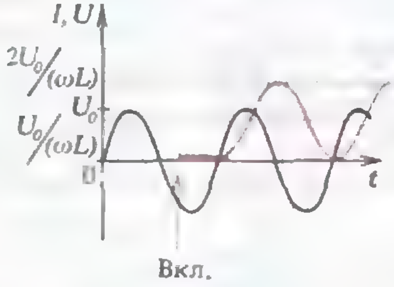


Рис. 2.

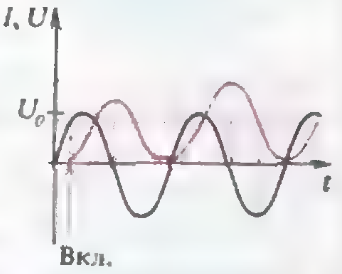


Рис. 3.

Если же в момент подключения цепи к сети напряжение сети положительное, диод откроется сразу и закроется лишь в тот момент, когда ток в катушке упадет до нуля. Дальше все будет, как в уже рассмотренном первом случае. Окончательный график представлен на рисунке 3.

З. Рафаилов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1186 — М1200, Ф1193 — Ф1207, справились с задачами М1186, М1187, М1193. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Акимов (Евпатория) 88—90; *А. Акопян* (Ереван) 88—91, 95; *А. Алексеев* (Донецк) 88—91, 94; *Р. Алиев* (Джалилабад) 88, 90; *С. Альперсон* (Одесса) 89; *Д. Андриенко* (Киев) 90, 91, 94, 96, 97; *А. Ахмедов* (Баку) 89, 95—97; *Е. Балдин* (Новосибирск) 90; *В. Барановский* (Омск) 88—92, 94, 95; *Е. Беркович* (Киев) 90; *А. Бородин* (Донецк) 88—90; *В. Ванчурин* (Москва) 88—91, 94, 97, 99; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 90; *Ю. Водопьянов* (Конотоп) 90; *К. Волченко* (Донецк) 88—91; *И. Воскобойник* (Киев) 90; *И. Герман* (Ленинград) 88, 90, 91, 96, 98; *А. Глебов* (Новосибирск) 89, 90; *В. Голоенко* (Киев) 89, 90; *А. Гордиященко* (п. М. Рогань Харьковской обл.) 97; *П. Гринфельд* (Москва) 88—92, 95, 97, 99; *Д. Гринштейн* (Омск) 91, 95; *А. Гурман* (Одесса) 88, 90; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 90; *С. Дориченко* (Берегово) 90; *И. Егорова* (Ленинград) 91, 94, 95; *И. Жук* (д. Дягильно БССР) 90; *В. Зязев* (Киров) 89, 90; *Н. Ивченко* (Киев) 94; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) 88—90, 96—00; *С. Иноземцев* (Омск) 89—91, 95; *А. Ионес* (Ленинград) 99; *Р. Исмаилов* (Ленинград) 89, 90; *С. Кимбар* (д. Дягильно БССР) 97; *С. Коваценко* (Винница) 88—90, 92, 94—99; *А. Козачко* (Винница) 88, 90—92, 94—99; *Д. Козлов* (Ленинград) 88, 90, 91, 95—99; *А. Копылов* (п. Черноголовка Московской обл.) 90; *А. Костенко* (Клайпеда) 96; *А. Кротенко* (Киев) 90; *А. Кудрявцева* (Киев) 90; *Г. Ланской* (Гомель) 90; *А. Майлыбаев* (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 90, 94—97; *М. Марченко* (Гайворон) 89, 90; *А. Медведев* (Владимир) 96—00; *К. Мишачев* (Липецк) 88—90, 95—97; *А. Морозова* (Одесса) 88; *Р. Мучник* (Винница) 88—92, 94—99; *А. Насыров* (Обнинск) 88—92, 94, 95; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 88—91, 94—99; *Г. Ониани* (Кутаиси) 95, 96; *В. Острик* (Мариуполь) 88, 90, 95, 96, 99; *Т. Панов* (Киев) 90, 92, 94; *А. Пачев* (Москва) 96, 97; *Е. Перельман* (Ленинград) 88—91, 96, 98, 99; *Б. Петренко* (Днепропетровск) 90; *И. Пивень* (Киев) 90; *Э. Пикялите* (Вильнюс) 96; *М. Плотников* (Вологда) 90; *Т. Погуляева* (Москва) 94, 95; *А. Разин* (Одесса) 90; *К. Саввиди* (Ереван) 90; *А. Савченко* (с. Мошны Черкасской обл.) 96; *И. Селищев* (п. Манченки Харьковской обл.) 88—91, 95; *С. Тайманов* (Раменское) 89, 90; *М. Темкин* (Москва) 88—92, 94, 95, 97, 99; *С. Тихонов* (Воронеж) 88—90; *А. Уханов* (Евпатория) 89, 90; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 90, 91, 95—99; *М. Хасин* (Донецк) 88—91, 96; *Г. Хачатрян* (с. Бердик АрмССР) 90; *Ю. Хорошилов* (Челябинск) 90; *В. Цветков* (София, НРБ) 89, 90; *А. Чашка* (п. Владимирец Ровненской обл.) 89; *Г. Шаповалов* (Киев) 91; *А. Шиндлер* (Феодосия) 88; *В. Эйгес* (Москва) 95; *А. Яремчук* (Артемовский) 97.

Физика

А. Абжанов (Алма-Ата) 03; *Л. Анкудинов* (Киев) 94; *С. Антипин* (Северодвинск) 93—97, 99—01; *С. Ахметзянова* (Белорецк) 05; *Т. Бакеев* (Алма-Ата) 93—96, 98, 00, 01, 03—07; *В. Бакулин* (Новосибирск) 93, 95—97, 00, 04, 06; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 93—97, 00, 03—07; *С. Бардина* (Старый Оскол) 93, 94, 96, 03—05, 07; *Р. Баскаков* (Красноярск) 95—97, 00, 01; *Д. Баско* (Москва) 03, 04; *М. Беднюк* (Аша) 94; *М. Беломытцев* (Москва) 05; *С. Бобровник* (Черновцы) 93—96; *В. Бондаренко*; (Кузнецовск) 00; *Р. Бруожис* (Вильнюс) 96; *Р. Бучко* (Черновцы) 93, 96; *Г. Важенин* (Свердловск) 93—97; *А. Варданян* (Ереван) 03, 04; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 93—97, 04, 05, 07; *А. Викол* (Нерюнгри) 93—96, 04, 05; *С. Витко* (Брест) 05; *А. Воронин* (Старый Оскол) 93, 96, 03—05, 07; *О. Воротникова* (Красноярск) 96, 05, 07; *И. Воскобойник* (Киев) 96, 03, 05—07; *Г. Выгон* (Москва) 94, 96, 01, 04—07; *В. Высоцкий* (Киев) 93, 94, 96, 97, 01, 03—07; *А. Гадисов* (Баку) 04; *К. Галичский* (Северодвинск) 93—07; *А. Гвоздев* (Рига) 93, 94, 03; *В. Головко* (Киев) 94; *П. Гребнев* (Кузнецовск) 00; *А. Гринчук* (д. Мохро Брестской обл.) 93, 96, 97, 03, 05, 07; *Д. Грязных* (Челябинск) 93—97, 99, 01, 03—06; *В. Губин* (Новосибирск) 93, 96, 97, 03, 07; *О. Гусар* (Канев) 93, 94, 96; *Ю. Гуц* (Ровно) 93—97, 04, 05, 07; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 96; *С. Демба* (Старый Оскол) 93, 94, 96, 03, 04, 07; *Н. Демчук* (Здолбунов) 93, 96, 97, 03—05; *С. Диброва* (Киев) 93, 96, 03—07; *Р. Димитров* (Варна, НРБ) 93, 95—97, 00, 03, 04, 07; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 03—05, 07; *О. Дойникова* (Старый Оскол) 96, 03, 04; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 93, 94, 96, 97; *А. Дубовик* (Брест) 96, 03—05, 07; *М. Емлин* (Свердловск) 96; *П. Жаврид* (Минск) 03—05, 07; *С. Жаров* (Ростов) 93; *А. Жук* (Ровно) 99—01; *Д. Жуковский* (Брест) 96, 05; *В. Жуликов* (ст. Рязанская Краснодарского кр.) 03, 05; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 93, 03—05, 07; *М. Зеленфройнд* (Бобруйск) 93, 96, 03, 04; *В. Злобов* (Старый Оскол) 93, 96, 03—05, 07; *Ф. Ибрагимов* (Баку) 93—97, 00; *Н. Ивченко* (Киев) 93, 96, 03—05; *А. Исенев* (Усть-Каменогорск) 03—05, 07; *И. Кабаев* (Вязники) 94, 96; *Д. Кабыш* (Москва) 03—06; *Т. Калита* (Киев) 93, 96, 03—05, 07; *К. Калюжный* (Одесса) 96, 97; *И. Кацман* (Киев) 05, 07; *А. Каширин* (Старый Оскол) 03, 04, 07; *С. Кельман* (Алма-Ата) 93, 95—97, 99, 00, 03—05, 07; *К. Кладько* (Харьков) 94—97; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 93, 96, 00, 04, 05; *М. Ковалев* (Губкин) 93—97; *С. Коваль* (Гомель) 93—97, 00, 01, 03—05, 07; *В. Козлов* (Старый Оскол) 93, 96, 03, 04, 07; *М. Коляпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 93, 96, 97, 99, 00, 03—06; *Ю. Контиевский* (Каушаны) 07; *А. Короновский* (Саратов) 03, 04; *В. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 97; *С. Костюк* (Коломна) 94; *В. Кутузов* (Рига) 93, 94, 96, 97, 03; *А. Либунец* (Одесса) 95, 96; *М. Лазарев* (п. Никель Мурманской обл.) 04; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 93, 94, 96, 97; *А. Литвак* (Киев) 95, 06; *В. Лобанцов* (Грозный) 93; *А. Ляпин* (Нальчик) 93—96, 00, 03, 04, 07; *В. Мавзовин* (Саратов) 05; *В. Макаров* (Кировское) 00; *Ю. Марьин* (Евпатория) 93, 96; *И. Мартин* (Таллинн) 99, 00; *А. Матюк* (Киев) 05; *Ю. Матюнин* (Вольск) 94—97; *Н. Мацко* (Киев) 03—07; *Р. Машковский* (Киев) 05; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 05, 07; *Р. Мизюк* (Ровно) 94—97, 03—05, 07; *Д. Миров* (Оренбург) 04, 05, 07; *О. Мирошниченко* (Луцк) 93; *Е. Мищенко* (Черновцы) 93, 96, 97; *А. Муравьев* (Свердловск) 03—05, 07; *Ю. Мусатенко* (Киев) 05; *В. Мытько* (Ленинград) 93—97, 99—01, 03—06; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 05, 06; *Т. Насардинов* (Грозный) 93, 94; *А. Нежуренко* (Киев) 03; *И. Нестеренко* (Старый Оскол) 05, 07; *Н. Никончук* (Брест) 93; *И. Новиков* (Калининград) 93; *Д. Омецинский* (Киев) 93—97, 99, 00, 03—07; *А. Орловский* (Киев) 93—97; *Д. Островский* (Ленинград) 96; *А. Павленко* (Краматорск) 93, 94, 96, 03, 05, 07; *А. Павлощук* (Киев) 96, 97, 99, 00, 03, 05; *Ю. Пайвин* (Харьков) 05; *В. Парфенов* (Львов) 04, 05; *Ю. Парфенов* (Москва) 06; *Г. Перадзе* (Тбилиси) 93, 94, 96, 03, 04, 06; *Н. Петрова* (Старый Оскол) 05, 07; *И. Пилюгин* (Алма-Ата) 93, 95—97, 99, 00, 03—06; *А. Погребняк* (Киев) 96, 03, 05, 07; *С. Подпрятов* (Киев) 93, 94, 05; *И. Полищук* (Москва) 03—07; *В. Полищук* (Канев) 93, 94, 96, 97, 99, 03—05, 07; *С. Польшин* (Харьков) 97, 03, 05—07; *В. Попов* (Ростов) 04, 05; *Е. Призант* (Одесса) 93—97; *В. Пузанов* (Донецк) 93, 95; *А. Распереза* (Брест) 94, 96, 97, 03, 04; *Х. Рахимов* (Шават) 93; *Г. Розенталь* (Киев) 03, 05, 06; *А. Рыбалочка* (Киев) 93, 96, 03—05; *Н. Рябова* (Харьков)

96, 97; *А. Савин* (Горловка) 96, 97; *А. Савченко* (с. Мошны Черкасской обл.) 05, 06; *У. Сапаев* (Шават) 93; *Р. Сеннов* (Москва) 03—05; *А. Скабелин* (Барановичи) 93—98, 00, 01, 03—07; *А. Смирнов* (Москва) 04; *А. Снежко* (Киев) 03—07; *Ю. Спектор* (Киев) 95—97, 00, 03—05, 07; *А. Стрелец* (Ленинград) 04; *Д. Супрун* (Минск) 03—05; *С. Тайманов* (Раменское) 93, 96; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 93—97, 03—07; *М. Титов* (Киев) 05; *С. Тихонов* (Воронеж) 93, 96; *А. Тохтаев* (Чарджоу) 05; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 03, 05; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 93, 94, 96, 03—05, 07; *Д. Трошин* (Загорск) 96; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 03—05, 07; *А. Фридлянд* (Саратов) 93—95; *А. Харламов* (Киев) 96; *А. Холод* (Бердянск) 93—95, 97, 03—05, 07; *Р. Храбров* (Северодвинск) 93—95, 03—05, 07; *А. Христиченко* (Краматорск) 93, 94, 96; *Е. Чашечкина* (п. Черноголовка Московской обл.) 93, 94, 96, 97; *Л. Чернышев* (Москва) 04, 05; *А. Чистый* (Брест) 96; *Д. Чокин* (Алма-Ата) 93—97, 06; *С. Чупакин* (Ростов) 03, 05, 07; *Е. Шагаров* (Грозный) 93, 96, 03, 04, 07; *А. Шагинян* (Ростов) 97; *Г. Шаповалов* (Киев) 05—07; *С. Шаракин* (Солигорск) 03, 04, 06; *А. Шехтер* (Бельцы) 93, 95—97, 03—05, 07; *С. Шинкевич* (Березники) 93—97, 99—01, 03—07; *А. Шнайдман* (Киев) 96, 03—05; *А. Шпагин* (Мариуполь) 94; *И. Шуляк* (Киев) 94, 96, 00, 03—07; *К. Шурунов* (Куйбышев) 93, 94, 03—05, 07; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 93, 96, 03—05; *М. Энтин* (Тула) 94—07; *И. Яковлев* (Москва) 05, 06; *А. Яремчук* (Артемовский) 93, 05.

Вниманию наших читателей

Магазин № 1 «Академкнига» г. Уфы высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Абрамов С. А., Зима Е. В. *Начала информатики.* (Б-чка программиста). — 1989. — 1 р.

Калужнин Н. А., Сушанский В. И. *Преобразования и перестановки.* (Проблемы науки и технического прогресса). — 1985. — 55 к.

Кибернетика. Микрокалькуляторы в играх и задачах. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1986. — 55 к.

Компьютер и задачи выбора. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1989. — 80 к.

Компьютеры и нелинейные явления. Информатика и современное естествознание. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1988. — 45 к.

Котов Ю. В. *Как рисует машина.* — 1988. — 60 к.

Левинштейн М. Е., Симин Г. С. *Барьеры.* (От кристалла до интегральной схемы). (Б-чка «Квант»). — 1987. — 75 к.

Меледин Г. В. *Физика в задачах. Экзаменационные задачи с решениями.* Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. — 1989. — 50 к.

Попов Е. П. *Робототехника и гибкие производственные системы.* (Проблемы науки и технического прогресса). — 1987. — 65 к.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. *Задачи по стереометрии.* (Б-чка математического кружка). — 1989. — 75 к.

Простое и сложное в программировании. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1988. — 35 к.

Силин А. А. *Трение и мы.* (Б-чка «Квант»). — 1987. — 35 к.

Фролова Г. В. *Педагогические возможности ЭВМ. Опыт. Перспективы. Проблемы.* (Наука и технический прогресс). — 1988. — 70 к.

Эксперимент на дисплее. Первые шаги вычислительной физики. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). — 1989. — 80 к.

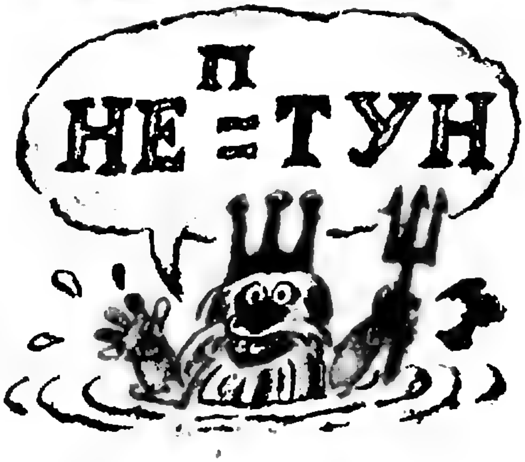
Заказы направляйте по адресу: 450059, Уфа, ул. Р. Зорге, 10, магазин № 1 «Академкнига».

„Квант" для младших школьников

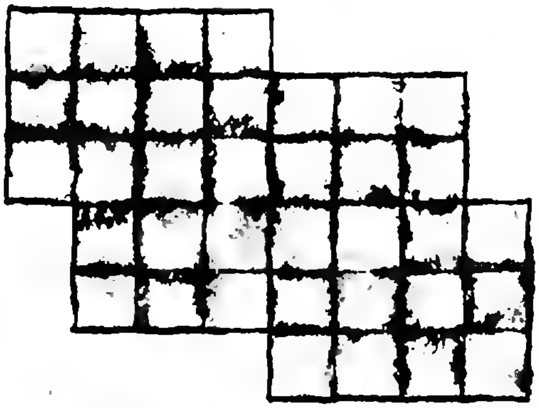
Задачи

1. Некий торговец каждый год увеличивал на одну треть свое состояние, уменьшенное на сто фунтов стерлингов, которые он ежегодно затрачивал на свою семью. Через три года торговец обнаружил, что его состояние удвоилось. Сколько денег было у торговца в начале?

2. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



3. Разрежьте фигуру на рисунке по линиям клеток на четыре равные фигуры.



4. Какое четырехзначное число обладает такими свойствами: оно само квадрат целого числа и числа, образованные первыми двумя цифрами и последними двумя цифрами,— также полные квадраты?

5. Гулливер во время пребывания в Лапуте интересовался денежной системой этой страны. Ему рассказали, что в стране используются монеты в 1, 2 и 4 лапти, сделанные из чистого золота. Монеты круглые, причем если положить монету в 1 лаптю на монету в 2 лапти так, чтобы ее край проходил через центр двухлаптевой монеты, то точки пересечения краев монет лежат на диаметре однолаптевой монеты. То же соотношение размеров у монет в 2 и 4 лапти. Веса монет пропорциональны их номиналам. Толщина однолаптевой монеты — 1 мм. Какова толщина остальных монет?

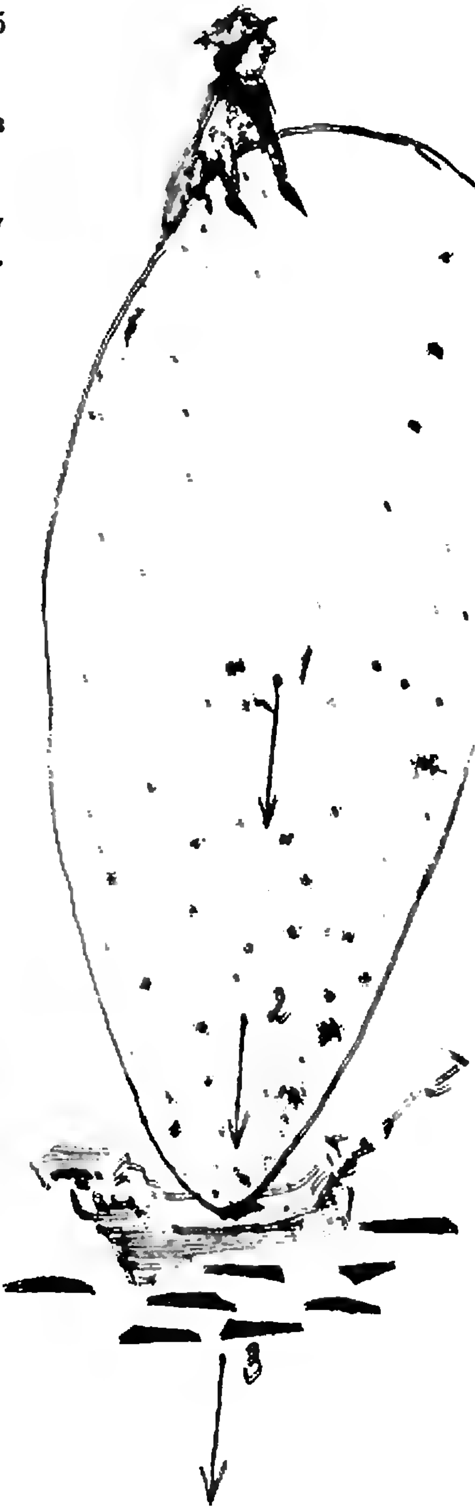
Задача 1 принадлежит великому английскому математику и физику И. Ньютону; остальные задачи нам предложили Н. Антонович, В. Вьюн, А. Бабоян, А. Савин.

ИСКУСНЕЕ КОЛУМБА

Я. ПЕРЕЛЬМАН

«Христофор Колумб был великий человек,— писал один школьник в своем классном сочинении.— Он открыл Америку и поставил яйцо». Оба подвига казались юному школьнику одинаково достойными изумления. Напротив, американский юморист Марк Твен не видел ничего удивительного в том, что Колумб открыл Америку: «Было бы удивительно, если бы он не нашел ее на месте».

А я осмеливаюсь думать, что не многого стоит второй подвиг великого мореплавателя. Вы знаете, как Колумб поставил яйцо? Попросту придавил его к столу, сломав скорлупу в нижней части. При этом он, разумеется, изменил форму яйца. А как поставить яйцо, не меняя его формы? Этой задачи отважный моряк так и не решил.



Между тем это несравненно легче, чем открыть Америку и даже самый крошечный островок. Укажем вам три способа: один — для вареных яиц, один — для сырых, третий — для тех и других.

Чтобы поставить вареное яйцо, достаточно закрутить его пальцами одной руки или между ладонями рук как кубарь: яйцо завертится стоймя и будет сохранять такое положение до тех пор, пока вертится. После двух-трех проб опыт удается довольно легко.

Поставить указанным способом сырое яйцо нельзя; сырые яйца, как вы, вероятно, уже заметили, вертятся плохо. В этом состоит, между прочим,

---

Перепечатывается из книги Я. И. Перельмана «Для юных физиков», изданной в 1929 году.

безошибочный способ отличить, не ломая скорлупы, вареное яйцо от сырого. Жидкое содержимое сырого яйца не увлекается в такое же быстрое вращение, как скорлупа, и поэтому сильно тормозит его. Приходится искать другой способ ставить яйца. Способ этот существует. Надо сильно взболтать яйцо несколько раз: при этом желток разрывает свою нежную оболочку и разливается внутри яйца. Если затем вы поставите яйцо на его тупой конец и подержите в таком положении некоторое время, то желток — более тяжелый, нежели белок,— стечет вниз яйца и там соберется. Благодаря этому центр тяжести яйца опустится ниже, и яйцо приобретет бо́льшую устойчивость, нежели не подвергнутое такой обработке.

Наконец, есть третий способ поставить яйцо. Яйцо ставят, например, на пробку закупоренной бутылки, а на него помещают пробку с воткнутыми в нее двумя вилками. Вся эта «система» (как выразился бы физик) довольно устойчива и сохраняет равновесие даже при осторожном наклонении бутылки. Но почему же пробка и яйцо не падают? По той же причине, почему не падает карандаш, отвесно поставленный на конец, если в него воткнуть перочинный нож. «Центр тяжести системы лежит ниже точки опоры»,— пояснил бы физик. Это значит, что точка, к которой приложена сила тяжести, расположена ниже того места, на которое система опирается. Вы можете испытать этот закон равновесия на многих примерах, соединяя предметы так, чтобы тяжелые части были ниже точки опоры: предметы будут устойчиво держаться в самых непривычных для глаза положениях.

Итак, в искусстве ставить яйца вы обладаете тремя преимуществами перед Колумбом. В деле же открытия новых материков у него перед вами всего одно преимущество: только то, что он открыл Америку.

Сети Чебышева

(Начало см. на с. 24)

M и N — лежат на построенной поверхности, причем пары точек (K, L) и (N, M) лежат на двух кривых одного, а пары (K, N) и (L, M) — на двух кривых другого семейства, образующих сети. При этом

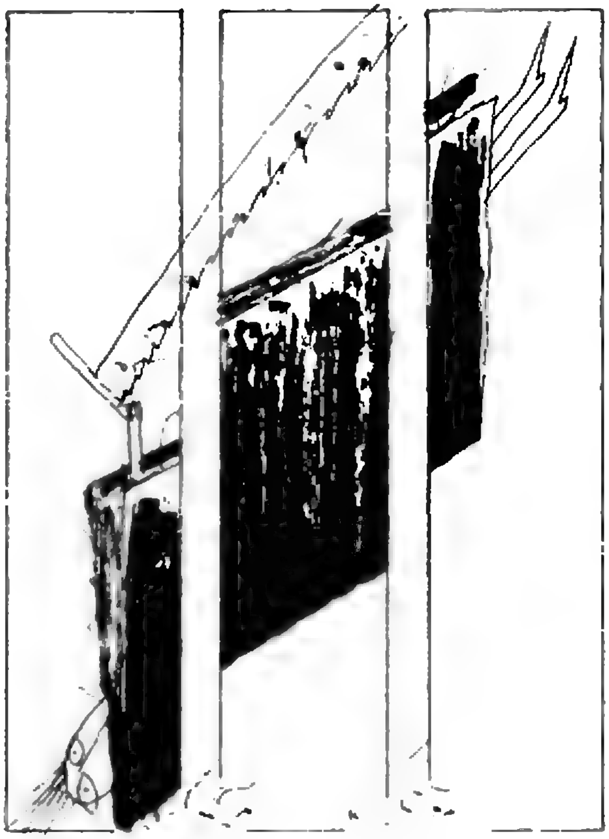
$$\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{NM} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{KN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{LM}.$$

Значит, кривая сети NM получается из кривой KL сдвигом в пространстве на вектор $\overrightarrow{KN}$, а кривая LM — сдвигом кривой KN на вектор $\overrightarrow{KL}$. Поэтому их длины равны, что и требуется.

В качестве упражнения предлагаем вам убедиться, что поверхность на рисунке 7 получается параллельным переносом в пространстве кривой одного из семейств сети вдоль кривой другого семейства. Поэтому то, что получается, называется *поверхностью переноса*. Предлагаем вам также убедиться, что если кривые m и n лежат в одной плоскости, то построенная сеть Чебышева совпадет с сетью, изображенной на рисунке 5.

Мы познакомили вас с некоторыми задачами, связанными с такой простой вещью, как обычная ткань. О других — рассказано в статье «Текстильная геометрия» в этом номере журнала.



Школа в „Кванте"

В этом разделе мы обычно публикуем небольшие заметки для учащихся 9—11 классов. В заметках разъясняются наиболее трудные для понимания вопросы школьного курса или предлагаются дополнительные интересные материалы.

Приводим полный список статей раздела «Школа в «Кванте» (в скобках указаны номер журнала и последние цифры соответствующего года).

Математика

9 класс

«Таблица составных чисел» (9—84),
«Где ошибка?» (10—84),
«Об одном способе решения некоторых уравнений» (11—84),
«Где ошиблись Петя и Вова?» (12—84),
«Еще 13 доказательств о биссектрисе» (2—85),
«Об одном способе задания окружности» (7—86),
«Формула Герона» (10—86),
«Геометрические преобразования в планиметрических задачах» (12—86),
«Выручает описанная окружность» (2—87),
«Признак делимости на числа вида» (2—87),
«Преобразования плоскости в задачах на построение» (8—87),
«Сумма углов» (2—88),
«Геометрические преобразования Часть I: Движения» (2—89),
«Геометрические преобразования Часть II: Преобразования подобия» (3—89),
«Шесть доказательств теоремы о медианах» (1—90),
«Уравнения, которые удается решить» (2—90).

10 класс

«Простой прием в непростых задачах» (9—84),
«Еще один прием самоконтроля» (10—84),
«Три решения одной задачи» (11—84)
«Геометрия помогает решать уравнения» (12—84),
«Отражение кривых и преобразования формул» (1—85),
«О теореме Лагранжа» (2—85),
«Задачи на сравнение чисел» (2—86),
«Какой же ответ?» (2—86),
«Неравенство Коши—Буняковского» (8—87),
«О разрезаниях многоугольников и теореме Эйлера» (2—88).

11 класс

«Кто же прав?» (9—84),
«Надо ли делать проверку?» (10—84),
«Двугранные и трехгранные углы» (12—84),
«С помощью обратной функции» (5—85),
«Векторы в геометрических задачах» (10—85),
«Метод интервалов» (12—85),
«Производная логарифма» (4—86),
«Формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$» (6—86),
«Где ошибка?» (10—86),
«Лишние условия в конкурсных задачах» (2—87),
«Первый замечательный предел» (4—87),
«Формулы Виета» (4—87),
«Основные теоремы» (10—87),
«Сумма углов сферического многоугольника» (2—88),
«Ферма ищет экстремумы...» (10—88),
«Производная сложной и обратной функции» (4—89),
«Средние линии» (6—89),
«Правильные многогранники и повороты» (10—89),
«Геометрия или алгебра» (6—90).

Физика

9 класс

Механика

«О выборе координатной оси» (9—83),
«Основная задача кинематики» (9—88),
«Траектория, путь, перемещение» (9—84),
«Легко ли описывать движение?» (9—87),
«Об одном стихотворении А. С. Пушкина» (10—84),
«Относительность движения» (9—89),
«Стробоскопический эффект и измерение ускорения» (9—85),
«Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении» (10—83),
«О графике прямолинейного равноускоренного движения» (10—83),
«Вокруг одной задачи» (9—87),
«Поговорим о средней скорости» (9—86),
«Закон нечетных чисел» для свободного падения тел» (12—84),

«Формулы кинематики для вращательного движения» (11—83),
«Кинематика вращательного движения» (11—86),
«Как решается основная задача механики?» (2—84),
«Инерция и инертность» (11—85),
«Как «открыть» второй закон Ньютона?» (11—84),
«Какой из трех законов Ньютона важнее?» (1—85),
«О законах Ньютона и «свободе воли» (5—89),
«Закон всемирного тяготения» (11—87),
«Как зависит g от глубины?» (3—90),
«Вращение Земли и ускорение свободного падения» (1—84),
«Об одной удивительно живучей ошибке» (1—88),
«Сила и деформация» (12—83),
«Что произойдет, если исчезнет трение?» (5—90),
«Вязкое трение» (3—87),
«О швартовке, трении и формуле Эйлера» (5—88),
«Равнодействующая — как ее найти?» (11—12—88),
«Когда к телу приложены параллельные силы» (2—85),
«Конус трения» (1—86),
«О простых машинах» (4—85),
«Закон Архимеда» (1—87),
«О судьбе некоторых понятий механики» (5—86),
«Что такое центр масс» (3—88),
«Почему не скользит мешок?» (5—89),
«Работа, энергия и архимедова сила» (3—84),
«Импульс и кинетическая энергия» (5—85),
«Закон сохранения энергии» (5—88),
«Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений» (1—89),
«Вторая космическая скорость» (3—86),
«Столкновения тел» (4—84),
«Законы сохранения и системы отсчета» (5—87),
«Закон Бернулли» (5—84),
«О законе колебательного движения» (9—83),
«Гармонические колебания. Сложение колебаний» (9—84),
«Гармонические колебания и равновесие» (9—87),
«Уравнение волны» (11—84),
«О музыкальных звуках и их источниках» (9—85),
«Энергия и громкость звука» (12—83),
«Физика музыкальной гармонии» (5—87).

10 класс

Молекулярная физика. Тепловые явления

«Простой способ определения размеров молекул» (9—83),
«Масса и количество вещества, *или* Об одной «ошибке» Ньютона» (10—84),
«Силы молекулярного взаимодействия» (1—87),
«Абсолютная температура» (9—88),
«Давление идеального газа» (10—83),
«Давление газа в сосуде» (9—87),
«Температура. Теплота. Теплоемкость» (11—83),
«Расширение газа в пустоту» (11—87),
«Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины» (9—85),
«Тепловой насос» (11—86),
«Физический смысл универсальной газовой постоянной» (10—83),
«Реальный газ и его уравнение состояния» (11—12—88),
«Об агрегатных состояниях вещества» (9—84),
«О явлениях переноса» (9—86),
«Газ превращается в жидкость» (11—84),
«О силах поверхностного натяжения» (12—83),
«Сколько бывает состояний у вещества?» (1—89),
«Симметрия и физические свойства кристаллов» (11—89).

Основы электродинамики

«Два вида электричества» (1—84),
«Диэлектрики, полупроводники, полуметаллы, металлы» (2—84),
«Проводники в электростатическом поле» (1—88),
«Электрический диполь и его электрический момент» (11—85),
«Энергия электрического поля» (5—86),
«Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики» (12—84),
«Метод электростатических изображений» (3—87),
«Силовые линии и теорема Гаусса» (3—90),
«Как в металле протекает электрический ток?» (3—88),
«Первый источник электрического тока» (1—86),
«Об электрическом сопротивлении проводников» (5—90),
«Правила Кирхгофа» (1—85),
«О числе Фарадея и удельном заряде заряженной частицы» (2—85),
«Открытие электрона» (3—85),
«Компьютер — в холодильнике?!» (5—90),
«Магнитный момент тока» (3—86),
«Электрическое и магнитное поля» (3—84),
«Диа- и парамагнетики» (4—85),
«Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях» (4—84),
«Сила Лоренца и эффект Холла» (3—89),
«Полярные сияния» (5—89),
«Правило Ленца» (5—88),
«Электромагнитная индукция и принцип относительности» (11—87),
«Токи смещения» (5—84),
«Как работает электродвигатель?» (5—87),
Скин-эффект (5—85).

11 класс

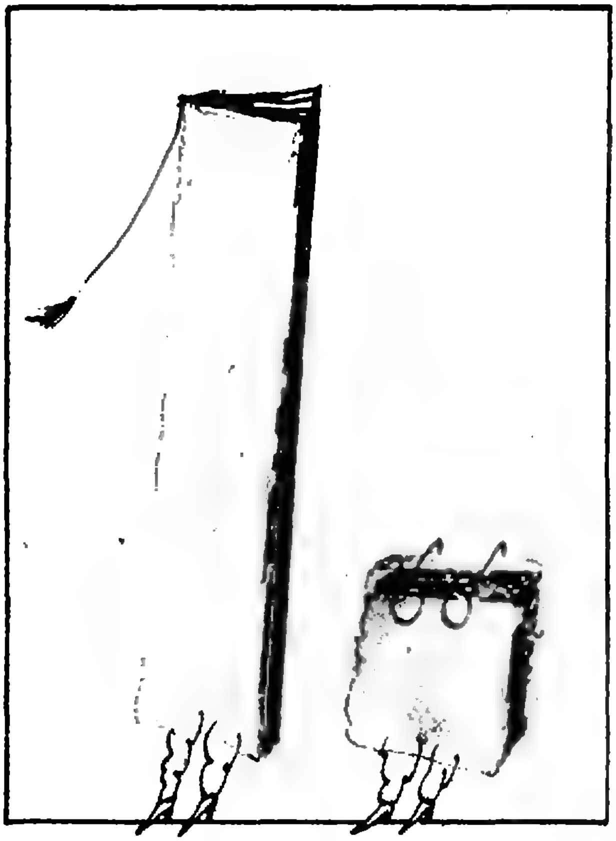
Колебания и волны

«Электрические колебания. Колебательный контур» (11—83),
«Что такое параметрический резонанс» (9—86),
«Принцип Гюйгенса» (11—12—88),
«Постоянный и переменный электрический ток» (10—84),
«Модуляция и модуляторы» (9—89).

Оптика

«Принцип Ферма» (1—84),
«Номограммы в геометрической оптике» (11—86),
«Интерференция и интерферометры» (1—88),

(Окончание см. на с. 57)



Практикум абитуриента

При подготовке к вступительным экзаменам в вуз полезно познакомиться с теми материалами, которые уже были опубликованы в разделе «Практикум абитуриента» в прошлые годы. Ниже приводится тематический список таких статей по математике и физике, напечатанных в «Кванте» начиная с сентября 1986 года (в скобках указаны номер журнала и последние цифры соответствующего года).

Математика

Алгебра и анализ

«Задачи на координатной плоскости» (11—86),
«Функции периодические и непериодические» (9—87),
«Неравенства и графики» (4—86),
«Решения нестрогих неравенств» (6—88),
«Тригонометрия помогает алгебре» (5—89),
«Текстовые задачи» (3—90),
«Метод интервалов» (5—90).

Тригонометрия

«Решение систем тригонометрических уравнений» (11—87).

Планиметрия

«Правильное решение геометрической задачи» (5—87),
«Геометрические решения негеометрических задач» (11—89).

Стереометрия

«Вычисление расстояний и углов» (1—87),
«Стереометрические задачи с шарами» (2—88),
«Из геометрии тетраэдра» (9—88),
«Теорема о трех синусах» (9—89).

Физика

Механика

«Маневрирование в космосе» (2—87),
«О графическом способе решения некоторых физических задач» (4—87),
«Кинематические связи в задачах динамики» (2—88),
«Статика» (2—89),
«Законы сохранения энергии и импульса» (4—89),
«Системы отсчета в задачах механики» (2—90).

Молекулярная физика. Тепловые явления

«Задачи на газовые смеси» (6—87),
«Поверхностное натяжение и капиллярные явления» (4—88),
«Парообразование. Свойства паров» (6—88).

Основы электродинамики

«Конденсаторы с «избыточным» зарядом пластин» (10—87),
«Расчет электрических цепей» (8—88),
«Закон сохранения энергии в электростатике» (6—89),
«Мощность в цепи постоянного тока» (8—89),
«Электрические машины постоянного тока» (1—90),
«Переходные процессы в электрических цепях» (4—90),
«Явление самоиндукции» (6—90).

Колебания и волны

«Цепи переменного тока» (9—86),
«Гармонические колебания» (11—12—88).

Оптика

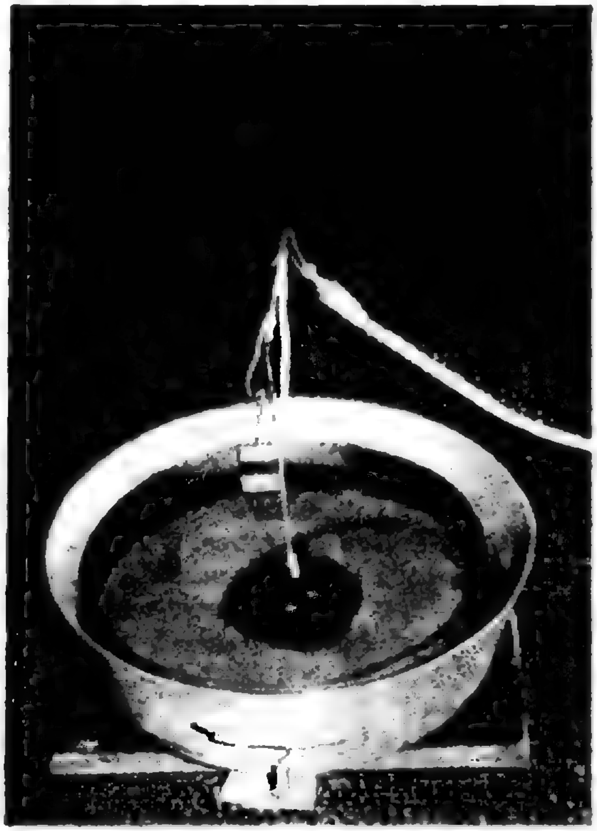
«Оптические приборы» (10—86),
«Преломление света» (10—88),
«Об увеличении изображения» (10—89).

Квантовая физика

«Атомная физика в задачах» (12—86).

Некоторые общие вопросы

«Работа, энергия, тепло» (8—87),
«Уравнения думают за нас» (12—87),
«Метод графических оценок» (12—89).



Лаборатория „Кванта"

Вращающаяся жидкость

П. МИХЕЕВ

В Мэрилендском университете, расположенном недалеко от столицы США, есть удивительный музей, в котором выставлена большая коллекция... физических опытов. Можно часами рассматривать экспонаты, изучать различные механизмы, нажимать кнопки, приводящие их в действие, просто смотреть и удивляться. Вот один пример.

Перед вами плоская тарелка с металлическим ободком. Тарелка заполнена голубой жидкостью. В центре сосуда — проводок. Казалось бы, ничего особенного, кроме того, что жидкость в тарелке... вращается. Может быть, это какая-то особенная жидкость?

Заинтересовавшись увиденным, мы присмотрелись повнимательнее к «установке», а вернувшись домой, изготовили ее в школьном физическом кабинете.

Посмотрите на приведенную здесь фотографию. Стеклянные стенки сосуда изнутри оклеены металлической полоской (фольгой), в центр сосуда помещен металлический стержень. Провода, подключенные к стержню и фольге, идут к источнику тока, в качестве которого мы использовали выпрямитель, дающий на выходе напряжение порядка 9 В при токе 0,3 А. Голубая жидкость, наполняющая сосуд,— это 5—10-процентный раствор медного купороса в воде. (Можно использовать и другие электролиты, например — тоже водный раствор, но хлористого натрия.) Сосуд поставлен на постоянный магнит, создающий в непосредственной близости от своей поверхности магнитное поле с индукцией около 10^{-3} Тл. Вот и все оборудование.

Подключив электроды (стержень и фольгу) к источнику электрического тока, мы действительно наблюдали вращение жидкости в сосуде. Вращение было не очень быстрым, но вполне заметным глазу. Попробуем дать объяснение увиденному.

Молекулы $CuSO_4$ в воде диссоциируют на ионы Cu^{2+} и SO_4^{2-}. При подключении электродов к источнику в сосуде возникает электрическое поле, направленное по радиусам от центра сосуда к его периферии (если стержень служит анодом, а фольга — катодом). Ионы меди и кислотного остатка начинают перемещаться к соответствующим электродам, а магнитное поле, направленное вертикально (и практически однородное вблизи поверхности магнита), заставляет ионы искривлять свои траектории, что

Автор этой статьи Павел Михеев — один из пятнадцати советских школьников, принимавших участие в первой советско-американской летней физико-математической школе (июль 1989 г., США).

и приводит к вращению всей жидкости. Вот вся качественная сторона явления.

Теперь сделаем некоторые количественные оценки.

Сначала поговорим о радиальной составляющей скорости ионов v_R. Как известно, плотность тока в электролите представляет собой сумму плотностей, создаваемых ионами обоих знаков:

$$j = n_+ q v_+ + n_- q v_-,$$

где n_+ и n_- — концентрации положительных и отрицательных ионов соответственно (понятно, что в нашем случае они равны, т. е. $n_+ = n_- = n$), q — абсолютная величина заряда каждого иона, v_+ и v_- — скорости их упорядоченного движения. Для оценки будем считать, что эти скорости одинаковы для обоих ионов: $v_+ = v_- = v_R$. Поскольку сила тока I связана с плотностью j соотношением $I = jS$, где $S = 2\pi Rh$ (R — радиус сечения сосуда, h — высота жидкости в сосуде) — площадь катода, получим

$$I = (2nqv_R)(2\pi Rh) = 4\pi nqRhv_R.$$

Концентрация ионов

$$n = \frac{N}{V} = \frac{m}{\text{M}} N_\text{A} \frac{1}{\pi R^2 h},$$

где m — масса медного купороса, M — его молярная масса, N_A — постоянная Авогадро. Заряд ионов $q = 2e$ (e — заряд электрона). Тогда получим

$$I = 4\pi \frac{mN_\text{A}}{\text{M}\pi R^2 h} 2eRhv_R, \text{ и } v_R = \frac{\text{M}IR}{8emN_\text{A}}.$$

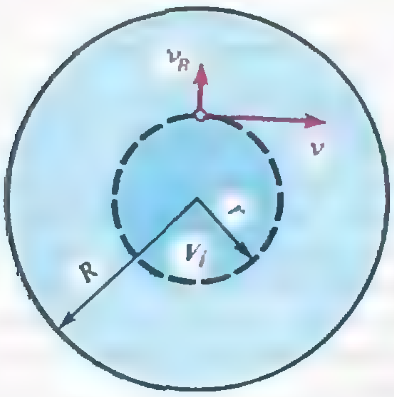


Рис. 1.

Приняв $\text{M} = 0{,}064$ кг/моль, $q = 3{,}2 \times 10^{-19}$ Кл, $m \sim 0{,}01$ кг, $R \sim 0{,}1$ м и $I = 0{,}3$ А, найдем величину радиальной составляющей скорости движения ионов:

$$v_R \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ м/с.}$$

На движущуюся частицу в магнитном поле действует сила Лоренца, роль которой сводится к искривлению траектории ионов, что и вызывает вращение всей жидкости. Но между слоями движущейся жидкости всегда действуют силы сопротивления, называемые силами вязкого трения. Они стремятся затормозить тот слой, который движется быстрее, и ускорить тот, который движется медленнее. Действие этих двух сил — силы Лоренца и силы вязкого трения — приведет к тому, что очень скоро после начала вращения касательная составляющая v_r скорости на расстоянии r от центра практически перестанет изменяться с течением времени. А чему она будет равна? Сделаем оценку.

Рассмотрим ограниченный объем жидкости V_i (рис. 1). На заряд, находящийся в этой области, действует сила Лоренца

$$F_{\text{л}i} = q_i B v_R,$$

где

$$q_i = 2qnV_i = 2qn\pi r^2 h.$$

А что можно сказать о силе вязкого трения? Из самых общих соображений, а также из нашего опыта очевидно, что максимальная касательная скорость частиц достигается у оси вращения, а по мере увеличения расстояния r величина скорости плавно уменьшается. Поскольку сила вязкого трения обусловлена различием скоростей движения соседних слоев, то понятно, что она должна зависеть от того, насколько быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою, в нашем случае — по мере увеличения расстояния от центра сосуда, и от площади соприкосновения. Таким образом:

$$F_{\text{тр}i} = -\eta \frac{dv_r}{dr} S_i$$

где η — так называемый коэффи-

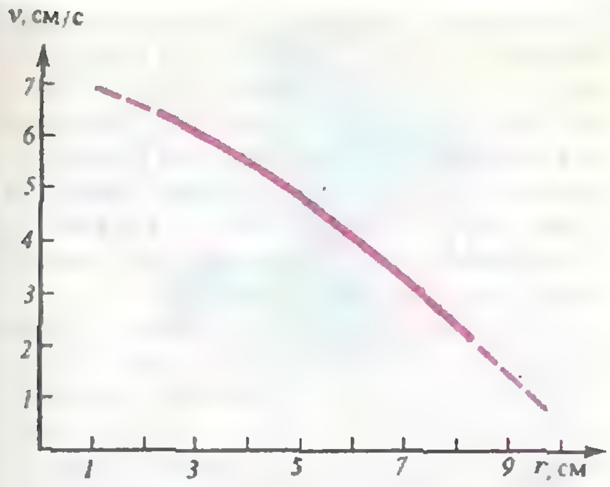


Рис. 2.

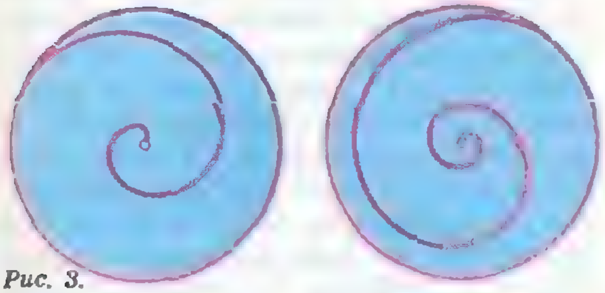


Рис. 3.

циент вязкости жидкости, характерный для каждой жидкости, $S_i = 2\pi r h$ — площадь соприкосновения соседних слоев.

Как было уже сказано, касательная составляющая скорости v_τ в каждой точке сосуда перестанет меняться со временем, если

$$F_{\text{л}i} = F_{\text{тр}i}, \text{ или } \frac{BI}{2R} r^2 = -\eta \frac{dv_\tau}{dr} 2\pi h r.$$

Мы получили дифференциальное уравнение

$$dv_\tau = -\frac{BI}{4\pi R h \eta} r\, dr.$$

Решим его:

$$v_\tau = -\frac{BIr^2}{8\pi R h \eta} + C.$$

Константу C определим из условия, что при $r \to R$ $v_\tau \to 0$:

$$C = \frac{BIR}{8\pi h \eta}.$$

Тогда получим

$$v_\tau = \frac{BI}{8\pi R h \eta}(R^2 - r^2).$$

При $B \sim 10^{-3}$ Тл, $h \sim 0{,}02$ м, $\eta = 10^{-3}$ кг/(м·с) для $r = 5$ см

$$v_\tau \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Конечно, полученную формулу для v_τ нельзя считать достаточно точной, так как она дает неправильный результат уже при $r \to 0$ и при $r \to R$ (в последнем случае скорость только мала, а не равна нулю). Но для оценки это вполне подходит. График зависимости касательной составляющей скорости жидкости от расстояния r от центра сосуда показан на рисунке 2.

Итак, мы получили, что под действием электрического поля ионы получают скорость, направленную по радиусу сосуда и равную по порядку величины 10^{-7} м/с, а под действием магнитного поля (с участием сил вязкого трения) устанавливается касательная скорость порядка 10^{-2} м/с. Понятно, что в результате ионы будут двигаться по спиралям, сходящимся в центре сосуда или исходящим из него (рис. 3). При этом спирали будут так плотно прилегать друг к другу, что нам будет казаться, что слои жидкости движутся по окружностям.

Наверное, возможны и другие условия эксперимента, и соответственно другие способы оценки наблюдаемого явления. Иными словами, у каждого, кто заинтересуется этим опытом, есть достаточно возможностей для самостоятельного творчества.

Математический кружок

Старая японская теорема

Р. ХОНСБЕРГЕР

Предлагаем вам перевод небольшого отрывка из замечательной книги Росса Хонсбергера «Математические жемчужины». Мы надеемся, что в скором времени эта книга появится на прилавках книжных магазинов.

У японских математиков существует древний обычай: они записывают свои открытия на дощечках, которые потом вывешивают в храмах — во славу богов и в честь авторов этих открытий. (Об этом рассказал Роджер Джонсон в своей книге «Расширенная геометрия Евклида».)

В 1800 году в одном из японских храмов на дощечке появилась прекрасная теорема:

Разобьем выпуклый многоугольник, вписанный в окружность, на треугольники, проведя из какой-нибудь одной его вершины все диагонали. Впишем в каждый из получившихся треугольников окружность. Сумма радиусов всех этих окружностей — величина постоянная, не зависящая от выбора вершины многоугольника.

Оказывается, та же самая сумма радиусов получается и для любого другого способа разбиения данного многоугольника на треугольники (рис. 2). Ниже мы увидим, что обе эти задачи легко решаются с помощью удивительной теоремы Л. Карно (1753—1823).

Прежде чем формулировать теорему Карно, кое о чем условимся. Опишем вокруг произвольного треугольника $A_1A_2A_3$ окружность с центром O (рис. 3). Конечно, точка O не всегда принадлежит самому треугольнику. Поэтому, рассматривая расстояние OO_i ($i=1$, 2, 3) от точки O до стороны треугольника, разумно считать, что эта величина может быть как положительной, так и отрицательной. Будем считать, что расстояние OO_i отрицательно в том и только в том случае, когда отрезок OO_i *целиком* лежит *вне* треугольника (рис. 4). Такое «правило знаков» обеспечивает нам то, что «сумма» площадей (с соответствующими знаками) треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_1 всегда оказывается равной площади треугольника $A_1A_2A_3$.

Теорема Карно утверждает*):

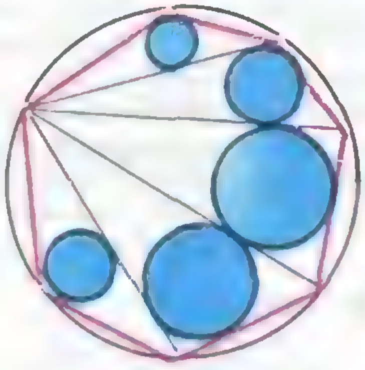


Рис. 1.

---

*) Доказательство теоремы Карно см. в комментарии редакции.

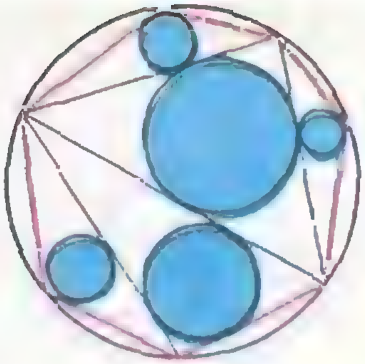


Рис. 2.

Сумма расстояний от центра окружности, описанной вокруг треугольника, до сторон треугольника, равна сумме радиусов описанной и вписанной в него окружностей, т. е. $OO_1+OO_2+OO_3=R+r$, где R — радиус описанной, а r — радиус вписанной в треугольник окружности.

Вернемся к нашей «жемчужине» — к теореме о вписанном многоугольнике, разбитом на треугольники. Перенумеруем эти треугольники, и пусть r_i — радиус окружности, вписанной в треугольник с номером i, а OO_1^i, OO_2^i, OO_3^i — расстояние от центра O большой окружности до сторон i-го треугольника. Тогда по теореме Карно $r_i+R=OO_1^i+OO_2^i+OO_3^i$. Поэтому интересующую нас сумму радиусов r_i можно записать так:

$$S=(OO_1^{(1)}+OO_2^{(1)}+OO_3^{(1)})+$$
$$+(OO_1^{(2)}+OO_2^{(2)}+OO_3^{(2)})+\dots$$
$$\dots-R-R-\dots-R.$$

Число треугольников, на которые разбит наш многоугольник, не зависит от *способа* разбиения, точнее, при любом разбиении выпуклого n-угольника непересекающимися диагоналями на треугольники, получается $(n-2)$ треугольника. Поэтому величина $-R-R-\dots-R$, входящая в сумму S, одна и та же для всех разбиений, а именно $(2-n)R$. Остается только показать, что для всех способов разбиения одинакова сумма

$$S'-(OO_1^{(1)}+OO_2^{(1)}+OO_3^{(1)})+\dots$$
$$\dots+(OO_1^{(n-2)}+OO_2^{(n-2)}+OO_3^{(n-2)}).$$

Но это делается в одну минуту.

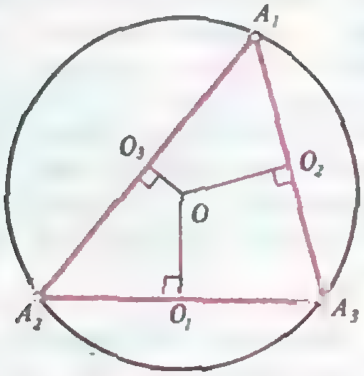


Рис. 3.

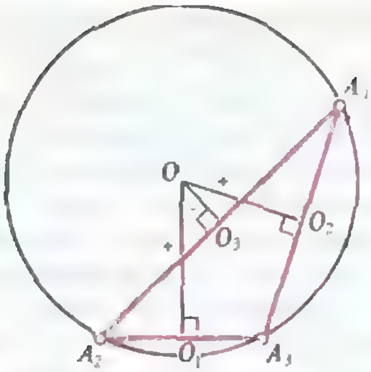


Рис. 4.

Рассмотрим произвольную диагональ PQ. Она является общей стороной двух треугольников разбиения (рис. 5). *При этом перпендикуляр* OO' обязательно оказывается лежащим целиком вне одного из этих треугольников. Так что вклад в сумму S' от всех таких «расстояний» будет нулевым, поскольку расстояние OO' входит в сумму S' дважды, но один раз — со знаком плюс, а второй раз — со знаком минус. Таким образом, сумма S' равна просто сумме длин всех перпендикуляров из точки O к сторонам данного многоугольника. Ясно, что эта величина постоянна.

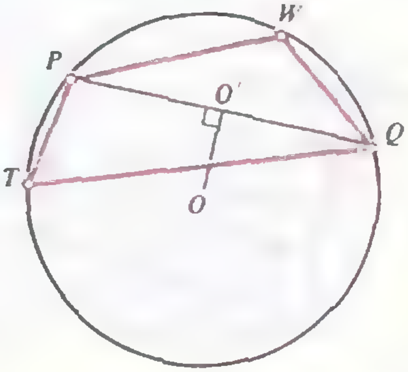


Рис. 5.

От редакции. Лазар Карно, на теорему которого ссылается Р. Хонсбергер, известен в мире не столько своими математическими работами, сколько яркой политической деятельностью во Франции в эпоху Великой французской революции. Его тогда называли «организатором побед». При Наполеоне он был военным министром и министром внутренних дел Франции.

Физикам хорошо известно имя сына Л. Карно — Сади Карно, одного из основателей термодинамики.

Теорема Л. Карно сама является великолепной математической жемчужиной, и мы не могли не привести здесь ее доказательства. Самое изящное из известных доказательств теоремы Л. Карно опирается на теорему Птолемея, жившего в Александрии (Египет) во 2 веке нашей эры и прославившегося в первую очередь своими астрономическими трудами. Им была создана геоцентрическая система мира, которая являлась общепризнанной до появления трудов Коперника. В отличие от Карно, о жизни Птолемея практически ничего не известно.

Теорема Птолемея звучит так:

Произведение длин диагоналей вписанного четырехугольника равняется сумме произведений длин противоположных сторон этого четырехугольника.

Доказывается она, например, таким образом:

Выберем на диагонали AC точку E так, чтобы угол ABE равнялся углу DBC (рис. 6). Тогда треугольники ABE и DBC окажутся подобными, так как их углы при вершине B равны по построению, а углы при вершинах A и D лежат на одной окружности и опираются на дугу BC.

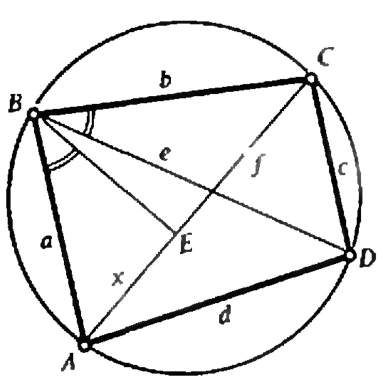


Рис. 6.

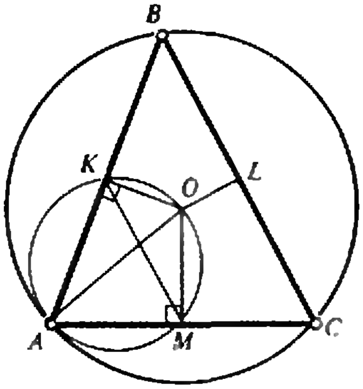


Рис. 7.

Если обозначить длины сторон через a, b, c, d, длины диагоналей через e и f (рис. 6), а длину отрезка AE через x, то из подобия этих треугольников следует, что

$$a/x=e/c, \text{ или } ac=ex.$$

Аналогичным образом подобны треугольники ABD и EBC. У них углы при вершине B равны по построению, а углы при вершинах D и C опираются на дугу AB. Из подобия следует, что

$$e/d=b/(f-x), \text{ или } bd=ef-ex.$$

Но $ex=ac$, следовательно, $bd=ef-ac$, т. е.

$$ef=ac+bd.$$

Теорема Птолемея доказана. Перейдем к доказательству теоремы Карно. Пусть ABC — рассматриваемый треугольник (рис. 7), центр O описанной окружности лежит внутри него, а точки K, L и M соответственно середины сторон AB, BC и AC. По построению, отрезки OK, OL и OM перпендикулярны этим сторонам, а отрезки KL, LM, KM — средние линии треугольника ABC. Если на отрезке AO как на диаметре построить окружность, то точки K и M будут лежать на ней, поскольку углы AKO и AMO — прямые. Поэтому к четырехугольнику $AKOM$ можно применить теорему Птолемея:

$$AO\cdot KM=AK\cdot OM+AM\cdot KO.$$

Но $AO=R$, $KM=a/2$, $AK=c/2$, $AM=$

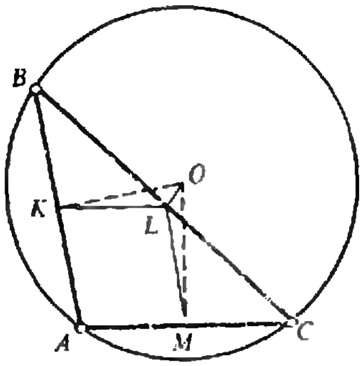


Рис. 8.

$=b/2$. Поэтому это равенство можно переписать так:

$$a\cdot R/2=c\cdot OM/2+b\cdot KO/2.$$

Рассматривая аналогично четырехугольники $BLOK$ и $CMOL$, получим еще два равенства:

$$b\cdot R/2=b\cdot OL/2+a\cdot OK/2,$$
$$c\cdot R/2=b\cdot OL/2+a\cdot OM/2.$$

Добавим еще одно очевидное равенство (r — радиус вписанной в треугольник ABC окружности):

$$(a+b+c)\cdot r/2=a\cdot OL/2+ +b\cdot OM/2+c\cdot OK/2.$$

Сложив теперь последние четыре равенства, получим:

$$(a+b+c)\cdot (R+r)/2=(a+b+c)\times \times(OM+OK+OL)/2,$$

откуда немедленно следует утверждение теоремы Карно.

Если треугольник ABC — тупоугольный с тупым углом A (рис. 8), то вместо написанных нами четырех равенств следует написать следующие:

$$\frac{a\cdot R}{2}=\frac{c\cdot OM}{2}+\frac{b\cdot OK}{2},$$

$$\frac{a\cdot OK}{2}=\frac{c\cdot OL}{2}+\frac{b\cdot R}{2},$$

или

$$\frac{b\cdot R}{2}=\frac{a\cdot OK}{2}-\frac{c\cdot OL}{2},$$

$$\frac{a\cdot OM}{2}=\frac{b\cdot PO}{2}+\frac{c\cdot R}{2},$$

или

$$\frac{c\cdot R}{2}=\frac{a\cdot OM}{2}-\frac{b\cdot OL}{2},$$

$$\frac{(a+b+c)r}{2}=\frac{b\cdot OM}{2}+\frac{c\cdot OK}{2}-\frac{a\cdot OL}{2}.$$

Складывая эти четыре равенства, получаем:

$$\frac{(a+b+c)(R+r)}{2}=\frac{(a+b+c)}{2}\times \times(OK+OM-OL);$$

Это и есть утверждение теоремы Карно для тупоугольного треугольника.

Публикацию подготовил А. Савин

Школа в „Кванте"

(Начало см. на с. 48)

«Дифракция волн» (1—86),
«Дифракция света на круглом отверстии» (11—89),
«Поляризация света» (1—87),
«Что такое радуга?» (12—84),
«На что способен микроскоп?» (1—85),
«Как увидеть невидимое?» (3—85),
«Лучи и волны» (11—85),
«Рентгеновские лучи» (4—84).

Элементы теории относительности

«О машине времени и теории относительности» (3—88).

Квантовая физика

«Фотоэлектрический эффект и кванты» (2—84),
«Несколько замечаний по поводу фотоэффекта» (1—89),
«Абсолютно черное тело» (2—85).

Атомная физика

«Опыты Резерфорда и явление радиоактивности» (4—85),
«Альфа-частицы и опыты Резерфорда» (3—89),
«Две загадки бета-распада» (5—85),
«Заряд атомного ядра и периодическая система элементов Менделеева» (3—84),
«О ядерном веществе» (3—86),
«Ядерные спектры» (3—87),
«Капельная модель ядра» (5—86),
«Аннигиляция и рождение пар» (5—84).

Есть идея?!

Идея есть, и не одна

В сентябрьском номере журнала за прошлый год нашим читателям было предложено решить такую задачу:

> С океанского лайнера упала за борт древнегреческая статуя, имеющая большую художественную ценность. С помощью подводных телекамер удалось найти то место на большой глубине, где лежит, частично зарывшись в ил, статуя.
>
> Необходимо поднять статую за довольно короткий срок (по прогнозам надвигается сильный шторм). Снаряжение водолазной экспедиции за такой срок невозможно. На борту лайнера имеются тросы и лебедки достаточной грузоподъемности. Оборудование для подведения тросов к статуе может быть сброшено на парашюте с самолета (его можно быстро вызвать с берега). Однако проблема в том, что статуя слишком деликатный груз: ее могут повредить тросы и крючья. Как быть?

Тех, кто возьмется за решение этой задачи, мы предупреждали: ни в коем случае не следует начинать поиск решения с хаотического перебора вариантов, выдумывать громоздкие приспособления. Прежде всего необходимо уяснить, что́ надо сделать, а потом уже рассуждать о том, с помощью какого известного вам физического эффекта можно достичь желаемого результата. Задача считается решенной, если найдена базовая идея, т. е. вы нашли тот самый физический эффект.

Так какие же идеи родились у наших читателей в связи с задачей «Статуя с морского дна»? Обратимся к письмам.

Многие предлагают для извлечения статуи использовать присоски. Вот что пишет Виктор Алтуев из Красноярска: «Лучше всего использовать присоски. Сила, с которой они будут прикрепляться к поверхности статуи, пропорциональна глубине, на которой находится статуя». Все верно, но Виктор не учел трех вещей: 1) статуя неровная, поэтому к ней нелегко прикрепить присоску так, чтобы она хорошо держалась; 2) статуя увязла в иле, а потому, когда ее начнут поднимать, под ней образуется разрежение, и сила гидростатического давления будет препятствовать извлечению статуи (вспомните «магдебургские полушария»); 3) по мере подъема статуи гидростатическое давление, прижимающее присоску к статуе, будет падать, и статуя может оторваться. Конечно, все эти препятствия преодолимы. Например, можно усовершенствовать присоски, размывать ил одновременно с вытягиванием статуи, подхватить статую неводом где-нибудь на середине пути. Но все-таки это достаточно сложно.

В некоторых письмах предлагается использовать липучку для того, чтобы приклеить трос к статуе, и тогда не будет сложностей с ее извлечением. Что ж, неплохо. Но проблема возникает с последующим отделением липучки. Если бы ребята знали, что существуют электрореологические и магнитореологические жидкости, которые меняют свою вязкость вплоть до «затвердевания» соответственно в электростатическом и магнитном полях, то они вышли бы на вполне патентоспособное решение. Такие жидкости легко снимаются в отсутствие поля.

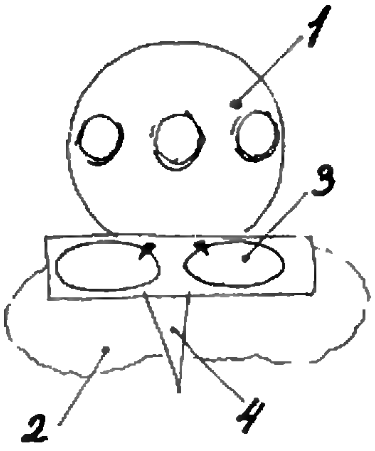
Дмитрий Коновалов из Петрозаводска предложил использовать жидкий металл для прикрепления троса к статуе: «Если подвести к статуе контейнер с припоем, расплавить металл с помощью нагревателя, то после застывания металла мы получим надежное соединение, благодаря которому вытащить статую из ила не составит труда». Надо отметить, что подобный метод подъема предметов с морского дна был недавно запатентован в Великобритании. Но согласитесь, что припой может повредить статую. И потом — из чего сделана статуя? Ведь припаять трос можно не к любому материалу.

Наиболее красивое решение, на наш взгляд,— это приморозить статую к захватному органу, опускаемому на тросе. В качестве источника холода могут быть использованы сжиженные газы или сухой лед, которые можно доставить спецрейсом самолета и спустить на парашюте. Такое решение предложили члены кружка «Юные изобретатели» из школы села Сепыч Верещагинского района Пермской области, А. Школьников (Москва), А. Скабелин (Барановичи) и многие другие ребята.

Самые обстоятельные ответы прислали Александр Чернов из Москвы и Андрей Волошин из Горького. Саша предложил примораживать статую к захвату с использованием жидкого азота, а получаемый при этом газообразный азот направлять для заполнения эластичных емкостей, используемых для поднятия статуи, как понтоны. Жидкий азот имеет при атмосферном давлении температуру кипения 77,3 К (или —195,7 °С). В окружающей статую воде (температура не менее 4 °С) жидкий азот будет активно испаряться, отбирая тепло у воды. Так что захват окажется «приклеенным» к статуе льдом. Андрей же остановился на сухом льде (т. е. твердом углекислом газе) и предложил наморозить льдину, которая всплывает, увлекая за собой статую. Сухой лед имеет температуру возгонки при атмосферном давлении 34 °С. Возгонка сухого льда будет сопровождаться охлаждением окружающей статую воды и формированием льдины.

Давайте обсудим оба эти проекта. В способе Саши Чернова имеется следующий недостаток: при подъеме увеличивается разность давлений между газом внутри емкостей и водой снаружи, что может привести к разрыву емкостей. Во избежание этого можно поставить клапан, который будет стравливать воздух по мере подъема статуи. Можно предложить и более красивое решение — вырезать отверстие внизу емкости, и по мере снижения гидростатического давления азот будет свободно выходить через него.

При использовании в качестве хладагента сухого льда, как предложил Андрей, возникнут трудности следующего порядка. Так как удельная теплота плавления льда и теплота возгонки кристаллического углекислого газа сравнимы между собой, то для подъема статуи придется опускать под воду значительный объем сухого льда, а это дополнительные сложности.



Батискаф, в котором используется выталкивающая сила льда. 1 — шар-гондола, 2 — намораживаемая «шуба» из льда, 3 — емкости с жидким газом (который может использоваться и для дыхания), 4 — полый стержень для примораживания ила со дна (жидкий воздух подается в стержень, и ил примерзает к нему).

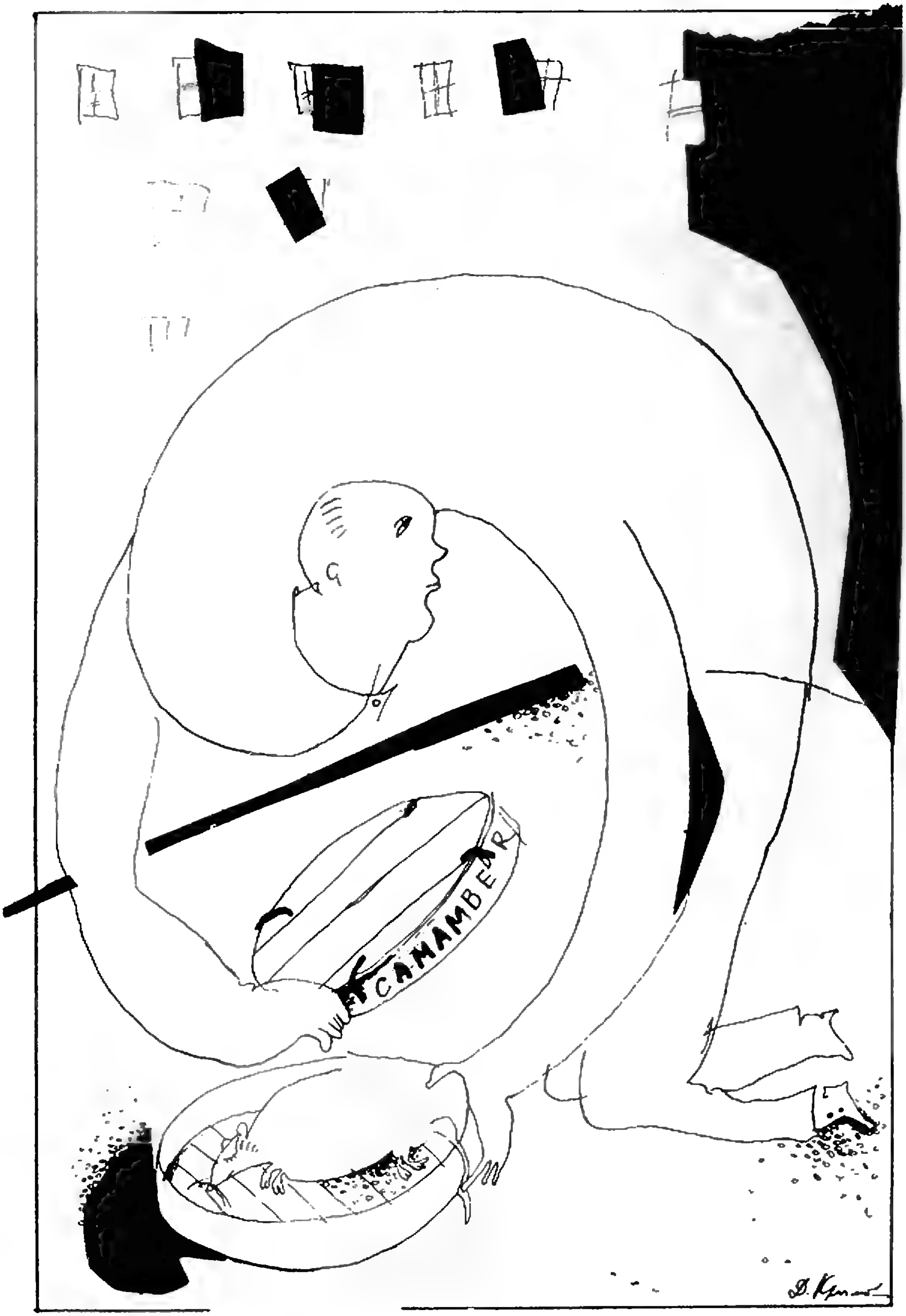
Теперь зададимся вопросом: а будет ли сухой лед на глубине испаряться? К сожалению, в школе слова «агрегатное состояние вещества зависит от температуры и давления» усваиваются механически, без должного осмысления. А напрасно. Критическое давление твердой углекислоты $p_к \sim 7{,}3$ МПа. Для замораживания воды необходима температура ниже 0 °С. Однако возгонка кристаллической углекислоты невозможна при давлениях бóльших $p_к$, т. е., начиная с глубины $h \sim 730$ м, сухой лед, испаряясь, не сможет охладить воду до температуры замерзания, и использование его в качестве хладагента становится бесполезным. Что же будет происходить? Сухой лед на этой глубине будет нагреваться как твердое тело и при нуле градусов будет еще твердым. Скрытая теплота испарения будет поглощаться. Так что, если статуя упала на глубину большую, чем 730 м, то бесполезно пытаться примораживать ее к захвату сухой углекислотой.

Но все же идея Андрея Волошина об использовании выталкивающей силы льда очень привлекательна. Мне лично представляется интересной конструкция батискафа с намораживаемым льдом.

Напомню, что традиционные батискафы снабжены балластом, который они сбрасывают при подъеме со дна. Подъемная сила создается емкостью с бензином. Бензин используется в связи с его малой сжимаемостью (интересно, что емкость открыта снизу, так как при таких давлениях нельзя считать бензин вовсе несжимаемой жидкостью).

Батискаф, в котором используется выталкивающая сила льда, может более свободно маневрировать (ведь в нем маневр не связан со сбросом балласта). В качестве хладагента лучше использовать жидкий кислород, который после испарения может быть использован и для питания двигательной установки батискафа. Традиционную конструкцию обычно снабжают манипулятором для взятия проб грунта со дна. Вы, наверное, уже догадались, что наша конструкция со льдом может обойтись без сложных захватных устройств манипулятора —

(Окончание см. на с. 69)


CAMAMBER

ЦВЕТЫ ДЛЯ ЭЛДЖЕРНОНА

(фантастический рассказ)

Д. КИЗ (США)

25 мая. Они сами кормят Элджернона, который теперь отказывается решать задачу с меняющимся замком. Все отождествляют меня с Элджерноном. В некотором смысле мы оба — первые. Все они делают вид, что поведение Элджернона не обязательно должно что-то означать в отношении меня. Но трудно скрыть тот факт, что некоторые из животных, которых подвергли тому же эксперименту, ведут себя странно.

Доктор Штраусс и доктор Немюр попросили меня больше не приходить в лабораторию. Я знаю, о чем они думают, но не могу с этим согласиться. Я не оставил своего намерения продвинуть вперед их исследования. При всем уважении к этим двум достойным ученым я прекрасно сознаю пределы их возможностей. Если существует какое-то решение, я должен буду найти его сам. Совершенно неожиданно фактор времени приобретает для меня огромную важность.

29 мая. В мое полное распоряжение отвели лабораторию и разрешили продолжать исследования. Что-то уже проясняется. Работаю круглые сутки. Мне поставили в лаборатории койку. Большая часть времени, отведенного мною для записей, уходит на заметки, которые я держу в отдельной папке, но иногда я по привычке ощущаю необходимость передать на бумаге свое настроение и мысли.

31 мая. Доктор Штраусс считает, что я работаю слишком интенсивно. Доктор Немюр говорит, что я пытаюсь втиснуть в несколько недель исследования и мысли, на которые уходит целая жизнь. Я знаю, что мне нужно отдохнуть, но меня подгоняет какой-то внутренний импульс, который не дает остановиться. Я должен найти причину быстрого регресса. Элджернона. Я должен знать, произойдет ли это со мной. И если да, то когда.

4 июня.

ПИСЬМО ДОКТОРУ ШТРАУССУ
(копия)

Дорогой доктор Штраусс!

Посылаю Вам в отдельном конверте рукопись этого моего доклада, названного мною «Эффект Элджернона — Гордона: исследование структуры и функции искусственно повышенного интеллекта»; я хотел бы, чтобы Вы его прочли и опубликовали.

Как видите, мои эксперименты закончены. Я включил в доклад все мои формулы, а в приложение к нему — математический анализ. Все это, конечно, должно быть проверено.

Исходя из того, насколько это важно для Вас и доктора Немюра (нужно ли говорить, что и для меня тоже?), я сам десятки раз проверял и перепроверял результаты моих исследований в надежде найти ошибку. С сожалением констатирую, что эти результаты остаются в силе. Однако с точки зрения интересов науки я рад, что вношу малую толику в совокупность сведений о функциях человеческого мозга и о законах, которым подчиняется искусственное повышение человеческого интеллекта.

Я помню, как Вы мне однажды сказали, что неудача эксперимента или опровержение теории имеют такое же важное значение для прогресса науки, как и успех. Теперь я понимаю, насколько это справедливо. Но все-таки мне жаль, что мой собственный вклад в эту область знаний полностью перечеркивает труды двух человек, которых я так высоко ценю.

Искренне Ваш *Чарльз Гордон.*

Докл. прилагается.

5 июня. Я должен держать себя в руках. Фактический материал и результаты проведенных мною экспериментов не оставляют сомнений, и наиболее сенсационные аспекты моего собственного быстрого подъема не могут затемнить то, что утроение интеллекта путем хирургического вмешательства по методу доктора Штраусса и доктора Немюра нужно рассматривать как открытие, в настоящее время практически малоприменимое или даже неприменимое вообще.

Просматривая записи и прочие материалы, относящиеся к эксперименту с Элджерноном, я вижу, что, хотя физически он

Окончание. См. «Квант» № 5, 6.

еще находится на ранней стадии развития, умственно он регрессирует. Двигательная активность ослаблена; наблюдается общее понижение деятельности желез внутренней секреции; налицо ускоренная потеря координации.

Имеются серьезные показатели прогрессирующей амнезии.

Стимулирующее хирургическое вмешательство, которому мы оба подверглись, привело к интенсификации и ускорению всех умственных процессов. Непредвиденные явления, которые я взял на себя смелость назвать «Эффектом Элджернона — Гордона», являются логическим следствием общего ускорения процессов мышления. Доказанную здесь гипотезу можно коротко сформулировать следующим образом: интеллект, повышенный искусственно, понижается затем со скоростью, прямо пропорциональной степени его повышения.

Мне кажется, что это уже само по себе является важным открытием. По всем данным моя собственная умственная деградация будет очень быстрой.

Я уже начал замечать в себе признаки эмоциональной неустойчивости и забывчивости — первые симптомы конца.

10 июня. Ухудшение прогрессирует. Я становлюсь рассеянным. Два дня назад скончался Элджернон. Вскрытие доказывает правильность моих предсказаний. Вес его мозга уменьшился, обнаружено общее сглаживание мозговых извилин, а также углубление и расширение борозд.

Полагаю, что со мной происходит или вскоре будет происходить то же самое.

Я положил труп Элджернона в коробку из-под сыра и похоронил его на заднем дворе. Я плакал.

15 июня. Ко мне снова приходил доктор Штраусс. Я не пожелал открыть дверь и попросил его уйти. Я хочу, чтобы меня оставили в одиночестве. Я становлюсь обидчивым и раздражительным. Чувствую, как сгущается тьма. Очень трудно выбросить из головы мысль о самоубийстве. Я все время напоминаю себе, какую важность приобретет впоследствии этот интроспективный дневник.

До чего же это странное ощущение, когда берешь книгу, которую с наслаждением читал всего лишь месяц назад, и обнаруживаешь, что совсем ее забыл. Я вспомнил, каким великим человеком казался мне Джон Мильтон, но, когда я сегодня попробовал почитать «Потерянный рай», я абсолютно ничего не понял. Я так рассвирепел, что швырнул книгу в другой конец комнаты.

Я должен попытаться сохранить хоть что-нибудь. Что-нибудь из того, что я за это время познал. О господи, не отнимай у меня всего...

19 июня. Иногда по вечерам я выхожу гулять. Прошлой ночью я не мог вспомнить, где я живу. Домой меня привел полицейский. У меня такое чувство, будто бы это уже произошло со мной однажды, очень давно. Я продолжаю убеждать себя в том, что я единственный в мире человек, который может описать, что со мною происходит.

21 июня. Почему я теряю память? Я должен бороться. Целыми днями я лежу в постели, не зная, кто я и где нахожусь. Потом все это вдруг возвращается. Причуды амнезии. Симптом старости — впадаю в детство. Как это беспощадно логично! Я познал так много и так быстро. А теперь мой интеллект понижается с огромной скоростью. Я не допущу этого. Я буду с этим бороться. Я не в состоянии отогнать от себя воспоминание о мальчике из ресторана, о тупом выражении его лица, глупой улыбке, о людях, которые над ним смеялись... Нет... умоляю... только не это... снова...

22 июня. Я забываю то, что выучил недавно. Похоже, все идет по классическим законам — в первую очередь забывается то, что было усвоено последним. Впрочем, закон ли это? Пожалуй, я лучше прочту еще раз...

Я перечитал свой доклад об «Эффекте Элджернона — Гордона», и мне показалось, будто его написал кто-то другой. Некоторые разделы я даже не понимаю.

Я все время спотыкаюсь о разные предметы, и мне становится все труднее печатать на машинке.

23 июня. Я полностью отказался от машинки. У меня плохая координация движений. Я чувствую, что двигаюсь все медленнее и медленнее. Сегодня у меня было ужасное потрясение. Я взял статью Крюгера «Über psichische Ganzheit»*) — я пользовался ею для моих исследований, чтобы посмотреть, не поможет ли она мне разобраться в сущности проделанной мною работы. Сперва мне показалось, что у меня что-то не в порядке со зрением. Потом я понял, что больше не могу читать по-немецки. Я попробовал другие языки. Все исчезло.

30 июня. Прошла неделя, пока я решился снова писать. Все постепенно утекает, как песок сквозь пальцы. Большинство моих книг теперь слишком для меня трудно. Они бесят меня, ведь я знаю, что каких-нибудь несколько недель назад я их читал и понимал.

---

* «О психическом совершенстве» *(нем.). (Примеч. ред.)*

Я снова и снова внушаю себе, что должен продолжать писать эти отчеты, чтобы происходящее со мной стало известно другим. Но все труднее подыскивать слова и вспоминать, как они пишутся. Мне приходится теперь смотреть в словаре даже простые слова, и из-за этого я злюсь на самого себя.

Доктор Штраус приходит почти каждый день, но я сказал ему, что не хочу никого видеть и ни с кем разговаривать. Он чувствует себя виноватым. Все остальные тоже. Но я никого не виню. Я знал, что может из этого выйти. Но как же все-таки больно...

7 июля. Не знаю, куда ушла неделя. Я только знаю, что сегодня воскресенье потому что вижу в окно как люди идут в церковь. Кажется всю неделю я пролежал в кровати но я вспоминаю, что миссис Флинн несколько раз приносила мне поесть. Я все время повторяю себе что мне нужно чтото сделать но потом я забываю, а может это просто легче не делать того, что я говорю мне нужно сделать.

Эти дни я много думаю о моем отце и матери. Я нашел фотографию на которой мы все трое сняты на пляже. У отца подмышкой большой мяч а мать держит меня за руку. Я непомню их такими какие они на фото. Я только помню моего отца почти всегда пьяным и как он ругался с мамой из-за денег.

Он редко брился и всегда царапал мне лицо когда обнимал меня. Мать говорила что он умер но мой двоюродный брат Милти сказал, что слышал от своих родителей что мой отец убежал с другой женщиной. Когда я спросил об этом мать она залепила мне пощещину и сказала, что мой отец умер.

Мне кажется я так никогда и не узнаю правду да мне в общем то наплевать. (Один раз он сказал что возьмет меня на ферму посмотреть коров но так этого и не сделал. Он никогда не выполнял своих обещаний...)

10 июля. Моя хозяйка миссис Флинн очень за меня беспокоица. Она говорит что когда я вот так валяюсь целый день и ничево не делаю я ей напоминаю ее сына перед тем как она его выгнала из дому. Она сказала что не любит бездельников. Если я болен это одно а если я бездельник это уже другое дело и она этого непотерпит.

Я сказал я думаю что я заболел.

Я стараюсь читать понемножку каждый день в основном расказы но иногда мне приходица много раз перечитывать одно и тоже место потомучто я не понимаю что это значит. И мне трудно писать. Я знаю что мне нужно смотреть все слова в словаре но это очинь трудно а я все время такой усталый.

Потом я решил что вместо длиных трудных слов буду писать только легкие. Это сохраняет время. Примерно раз в неделю я кладу цветы на могилу Элджернона. Миссис Флинн думает я рехнулся что кладу цветы на мышиную могилу но я сказал ей что Элджернон был особиной мышью.

14 июля. Снова воскресенье. Мне теперь нечем себя занять потомучто мой телевизор сломался и у меня нет денег на починку. (Я вроде потерял чек из лабаратории за этот месяц. Не помню.)

У меня ужасно болит голова и асперин почти непомогает. Миссис Флинн знает что я направде заболел и жалеет меня. Она очинь хорошая женщина стоит только кому-нибудь заболеть.

22 июля. Миссис Флинн позвала ко мне каковато чужова доктора. Она испугалась что я умираю. Я сказал доктору что я не очинь болен только иногда все забываю. Он спросил есть ли у меня друзья или родственики и я ответил нет у меня никаво нет. Я сказал ему что когдато у меня был друг котораво звали Элджернон но это была мыш и мы часто соревновались. Он както страно посмотрел на меня будто подумал что я псих.

А когда я сказал ему что я был гением он улыбнулся. Он так разговаривал со мной будто я малинький ребенок и подмигнул миссис Флинн. Я расердился и выгнал ево потомучто он надо мною издевался как все они раньше.

24 июля. У меня больше нет денег и миссис Флинн говорит что мне нужно гденибудь работать чтобы платить ей за комнату ведь я не заплатил больше чем за два месяца.

Я неумею ничево делать кроме работы которую я делал в «Компании по производству пластмасовых коробок» Доннегана. Я нехочу туда возвращатца потомучто они там знали меня когда я был умным и может будут теперь надо мною смеятца. Но я незнаю что еще делать чтобы достать деньги.

25 июля. Я смотрел некаторые из моих старых отчетов и это очинь страно но я немогу прочесть что я написал. Я разбираю некаторые слова но непонимаю их.

Мисс Кинниен приходила и стояла удвери но я сказал ей уходите я нехочу вас видеть. Она заплакала и я тоже заплакал но невпустил ее потомучто я нехотел чтобы она надо мною смеялась. Я сказал ей что она мне больше не нравица. Я сказал что я больше нехочу быть умным. Это неправда. Я попрежнему люблю ее и попрежнему хочу быть умным но я должен был так сказать чтобы она ушла. Она заплатила миссис Флинн за мою комнату. Я это нехочу. Я должен найти работу.

Пожалуста... сделайте так чтобы я неразучился читать и писать.

27 июля. Мистер Доннеган был очинь добрым когда я пришел на фабрику и попросил ево снова взять меня уборщиком. Сперва он смотрел на меня снедоверием но я рассказал что со мной случилось и он очинь огорчился положил мне на плечо руку и сказал Чарли Гордон ты мужиственый человек.

Все на меня смотрели когда я спустился вниз и начал как раньше мыть уборную. Я сказал себе Чарли если они будут над тобой смеятца не обижайся ты же помниш что они нетакие умные как тебе когдато казалось. А потом они ведь были раньше твоими друзьями и если они смеялись над тобой это ничево потомучто они тебя и любили тоже.

Один из рабочих котораво взяли после моево ухода гадко пошутил он сказал эй Чарли я слышал ты очинь башковитый парень прямо настоящий прафессор. А нука скжи чтонибудь умное.

Мне стало плохо но тут подошел Джо Керп схватил ево за рубашку и сказал оставь его в покое ты паршивый шутник а то я тебе сверну шею. Я неожидал что Джо станет на мою сторону и я думаю что он мой настоящий друг.

Попозже ко мне подошел Френк Рейлли и сказал Чарли если ктонибудь будет к тебе приставать или захочет тебя обмануть позови меня или Джо и мы ему дадим прикурить.

Я сказал спасибо Френк и задохнулся и мне пришлось уйти на склад чтобы он неувидел как я плачу. Хорошо иметь друзей.

28 июля. Севодня я сделал глупость я забыл что уже не хожу как раньше в клас к мисс Кинниен в школу для взрослых. Я зашел в клас и сел на мое старое место вконце комнаты а она страно посмотрела на мня и сказала Чарлз.

Я непомню чтобы она меня когданибудь так называла она говорила просто Чарли и я сказал привет мисс Кинниен я приготовил мой севодняшний урок только я потерял книжку для чтения по которой мы учимся. Она заплакала и убежала из комнаты и все на меня посмотрели тут я увидел что это совсем другие люди а не те которые раньше со мною учились в одном класе.

Потом я вдруг вспомнил чтото про апирацию и как я стал умным я сказал боже мой я паправде свалял Чарли Гордона. Я ушел до того как она вернулась в клас.

Поэтому я навсегда уезжаю из Нью-Йорка. Я нехочу еще раз сделать чтонибудь вроде этаво. Я нехочу чтобы мисс Кинниен меня жалела. На фабрике все меня жалеют и этаво я тоже нехочу поэтому я уеду в какоенибудь место где никто не знает что Чарли Гордон раньше был гением а теперь даже неможет читать книги и хорошо писать.

Я беру ссобой пару книг и даже если я несмогу их читать я буду много упражнятца и может я забуду не все что я выучл. Если я очинь постараюсь может я буду немножко умнее чем до апирации. У меня есть кроличья лапка и счасливое пенни и можетбыть они мне помогут.

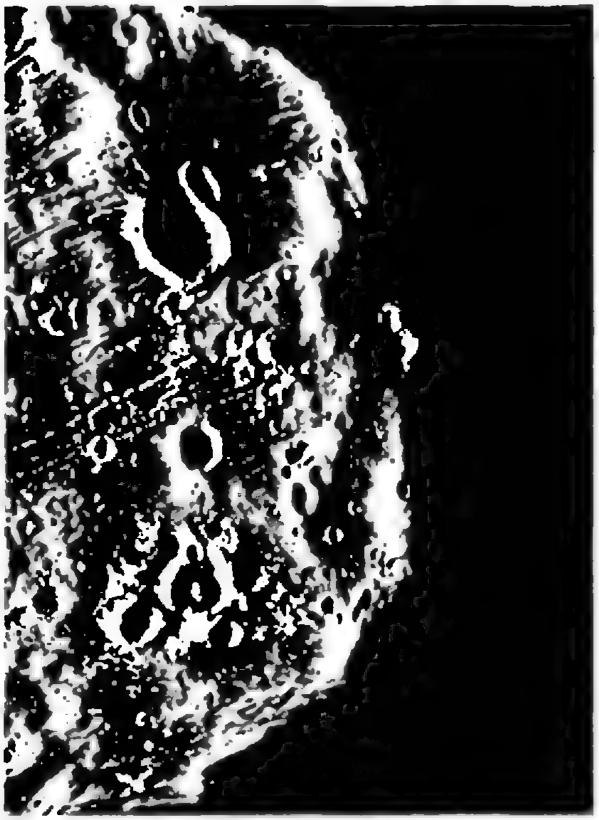
Мисс Кинниен если вы когданибудь прочтете это не жалейте меня я очинь рад что я использовал еще один шанс стать умным потомучто я узнал много разных вещей а раньше я никогда даже незнал что они есть на свете и я благодарн за то что я хоть наминутку это увидел.

Я незнаю почему я опять стал глупым и что я сделал нетак может это потому что я не очинь сильно старался. Но может если я постараюсь и буду много упражняца я стану немножко умнее и буду знать что значат все слова. Я немножко помню как мне было приятно когда я читал синюю книжку с порваной обложкой. Поэтому я обязательно буду все время старатца стать умным чтобы мне опять было так хорошо. Это очинь приятно знать разные вещи и быть умным. Я бы хотел быть таким прямо сейчас еслибы так я сел бы и все время читал. А всетаки я наверняка первый во всем мире глупый человек который открыл чтото важное для науки. Я помню что я чтото сделал но только непомню что. Кажеца я вроде сделал чтото для всех таких глупых людей как я.

Прощайте мисс Кинниен и доктор Штраусс и все и P. S. пожалуста скажите доктору Немюру чтобы он так неворчал когда над ним смеюца и у нево будет больше друзей. Совсем нетрудно иметь друзей если разрешаеш людям над собой смеятца. Там куда я еду у меня будет много друзей.

P. P. S. Если у вас будет возможность положите пожалуста немножко цветов на могилу Элджернона которая на заднем дворе...

Перевод с английского С. Васильевой



Р-значит ракета

Перспективы поиска обитаемых планет

Доктор физико-математических наук
Л. КСАНФОМАЛИТИ

Проблемы обитаемости и жизни во Вселенной относятся к глубочайшим вопросам философии. Идея существования на отдаленных мирах братьев по разуму почти никого не оставляет равнодушным. Мыслители различных исторических эпох неизменно обращались к этой теме. Человек во все времена мечтал о встрече с себе подобными и мысленно населял ими сначала неведомые земли, потом неизвестные небесные тела.

Когда наука и технология достигли современного уровня, проблема поиска жизни во Вселенной — в том или ином виде — была включена в научные планы исследований многих стран.

Существуют ли планетные системы других звезд?

Если не говорить о всевозможных фантазиях, всерьез можно искать жизнь — в единственной известной нам форме — лишь на планетах. Сейчас ученым известна только одна планетная система — наша, и уверенных результатов поисков планет у других звезд пока нет. Поэтому приходится пользоваться некоторыми косвенными сведениями о том, насколько распространены системы, подобные Солнечной.

Общепринятая гипотеза происхождения планетной системы предполагает формирование планет путем конденсации протопланетного газопылевого облака, захваченного протосолнцем или оставшегося после его образования. Эта гипотеза была предложена в нашей стране академиком О. Ю. Шмидтом и подробно разрабатывалась сначала им самим, а впоследствии его учениками. Независимо, сходные предположения были высказаны зарубежными учеными, в частности К. Вайцзеккером в Германии.

Отметим, что переход от качественных рассуждений к более или менее строгой теории обнаружил крайнюю сложность происходивших при формировании планет процессов. Многие авторы считают, что после образования Солнца гораздо вероятнее конденсация остатков туманности во вторую, карликовую, звезду, чем в планетную систему. Иными словами, вероятность образования двойной звезды намного выше образования звезды с планетами. И действительно, именно двойные и кратные звезды и составляют подавляющее большинство «населения» Галактики. Поэтому сам факт существования нашей планеты требует объяснения.

Чтобы как-то «спасти положение», предложено несколько «катастрофических» гипотез, согласно которым планетная система могла образоваться в результате каких-то катастрофических событий — взрывов, сближений звезд и т. п. Например, рассматривается гипотеза о том, что на определенной стадии эволюции протопланетной туманности неподалеку от нее проходила звезда, которая именно в этот момент взорвалась как сверхновая. Возникшие в протопланетной туманности ударные волны создали необходимые условия для дальнейшего формирования планет. Сильную поддержку эта гипотеза получила, в частности, в результате анализа химического состава метеорита Альенде. В нем оказалось необычно много кальция, бария и неодима — именно такая аномалия состава и должна была бы возникнуть под действием близкой вспышки сверхновой. Но вспышки сверхновых — явления крайне редкие. Поэтому изложенная гипотеза допускает, что планетные системы образуются у ничтожного числа звезд, т. е. как редкое исключение.

Справедлива ли такая гипотеза? Может быть, метеорит Альенде — межзвездный скиталец, который действительно когда-то был свидетелем вспышки сверхновой, но и только? Вместе с тем, в последние годы с помощью космических, а затем и наземных средств удалось обнаружить, что некоторые звезды окружены пылевыми дисками большой протяженности. Многие ученые полагают, что это — будущие планетные системы. Наряду с пылевыми дисками удается также косвенно установить присутствие у некоторых звезд спутников с массой, промежуточной между звездой и планетой.

Интересная возможность обнаружить планету существует в том случае, если планета обитаема и ее цивилизация близка к нашему уровню. Остановимся на этом несколько подробнее.

Если образование планет и возникновение жизни на них — процессы закономерные и если возникшая жизнь во многих случаях достигает разумного и технологического уровня, о существовании планетных систем можно было бы судить по признакам технической деятельности какой-то цивилизации. Так, если предположить, что развитое общество обязательно использует радиосвязь, радиоизлучение искусственного происхождения можно было бы обнаружить с помощью приемников высокой чувствительности. Но пока поиски таких сигналов неизменно кончались разочарованием.

На самом деле было бы очень наивно искать обитаемые миры с цивилизацией примерно на том же уровне технического развития, что и наша. Даже если бы их было много, они обязательно были бы отделены друг от друга не только десятками или сотнями парсек*), но и огромными временными интервалами. Иными словами, наше настоящее может быть «их» весьма далеким прошлым, а радиосвязь для «них» — чем-то вроде наскальных рисунков. Однако проблема не безнадежна. Технически развитое и энергетически вооруженное общество должно выдавать себя весьма интенсивным инфракрасным или микроволновым излучением (что иногда называют «космическим чудом»).

Все эти предположения опираются на предпосылку о достаточно долгой жизни цивилизаций. Если же продолжительность их существования мала, искать их по радио- или микроволновому излучению бесполезно.

Поиски радиоизлучений со специфическими признаками — увлекательная задача, но здесь для нас важен их неизменно отрицательный результат. Не исключено, что наиболее вероятная причина этого — малая распространенность разумной жизни в Галактике. В свою очередь, малую распространенность можно связать как с малой вероятностью возникновения жизни и ее эволюцией в разумные формы на имеющейся пла-

---

*) Парсек (пк) — единица длины, применяемая в астрономии; 1 пк$\approx 3\cdot 10^{16}$ м. Свет проходит это расстояние в три с небольшим года.

Панорама лунной поверхности, переданная на Землю во время третьего дня работы советского самоходного аппарата «Луноход-1» (1970 г.). На ней хорошо виден след, оставленный колесами лунохода.

нете, так и с низкой распространенностью самих планетных систем. К сожалению, остается неизвестным, какая именно из двух причин «работает».

На Земле жизнь возникла всего через полмиллиарда лет после завершения формирования планеты. Подробности происхождения жизни неизвестны. Существенно, что уже первые, самые примитивные организмы были наделены важнейшими механизмами, которые клетки всех живых существ используют и теперь.

Но насколько закономерно возникновение жизни на планете?

В оценке вероятности как появления разумной жизни, так и образования планетной системы мы располагаем одним-единственным доказательством — это мы сами и Солнечная система. Поэтому вероятность может быть любой — практически от единицы до нуля, и потому так важны исследование планет Солнечной системы и поиск планетных систем у других звезд.

Благодаря космическим исследованиям, планетная астрономия за последние 15—20 лет стала одной из наиболее бурно развивающихся областей астрономической науки. Отвлечемся от того, что может ждать нас у далеких звезд, и познакомимся с довольно безрадостными пока результатами поисков жизни на планетах Солнечной системы.

Луна и Меркурий

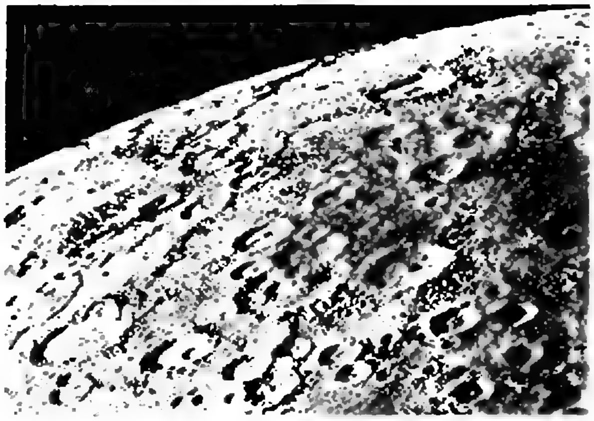
Хронологически **Луна** была первым небесным телом, стерильность*) которого установлена экспериментальным путем. Отсутствие атмосферы, связанное с этим облучение поверхности всеми видами существующей в околоземном пространстве радиации и резкие перепады температур — таковы физические условия на естественном спутнике Земли.

Луна — очень крупное небесное тело, один из самых больших естественных спутников в Солнечной системе. Ее диаметр 3476 км, масса 1/81 земной. Магнитного поля у Луны нет. (Как известно, магнитное поле образует над Землей своеобразную «крышу», которая защищает ее от заряженных частиц и собирает их в радиационные пояса. На стадии возникновения земной жизни это был немаловажный фактор, поскольку облучение заряженными частицами высоких энергий также создает стерилизующий эффект.) Вращение Луны заторможено приливным воздействием Земли. В результате в течение длительного лунного дня температура поверхности повышается до 340—370 К, а ночью падает до 130 К и ниже.

Реголит, верхний слой лунной коры, представляет собой продукт перера-

---

*) Отсутствие жизнеспособных клеток или спор микроорганизмов.



Сходство Меркурия с Луной отчетливо заметно на фотографии Меркурия, полученной американским космическим аппаратом «Маринер-10» (1974 г.).

ботки грунта в результате постоянной метеоритной бомбардировки, в основном микрометеоритными частицами. Основной вид пород поверхности Луны — базальты. Базальтовые лавы в морских районах изливались в эпоху высокой вулканической активности, которая давно угасла. Камни и рыхлый грунт — таков был характерный вид поверхности Луны в районе работы советских роботов «Луноход-1» и «Луноход-2» (1970—1973 гг.).

Все, что известно ныне о Луне, полностью исключает ее из числа небесных тел, где можно было бы ожидать найти жизнь даже в самых простейших известных нам формах.

На Луну очень похож **Меркурий** — первая планета Солнечной системы. Он также лишен атмосферы. Фотометрические свойства его поверхности практически такие же. Из-за приливного влияния близкого Солнца продолжительность солнечных суток на Меркурии — 176 земных дней, года — 88 дней. В течение длительного солнечного дня поверхность на экваторе раскаляется до 800 К, а ночью быстро остывает до 100 К.

Вид большинства районов Меркурия внешне неотличим от лунных — те же бесчисленные метеоритные кратеры, что и на Луне, только их диаметр меньше (это и понятно: из-за вдвое меньшего ускорения свободного падения на Луне обломки при ударе разлетались дальше).

Рельеф Меркурия представляет наложение огромного количества метеоритных кратеров, среди которых иногда встречаются относительно молодые образования. Предполагается, что пик метеоритной бомбардировки приходился иа —3,9 млрд. лет, после чего рельеф Меркурия претерпел сравнительно мало изменений. В некоторых случаях отмечаются очень старые кратеры, дно которых несет следы обширных лавовых излияний. Это — косвенное указание на то, что процесс формирования поверхности Меркурия и местные излияния лавы происходили одновременно. Иными словами, в эпоху формирования планеты имелись отдельные очаги магмы, местами выходившие на поверхность. На Меркурии, в отличие от Луны, нет обширных кратерных «морей». Бассейн Калорис (или Море Зноя) — единственное большое образование такого рода на известной стороне планеты. Оно находится в одной из двух областей, которые поочередно обращены к Солнцу в перигелии.

Радиус планеты составляет 2439 км, масса — 0,055 массы Земли. Отражательная способность поверхности Меркурия примерно вдвое выше, чем у Луны.

Недра Меркурия представляют уникальное явление среди планет земной группы — радиус его металлического ядра оценивается в 0,75 радиуса планеты. Вывод о таком большом ядре опирается как на весьма высокую среднюю плотность планеты, так и на ее довольно сильное магнитное поле. Обнаружение магнитного поля у Меркурия в 1974 году было одной из сенсаций; ученые до сих пор не могут объяснить его существование.

Излишне говорить, что Меркурий — планета безжизненная. Когда к нему отправятся экспедиции людей, инженерам придется немало потрудиться, чтобы создать подходящее снаряжение. Выжить на такой планете будет очень непросто.

(Продолжение следует)

Вместе к Марсу!

Сроки экспедиции на Марс назначены! Отбор экипажа еще не начался, но специалисты уже работают над проектами крупнейшей космической одиссеи человечества. И вы можете принять участие в этой работе.

Ряд научных и общественных организаций СССР открывают Всесоюзный этап Международного научного конкурса «Вместе к Марсу». Заключительный этап конкурса состоится в Вашингтоне (США) в 1992 году в рамках Международного года исследований космоса.

В конкурсе принимают участие те, кто родился не ранее 1 января 1974 года. В работе вам могут помогать старшие товарищи или научные руководители. Над одним проектом может работать и группа из 2—3 человек.

Ваша работа — это может быть инженерная разработка конструкции всего комплекса или его части, программа космических исследований или экспериментов, концепция всей экспедиции или вопросы организации досуга космонавтов, анализ экологических проблем или психологических аспектов столь длительного полета, план организации сотрудничества при реализации экспедиции или методика подготовки экипажей, словом, все, что относится к долговременной межпланетной экспедиции или освоению Марса,— должна быть представлена в виде отчета объемом не более 10 000 слов (40 машинописных страниц), на русском языке. Отчет включает титульный лист с названием темы и сведениями об авторах (фамилия, имя, отчество, год рождения, адрес, учебное заведение, класс, курс) и руководителях; введение; описание выбранной проблемы и методов ее решения; само решение. Количество иллюстраций, диаграмм, схем, ссылок, фотографий, слайдов, дискет и моделей не ограничено — лишь бы они были необходимы для пояснений разработки.

В представленных работах будут оцениваться оригинальность, творческий подход, научная и техническая обоснованность, полнота и ясность изложения. При оценке работы будет учитываться и число участников, и роль руководителя.

Работы на Всесоюзный этап принимаются до 30 апреля 1991 года. Затем будут названы победители этапа и определены участники финала. Победители этапа награждаются призами и сувенирами. На заключительный этап конкурса будут направлены 3 представителя от СССР (но не более одного от любого проекта).

Участников финальной части, которую организует Планетное общество США, ждут специальные удостоверения и призы. 20 победителей финала получат денежные награды в размере 2500 долларов.

Свои работы высылайте по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «КВМ-91»).

Оргкомитет «КВМ-91»

Идея есть, и не одна

(Начало см. на с. 58)

образцы породы можно примораживать. Особенно ценным такой способ взятия проб может сказаться при исследовании ила. Любой механический манипулятор при зачерпывании обязательно смешает собираемые осадочные породы. А замерзший ил, вытащенный с помощью примораживающего устройства, можно исследовать послойно.

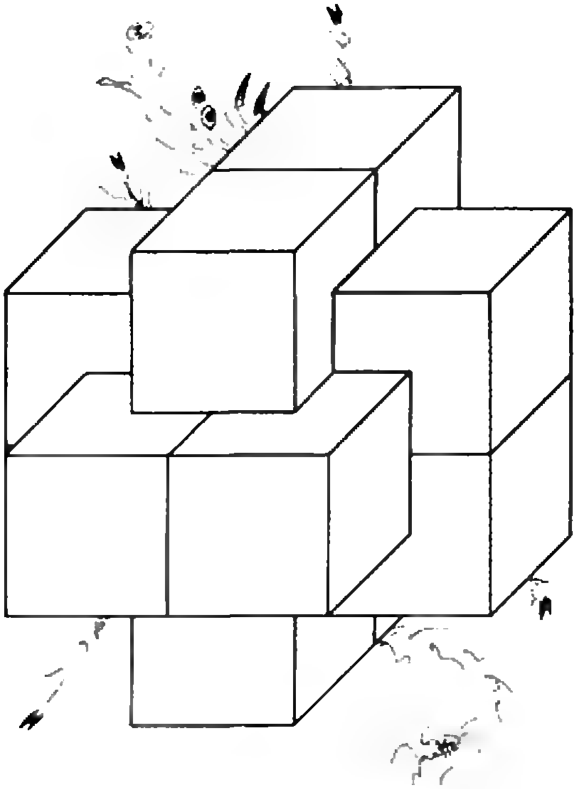
Итак, читатель, наверное, обратил внимание на некоторые особенности решения изобретательских задач с использованием физических принципов. Во-первых, решение находится не на пути создания сложного механизма, а за счет использования какого-нибудь физического эффекта. Во-вторых, найденный физический принцип в большинстве случаев оказывается применим для решения целой группы задач. В-третьих, наиболее красивые решения — это те, в которых используется сразу несколько физических свойств задействованных веществ. Так, в решении Саши Чернова азот вначале используется как хладагент, а потом — как наполнитель оболочки, обеспечивающей подъемную силу.

В заключение хочется поблагодарить всех ребят, приславших нам письма, и предложить следующую задачу.

Задача 2. «Сушка меха» В пушной промышленности возникает проблема сушки меха после мытья. Волоски меха слипаются, образуя неприглядные «сосульки». Это портит внешний вид меха. Нужно найти способ, позволяющий разделить волоски меха в процессе сушки.

Ждем ваших писем. На конверте с решением сделайте пометку «Идея-2».

Ведущий рубрики А. Лазарян



Игры и головоломки

Превращения головоломки адмирала Макарова

Д. ВАКАРЕЛОВ, А. КАЛИНИН

Мир устроен так, что вещи в нем могут жить дольше, чем люди, иметь разные имена в разное время и в разных странах. Игрушка, которую вы видите на рисунке, известна в нашей стране как «головоломка адмирала Макарова». В других странах она имеет другие имена, из которых наиболее часто встречающиеся — «дьявольский крест» и «чертов узел».

Этот узел связывается из 6 брусков квадратного сечения. В брусках имеются пазы, благодаря которым и возможно скрещивание брусков в центре узла. Один из брусков не имеет пазов, он закладывается в узел последним, а при разборке вынимается первым.

Автор этой головоломки неизвестен. Появилась она много веков назад в Китае. В ленинградском Музее антропологии и этнографии им. Петра Великого, известном как «Кунсткамера», хранится старинная, сандалового дерева шкатулка из Индии, в 8 углах которой пересечения брусков каркаса образуют 8 головоломок. В средние века моряки и купцы, воины и дипломаты забавлялись такими головоломками и заодно развозили их по свету. Адмирал Макаров, дважды бывавший в Китае до своей последней поездки и гибели в Порт-Артуре, привез игрушку в Петербург, где она вошла в моду в светских салонах. В глубину России головоломка проникала и другими дорогами. Известно, что в деревню Олсуфьево Брянской области чертов узел принес солдат, вернувшийся с русско-турецкой войны.

Сейчас головоломку можно купить в магазине, но приятнее сделать ее своими руками. Наиболее подходящий размер брусков для самодельной конструкции: 6×2×2 см.

Многообразие чертовых узлов

До начала нашего века, за несколько сот лет существования игрушки в Китае, Монголии и Индии было придумано более ста вариантов головоломки, отличающихся между собой конфигурацией вырезов в брусках. Но самыми популярными остаются два варианта. Показанный на рисунке 1 решается довольно легко, просто его и изготовить. Именно эта конструкция использована в древней индийской шкатулке. Из брусков рисунка 2 складывается головоломка, которая называется «Чертов узел». Как вы догадываетесь, свое название она получила за трудность решения.

В Европе, где, начиная с конца прошлого века, «Чертов узел» получил широкую известность, энтузиасты стали придумывать и делать наборы брусков с разными конфигурациями вырезов. Один из наиболее удачных комплектов позволяет получать 159 головоломок и состоит из 20 брусков 18 видов. Хотя все узлы внешне неразличимы, они совершенно по разному устроены внутри.

Болгарский художник, профессор Петр Чуховски, автор множества причудливых и красивых деревянных узлов из разного количества брусков, тоже занимался головоломкой «Чертов узел». Он разработал набор конфигураций брусков и исследовал всевозможные комбинации 6 брусков для одного простого его поднабора.

Настойчивее всех в таких поисках был голландский профессор математики Ван де Боер, который своими руками сделал набор из нескольких сотен брусков и составил таблицы, показывающие, как собрать 2906 вариантов узлов.

Это было в 60-е годы, а в 1978 году американский математик Билл Катлер написал программу для компьютера и методом полного перебора определил, что существует 119 979 вариантов головоломки из 6 элементов, отличающихся друг от друга комбинациями выступов и впадин в брусках, а также размещением брусков, при условии, что внутри узла нет пустот. Удивительно большое число для такой маленькой игрушки! Поэтому для решения задачи и понадобилась ЭВМ.

Как ЭВМ решает головоломки?

Конечно, не так, как человек, но и не каким-то волшебным способом. Компьютер решает головоломки (и другие задачи) по программе, программы пишут программисты. Пишут, как им удобно, но так, чтобы было понятно и ЭВМ. Как же ЭВМ манипулирует деревянными брусками?

Будем исходить из того, что мы имеем набор из 369 брусков, отличающихся друг от друга конфигурациями выступов (этот набор первым определил Ван де Боер). В ЭВМ надо ввести описания этих брусков. Минимальный вырез (или выступ) в бруске — это кубик с ребром, равным 0,5 толщины бруска. Назовем его единичным кубиком. В целом бруске содержатся 24 таких кубика (рисунок 1). В ЭВМ для каждого бруска заводится «малый» массив из $6\times2\times2=24$ чисел. Брусок с вырезами задается последовательностью 0 и 1 в «малом» массиве: 0 соответствует вырезанному кубику, 1 — целому. Каждый из «ма-

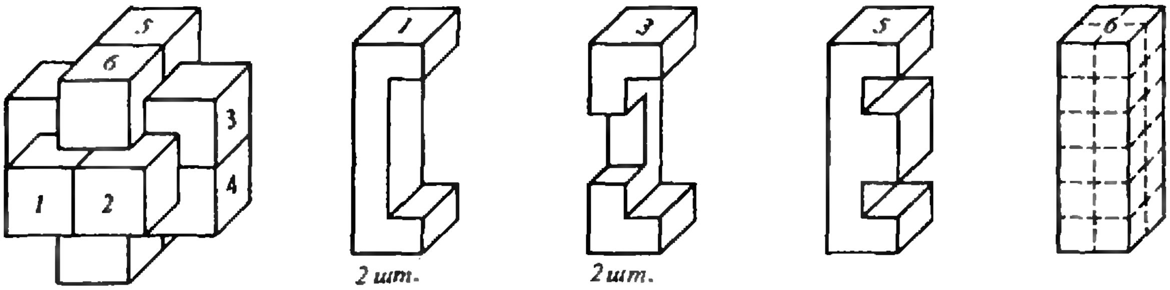


Рис. 1. Простейший вариант головоломки «чертов узел».

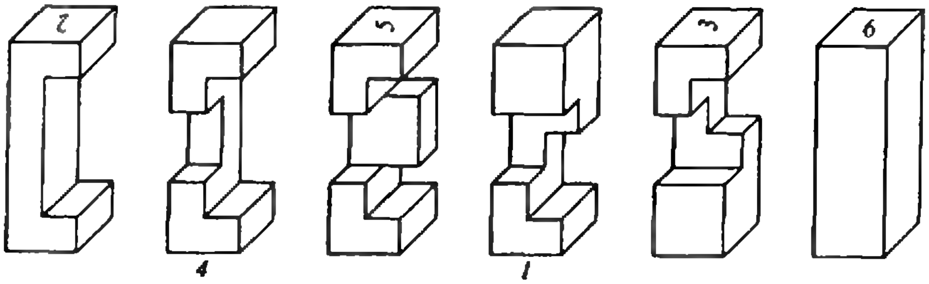


Рис. 2. Бруски классического варианта головоломки «чертов узел» — «головоломка адмирала Макарова».

лых» массивов имеет свой номер (от 1 до 369). Любому из них можно присвоить еще номер от 1 до 6, отвечающий положению бруска внутри головоломки.

Перейдем теперь к головоломке. Представим, что она помещается внутрь куба размером 8×8×8. В ЭВМ этому кубу соответствует «большой» массив, состоящий из 8×8×8=512 ячеек-чисел. Поместить определенный брусок внутрь куба — это значит заполнить соответствующие ячейки «большого» массива числами, равными номеру данного бруска.

Сравнивая 6 «малых» массивов и основной, ЭВМ (т. е. программа) как бы складывает вместе 6 брусков. По результатам сложения чисел она определяет, сколько и каких «пустых», «заполненных» и «переполненных» ячеек образовалось в основном массиве. «Пустые» ячейки соответствуют пустому пространству внутри головоломки, «заполненные» — соответствуют выступам в брусках, а «переполненные» — попытке соединить вместе два единичных кубика, что, естественно, запрещено. Такое сравнение производится многократно, не только с разными брусками, но и с учетом их разворотов, мест, которые они занимают в «кресте», и т. п.

В результате отбирают те варианты, в которых нет пустых и переполненных ячеек. Для решения этой задачи достаточно было бы «большого» массива размером 6×6×6 ячеек. Оказывается, однако, что существуют комбинации брусков, полностью заполняющие внутренний объем головоломки, но при этом разобрать их невозможно. Поэтому программа должна уметь проверять узел на возможность разборки. Для этого Катлер и взял массив 8×8×8, хотя его размеры, возможно, недостаточны для проверки всех случаев.

Он заполняется информацией о конкретном варианте головоломки. Внутри массива программа пытается «двигать» бруски, т. е. перемещает в «большом» массиве части бруска размером 2×2×6 ячеек. Перемещение происходит на 1 ячейку в каждом из 6 направлений, параллельных осям головоломки. Результаты тех из 6 попыток, в которых не образуется «переполненных» ячеек, запоминаются как исходные положения для следующих шестерок попыток. В результате строится дерево всевозможных движений до тех пор, пока какой-нибудь брусок целиком не выйдет из основного массива или же после всех попыток останутся «переполненные» ячейки, что соответствует варианту, который невозможно разобрать.

Вот так были получены на ЭВМ 119 979 вариантов «Чертова узла», в том числе не 108, как полагали древние, а 6402 варианта, имеющих 1 целый, без вырезов брусок.

Суперузел

Обратим внимание, что Катлер отказался от исследования общей задачи — когда узел содержит и внутренние пустоты. В этом случае количество узлов из 6 брусков сильно возрастает и полный перебор, необходимый для поиска допустимых решений, становится нереальным даже для современного компьютера. Но как мы увидим сейчас, самые интересные и трудные головоломки содержатся именно в общем случае — разборку головоломки тогда можно сделать далеко не тривиальной.

Благодаря наличию пустот, появляется возможность последовательно передвинуть несколько брусков прежде, чем удастся полностью отделить какой-либо брусок. Движущийся брусок отцепляет некоторые бруски, разрешает движение следующего бруска и одновременно зацепляет другие бруски.

Чем больше нужно проделать манипуляций при разборке, тем интереснее и труднее вариант головоломки. Пазы в брусках расположены так хитро, что поиск решения напоминает блуждание по темному лабиринту, в котором все время наталкиваешься то на стены, то на тупики. Такого типа узел несомненно заслуживает и нового имени; мы будем называть его «суперузел». Мерой сложности суперузла назовем количество движений отдельных брусков, которые необходимо сделать до того, как первый элемент будет отделен от головоломки.

Мы не знаем, кто придумал первый суперузел. Наиболее знамениты (и наиболее трудны в решении) два суперузла: «колючка Билла» сложности 5, придуманная У. Катлером, и «суперузел Дюбуа» сложности 7. До сих пор считалось, что степень сложности 7 едва ли можно превзойти. Однако первому из авторов этой статьи удалось усовершенствовать «узел Дюбуа» и увеличить сложность до 9, а затем, используя некоторые новые идеи, получить суперузлы со сложностью 10, 11 и 12. Но число 13 остается пока непреодолимым. Может быть, число 12 является самой большой сложностью суперузла?

Решение суперузлов

Приводить чертежи таких трудных головоломок, как суперузлы, и не раскрывать их секретов было бы слишком жестоко по отношению даже к знаткам головоломок. Мы дадим решение суперузлов в компактной, алгебраической форме.

Перед разборкой берем головоломку и ориентируем так, чтобы номера деталей соответствовали рисунку 1. Последовательность разборки записывается в виде сочетания цифр и букв. Цифры означают номера брусков, буквы — направления движения в соответствии с показанной на рисунках 3 и 4 системой координат. Черта над буквой означает движение в отрицательном направлении оси координат. Один шаг — это перемещение бруска на 1/2 его ширины. Когда брусок передвигается сразу на два шага, его перемещение записывается в скобках с показателем степени 2. Если передвигают сразу несколько деталей, которые зацеплены между собой, то их номера заключают в скобки, например (1, 3, 6) x. Отделение бруска от головоломки отмечается вертикальной стрелкой.

Приведем теперь примеры лучших суперузлов.

Головоломка У. Катлера («колючка Билла»). Она состоит из деталей 1, 2, 3, 4, 5, 6, показанных на рисунке 3. Там же приводится алгоритм ее решения. Любопытно, что в журнале «Scientific American» (1985, № 10) приведен другой вариант этой головоломки и сообщается, что «колючка Билла» имеет единственное решение. Различие между вариантами — всего в одном бруске: деталях 2 и 2 *B* на рисунке 3.

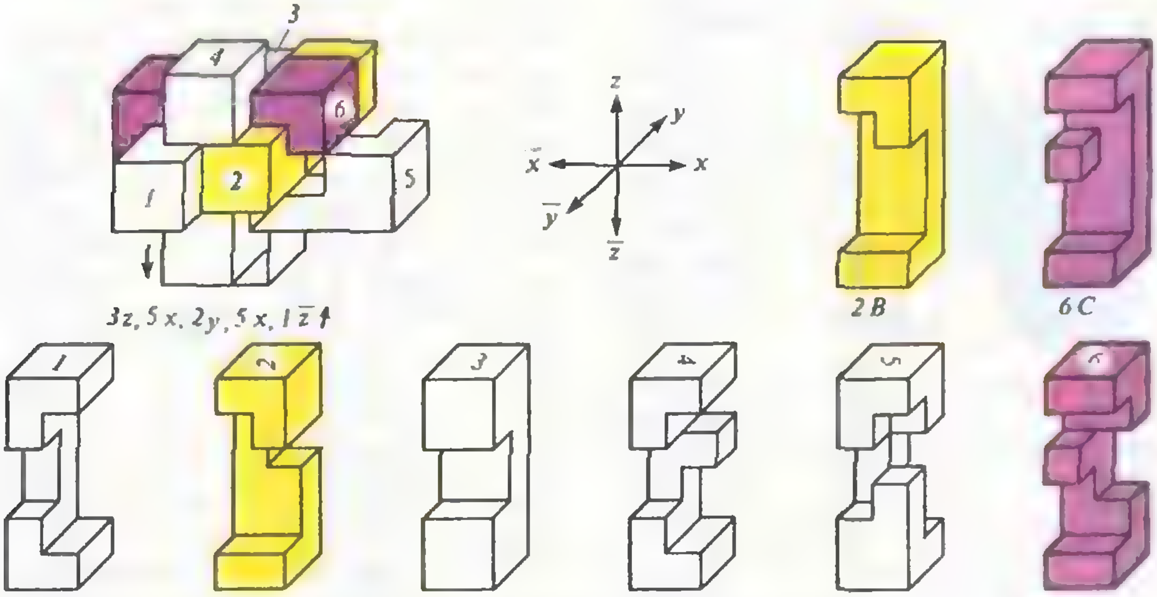
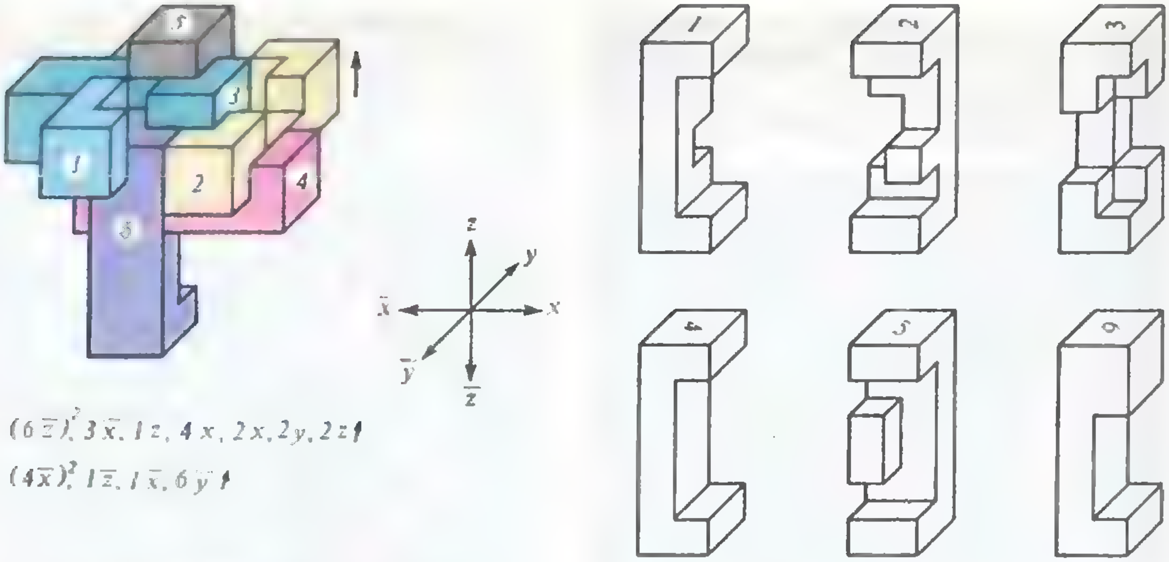


Рис. 3. Головоломка «колючка Билла», разработанная с помощью ЭВМ.

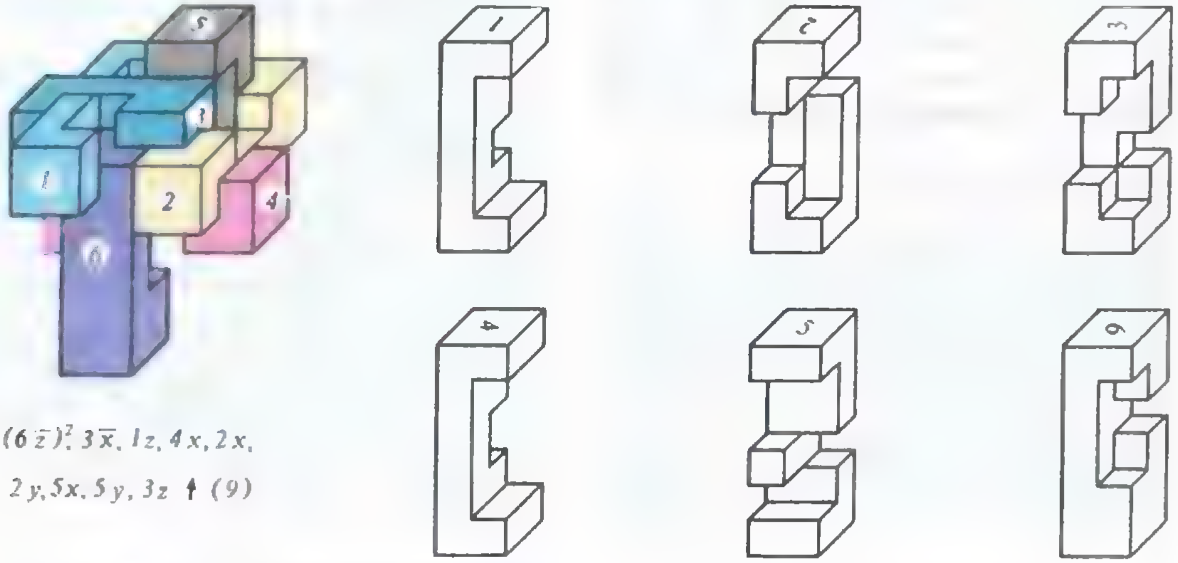


5
3
1
2
4
6
z
y
$\bar{x}$
x
$\bar{y}$
$\bar{z}$

$(6\bar{z})^2, 3\bar{x}, 1z, 4x, 2x, 2y, 2z \uparrow$

$(4\bar{x})^2, 1\bar{z}, 1\bar{x}, 6\bar{y} \uparrow$

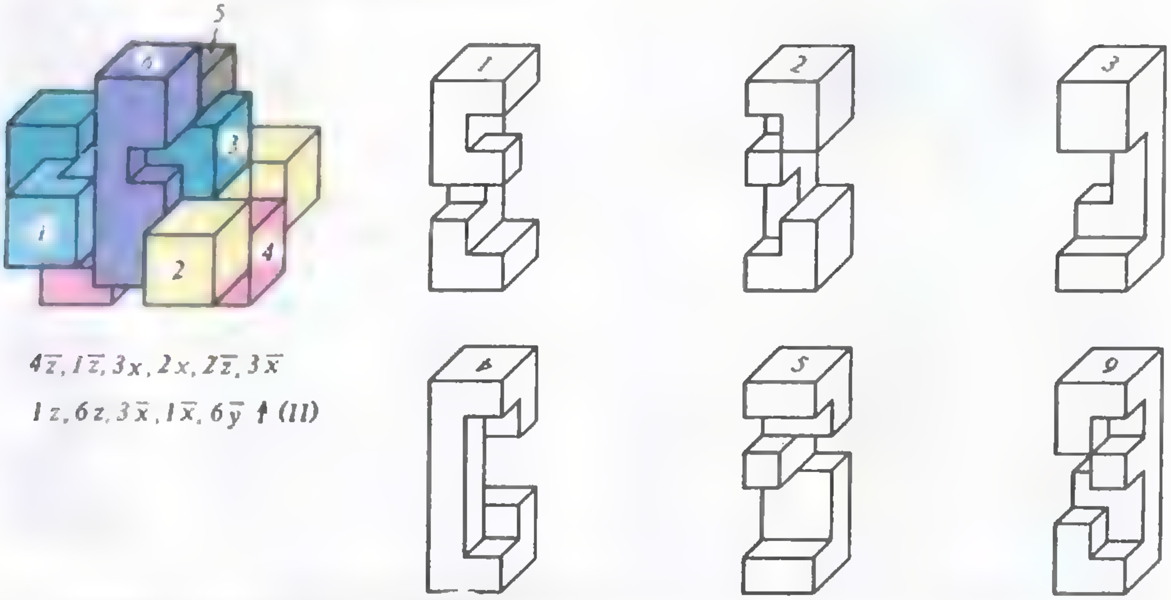
Рис. 4. Суперузел Ф. Дюбуа сложности 7.



$(6\bar{z})^2, 3\bar{x}, 1z, 4x, 2x,$

$2y, 5x, 5y, 3z \uparrow (9)$

Рис. 5. Суперузел Д. Вакарелова сложности 9.



$4\bar{z}, 1\bar{z}, 3x, 2x, 2\bar{z}, 3\bar{x}$

$1z, 6z, 3\bar{x}, 1\bar{x}, 6\bar{y} \uparrow (11)$

Рис. 6. Суперузел Д. Вакарелова сложности 11.

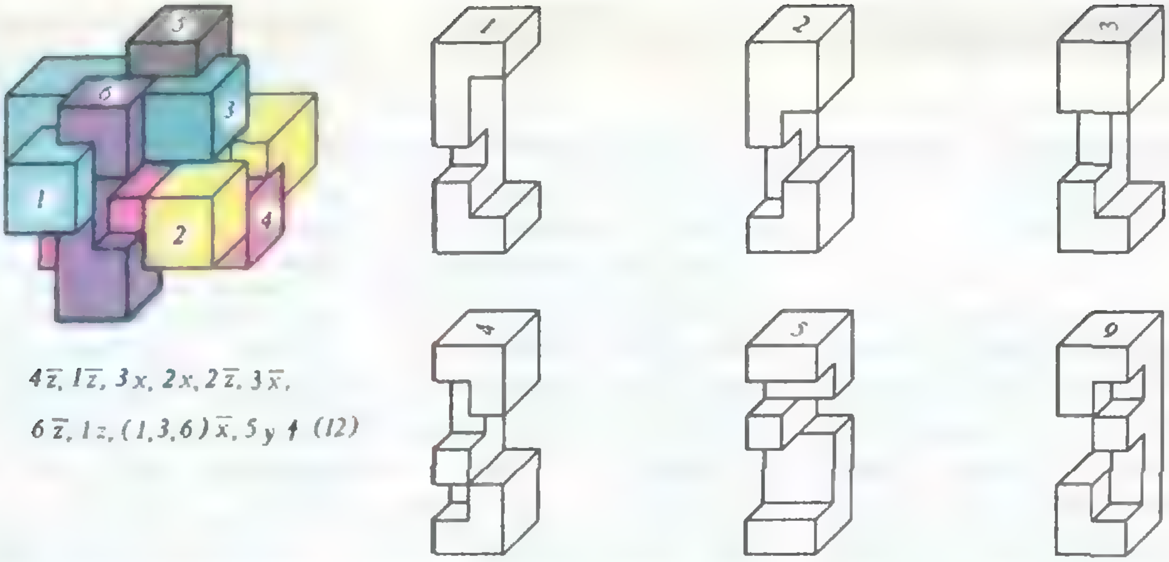

5
6
3
1
2
4
$4\bar{z}, 1\bar{z}, 3x, 2x, 2\bar{z}, 3\bar{x},$
$6\bar{z}, 1z, (1,3,6)\bar{x}, 5y\uparrow$ (12)
1
2
3
4
5
9

Рис. 7. Суперузел Д. Вакарелова сложности 12.

Из-за того, что деталь 2 *B* содержит меньше вырезов, чем деталь 2, вставить ее в «колючку Билла» по указанному на рисунке 3 алгоритму не удается. Остается предположить, что головоломка из «Scientific American» собирается каким-то другим способом.

Если это так и мы ее соберем, то после этого сможем заменить деталь 2 *B* на деталь 2, так как последняя занимает меньший объем, чем 2 *B*. В результате мы получим второе решение головоломки. Но «колючка Билла» имеет единственное решение, и из нашего противоречия можно сделать только один вывод: во втором варианте допущена ошибка в рисунке.

Аналогичная ошибка сделана еще в одной публикации (Дж. Слокум, Дж. Ботерманс «Puzzles old and new», 1986), но уже в другом бруске (деталь 6 *C* на рисунке 3). Каково же было тем читателям, которые пытались и, возможно, пытаются до сих пор решить эти головоломки?

Головоломка Филиппа Дюбуа (рис. 4). Она решается за 7 ходов по следующему алгоритму: $(6\bar{z})^2$, $3\bar{x}$, $1\bar{z}$, $4x$, $2x$, $2y$, $2z\uparrow$. На рисунке показано расположение деталей на 6 шаге разборки. Начиная с этого положения, используя обратный порядок алгоритма и изменяя направления движения на противоположные, можно собрать головоломку.

Три суперузла Д. Вакарелова. Первая из его головоломок (рис. 5) — это усовершенствованный вариант головоломки Дюбуа, он имеет сложность 9. Этот суперузел больше других похож на лабиринт, так как при его разборке возникают ложные ходы, заводящие в тупики. Пример такого тупика — ходы $3\bar{x}$, $1\bar{z}$ в начале разборки. А правильное решение такое:

$$(6\bar{z})^2,\ 3\bar{x},\ 1z,\ 4x,\ 2x,\ 2y,\ 5x,\ 5y,\ 3z^{\uparrow}.$$

Вторая головоломка Д. Вакарелова (рис. 6) *решается по формуле:*

$$4\bar{z},\ 1\bar{z},\ 3x,\ 2x,\ 2\bar{z},\ 3\bar{x},\ 1z.\ 6z.\ 3\bar{x},\ 1x, 6y\uparrow$$

и имеет сложность 11. Она замечательна тем, что брусок 3 на третьем ходу делает шаг $3x$, а на шестом ходу возвращается обратно ($3\bar{x}$); и брусок 1 на втором шаге двигается по $1\bar{z}$, а на 7 ходу делает обратный ход.

Третья головоломка (рис. 7) — одна из самых сложных. Ее решение:

$$4\bar{z}, 1\bar{z}, 3x. 2x. 2\bar{z}, 3\bar{x}, 6\bar{z}, 1z, (1, 3, 6)\bar{x}, 5y\uparrow$$

до седьмого хода повторяет предыдущую головоломку, затем, на 9 ходу в ней встречается совершенно новая ситуация: неожиданно все бруски перестают двигаться! И тут необходимо догадаться подвинуть сразу 3 бруска (1, 3, 6), и если это движение считать за 3 хода, то сложность головоломки будет равна 12.

Информация

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школе под руководством учителя. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружка — его руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо выслать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой прислать первое задание. Срок отправки заявления — *не позднее 20 сентября* (по почтовому штемпелю места отправления). В заявлении необходимо указать также некоторые сведения о себе:

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором вы учитесь в своей школе	9 «а»
Отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два)	математическое (и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5, Николаеву Игорю Ивановичу

Зачисление в ЗШ производится по результатам первого задания. В тех случаях, когда число желающих учиться в ЗШ превышает возможности нашей школы, предпочтение может быть отдано школьникам из села или из малых городов и поселков.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, но *не позднее 10 октября*.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставив поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

Поскольку в задании имеются задачи различной степени сложности, для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным правильно решить одну — две задачи.

Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами и для других классов, а понравившиеся задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше).

Экспериментальная задача — одна для поступающих во все классы.

Измерьте плотность древесины, погружая деревянный предмет в кастрюлю с водой и используя для измерения только линейку. Плотность воды известна.

Теоретические задачи

9 класс

1. Со дна водоема пытаются поднять стальной затонувший якорь массой 780 кг с помощью пенопластового шара, прикрепляя его к якорю легким тросом. При каком минимальном объеме шара это возможно? Плотности стали, воды и пенопласта равны соответственно 7800, 1000 и 150 кг/м^3.

2. Проволоку сопротивлением 100 Ом разрезали на несколько равных частей и соединили их параллельно. После этого общее сопротивление стало равным 1 Ом. На сколько частей разрезали проволоку?

3. За какое время радиус намотки магнитофонной ленты увеличится от r до R? Толщина ленты d, скорость v.

4. Имеются резистор сопротивлением 100 Ом, рассчитанный на мощность не более 4 Вт, и резистор сопротивлением 200 Ом, рассчитанный на мощность не более 2 Вт. Какое максимальное напряжение можно подать на систему этих резисторов, соединенных последовательно, без риска выведения их из строя?

10 класс

1. Два спортсмена бегут одинаковое время. Один бежит первую половину времени с ускорением a, вторую — с ускорением $2a$. Другой спортсмен — наоборот, т. е. первую половину времени бежит с ускорением $2a$, вторую — с a. Кто из них пробежит большее расстояние?

2. За какое минимальное время может въехать автомобиль на гору, поверхность которой образует угол α с горизонтом? Начальная скорость автомобиля при въезде на гору v, высота горы H, коэффициент трения колес о дорогу μ ($\mu < \operatorname{tg} \alpha$).

3. Конус с углом раствора 2α при вершине стоит на горизонтальном столе. Небольшое тело прикреплено к вершине конуса с помощью нити длиной L. С какой минимальной скоростью может вращаться тело вокруг конуса, оставаясь в контакте с его поверхностью? Ускорение свободного падения g, трения между конической поверхностью и телом нет.

4. Ускорение свободного падения на поверхности некоторой планеты равно g_1, а на высоте H над поверхностью — g_2. Найдите радиус этой планеты.

5. Тело некоторой массы лежит на горизонтальном полу. Оно привязано к потолку, расположенному на высоте H от пола, свободно свисающим невесомым резиновым шнуром длиной L ($L > H$). Жесткость шнура k. Какую минимальную горизонтальную скорость необходимо сообщить телу, чтобы оно оторвалось от пола? При каком условии такая скорость существует? Ускорение свободного падения g, трения нет.

11 класс

1. Решите задачу 1 для 10 класса.

2. Решите задачу 4 для 10 класса.

3. Во сколько раз плотность атмосферы у поверхности Венеры превышает плотность воздуха у поверхности Земли? Атмосфера на Венере состоит из углекислого газа, давление на ее поверхности превышает давление воздуха на поверхности Земли в 100 раз, абсолютная температура на Венере составляет 7/3 от температуры на Земле.

4. На бесконечной плоскости лежит сфера радиусом R. Плоскость и сфера имеют одинаковую поверхностную плотность заряда σ. Определите максимальную напряженность электрического поля такой системы.

5. Запаянная горизонтальная пробирка с паром помещена в термостат. Посередине пробирки находится непроницаемый подвижный поршень. Давление пара в пробирке p, давление насыщенных паров при данной температуре $2p$. Найдите массу поршня, если после перевода пробирки в вертикальное положение объем под поршнем уменьшился в 4 раза. Внутреннее сечение пробирки S. Ускорение свободного падения g.

6. Конденсатор емкостью 1 мкФ выдерживает без пробоя напряжение 500 В, а конденсатор емкостью 0,5 мкФ — 1500 В. Какое наибольшее напряжение

можно подать на систему этих конденсаторов, соединенных последовательно?

Первое задание по математике

9 класс

1. Докажите, что для любого натурального числа n число $n/3+n^2/2+n^3/6$ — натуральное.

2. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Сколько надо взять частей каждого из сплавов, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?

3. Проверьте равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}=9.$$

4. Найдите все значения x, удовлетворяющие условию $|x-1|+|x+1|=2$.

5. Параллельные стороны трапеции равны a и b. Определите длину отрезка, параллельного им и делящего площадь трапеции пополам.

6. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$. Составьте новое квадратное уравнение, корни которого обратны корням данного.

10 класс

1. Решите задачу 1 для 9 класса.

2. Решите задачу 2 для 9 класса.

3. Решите неравенство

$$-|y|+x-\sqrt{x^2+y^2-1}\geqslant 1.$$

4. К двум окружностям с радиусами R и r, находящимся в положении внешнего касания, проведены их общие касательные — внутренняя и две внешние. Определите длину отрезка внутренней касательной, заключенного между внешними касательными.

5. Определите площадь треугольника, если две стороны соответственно равны 27 см и 29 см, а медиана третьей стороны равна 26 см.

6. Три числа, составляющих арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к ним прибавить соответственно 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Какими могут быть эти три числа?

11 класс

1. Докажите, что для любого нечетного натурального n число $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится на 512.

2. Три окружности в пространстве попарно касаются друг друга (т. е. они имеют общие точки и общие касательные в этих точках), причем все три точки касания различны. Докажите, что эти окружности принадлежат либо одной сфере, либо одной плоскости.

3. Решите уравнение
$3\cdot 16^x+37\cdot 36^x=26\cdot 81^x$.

4. Решите задачу 4 для 10 класса.

5. Найдите точки экстремума для функции $y=x/(1+x^2)$.

6. Корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ равны x_1 и x_2. Составьте новое квадратное уравнение, корни которого были бы $y_1=x_1/x_2$ и $y_2=x_2/x_1$.

Нам пишут

Плоское зеркало — это просто?

Кажется, нет ничего проще, чем получение изображения точечного источника света с помощью плоского зеркала. С другой стороны, считается, что плоское зеркало является единственным оптическим инструментом, дающим изображение предмета, полностью симметричное самому предмету.

Все сказанное верно, однако, лишь для специальных металлических зеркал, которые используются в различного рода оптических приборах. Известно, например, что практически полностью отражают падающий на них свет чистые серебряные пленки. Высокой отражающей способностью, близкой к идеальной, обладают и другие хорошо проводящие металлы.

Зеркала, с которыми мы имеем дело в обыденной жизни, отличаются от открытых металлических тем, что их отражающая поверхность покрывается специальным защитным прозрачным покрытием (чаще всего стеклянным). В результате ход лучей в таком зеркале оказывается более сложным и приводит к нежелательным эффектам. Так, расстояние от точечного источника света до плоской зеркальной поверхности уже не равно расстоянию от нее до изображения источника; к тому же само изображение источника не будет вполне точечным. Почему? Попробуем в этом разобраться.

Рассмотрим плоское зеркало с защитным покрытием в виде прозрачного слоя толщиной h с показателем преломления n (см. рисунок). Из рисунка видно, что расстояние от источника до зеркальной поверхности равно

$$d=l+h,$$

а расстояние от поверхности до изображения —

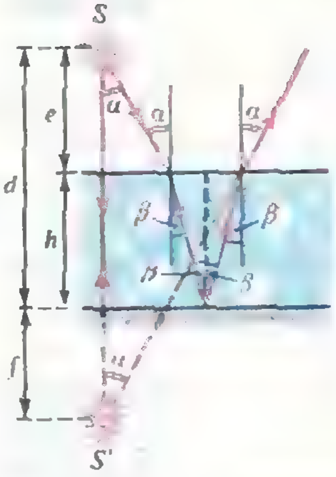
$$f=(l\ \mathrm{tg}\,\alpha+2h\ \mathrm{tg}\,\beta)\ \mathrm{ctg}\,\alpha-h=$$

$$=l+\frac{2h}{n}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}-h.$$

Отсюда находим

$$f=d-2h\left(1-\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)$$

— расстояние d от источника света до зеркальной



поверхности не равно расстоянию f от нее до изображения источника. При этом расстояние f зависит от угла падения света α, а это значит, что изображение точечного источника света получается несколько размытым.

В пределе для лучей света, падающих близко к нормали зеркала (когда $\alpha\to0$), получаем

$$f=d-\frac{2h(n-1)}{n}.$$

Итак, в общем случае $f<d$, а при нормальном падении лучей и при $h\to0$ величина f приближается к d, как этого и следовало ожидать.

В заключение хотелось бы отметить, что изображение источника света в любом случае (есть защитное покрытие или его нет) получается не в зеркале, как обычно пишут, а вне его.

Г. Жариков

Ответы, указания, решения

К 4-й странице обложки
(см. «Квант» № 5)

См. рис. 1.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

1. Так как число 2310 имеет множителем число 11, оно не может быть произведением цифр никакого целого числа.

2. См. рис. 2.

3. Двузначных чисел, являющихся четвертыми степенями, всего два: 16 и 81, а трехзначных, являющихся кубами, пять: 125, 216, 343, 512 и 729. Отсюда следует, что последние три цифры числа — 2, 1, 6. Существует лишь одно число, оканчивающееся на 216 и являющееся полным квадратом. Это $9216=96^2$.

4. Так как $\triangle CEF\sim\triangle CAB$ (рис. 3), получаем, что $EC/AC=EF/AB$. Поскольку $\triangle AEF\sim\triangle ACD$, получаем, что $AE/AC=EF/CD$. Сложив эти равенства, получим $(EC+AE)/AC=EF/AB+EF/CD$. Заметим, что выражение слева равно 1. Разделив теперь обе части последнего равенства на EF, получим требуемое соотношение.

5. Пусть девочек было x, тогда Ирина танцевала с $(x+6)$ мальчиками, следовательно, $x+(x+6)=22$. Отсюда получаем, что девочек было 8, а мальчиков — 14.

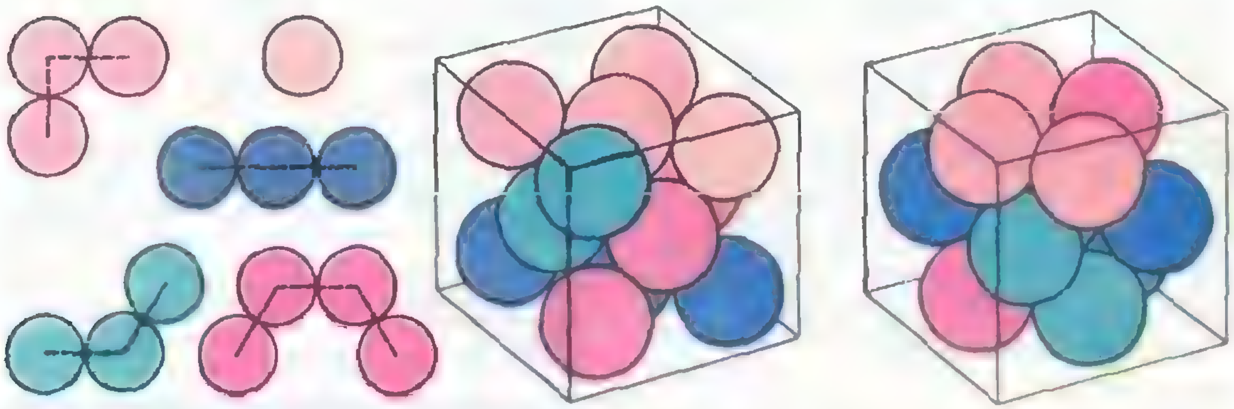


Рис. 1

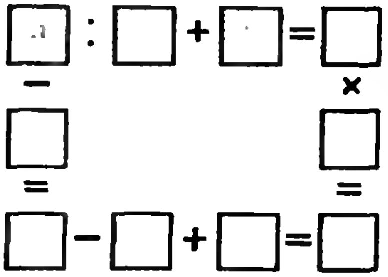


Рис. 2.

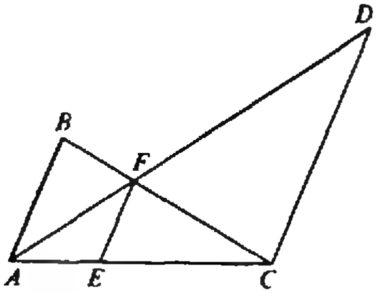


Рис. 3.

[redacted]ейдоскоп «Кванта»
«Квант» № 6)

1. Не изменится, так как количество вытесненной воды останется тем же.
2. Погрузил сперва на плот слона, отметил уровень погружения; затем грузил слитки золота на плот до такого же погружения.
3. Да, уменьшится на величину веса воды, вытесняемой стенками и дном ведра.
4. Нет, поскольку, увеличив выталкивающую силу, человек более значительно увеличил вес своей ноши (плотность сжатого воздуха в камере больше плотности наружного воздуха).
5. Вес в вакууме того дерева, которое в воздухе весит тонну, больше веса в вакууме того железа, которое весит в воздухе также одну тонну.
6. Не изменится.
7. Глубина погружения в ртуть уменьшится, так как возрастет выталкивающая сила за счет вытесненной шариком воды.
8. Нет. Ящик и русло реки — сообщающиеся сосуды, и вода в ящике будет на таком же уровне, как и вода в реке.
9. В первом — не изменится, во втором — понизится.
10. Бутылка с водой потонет, с ртутью — нет.
11. Когда камень находится в лодке, он вытесняет объем воды, масса которого равна массе камня. Поскольку плотность камня больше плотности воды, то объем вытесненной воды больше объема камня. Лежа на дне бассейна, камень вытесняет объем воды, равный лишь его собственному. Поэтому объем вытесненной им воды при попадании в бассейн уменьшается, и уровень падает.
12. Да — если вода проникнет под кубик, нет — в противном случае.

Микроопыт
Сгорая, свеча уменьшается в весе и всплывает, поэтому горит дольше, чем кажется поначалу.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов,
Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, Л. Стасенко,
С. Табачников, В. Уроев, А. Черноуцан,
А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев,
А. Серебров, Я. Смородинский, И. Сурин,
Е. Сурков, В. Фабрикант, Л. Фаддеев,
В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин,
Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов, Н. Кузьмина,
С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова,
П. Черкуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Черкова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 20.04.90. Подписано к печати 30.05.90. Т-10524
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,50. Тираж 163618 экз.
Заказ 722. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

[illegible]

Шахматная страничка

Изменения в кодексе

Напомним, что согласно шахматному кодексу партия заканчивается вничью, если в течение 50 ходов на доске не произошло ни одного взятия и ни одна пешка не сдвинулась с места. Лет двадцать назад это правило не допускало исключений. Но когда ЭВМ начали обнаруживать окончания, которые выигрываются, но при этом более 50 ходов не происходит ни взятий, ни движения пешек, пришлось менять каждое новое издание кодекса.

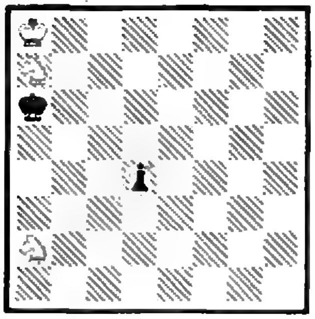
В предыдущем издании число 50 было увеличено до 100 для трех видов эндшпиля: ладья и слон против ладьи; два коня против пешки (если она блокирована на определенных полях); ладья и пешка против слона и пешки (при некоторых положениях пешек, например: у белых a2, у черных a3 при ладье у белых в чернопольном слоне у черных).

Совсем недавно ФИДЕ выпустила новый кодекс, а вслед за ним появилось и 12-е издание «Шахматного кодекса СССР». Эндшпиль «ладья и пешка против слона и пешки» вообще не рассматривается как исключительный.

А число 50 увеличено до 75 для шести окончаний: ладья и слон против ладьи; два коня против пешки; ферзь и пешка против ферзя; ферзь против двух коней; ферзь против двух слонов; два слона против коня.

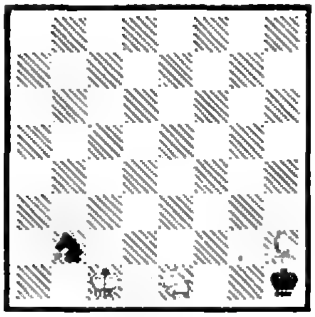
В «Кванте» рассказывалось о каждом из этих окончаний и приводились рекордные позиции. В них действительно взятие фигуры, движение пешки или мат происходили в промежутке между 50-м и 75-м ходами. Но пока готовилось новое издание кодекса, компьютер обнаружил новые рекордные позиции.

Первая связана с уже исследованным эндшпилем «два коня против пешки». Еще год назад считалось, что рекорд здесь равен 69 ходам (при ладейной пешке), теперь же он доведен до 82 ходов.



1. Кb4+ Крb6 2. Кd3. Пешка блокирована, и теперь белый король и второй конь начинают долгую погоню за неприятельским королем. 2... Крc7 3. Кb5+ Крc6 4. Кa3 Крb6 5. Крb8 Крc6 6. Кc4 Крb5 7. Кce5 Крb6 8. Крc8 Крa6 9. Крc7 Крb5 10. Крd6 Крa4 11. Крc5 Крb3 12. Крb5 Крc3 13. Крa4 Крc2 14. Крb4 Крd1 15. Крb3 Крd2 16. Крb2 Крd1 17. Кc4 Крe2 18. Крc2 Крf3 19. Крd2 Крg3 20. Крe2 Крg2 21. Кce5 Крg3 22. Крf1 Крh4 23. Крg2 Крg5 24. Крf3 Крf5 25. Кc4 Крf6 26. Крf4 Крe6 27. Крe4 Крf6 28. Крd5 Крe7 29. Крe5 Крf7 30. Крd6 Крf6 31. Кd2 Крf5 32. Крe7 Крg6 33. Крe6 Крg7 34. Кe4 Крg6 35. Крe5 Крg7 36. Крd6 Крh7 37. Кd2 Крg7 38. Крe6 Крf8 39. Кe4 Крe8 40. Кf6+ Крf8 41. Кh5 Крe8 42. Кg7+ Крd8 43. Крd6 Крc8 44. Кe6 Крb8 45. Крc5 Крa7 46. Крc6 Крa6 47. Кec5+ Крa5 48. Кb3+ Крa4 49. Кd2 Крa5 50. Крc5 Крa6 51. Кc4 Крb7 52. Крd6 Крc8 53. Кв5 Крd8 54. Кb7+ Крe8 55. Крe6 Крf8 56. Кd6 Крg7 57. Крf5 Крh6 58. Крf6 Крh5 59. Кf7 Крg4 60. Кg5 Крh4 61. Крf5 Крg3 62. Крe4 Крg4 63. Кf7 Крh5 64. Крf5 Крh4 65. Кfe5 Крh5 66. Кg4 Крh4 67. Кf6 Крh3 68. Крe5 Крg3 69. Крe4 Крh3 70. Крf3 Крh4 71. Крf4 Крh3 72. Кe8 Крh4 73. Кg7 Крh3 74. Кf5 Крg2 75. Крg4 Крh2 76. Кd6 Крg2 77. Кc4 Крh2 78. Кd2 Крg2 79. Крh4 Крh2 80. Кf4 Крg1 81. Крg3 Крh1 82. Кf3 d3. Наконец-то! 83. Кh3 d2 84. Кf2×.

Второй рекорд связан с малоисследованным эндшпилем, которым раньше не занималась и машина. Занялась — и вот новое удивительное открытие компьютера: слон и конь справляются с конем лишь за 77 ходов!

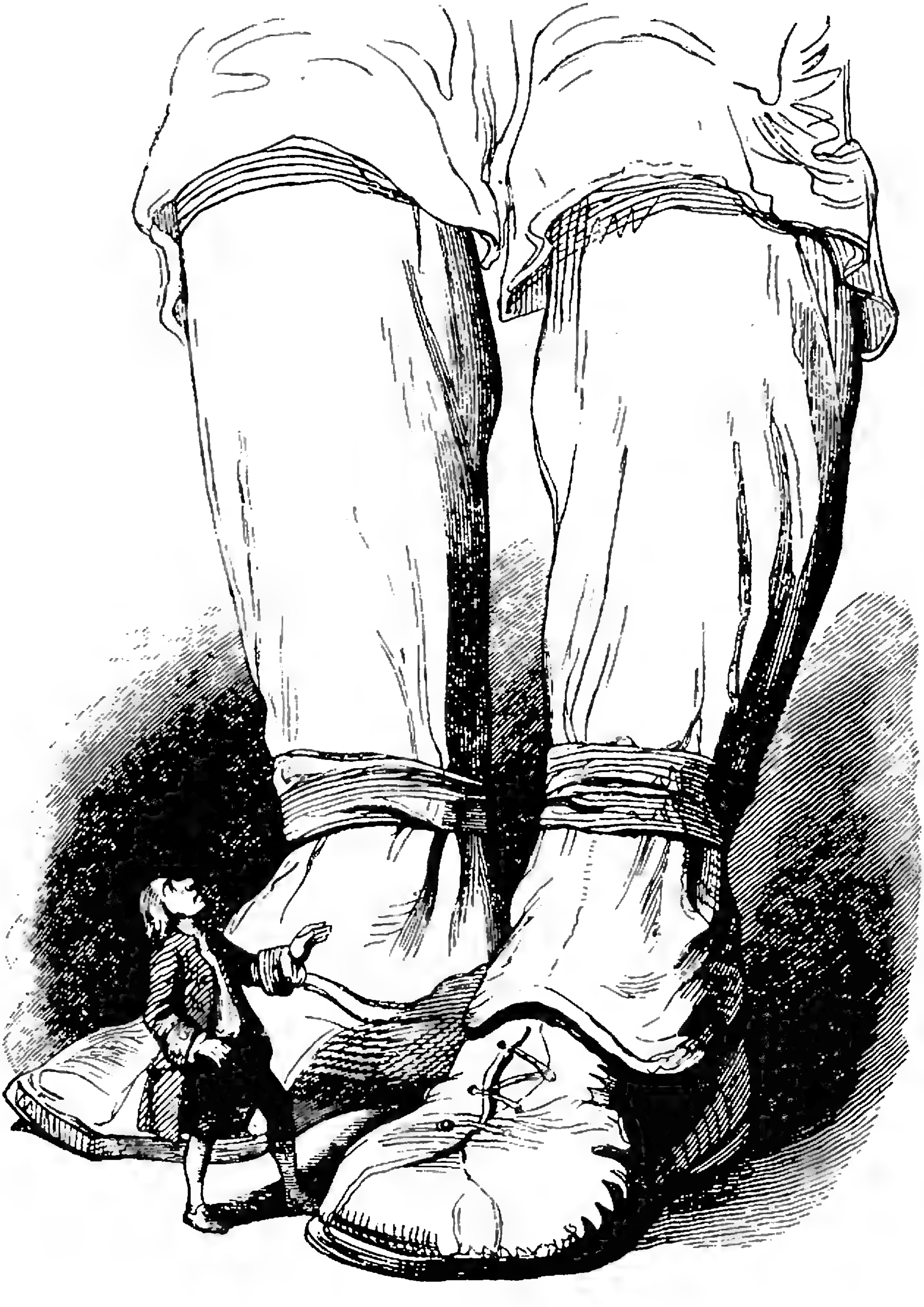


1. Сg3 Кc4 2. Крd1 Кe3+ 3. Крe2 Кf5 4. Сf2 Кe7 5. Крf3 Кc6 6. Крg3 Кd4 7. Крg4 Кc6 8. Крh3 Кb4 9. Сb6 Кd3 10. Кc2 Кf2+ 11. Крg3 Кe4+ 12. Крf4 Кd2 13. Кe3 Крh2 14. Крg4 Кb3 15. Сa7 Кc1 16. Сd4 Кd3 17. Крh4 Кf2 18. Сe5 Крg1 19. Сc3 Кe4 20. Сe1 Кf6 21. Крg5 Кd7 22. Крf4 Кc5 23. Крf3 Кe6 24. Сc3 Крh2 25. Крg4 Кd8 26. Сe5+ Крg1 27. Крg3 Кe6 28. Сf6 Кc5 29. Сd4 Кb3 30. Сa7 Кd2 31. Кe4+ Крh1 32. Кe5 Кc4 33. Кd3 Кd6 34. Крh3 Кf7 35. Сe3 Кe5 36. Кf4 Кc4 37. Сd4 Кd6 38. Кh5 Кe4 39. Сe3 Кf2+ 40. Крg3 Кe4+ 41. Крf3 Кd6 42. Сf4 Кc4 43. Крf2 Кa5 44. Кf6 Кb7 45. Крf3 Кd8 46. Сd6 Крg1 47. Кe4 Кc6 48. Кd2 Кd4+ 49. Крe4 Кe2 50. Крe3 Кc3 51. Сe5 Кa2 52. Крf3 Кb4 53. Крg3 Крh1 54. Сd4 Кc6 55. Сc5 Кd8 56. Кe4 Кb7 57. Сb4 Кd8 58. Сa5 Кe6 59. Сb6 Кg5 60. Кf2+ Крg1 61. Крf4 Кf7 62. Кg4+ Крg2 63. Кe3+ Крh3 64. Кf5 Крg2 65. Сc5 Кh8 66. Кd4 Крh3 67. Крf5 Крh4 68. Кe6 Крh5 69. Сe3 Кf7 70. Кg7+ Крh4 71. Сf4 Кh8 72. Кe6 Кf7 73. Крg6 Кh8+ 74. Крg7 Крg4 75. Сh6 Крh5 76. Кf4+ Крg4 77. Кр:h8.

Конь уничтожен, но игра не кончается и скорее всего продолжится более 100 ходов.

Так что новый шахматный кодекс уже требует изменений и дополнений. Да, за компьютером трудно угнаться!

Е. Гик



45 коп.
Индекс 70465

Если вас заинтересовали непростые проблемы «Суперузлов» из статьи «Превращения головоломки адмирала Макарова» (с. 70), попробуйте свои силы в следующих задачах.

1. Придумайте головоломку, которая имеет следующий алгоритм:

$$(6\bar{z})^2,\ 3\bar{x},\ 1z,\ 4x,\ 2x,\ 2y,\ 5x,\ 5z,\ 3z,\ 3\bar{y}^{\uparrow}.$$

Обратите внимание, что это будет улучшение головоломки рисунка 5 (с. 74) с доведением ее сложности до 10.

2. Найдите алгоритмы решения головоломок, показанных на рисунке 1 (сложности 10) и рисунке 2 (сложности 12).

3. Придумайте головоломку с алгоритмом решения

$$4\bar{z},\ 1\bar{z},\ (2,3)x,\ 2\bar{z},\ 3\bar{x},\qquad (6z)^2,\ 3x,\ 2z,\ (2,3,6)x^{\uparrow}.$$

4. Можно ли добавить в конце алгоритма предыдущей задачи ход 6y и придумать головоломку с этим или другим алгоритмом сложности 13? Решение этой задачи неизвестно. Ваши разработки вместе с моделями присылайте в редакцию.*

Может быть, вы сумеете открыть новые превращения «головоломки адмирала Макарова» и побьете существующие рекорды.

Д. Вакарелов

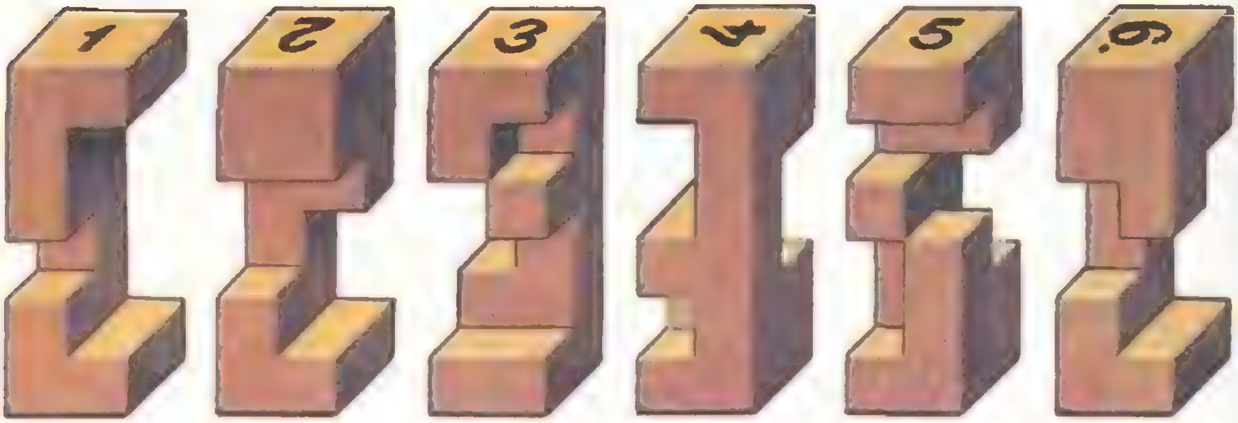


Рис. 1.

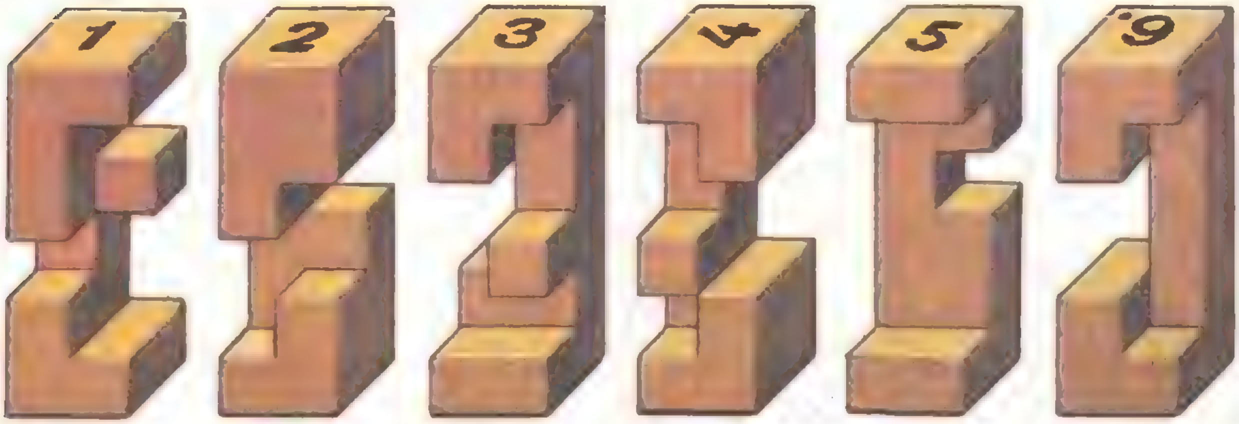


Рис. 2.

НОМЕР
8

Квант

Выходит с января 1970 года

1990

8

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *А. Панов.* Прыгающий мячик и теория удара
10 *А. Кикоин.* Температура, теплота, термометр
20 *О. Котий, А. Майоров.* Семейство прямых, делящих площадь пополам
26 *Д. Фукс, С. Табачников.* Сегменты постоянной площади
32 *Дж. Дж. Томсон.* О динамике мяча для игры в гольф

Новости науки

25 Распределение Планка и реликтовое излучение

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Задачник «Кванта»

43 Задачи М1236—М1240, Ф1243—Ф1247
44 Решения задач М1211—М1215, Ф1223—Ф1227

«Квант» для младших школьников

53 Задачи
54 *И. Акулич.* Вычислять или угадывать — выбирайте сами!

Р — значит ракета

58 *Л. Ксанфомалити.* Перспективы поиска обитаемых планет

Школа в «Кванте»

Математика 9—11:

66 Несколько эпизодов из жизни вписанных и описанных окружностей

Лаборатория «Кванта»

70 *Дж. Уокер.* «Электрический злодей и волшебное колечко»

Практикум абитуриента

73 *Д. Александров.* Газовые законы и механическое равновесие

Информация

19 Заказы принимаются
77 Вечерняя физическая школа при МГУ
77 Школа будущих инженеров
78 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(65)*

Смесь *(9)*

Наша обложка

1 Две стеклянные банки, два кусочка резиновой пленки, зафиксированные на банках резиновыми колечками, стальной шарик и... условия невесомости — и мы получаем механическое устройство, моделирующее работу лазерного резонатора (см. заметку на с. 9).

2 Думали ли „гжа гарнеренъ съ росискою дамою“, что они совершили свое путешествие «не без помощи» газовых законов? (см. статью Д. Александрова)

3 Шахматная страничка.

4 Разноцветные фишки на треугольном поле (головоломка).

© Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1990

ПРЫГАЮЩИЙ МЯЧИК И ТЕОРИЯ УДАРА

Кандидат физико-математических наук
А. ПАНОВ

Прыгающий мячик — это черный (а может быть, прозрачный или даже разноцветный, кому как повезет) литой резиновый шарик диаметром в несколько сантиметров. Думаю, что эта игрушка знакома многим из вас. Каждую весну я с удовольствием наблюдаю, как на просохшем асфальте вслед за любительницами классиков появляются многочисленные любители прыгающих мячей. Давайте и мы возьмем в руки прыгающий мячик и начнем наши эксперименты.

Прыгающий мячик и гипотеза Ньютона

Пусть шарик падает с высоты h на горизонтальную плоскость, ударяется о нее и отскакивает вертикально вверх (рис. 1). Из школьного курса физики известно, что скорость шарика в момент удара равна $v=\sqrt{2gh}$, где g — ускорение свободного падения. Нас интересует скорость v', с которой шарик начнет двигаться вверх после удара.

В свое время Ньютон, анализируя подобные опыты с шарами, пришел к выводу, что величина $e=-v'/v$ постоянна для данного шара и данной поверхности.

Предположение о постоянстве величины e называется *гипотезой Ньютона*, а сама постоянная e — *коэффициентом восстановления*. Если допустить, что гипотеза Ньютона верна, то для определения величины e для данного шарика и данной поверхности достаточно провести только один опыт. А именно, отпустить шарик с высоты h и измерить максимальную высоту h', на которую он поднимется после удара. Тогда предударная скорость шарика будет $v=-\sqrt{2gh}$, а послеударная $v'=\sqrt{2gh'}$ и, значит, $e=\sqrt{h'/h}$.

Я отпускал прыгающий мячик с высоты $h=1$ м на гладкую бетонную плиту, и он отскакивал на высоту $h'=0{,}80\pm0{,}01$ м. Таким образом, для прыгающего мячика и бетонной плиты предыдущая формула с точностью до 0,01 дает $e=0{,}90$. Это очень высокий коэффициэнт восстановления. При тех же условиях для стеклянного шарика $e=0{,}80$, а для стального и того меньше — $e=0{,}6$. Итак, для прыгающего шарика $e=0{,}90$. Как можно использовать этот результат? Давайте снова отпустим шарик с высоты h, но на этот раз не будем его ловить после первого удара, а дадим ему возможность неограниченно отскакивать.

Задача 1. *Докажите, что из гипотезы Ньютона следует, что шарик будет отскакивать в течение времени*

$$T=\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (1)$$

Указание. Пусть t_0 — время до первого удара, а t_n — время между ударами с номерами n и $n+1$. Тогда $t_1=2et_0$, $t_{n+1}=et_n$ при $n\geqslant1$ и $T=t_0+t_1+\ldots+t_n+\ldots$

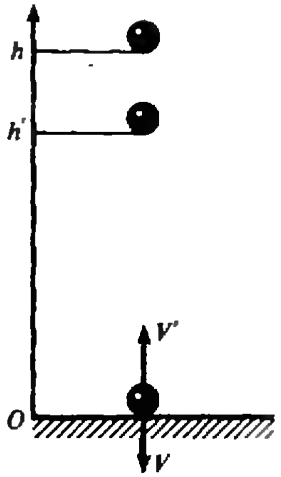


Рис. 1.

Для прыгающего мячика $e=0{,}90$, и если начальная высота $h=1$ м, то формула (1) дает $T=8{,}6$ с. Конечно же, этот результат сразу следует проверить экспериментально. Я отпускал шарик с высоты $h=1$ м и засекал время T', в течение которого были слышны соударения. Ясно, что общее время соударений T не меньше, чем T', т. е. $T\geqslant T'$. Так вот, у меня получилось $T'=15$ с и, значит, $T\geqslant 15$ с. В чем же причина такого расхождения (почти в 2 раза!)?

Все дело в приближенном характере гипотезы Ньютона. На рисунке 2 показана экспериментальная зависимость отношения $e(v)=-v'/v$ для стального шарика диаметром 2,54 см (1 дюйм), ударяющегося о стальную плиту. Видно, что величина $e(v)$, действительно, почти не изменяется при изменении v в широких пределах. Однако, при приближении v к нулю $e(v)$ начинает быстро расти и, видимо, приближается к 1. А в нашем эксперименте как раз предударная скорость v с каждым соударением все больше и больше приближается к нулю. Поэтому величина $e(v)=-v'/v$, начиная с $e(v)=0{,}90$, с каждым ударом возрастает. Значит, интервалы t_n времени между ударами убывают медленнее, чем геометрическая прогрессия со знаменателем $e=0{,}9$ (вспомните, что $t_{n+1}=et_n$). Стало быть, и общее время T должно быть больше, чем дает формула (1) с $e=0{,}9$.

Вечное движение

График функции $e(v)=-v'/v$ обрывается на рисунке 2 при малых значениях v, при которых «трудности проведения эксперимента ставят под сомнение точность результатов». Но мы уже убедились, что при вычислении общего времени T соударений нам как раз необходима информация о поведении $e(v)$ при малых v. Давайте попробуем построить свои гипотезы относительно этого поведения. Будем считать (все это согласуется с рисунком 2), что для $e(v)$ при $v\neq 0$ выполняются неравенства $0<e(v)<1$ и при приближении v к нулю $e(v)$ действительно приближается к 1. Однако, каким именно образом должно происходить это приближение? То ли как на рисунке 3, *а*, где график $e(v)$ касается вертикальной оси, то ли как на рисунке 3, *б*, где график $e(v)$ пересекает эту ось под некоторым углом. Экспериментальная кривая на рисунке 2 не позволяет дать однозначный ответ на этот вопрос. Тем более интересно посмотреть, к каким следствиям ведет та или другая гипотеза. Вот хороший пример.

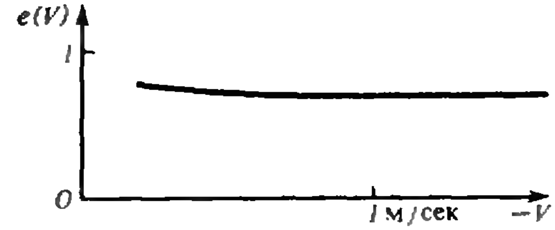


Рис. 2

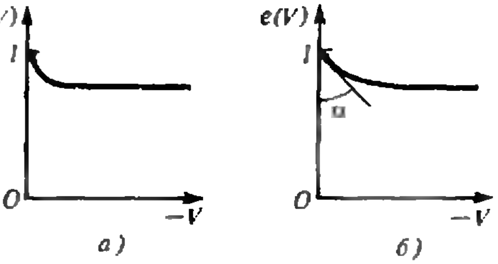


Рис. 3. а) б)

Задача 2. *Пусть график функции $e(v)$ пересекает вертикальную ось под некоторым углом. Докажите, что в этом случае соударения шарика с горизонтальной плоскостью никогда не прекратятся, т. е. общее время соударений T будет бесконечным.*

Это трудная и, как мне кажется, достаточно интересная задача.

Итак, самый простой эксперимент с прыгающим мячиком дал нам повод познакомиться с гипотезой Ньютона, подробно обсудить и опровергнуть ее.

Еще два эксперимента

Пусть опять прыгающий мячик с высоты h падает на горизонтальную поверхность и при этом он еще вращается вокруг горизонтальной оси. Движение шарика в этом случае изображено на рисунке 4. В промежутках между соударениями шарик под действием силы тяжести движется по параболе. Но, что удивительно, сами параболы сильно отличаются друг от друга — крутые чередуются с пологими. Если вы попытаетесь провести этот эксперимент с мячами и шарами другого рода, такого чередования не будет наблюдаться. Параболы будут становиться все более пологими.

А вот второй, еще более удивительный эксперимент. Отыщем две вертикальные близко отстоящие друг от друга параллельные стенки. Например, стенки, ограничивающие узкий коридор. Чем меньше будет расстояние между ними, тем лучше. Бросим шарик на одну из стенок так, чтобы он не вращался и в момент соударения двигался перпендикулярно к ней. Тогда шарик будет двигаться, как это изображено на рисунке 5. В промежутках между соударениями шарик движется по параболам, и, как ни странно, после пятого соударения скорость его центра окажется направленной вверх. Да, все происходит именно так — каждый раз скорость шарика после пятого соударения оказывается направленной вверх. Но это опять только для литого резинового шарика. Остальные шары после каждого соударения благополучно опускаются вниз. Ну а теперь снова обратимся к теории и посмотрим, как она сможет объяснить нам эти эксперименты.

Теория

Начнем этот раздел цитатой из интереснейшей статьи В. Козлова «Соударения тел», опубликованной в «Кванте» № 9 за 1988 г.

«Некоторые физические теории построены по образцу, принятому в математике,— из небольшого числа физических утверждений, которые играют ту же роль, что аксиомы в математических теориях, логически строго выводятся разнообразные следствия... Одна из таких теорий — теория соударения тел». При обсуждении теории удара мы используем как раз такой аксиоматический подход.

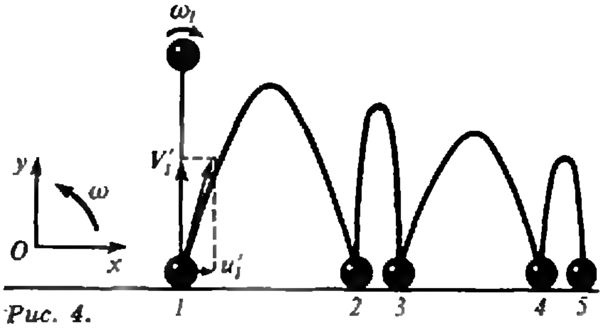


Рис. 4.

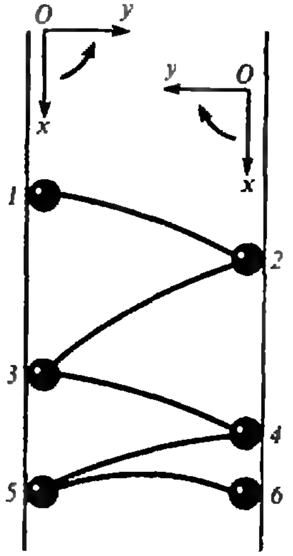


Рис. 5.

Итак, пусть шар радиусом r соударяется с некоторой плоскостью (не обязательно горизонтальной). Введем неподвижную относительно этой плоскости систему координат, как это показано на рисунке 6. Пусть центр шарика движется в плоскости рисунка и имеет скорость $(u; v)$, v — компонента скорости, направленная перпендикулярно к плоскости, u — вдоль плоскости. И пусть еще шарик вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка с угловой скоростью ω (положительное направление вращения от Ox к Oy). Скорость центра шарика и угловую скорость непосредственно после удара обозначим соответственно через $(u'; v')$ и ω'. Все, что нам нужно от теории,— это знать, как величины u', v', ω' зависят от предударных скоростей u, v, ω. А на этот счет существует даже несколько теорий. Чтобы познакомиться с ними, можно заглянуть в любой учебник по теории удара. Например, можно порекомендовать интересную и сравнительно простую книгу Я. Пановко «Введение в теорию механического удара» (М., 1977). Здесь нам нет необходимости входить в подробности; достаточно знать, что во всех этих теориях выполняются следующие три соотношения между u, v, ω и u', v', ω'

$$u' - \frac{2}{5} r\omega' = u - \frac{2}{5} r\omega, \qquad (2)$$

$$0 \leqslant -v'/v \leqslant 1, \qquad (3)$$

$$0 \leqslant (u' + r\omega')/(u + r\omega) \leqslant 1. \qquad (4)$$

Это и есть те *аксиомы*, которыми мы будем оперировать. Соотношение (2) — это закон сохранения момента количества движения при ударе, мы примем его без какого-либо обсуждения. Соотношение (3) показывает, что составляющая v скорости центра шарика при соударении меняет знак и не возрастает по абсолютной величине. Чтобы разобраться с (4), обратимся к рисунку 6. Мы видим, что величина $u_A = u + r\omega$ — это составляющая скорости соударяющей точки A шарика, направленная вдоль оси Ox. И соотношение (4) показывает, что при ударе эта составляющая не возрастает и не может изменить свой знак. Соотношения (2)—(4), конечно, не позволяют по значениям величин u, v, ω однозначно определить послеударные значения u', v', ω'. Но пока нам это и не понадобится.

Условия (2) и (4) допускают простое и чрезвычайно полезное геометрическое истолкование. На плоскости введем систему координат, в которой по горизонтальной оси будем откладывать величину u, а по вертикальной — $r\omega$. Пусть точка $(u; r\omega)$ соответствует предударному состоянию шарика, точка $(u'; r\omega')$ — послеударному. Тогда условие (2) говорит о том, что если точка $(u; r\omega)$ лежит на прямой $u - (^2/_5)\, r\omega = \text{const}$, то на той же прямой лежит и точка $(u'; r\omega')$. А условие (4) показывает, что точки $(u; r\omega)$ и $(u'; r\omega')$ лежат по одну сторону от прямой $u + r\omega = 0$ и точка $(u'; r\omega')$ ближе к этой прямой, чем точка $(u; r\omega)$ (рис. 7). Коротко и, может быть, не совсем точно можно сказать, что отображение $(u; r\omega) \to (u'; r\omega')$, описывающее удар, представляет собой сжатие координатной плоскости к прямой $u + r\omega = 0$ вдоль пучка параллельных прямых $u - (2/5) r\omega = \text{const}$.

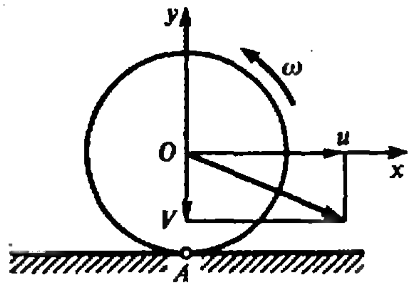


Рис. 6.

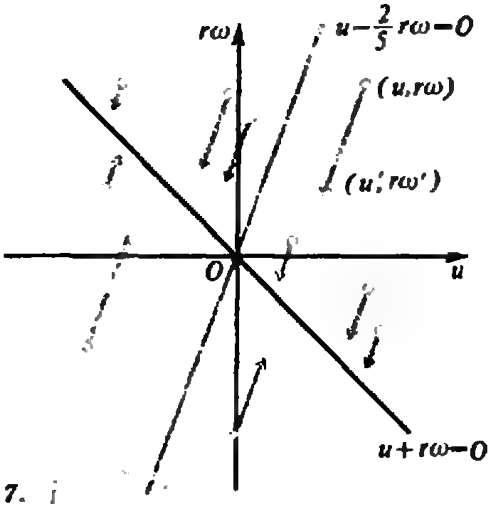


Рис. 7.

Противоречие между теорией и экспериментом

Теперь мы можем приступить к анализу наших экспериментов. Вернемся к рисунку 4. И занумеруем удары как там показано. Через u_n, v_n, ω_n обозначим соответствующие скорости непосредственно перед ударом с номером n, а через u_n', v_n', ω_n' — соответствующие послеударные скорости. На рисунке 4 вторая парабола поднимается круче, чем первая. На языке скоростей это означает, что $|v_2'/u_2'| > |v_1'/u_1'|$. Между тем,

Задача 3. *Пусть закрученный мячик падает отвесно на горизонтальную плоскость (см. рис. 4), перед первым ударом $u_1 = 0$, $\omega_1 < 0$, и пусть при ударе выполняются соотношения*

(2)—(4). Покажите, что $|v'_{n+1}/u'_{n+1}| \leqslant \leqslant |v'_n/u'_n|$ *для любого* n*, т. е. возможны только такие траектории, в которых параболы становятся все более и более пологими.*

Указание. Из (3) следует, что величины $|v'_n|$ убывают. Используя геометрическую интерпретацию соотношений (2) и (4), а именно рисунок 8, покажите, что послеударные величины u'_n с ростом n возрастают.

А вот, что касается второго эксперимента:

Задача 4. *Пусть шарик движется между двумя вертикальными параллельными плоскостями и, как на рисунке 5, перед первым ударом* $u_1 = 0$, $\omega_1 = 0$. *Пусть также при ударе выполняются соотношения (2) и (4). Покажите, что тогда для любого* n $u'_n \geqslant 0$, *т. е. после каждого удара скорость шарика направлена вниз.*

Эта задача потруднее, чем предыдущая. Скажу лишь, что и здесь следует использовать геометрическую интерпретацию соотношений (2) и (4). Таким образом, задача 3 показывает, что при выполнении соотношений (2)—(4) не может существовать траекторий типа той, что на рисунке 4. А задача 4 показывает, что при выполнении (2) и (4) не может существовать траекторий типа той, что на рисунке 5. Отсюда делаем вывод, что для прыгающего мячика должно нарушаться по крайней мере одно из соотношений (2) или (4). Чтобы найти какое, достаточно вернуться к эксперименту, изображенному на рисунке 4. Перед первым ударом $u_1 = 0$, $\omega_1 < 0$, поэтому $u_1 + r\omega_1 < 0$. Эксперимент показывает, что после первого удара $u'_1 > 0$ и $\omega'_1 > 0$, т. е. $u'_1 + r\omega'_1 > 0$. Следовательно, $(u'_1 + r\omega'_1) / / (u_1 + r\omega_1) < 0$, что противоречит соотношению (4).

Мы получили важный результат. Оказывается, что прыгающий мячик ведет себя не так, как предписывает ему теория. И точно указали место, где теория нарушается,— это соотношение (4). Но, конечно, еще нужно выяснить, на самом ли деле отказ от (4) позволяет получить траектории, подобные тем, что на рисунках 4 и 5.

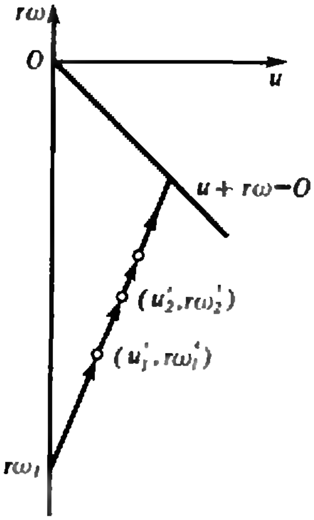


Рис. 8.

Линейные модели

Используя наш предыдущий опыт по обсуждению гипотезы Ньютона, попытаемся построить такую простую математическую модель удара, чтобы она все-таки позволила получить и траекторию, изображенную на рисунке 4, и траекторию, изображенную на рисунке 5. Напомню, что мы все время придерживаемся обозначений рисунка 6, где v — это компонента предударной скорости центра шарика, направленная перпендикулярно к плоскости соударения, u — компонента, направленная вдоль этой плоскости, и ω — предударная угловая скорость шарика; u', v', ω' — соответствующие послеударные скорости.

Хоть мы и опровергли гипотезу Ньютона и выяснили, что отношение v'/v зависит от величины предударной скорости v, но мы и заметили также, что величина v'/v мало меняется при изменении v в широких пределах. Поэтому примем в нашей модели гипотезу Ньютона и будем считать, что коэффициент восстановления $e = -v'/v$ есть величина постоянная, не зависящая от предударной скорости v. Для прыгающего мячика можно принять $e = 0{,}9$, а вообще, e — некоторая постоянная, заключенная в пределах $0 \leqslant e \leqslant 1$. Величина $u_A = u + r\omega$ — это компонента скорости соударения (рисунок 6), направленная вдоль плоскости. Примем и гипотезу о постоянстве отношения u'_A/u_A, т. е. будем считать, что для данного шарика и данной поверхности величина $k=(u'+r\omega')\,/\,(u+r\omega)$ — это некоторая постоянная, заключенная в пределах $-1\leqslant k\leqslant 1$. В общепринятой теории удара, когда выполняются соотношения (2)—(4), $k\geqslant 0$, а из эксперимента следует (рис. 9), что для прыгающего мячика $k<0$. Будем, разумеется, считать, что выполняется закон сохранения момента количества движения (2). Итак,

$$\begin{cases} u'-\frac{2}{5}\,r\omega'=u-\frac{2}{5}\,r\omega, \\ v'=-ev, \\ u'+r\omega'=k(u+r\omega), \end{cases} \tag{5}$$

где e и k постоянные ($0\leqslant e\leqslant 1$, $-1\leqslant k\leqslant 1$). На плоскости (e; k) эти неравенства задают прямоугольник (рис. 10). Каждой точке из этого прямоугольника соответствует своя модель удара. Эти модели называются *линейными моделями* удара. Если точка (e; k) из верхней половины прямоугольника, то в такой модели выполняются все три соотношения (2)—(4) и поэтому не может быть траекторий типа тех, что на рисунках 4 и 5. Значит, нам нужно обратиться к моделям, для которых $k<0$.

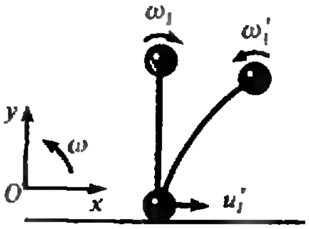


Рис. 9.

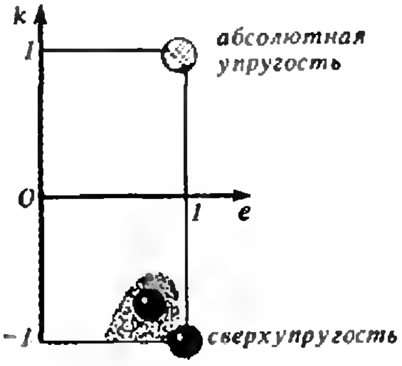


Рис. 10.

Задача 5. *Покажите, что для линейной модели*

$$\begin{cases} u'=\left(\frac{2}{7}\,k+\frac{5}{7}\right)u+\left(\frac{2}{7}\,k-\frac{2}{7}\right)r\omega, \\ v'=-ev, \\ \omega'=\left(\frac{5}{7}\,k-\frac{5}{7}\right)u/r+\left(\frac{5}{7}\,k+\frac{2}{7}\right)\omega. \end{cases} \tag{5'}$$

Указание. Соотношения (5′) вытекают из системы (5).

Таким образом, если заданы радиус шарика r и величины e и k, то предударные скорости u, v, ω однозначно определяют послеударные величины u', v', ω'. И, используя эти соотношения и уравнения движения в поле силы тяжести, мы можем рассчитать траекторию шарика.

Задача 6. *Выясните, при каких значениях e и k линейная модель дает возможность получить траектории типа тех, что на рисунках 4 и 5.*

Указание. Конечно, для решения этой задачи лучше всего воспользоваться компьютером. Задавая те или иные значения e и k, вы можете строить на дисплее соответствующие траектории и сравнивать их с рисунком 4 и 5.

Решив эту задачу, вы убедитесь, что интересующие нас точки (e; k) заполняют правый нижний угол прямоугольника, т. е. расположены вблизи точки (1; —1). Так что, по-видимому, соударения прыгающего мячика с достаточной точностью можно описать линейной моделью (5) с коэффициентами e и k, близкими к 1 и —1.

Абсолютно упругий и сверхупругий удары

До этого момента мы в общем-то игнорировали физическую сторону вопроса. Даже соотношение (2) — закон сохранения момента количества движения шарика при ударе — мы приняли как неизвестно откуда взявшуюся аксиому. Но зато сейчас мы обсудим физически важный вопрос о сохранении кинетической энергии при ударе. Кинетическая энергия движущегося шарика вычисляется следующим образом:

$$K=\frac{mv^2}{2}+\frac{mu^2}{2}+\frac{1}{5}\,mr^2\omega^2. \tag{6}$$

Сумма первых двух слагаемых — это кинетическая энергия поступательного движения шарика, третье слагаемое — кинетическая энергия его вращательного движения.

Задача 7. *Докажите, что среди линейных моделей, задаваемых системой (5), есть только две, в которых при ударе шарик сохраняет свою кинетическую энергию. Это модель с $e=1$, $k=1$ и модель с $e=1$, $k=-1$.*

Указание. Используя (6), покажите, что

$$2K/m=v^2+\frac{5}{7}\left(u-\frac{2}{5}r\omega\right)^2+\frac{2}{7}(u+r\omega)^2.$$

Пусть K' — послеударная кинетическая энергия шарика. Используя (5), покажите, что

$$2K'/m=e^2v^2+\frac{5}{7}\left(u-\frac{2}{5}r\omega\right)^2+\frac{2}{7}k^2(u+r\omega)^2.$$

Соударения, в которых сохраняется кинетическая энергия, называются *упругими*. Таким образом, среди линейных моделей имеются две с упругими соударениями. Для модели (5) с $e=1$ и $k=1$ имеем

$$u'=u,\ v'=-v,\ \omega'=\omega. \qquad (7)$$

Шарик, для которого при ударе выполняются соотношения (7), назовем *абсолютно упругим*. И есть еще одна упругая модель с $e=1$, $k=-1$. Для нее

$$\begin{cases} u'-\frac{2}{5}r\omega'=u-\frac{2}{5}r\omega, \\ v'=-v, \\ u'+r\omega'=-(u+r\omega). \end{cases} \qquad (8)$$

Шарик, для которого выполняются соотношения (8), назовем *сверхупругим*. А теперь стоит сравнить поведение абсолютно упругого, сверхупругого и реального прыгающего мячиков.

Задача 8. *Пусть упругий шарик соударяется с горизонтальной плоскостью и перед первым ударом $u_1=0$, $\omega_1<0$. Покажите, что его траектория такая, как на рисунке 11, а, а сверхупругого — как на рисунке 11, б.*

Задача 9. *Пусть шарик движется между вертикальными стенками и перед первым ударом $u_1=0$, $\omega_1<0$. Докажите, что абсолютно упругий шарик будет равноускоренно опускаться вниз, для него $u=gt$ в момент времени t (рисунок 12, а). Проверьте, что после третьего соударения скорость сверхупругого шарика будет направлена вверх — $u_3'<0$ (рисунок 12, б). Но и этого мало — докажите, что сверхупругий шарик никогда не опустится ниже некоторого определенного предела.*

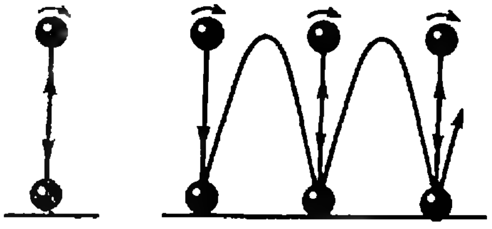

а) б)

Рис. 11.

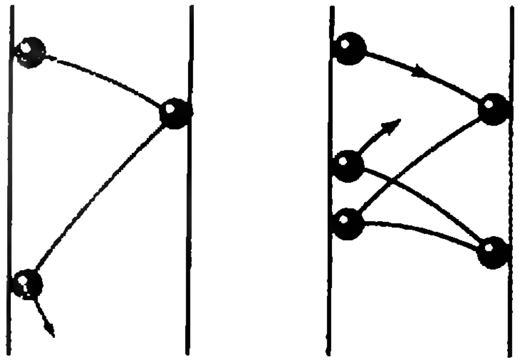

а) б)

Рис. 12.

Я думаю, вы согласитесь, что имеется большое сходство между рисунками 11, б, 12, б и рисунками 4, 5, где изображен прыгающий мячик. Такое же сходство, как между хорошей карикатурой и оригиналом. Конечно, интересно было бы отыскать реальный объект со сверхупругими свойствами. Однако известно, что при столкновении макроскопических тел часть кинетической энергии обязательно переходит в тепло и колебания. Но давайте процитируем Ричарда Фейнмана:

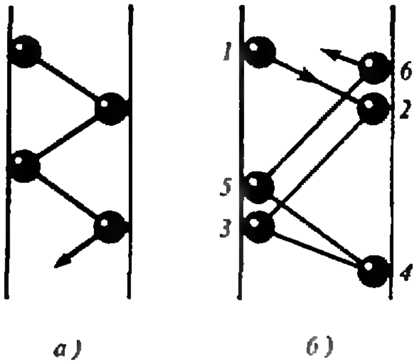
«Упругое соударение особенно часто встречается между системами, у которых нет никаких внутренних механизмов, никаких «шестеренок, маховиков или других частей». В таких случаях кинетическая энергия не может ни на что расходоваться: ведь разлетающиеся тела находятся в тех же условиях, что и налетающие.

Поэтому между элементарными объектами соударения всегда или почти всегда упругие.» (Фейнмановские лекции по физике, т. 1, 2, М., 1976). Поэтому возможно, что именно среди объектов микромира найдется такой, который обладает сверхупругими свойствами. Ну а пока у нас имеется модель (8) сверхупругого соударения и почти сверхупругий объект — прыгающий мячик. Так что есть над чем подумать и есть с чем поэкспериментировать.

Под конец еще две задачи на сравнение абсолютной упругости и сверхупругости. Представим, что мы находимся в условиях невесомости.

Задача 10. *Пусть опять шарики движутся между параллельными стенками. Докажите, что абсолютно упругий шарик, двигаясь по пилообразной траектории, уйдет на бесконечность. Также докажите, что движение сверхупругого шарика будет происходить в ограниченной области (рис. 13).*

Задача 11. *Пусть шарики движутся в области, ограниченной двумя перпендикулярными стенками. Докажите, что для абсолютно упругого шарика возможны самое большее два соударения, после чего он уходит на бесконечность. А для сверхупругого шарика соударения вообще могут не прекратиться (рис. 14).*



а)   б)

Рис. 13.

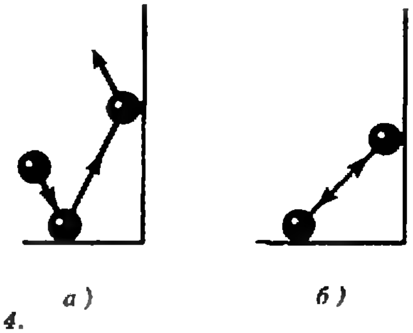

а)   б)

Рис. 14.

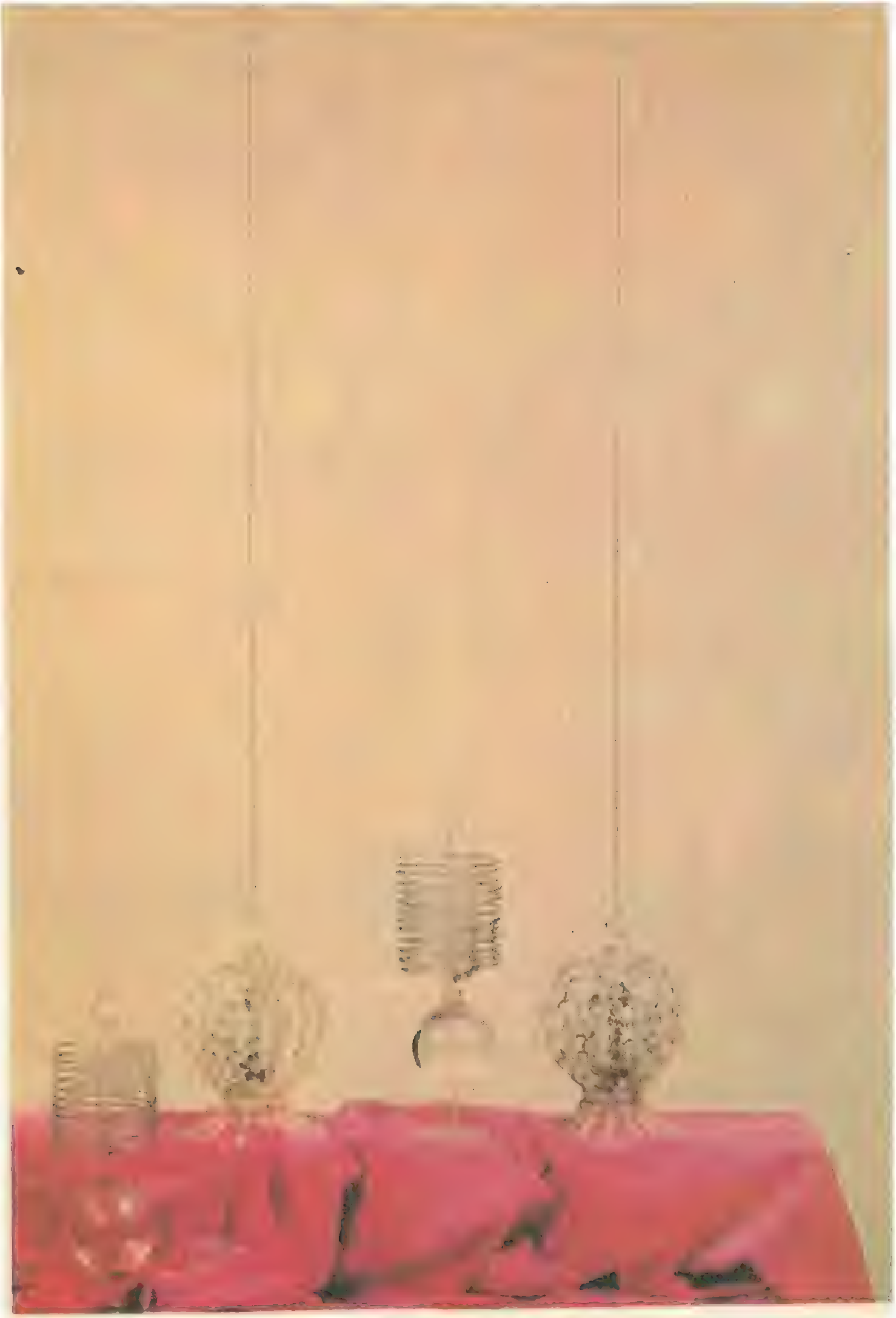
Наша обложка

Механическая модель лазера

Натянем на стеклянную банку кусок резиновой пленки от воздушного шарика. Продавим пленку, чтобы из-под нее вышло немного воздуха и она прогнулась внутрь. Зафиксируем пленку на банке резиновым колечком. Теперь возьмем стальной шарик и отпустим его с небольшой высоты по центру пленки. Шарик будет отскакивать очень долго, до 50 секунд. Если начальная высота H, с которой падает шарик, достаточно мала, то все соударения происходят вблизи центра пленки. Однако, если H больше некоторой критической высоты $H_{кр}$, то движение шарика становится неустойчивым — после двух-трех соударений он выскакивает за пределы пленки. Используя модель абсолютно упругих соударений (см. статью «Прыгающий мячик и теория удара»), можно рассчитать, что $H_{кр}$ — это высота оптического фокуса поверхности пленки.

Представим теперь, что мы находимся в условиях невесомости, например на борту космического корабля. Тогда можно расположить друг против друга две такие банки и заставить шарик двигаться между ними. Это механическое устройство очень точно моделирует работу лазерного резонатора, в котором световой поток движется между двумя, например, сферическими зеркалами с радиусами кривизны R_1 и R_2, $R_1<R_2$. Тут, как и в первом эксперименте, возникает вопрос об устойчивости движения шарика между двумя отражающими поверхностями. В оптике аналогичная задача известна как задача об устойчивости лазерного резонатора. Ответ довольно неожиданный. Оказывается, что когда пленки достаточно близки друг к другу, шарик устойчиво движется вблизи отрезка, соединяющего их центры. При увеличении расстояния появляется зона неустойчивости — после нескольких соударений шарик выбрасывается из пространства между пленками. Однако, что удивительно, при дальнейшем увеличении расстояния снова появляется зона устойчивости. И лишь при достаточном удалении отражающих поверхностей друг от друга опять возникает неустойчивость.

А. Панов



10

ТЕМПЕРАТУРА, ТЕПЛОТА, ТЕРМОМЕТР

Доктор физико-математических наук
А. КИКОИН

Температура — одна из тех не очень многих физических величин, о которых человек узнает не только до того, как начнет изучать физику, но и до того, как научится грамоте. Уже в раннем детстве мы узнаем, что словам горячее, теплое, холодное, отражающим наши ощущения, соответствуют различные значения температуры. Мы слышим о том, что летом температура высокая, а зимой низкая, что у здорового человека температура тела 36,6 градуса, а если она выше, то нужно вызывать врача...

Из-за привычности понятия температуры мы обычно не отдаем себе отчета в том, насколько эта величина своеобразна, насколько она отличается от других привычных величин, таких как длина, масса, объем. А различие здесь очень существенное. Состоит оно вот в чем.

Если соединить десять стержней длиной в 1 м каждый, приставив их один к другому, то получится стержень длиной в 10 м. Десять масс в 1 кг каждая в сумме дадут массу в 10 кг и т. д. Но если соединить десять тел, каждое из которых имеет температуру 20 градусов, то мы получим тело, температура которого 20 градусов, а не 200. Температуры тел при их соединении не складываются, как складываются их длины, объемы, массы и т. д. Длина в 100 м — эта сумма ста длин в 1 м, но температура в 100 градусов — это не сумма ста температур в 1 градус каждая, подобно тому, как человек в возрасте 15 лет — это не то же самое, что 15 годовалых детей! Температура, как говорят, величина не аддитивная. В этом — одна из важнейших особенностей этой величины.

С этой особенностью связан и способ измерения температуры. Чтобы измерить длину тела, нужно сравнить его с другим телом, длина которого принята за единицу. Определить массу тела — значит сравнить ее с другой массой, принятой за единицу. Ведь и длина, и масса тела равны соответственно сумме длин и масс его частей.

Но температуру так измерить нельзя. Но это значит, что сама величина температуры вообще не может быть измерена, раз ее нельзя сравнивать с эталоном температуры. Каким же образом температуру все-таки измеряют?

Немного истории

Прибор для измерения температуры — термометр — впервые был изобретен Галилеем около 1592 года (само слово «термометр» впервые встречается в литературе в 1624 году). Способ измерения температуры, предложенный Галилеем, принципиально не отличается от того, которым пользуются и в наше время.

Схема придуманного им прибора показана на рисунке 1.

Небольшой стеклянный баллон (*a*) припаян к тонкой длинной трубке (*b*) с открытым концом. Баллон нагревают руками и погружают нижний конец трубки в сосуд с водой (*c*). По мере того как баллон охлаждается до температуры окружающего воздуха, уровень воды в трубке поднимается над уровнем воды в сосуде.

Легко понять, что в приборе Галилея используется тот факт, что объем газа в баллоне с трубкой зависит от температуры. Поэтому по изменению объема газа можно судить и об изменении температуры.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 8 за 1976 год.

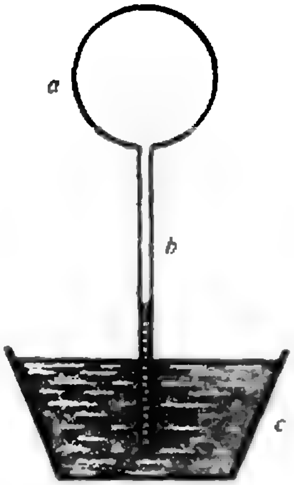


Рис. 1.

Конечно, описанный прибор еще не термометр. По нему нельзя отсчитывать числовое значение температуры. Поэтому его следует называть не термометром, а термоскопом. Но если термоскоп тем или иным способом снабдить шкалой, то он станет термометром. На решение этой задачи потребовалось почти 150 лет. Пока для нас важно, что уже в приборе Галилея содержится принцип измерения температуры, и принцип этот не пришлось изменять вплоть до наших дней: температура непосредственно не измеряется. Измеряется величина, *зависящая* от температуры. В термоскопе Галилея такой величиной был объем газа. В современном ртутном термометре величиной, зависящей от температуры, по изменению которой судят об изменении температуры, тоже является объем, но не газа, а ртути. Наряду с объемом газа такой величиной может быть давление газа (при постоянном объеме), длина твердого стержня, электрическое сопротивление проводника и т. д.

Закон природы, который нельзя открыть без термометра

Уже первые несовершенные термометры и даже термоскопы позволили открыть один из важнейших законов природы — закон теплового равновесия. Закон этот многим кажется и казался настолько очевидным, что на его открытие не претендует ни один ученый и никто не может указать даты его открытия. Состоит этот закон в том, что любая изолированная группа (система) тел сама собой с течением времени приходит в состояние, при котором температуры всех тел системы одинаковы. Такое состояние и называется состоянием теплового равновесия.

Ясно, что закон теплового равновесия мог быть открыт только после изобретения термометра. С другой стороны, само измерение температуры с помощью термометра основано на законе теплового равновесия. Ведь термометр тоже тело, имеющее определенную температуру. И он измеряет именно собственную температуру. А если мы хотим с его помощью измерить температуру какого-то другого тела, оно должно быть в тепловом равновесии с термометром, потому что в этом случае температуры тела и термометра одинаковы. Вот почему при измерении температуры тела с помощью термометра всегда приходится ждать некоторое время — ждать установления теплового равновесия между телом и термометром.

Еще немного истории

Итак, термоскоп появился в конце XVI века. Термометром он стал примерно в середине XVIII века. Но что именно измеряет термометр? Что такое температура? Правильный ответ на этот вопрос был дан еще через сто лет после того, как появился термометр.

Температура — величина, которая характеризует тепловое состояние тела. О холодных и горячих телах мы говорим, что у них разная температура. Следовательно, вопрос о том, что такое температура, сводится к вопросу: чем отличается холодное тело от горячего?

Первый ответ на этот вопрос дал сам Галилей. Из того легко наблюдаемого факта, что если вблизи горячего тела находится холодное, то горячее тело охлаждается, а холодное нагревается, Галилей сделал естественный вывод, что от горячего тела к холодному что-то переходит (с таким же правом можно было считать, что что-то переходит от холодного к горячему!). Галилей считал, что это «что-то» есть особое тепловое вещество. И большинство исследователей XVII—XVIII веков придерживались такой же точки зрения и называли это вещество теплородом.

Согласно теории, основанной на представлении о теплороде, горячее тело отличается от холодного тем, что в нем больше теплорода, чем в холодном. Установление теплового равновесия по этим представлениям состоит в том, что теплород переходит от горячего тела к холодному. Значит, всякое тело состоит как бы из двух веществ — вещества самого тела (вода, медь, железо, стекло) и теплорода. Каждое тело — это смесь вещества тела и вещества теплоты (теплорода). Слово «температура» как раз и означает смесь. И в течение почти полутораста лет считалось, что измеряя температуру, мы измеряем *концентрацию* теплорода в теле. Отсюда и название единицы температуры — *градус*. Именно в таких единицах измеряли, например, концентрацию водных растворов.

Такой взгляд на температуру держался очень долго — до конца XVIII века. Так и говорили — градусы теплоты.

Но одновременно с «вещественной» теорией теплоты существовала и другая теория, одним из создателей и поборников которой был великий русский ученый М. В. Ломоносов. Эта теория основывалась на том факте, что нагревание тела может быть вызвано движением. Ломоносов писал: «Очень хорошо известно, что теплота возбуждается движением: от взаимного трения руки согреваются, дерево загорается пламенем; при ударе кремня об огниво появляются искры; железо накаливается от проковывания частыми и сильными ударами...» Отсюда делался вывод, что теплота — это не вещество, а движение маленьких частиц, из которых состоят все тела («нечувствительных частиц», как их тогда называли).

Свыше двухсот лет шла борьба между этими двумя теориями. В течение долгого времени господствовала первая теория, но в конце концов победу одержала вторая.

Уже в XVIII веке были выполнены опыты, которые заставили многих физиков пересмотреть представление о том, что температура — это концентрация теплоты (теплорода) в теле.

В 1760 году английский физик и врач Блэк показал, что одно и то же количество теплоты, подведенное к равным массам различных веществ, приводит к различным изменениям температуры. Но если бы температура действительно представляла концентрацию теплоты в теле, то получение одного и того же количества теплоты должно было бы вызывать у равных масс любых веществ одно и то же *изменение* температуры. В этих опытах Блэк открыл, как мы теперь знаем, что у разных веществ различная теплоемкость. Но с теорией теплорода это несовместимо.

В 1764 году тот же Блэк показал, что при плавлении льда им поглощается значительное количество теплоты, но температура его при этом остается неизменной. Эту теплоту со времен Блэка часто называют скрытой теплотой плавления. Точно так же, при отвердевании воды выделяется теплота и опять — без изменения температуры. Ясно, что если температура — это концентрация теплоты в теле, то невозможно поглощение теплоты без повышения температуры и невозможна потеря теплоты телом без понижения его температуры.

Что же в действительности представляет собой температура — величина, смысл которой так долго оставался непонятным?

Это стало ясным лишь после того, как появилась кинетическая теория строения вещества. И мы поймем смысл температуры из сопоставления двух как будто бы совсем разных вещей — одного из результатов кинетической теории и способа измерения температуры.

О молекулярном хаосе и о его законах

Основой кинетической теории строения вещества является утверждение о том, что всякое вещество состоит из маленьких частиц — молекул, непрерывно и беспорядочно движущихся. Между молекулами действуют сложные силы притяжения и отталкивания. Но в газах при обычных давлениях эти силы малы. И можно представить себе газ, в котором силы взаимодействия между молекулами вообще отсутствуют. Так как такой газ можно себе лишь представить, то он получил название идеального газа.

Идеальный газ — это скопление огромного числа молекул, беспорядочно движущихся по всем направлениям со скоростями в сотни метров в секунду, то и дело сталкивающихся между собой и со стенками сосуда. В этом невообразимом хаосе (возможно, что само слово газ произошло от древнего слова хаос) действуют, однако, строгие и нерушимые законы. Благодаря тому, что в идеальном газе не надо учитывать сил взаимодействия между молекулами, эти законы можно установить теоретически. В частности, можно, пользуясь законами механики, *вычислить* давление газа, т. е. силу, с которой газ действует на единицу площади стенки сосуда. Сила эта есть результат ударов движущихся молекул о стенки.

Расчет показывает, что если в сосуде объемом V находится N молекул газа, то давление, оказываемое газом на стенки сосуда, равно

$$p=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\bar{E}, \qquad (1)$$

где $\bar{E}=\frac{m\overline{v^2}}{2}$ — кинетическая энергия хаотического движения, приходящаяся в среднем на 1 молекулу газа. Формула (1) показывает, что давление газа равно $^2/_3$ средней кинетической энергии хаотического движения молекул, содержащихся в единице объема (ведь N/V — это как раз и есть число молекул в единице объема).

Для реальных газов расчет давления довольно сложный, но при определенных условиях формула (1) достаточно точна. Она тем точнее, чем меньше величины N/V и $\bar{E}$. Практически этой формулой можно пользоваться при давлениях около 1 атм и меньше.

Но какое отношение все это имеет к температуре? Ведь в формулу (1) температура не входит!

Чтобы это понять, вернемся к незаконченному нами рассмотрению способа измерения температуры.

О температурных шкалах

Первыми термометрами, которыми практически пользовались, были жидкостные термометры, изготовлявшиеся группой флорентийских ученых. Потом их стали конструировать и изготовлять и в других странах. В них использовались различные жидкости, но главным образом — спирт и ртуть (иногда масло).

Жидкостные термометры представляли собой тонкие стеклянные трубки, заканчивавшиеся внизу небольшим шариком или цилиндром. Шарик и нижняя часть трубки заполнялись жидкостью (спиртом, ртутью, маслом). На странице 10 вы видите образцы флорентийских термометров. (Не правда ли, это не только приборы, но и, своего рода, произведения искусства. Вообще, в старину приборы изготовлялись с «художественным подходом».)

Что касается термометрических шкал, то использовались самые различные способы их построения. Каждый конструктор и изготовитель термометров придумывал и способ создания шкалы к ним. К концу XVIII века в ходу было около двух десятков различных термометрических шкал, из которых до наших дней сохранились три (что тоже слишком много).

В конце концов восторжествовал принцип построения термометрических шкал, предложенный голланд-

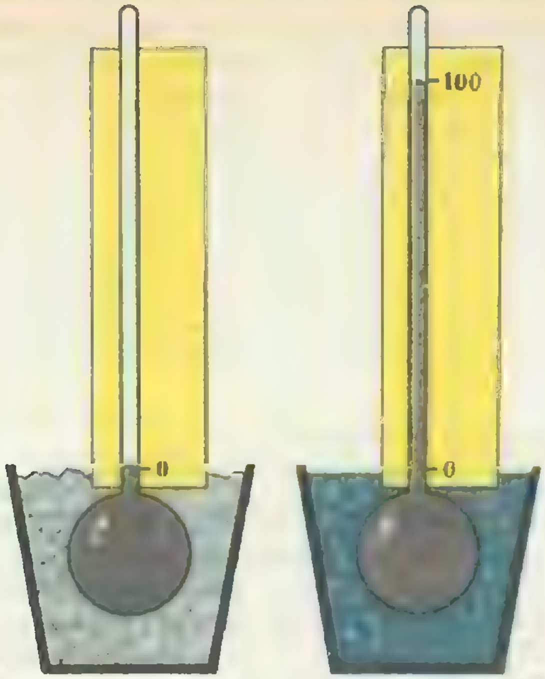


Рис. 2.

ским стеклодувом и физиком-любителем Фаренгейтом и шведским астрономом Цельсием. Принцип основан на использовании двух так называемых реперных точек, т. е. тепловых состояний, отличающихся своим постоянством. Такими точками были температуры таяния льда и кипения воды при атмосферном давлении. (Температура плавления любого твердого вещества и температура кипения любой жидкости при данном давлении также постоянны, но вода и лед наиболее доступны.)

В 1742 году Цельсий предложил такой способ градуировки, т. е. создания шкалы термометров.

Термометр, каков бы он ни был, приводится в контакт с тающим льдом, и после установления теплового равновесия уровень жидкости в термометре (если это жидкостный термометр) отмечается некоторым числом. Затем тающий лед заменяется кипящей водой, и новый уровень жидкости в термометре отмечается числом, которое отличается от первого на 100. А разность уровней делится на 100 равных частей — градусов. Сейчас кажется курьезом, что Цельсий отмечал уровень жидкости в термометре при температуре кипения воды цифрой нуль, а уровень ее при температуре тающего льда — числом 100. Впрочем, через 8 лет, в 1750 году, шкала была перевернута, и в таком виде ею пользуются и теперь (рис. 2).

Еще до Цельсия, в 1724 году, Фаренгейт, тоже используя в качестве реперных точек температуры тающего льда и кипящей воды, изготовлял термометры, в которых температура тающего льда отмечалась числом 32, а температура кипящей воды — числом 212, так что интервал температур тающий лед — кипящая вода оказывался разделенным не на 100, а на 180 равных частей — градусов. Французский ученый Реомюр, подобно Цельсию, приписывал температуре тающего льда значение 0, но по термометру Реомюра вода кипит при температуре 80 градусов.

Как видим, в построении термометрических шкал был немалый произвол. Произвольным было число градусов, на которые делился интервал температур между реперными точками. Произвольными были и значения температур самих реперных точек. Ведь нет разумных оснований считать, что температура тающего льда равна нулю, т. е. что тающий лед не имеет никакой температуры!

Для нас здесь важно, что разделяя интервал температур между точками таяния льда и кипения воды на *равные* части (на 100, 80 или 180), мы тем самым полагаем заранее, что объем жидкости, которой заполнен термометр, *строго линейно* зависит от температуры. Если обозначить объем жидкости при температуре тающего льда через V_0, объем той же жидкости при температуре кипящей воды через V, а сами эти температуры через t_0 и t, то деление интервала температур на равные части означает, что

$$\frac{V-V_0}{t-t_0}=c,$$

где c — постоянная величина. Если принять, что $t_0=0$, то

$$V=V_0+ct.$$

Можно ли проверить, что объем в самом деле линейно зависит от температуры? Очевидно, нет. Ведь для опытной проверки необходимо пользоваться термометром. Но при устройстве термометра заранее было предположено, что объем пропорционален температуре. Поэтому опыт ничего другого дать не может.

Существует старый анекдот. В одном морском порту ежедневно ровно в полдень стреляла пушка. Капитаны кораблей, покидая порт, проверяли по пушечному выстрелу свои судовые хронометры, при помощи которых определяют географическую долготу. Один из капитанов пожелал узнать, насколько можно быть уверенным в том, что пушка стреляет действительно в полдень. И выяснилось, что артиллерист определяет время по «очень точным часам», имеющимся у местного часовщика. А часовщик сказал капитану, что он проверяет свои «очень точные часы»... по выстрелу портовой пушки. Ясно, что при таких условиях нельзя судить ни о достоинствах часов, ни о том, действительно ли ровно в полдень раздается пушечный выстрел...

Для техники измерения температур важно, что термометры с различными жидкостями, а тем более термометры, в которых о температуре судят не по объему жидкости, а по каким-нибудь другим свойствам, дают при измерении одной и той же температуры не совпадающие показания, причем различие в показаниях не одинаково в разных температурных областях. В связи с этим возникла необходимость в каком-то стандартном термометре, по которому градуировались бы все термометры. Тогда их показания, конечно, будут совпадать. Как решается эта задача?

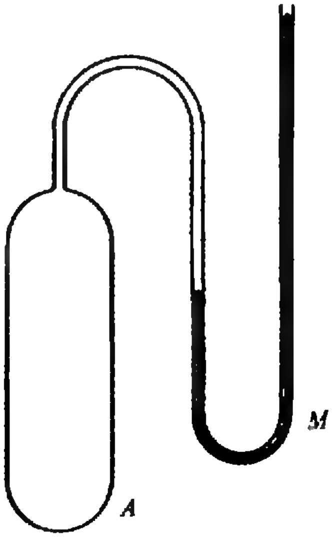


Рис. 3.

В настоящее время стандартным термометром служит так называемый газовый термометр постоянного объема. Об этом термометре и о новой шкале температур мы и расскажем.

Газовый термометр и абсолютная шкала температур

В газовом термометре в качестве величины, зависящей от температуры, по которой судят о самой температуре, принимается давление газа в закрытом сосуде, т. е. при постоянном объеме. Опыт показывает, что давление нагретого газа больше, чем давление холодного. Сам газовый термометр состоит из сосуда A, заполняемого «идеальным» газом (любым газом при малом давлении), и присоединенного к нему манометра M для измерения давления (рис. 3).

Если сосуд поместить в тающий лед, а затем в кипящую воду и измерить значения давлений при этих температурах, обеспечив тепловое равновесие, то окажется, что давление при температуре кипящей воды в 1,3661 раза больше, чем при температуре тающего льда. Если обозначить давление и температуру, соответствующие кипящей воде, через p и T, а значения этих величин, соответствующие тающему льду, через p_0 и T_0, то

$$\frac{p}{p_0}=1{,}3661. \qquad (2)$$

Чтобы не порывать со ставшей за двести лет привычной стоградусной шкалой Цельсия, по-прежнему полагают, что

$$T-T_0=100. \qquad (3)$$

Разность давлений при температурах кипения воды и тающего льда делят на 100 *равных частей* — градусов. Это значит, что и теперь мы заранее полагаем, что температура линейно зависит от давления газа при постоянном объеме. Более того, мы можем считать, что температура газа прямо пропорциональна его давлению. Проверить это допущение, разумеется, нельзя по той же причине, по которой в приведенном выше анекдоте нельзя по пушечному выстрелу проверять правильность хода часов, а по часам — своевременность выстрела. Просто само измерение температуры основано на том, что давление газа и его температура считаются пропорциональными друг другу.

Приписывать температуре тающего льда значение нуль теперь нет необходимости. Ее можно просто вычислить. В самом деле, если температура газа прямо пропорциональна давлению, то отношение давлений газа при температурах кипящей воды и тающего льда равно отношению самих этих температур, т. е.

$$\frac{p}{p_0}=\frac{T}{T_0}. \qquad (4)$$

Но отношение, стоящее в левой части этого равенства, равно 1,3661. Следовательно, и правая часть равна этому числу:

$$\frac{T}{T_0}=1{,}3661.$$

Отсюда получаем

$$T=1{,}3661\ T_0.$$

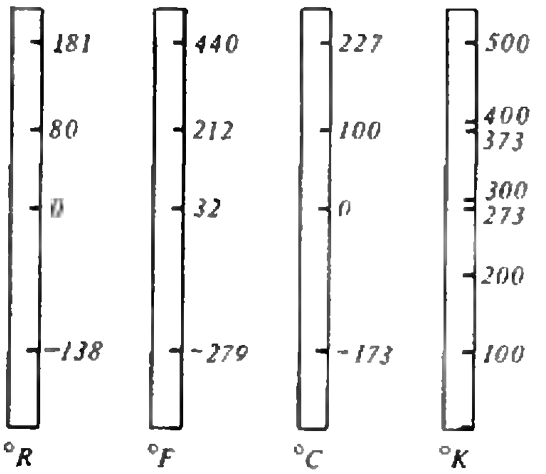
Подставив это значение для T в равенство (3), находим

$$1{,}3661\ T_0-T_0=100,$$

и мы сразу получаем

$$T_0=\frac{100}{0{,}3661}\approx 273{,}15.$$

Этим и отличается новая шкала от шкалы Цельсия: температура таяния льда по этой шкале равна не нулю, а 273,15 градуса. А нуль температуры на 273,15 (для краткости на 273) градуса ниже температуры таяния льда. Это, как говорят, абсолютный нуль. Это — та температура, при которой давление идеального газа стало бы равным нулю, если бы такая температура была достигнута и если бы газ еще оставался при этой температуре газом. Так как давление газа не может быть меньше чем нуль, то температура на такой шкале отрицательной (меньше нуля) быть не может.



Различные температурные шкалы: Реомюра, Фаренгейта, Цельсия и Кельвина.

Описанная только что температурная шкала (некоторые тонкости в ее определении, практически несущественные, мы опускаем) носит название абсолютной шкалы температур или шкалы Кельвина. И сама температура, отсчитываемая по этой шкале, называется абсолютной температурой. Обозначается она буквой T и выражается в кельвинах (сокращенно К), так что температура таяния льда равна 273,15 К, температура кипения воды равна 373,15 К и т. д.

Но шкалой Цельсия тоже пользуются на практике. Температуру, отсчитываемую по этой шкале, обозначают буквой t и выражают в градусах Цельсия (сокращенно °С). По этой шкале температура таяния льда равна 0 °С, температура кипения воды равна 100 °С и т. д. Ясно, что

$$t\ ^\circ\mathrm{C}=(T-273{,}15)\ \mathrm{K}.$$

В физике почти всегда пользуются шкалой Кельвина.

Теперь нам будет нетрудно выяснить, в чем же состоит истинный смысл температуры.

Что же такое температура?

Итак, по принятому теперь способу измерения температуры давление p произвольной массы газа M, т. е. произвольного числа N молекул газа, в сосуде объемом V пропорционально его абсолютной температуре T.

Это видно из уравнения (4), которое можно переписать в виде

$$\frac{p}{T}=\frac{p_0}{T_0}. \qquad (5)$$

Соотношение (5) показывает, что при постоянном объеме отношение давления газа к его абсолютной температуре — постоянная величина. С другой стороны, давление газа, как мы видели, определяется формулой (см. (1))

$$p=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\bar{E}.$$

Подставив это значение p в выражение (5), получаем

$$T=\frac{2}{3}\frac{N}{V}\frac{T_0}{p_0}\bar{E}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) относится к газу в закрытом сосуде постоянного объема. Поэтому число N молекул газа сохраняет постоянное значение; отношение $\frac{T_0}{p_0}$, как мы видели, тоже постоянно. Следовательно, коэффициент при $\bar{E}$ в формуле (6) — постоянная величина для любого газа, т. е.

$$T=\frac{2}{3}A\bar{E}, \qquad (7)$$

где $A=\frac{N}{V}\frac{T_0}{p_0}$ — константа. Это означает, что абсолютная температура газа — это то же, что средняя кинетическая энергия хаотического движения одной его молекулы, только выраженная не в джоулях, а в кельвинах. Коэффициент же $\frac{2}{3}A$ — это переводный множитель, показывающий, во сколько раз 1 К больше 1 Дж/молекулу. Подобно этому, одну и ту же длину можно выразить в метрах и в дюймах. Необходимо только знать, что 1 м=40 дюйм. Коэффициент 40 — переводный множитель, показывающий, во сколько раз 1 метр больше 1 дюйма.

Обычно формулу (7) записывают в виде

$$\bar{E}=\frac{3}{2}kT, \qquad (8)$$

где

$$k=\frac{1}{A}=\frac{V}{N}\frac{p_0}{T_0}. \qquad (9)$$

Коэффициент k называется постоянной Больцмана.

Из формулы (9) видно, как из опыта получить значение постоянной Больцмана. Для этого нужно наполнить сосуд известного объема V известной массой M газа (массу газа можно определить взвешиванием). Затем поместить сосуд в тающий лед (его температура $T_0=273{,}15$ К), измерить с помощью манометра давление p_0 газа. Зная массу M газа, легко определить значение N. Действительно, если молярная масса газа μ, то число молей газа равно M/μ; а поскольку в каждом моле газа имеется N_A молекул (N_A — число Авогадро), то число молекул N в массе M газа равно $N=\frac{M}{\mu}N_A$. Итак, зная массу газа M, его молярную массу μ, объем сосуда V и давление газа p_0 при температуре T_0, можно определить значение постоянной Больцмана k.

Такого рода измерения (а также и многие другие) неоднократно проводились. Все они дают для постоянной Больцмана значение

$$k=1{,}38\cdot10^{-23}\ \text{Дж/К}.$$

Как мы видим, значение k очень малое. Это значит, что средняя кинетическая энергия беспорядочных движений одной молекулы, и определяющая то, что мы называем температурой, чрезвычайно мала. При температуре в 1 К средняя кинетическая энергия молекулы $\bar{E}$ равна

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{3}{2}\cdot1{,}38\cdot10^{-23}\approx$$
$$\approx2\cdot10^{-23}\ \text{Дж/молекулу}.$$

Таково соотношение между кельвином и джоулем на молекулу.

В заключение нам остается еще выяснить, какова связь между температурой и теплотой — двумя понятиями, которые в течение веков считались чуть ли не синонимами.

Известно, что теплотой называется энергия тепловых беспорядочных движений, *передаваемая* от одного тела к другому (при теплопередаче). Ясно поэтому, что теплота не является величиной, характеризующей состояние тела. О ней нельзя сказать, что она содержится в теле. Температура же характеризует состояние тела, потому что она определяется средней кинетической энергией его молекул. Понятно, что между теплотой и температурой в сущности никакой связи нет. Можно только сказать, что *если два тела имеют различную температуру, то более высокой является температура того из них, которое передает теплоту другому.* Температура тела — это величина, которая определяет, будет ли данное тело отдавать теплоту другим телам или получать ее от них. Такое определение температуры в свое время дал Максвелл.

Нужна ли величина, которая называется температурой?

Температура как понятие и как физическая величина появилась в науке задолго до того, как можно было понять ее истинный смысл. Но теперь, когда он известен, стоит ли сохранять эту как будто бы архаическую величину? Не лучше ли всюду, где мы привыкли говорить о температуре, о кельвинах, о градусах Цельсия, заменить их тем, что они есть в действительности — средней кинетической энергией частицы, и измерять ее в джоулях?

Но нетрудно видеть, что для отказа от температуры и от градусов нет оснований.

Во-первых, едва ли будет удобно, например, врачу считать пациента больным на том основании, что средняя кинетическая энергия его молекулы равна $6{,}64 \cdot 10^{-21}$ Дж, вместо того, чтобы говорить о температуре в 38 °С.

Во-вторых, замена градусов джоулями может породить и недоразумения. Ведь энергия, например, в 100 Дж, вообще говоря, означает, что за ее счет может быть получена и работа в 100 Дж. Между тем если температура тела равна 100 Дж/молекулу (для температуры — это фантастическое значение), то это вовсе не значит, что за ее счет можно получить такую же работу.

Информация

Заказы принимаются

Главная редакция физико-математической литературы ИПКО «Наука» (Физматлит) является крупнейшей издательской организацией, выпускающей литературу по физико-математическим наукам — математике, механике, физике, астрономии, кибернетике, и информатике.

На все издания Главной редакции физико-математической литературы, включенные в аннотированный тематический план выпуска на 1991 год, гарантируется полное выполнение заказов книготорговых организаций.

Ниже приведен список книг, которые могут заинтересовать наших читателей. Нумерация соответствует тематическому плану. Цена — ориентировочная.

Заказать эти книги можно в ближайшем (крупном) книжном магазине или в магазине, имеющем отдел «Книга — почтой», в ближайшие 1—2 месяца. Там же можно ознакомиться с аннотированным тематическим планом.

Математика

13. Колмогоров А. Н. *Математика в ее историческом развитии.* 1 р. 10 к.
24. Ферма П. *Исследования по теории чисел и диофантову анализу.* 3 р. 50 к.
25. Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи.* 40 к.
26. Иванов Л. Д. *Выпуклые функции.* 20 к.
27. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.* Ч. 1.— 2-е изд. 1 р. 20 к.
28. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии.* Ч. 2.— 2-е изд. 80 к.
30. Корн Т., Корн Г. *Справочник по математике для научных работников и инженеров.*— 6-е изд. 3 р. 80 к.
35. *Лекции по теории графов.* 1 р. 20 к.
36. Мысовских И. П. *Лекции по методам вычислений.* 1 р. 20 к.
41. Гнеденко Б. В. *Введение в специальность математика.* 1 р.
43. Афанасьева О. Н., Бродский Я. С., Павлов А. Л. *Математика для техникумов на базе среднего образования.* 75 к.
44. Гельфанд И. М., Шень А. Х. *Алгебра.* 20 к.

СЕМЕЙСТВО ПРЯМЫХ, ДЕЛЯЩИХ ПЛОЩАДЬ ПОПОЛАМ

Кандидат физико-математических наук
О. КОТИН.
А. МАЙОРОВ

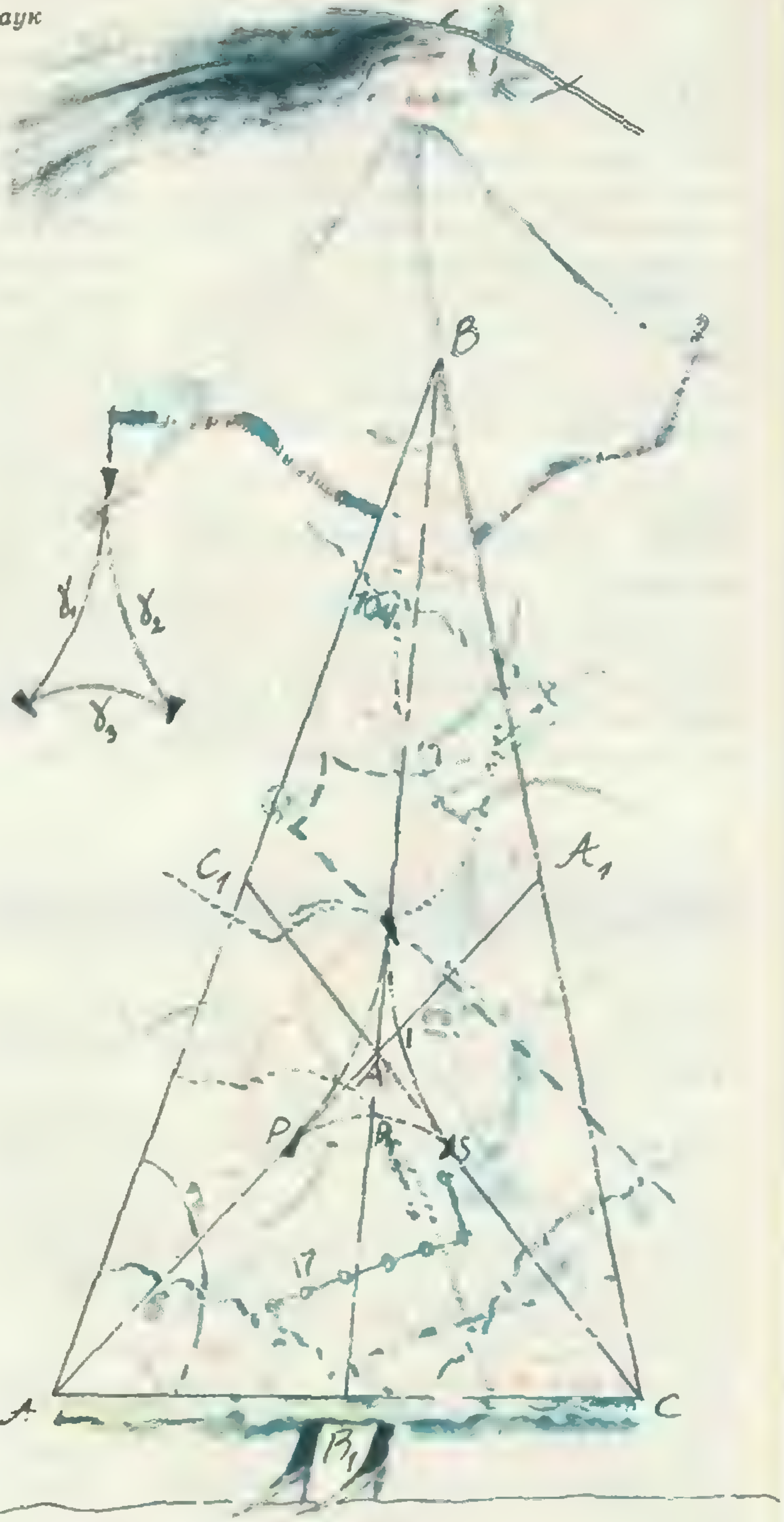
В статье рассматривается задача о числе прямых, проходящих через данную точку плоскости и делящих данный треугольник или выпуклый четырехугольник на две равновеликие части, т. е. две части, площади которых равны.

Три задачи на построение

Рассмотрим сначала случай, когда точка лежит на стороне треугольника или четырехугольника. В этом случае всегда существует, причем *единственная*, искомая прямая. Укажем несколько способов ее построения.

Задача 1. *Через точку M, лежащую на стороне треугольника ABC, провести прямую, которая делит треугольник на две равновеликие части.*

Если точка совпадает с вершиной треугольника, то искомой прямой является, очевидно, медиана, проведенная из этой вершины. Медиана будет искомой прямой и в случае, если точка *M* является серединой одной из сторон. Предположим, что точка *M* лежит, например, на стороне *AC* треугольника и ближе к *A*, чем к *C*. Рассмотрим два способа построения искомой прямой.



Первый способ. Пусть B_1 — середина стороны AC треугольника ABC, M — внутренняя точка отрезка AB_1 (рис. 1). Проведем медиану AA_1 треугольника и через вершину A проведем прямую, параллельную прямой MA_1, пересекающую сторону BC в точке X. Тогда MX — искомая прямая. Действительно, $S_{AA_1M}=S_{MXA_1}$, значит, $S_{APM}=S_{PXA_1}$ и $S_{MXC}=S_{ABXM}$.

Второй способ. Через точку B_1 — середину отрезка AC (рис. 2) — проведем прямую B_1X параллельно прямой MB. Тогда, в силу того, что $S_{MPB_1}=S_{PBX}$, MX — искомая прямая.

Задача 2. *Через вершину выпуклого четырехугольника провести прямую, которая делит четырехугольник на две равновеликие части.*

Первый способ. Проведем диагонали AC и BD четырехугольника (рис. 3). Через точку E — середину отрезка BD — проведем прямую, параллельную прямой AC и пересекающую CD в точке X. Тогда AX — искомая прямая. Действительно, $S_{ABCE}=S_{AECD}$, так как $S_{ABE}=S_{AED}$ и $S_{BCE}=S_{CED}$. Но $S_{APE}=S_{PCX}$, следовательно, $S_{ABCX}=S_{AXD}$.

Второй способ. Через вершину C четырехугольника проведем прямую, параллельную диагонали BD (рис. 4) и пересекающую прямую AB в точке P. Заметим, что $S_{APD}=S_{ABCD}$, так как $S_{BPN}=S_{NCD}$. Медиана AE делит треугольник APD на два равновеликих треугольника. Через точку E проведем прямую, параллельную AD и пересекающую CD в точке X. Тогда AX — искомая прямая, так как $S_{AEF}=S_{FXD}$.

Задача 3. *Через точку M, лежащую на стороне выпуклого четырехугольника, провести прямую, делящую его на две равновеликие части.*

Пусть точка M лежит, например, на стороне AD четырехугольника. Через точки E и F — середины диагоналей BD и AC — проведем прямые PE и KF, параллельные AC и BD соответственно. Предположим, что M — внутренняя точка отрезка AP.

Первый способ. Проведем прямую AX_1 (рис. 5), делящую четырехугольник на две равновеликие части

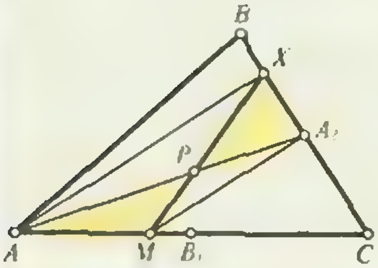


Рис. 1.

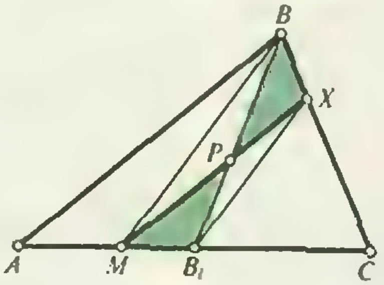


Рис. 2.

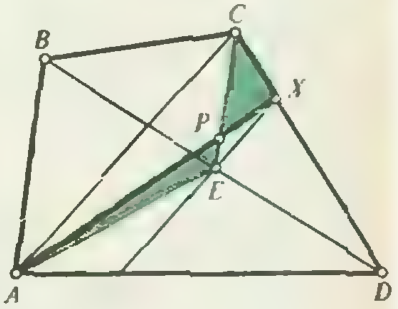


Рис. 3.

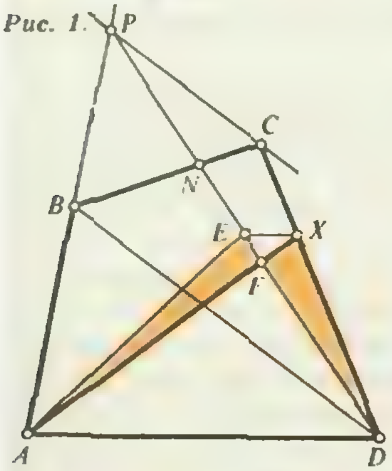


Рис. 4.

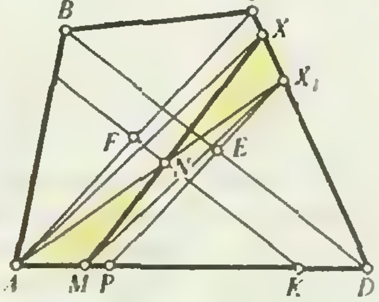


Рис. 5.

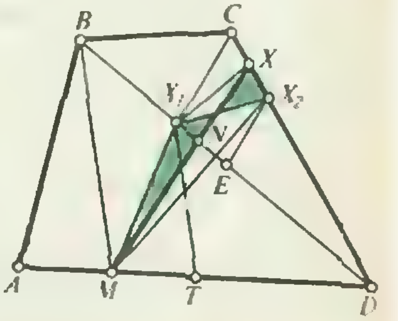


Рис. 6.

(см. задачу 2, 1 способ), и прямую AX, параллельную MX_1. Тогда MX — искомая прямая, так как $S_{ANM}=$ $=S_{VXX}$.

Второй способ. Проведем диагональ BD четырехугольника и построим ломаную MX_1X_2 (рис. 6), делящую его на две равновеликие части (см. задачу 1, 2 способ). Через точку X_1 проведем прямую, параллельную прямой MX_2 и пересекающую сторону CD в точке X. Тогда MX — искомая прямая (зеленые треугольники на рисунке 6 равновелики).

Для решения общей задачи рассмотрим одно свойство касательных к гиперболе.

Свойство касательных к гиперболе

Рассмотрим ветвь гиперболы, $y=$ $=\frac{k}{x}$ (иначе говоря, $xy=k$), расположенную в первом координатном угле. Пусть A — точка этой ветви. Проведем через точку A касательную к гиперболе и обозначим через B и C точки пересечения этой касательной с осями координат.

Теорема 1. *Точка A является серединой отрезка BC.*

Доказательство.

I случай: точка A лежит на диагонали угла, образованного осями координат. Тогда прямая BC перпендикулярна этой диагонали, $\triangle OAB=$ $=\triangle OAC$ и $AB=AC$.

II случай: точка A не лежит на диагонали угла, образованного осями координат. Произведем преобразование нашего чертежа: сожмем его в λ раз к оси Ox и растянем его в λ раз от оси Oy. Это преобразование называется *гиперболическим поворотом;* оно переводит точку $(x; y)$ в точку $(\lambda x; \frac{y}{\lambda})$. Произведение координат при гиперболическом повороте не меняется, поэтому точки нашей гиперболы переходят в точки, лежащие на той же гиперболе. В то же время оси координат переходят в себя, касательные к гиперболе переходят в касательные к гиперболе, точки касания — в точки касания, середины отрезков — в середины отрезков. Очевидно, любая точка нашей гиперболы может быть получена из точки, рассмотренной в случае I, при помощи надлежащего гиперболического поворота. Значит, из справедливости нашего утверждения для точки, рассмотренной в случае I, вытекает его справедливость для любой точки A.

Из доказанной теоремы 1 почти сразу вытекает следующее важное для нас утверждение.

Теорема 2. *Касательные к гиперболе $xy=k$ отсекают от угла xOy треугольники равной площади.*

Доказательство. Так как точка касания является серединой отрезка касательной, т. е. A — середина отрезка BC, то OB — это удвоенная ордината точки A, а OC — ее удвоенная абсцисса. Поэтому $S_{OBC}=$ $=\frac{1}{2}OB\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 2x=2xy=2k$, т. е. площадь не зависит от точки A (x и y — координаты точки A).

Верно также и утверждение, обратное теореме 2.

Теорема 3. *Прямые, отсекающие от сторон прямого угла треугольники равной площади, касаются ветви гиперболы, асимптотами которой являются оси координат.*

Пусть прямая BC отсекает от сторон прямого угла треугольник данной площади S, и пусть $A(x; y)$ — середина отрезка BC. Тогда $OB=2y$,

$OC=2x$, $S=S_{OBC}=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot 2x=$ $=2xy$, и точка A лежит на гиперболе $xy=\frac{S}{2}$. Отрезок касательной к гиперболе, проведенной через точку A, заключенный между осями координат, делится, как и отрезок BC, этой точкой пополам и поэтому этот отрезок касательной совпадает с BC. Теорема доказана.

Для дальнейшего нам понадобится знать число касательных к ветви гиперболы, проходящих через данную точку. Геометрически понятно, что по мере того, как касательные огибают гиперболу, они заметают внешнюю часть гиперболы в первом координатном угле дважды, а второй и четвертый координатные углы — по одному разу. Поэтому число касательных, проходящих через данную точку, в первом случае равно двум; во втором случае, так же как и для точек, лежащих на гиперболе,— единице; для внутренней части гиперболы, которая задается неравенствами $0<\frac{1}{x}<y$, и для точек третьего координатного угла — нулю.

В заключение этого раздела заметим, что сформулированные выше теоремы справедливы для любой гиперболы и для любого угла, образованного ее асимптотами. Для того чтобы сделать переход от гиперболы с перпендикулярными асимптотами к любой другой, достаточно совершить сжатие этой гиперболы к любой прямой, не являющейся асимптотой, например к диагонали между асимптотами (или растяжение гиперболы от этой прямой). Ясно, что при таком сжатии (или растяжении) угол между асимптотами меняется и может стать любым, гипербола переходит в гиперболу, асимптоты — в асимптоты, касательные — в касательные, середины отрезков — в середины отрезков и т. д. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 4. *Прямые, отсекающие от данного угла треугольники данной площади, касаются гиперболы, асимптотами которой служат стороны этого угла. Точками касания являются середины отрезков секущих, заключенных между сторонами угла.*

Задача о треугольнике

При решении некоторых геометрических задач возникают семейства прямых. Например, прямые, проходящие через данную точку; прямые, равноотстоящие от данной точки; прямые, отсекающие от данного угла треугольники равной площади, и т. д. Общее свойство, которому удовлетворяют прямые семейства, заключается в том, что коэффициенты в уравнениях этих прямых зависят от параметра, пробегающего некоторый числовой промежуток. Другим общим свойством семейства прямых является то, что они касаются некоторой кривой, которая называется *огибающей* данного семейства прямых. В приведенных выше примерах семейств прямых огибающая в первом случае вырождается в точку, во втором — в окружность, третий случай разобран ниже. Итак:

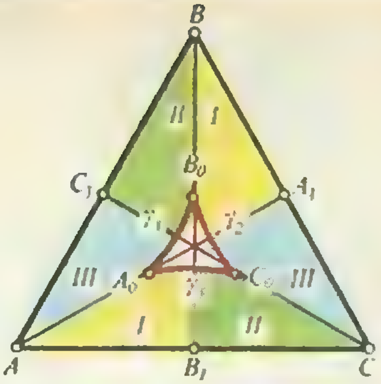


Рис. 7.

найдем огибающую множества прямых, делящих данный треугольник на две равновеликие части.

Прямыми, делящими площадь треугольника ABC пополам и проходящими через его вершины, являются медианы треугольника. Медианы разбивают семейство всех прямых, делящих площадь треугольника пополам, на три класса прямых I, II, III (рис. 7) и являются граничными прямыми в этих классах. Прямые класса I отсекают от угла ACB треугольники постоянной площади, следовательно, по теореме 4, касаются «кусочка» гиперболы γ_1, концами которого являются середины A_0 и B_0 медиан AA_1 и BB_1. Аналогичные рассуждения можно провести для двух других углов треугольника.

Таким образом, огибающей множества всех прямых, делящих площадь данного треугольника пополам, является криволинейный треугольник, вершины которого — середины медиан треугольника, а стороны — «кусочки» гипербол γ_1, γ_2, γ_3, асимптоты которых — соответствующие стороны треугольника.

Знаая огибающую, можно ответить на вопрос о числе прямых, проходящих через данную точку и делящих

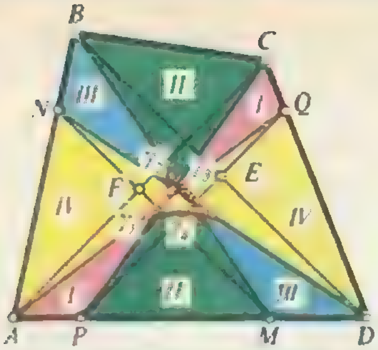


Рис. 8.

площадь треугольника пополам.*) Для каждой точки, лежащей внутри красного криволинейного треугольника, существуют три прямые, делящие его на две равновеликие части (две касательные к одной ветви гиперболы и одна к одной из двух оставшихся, для центроида — по одной касательной к каждой гиперболе); для точек, лежащих на сторонах криволинейного треугольника, исключая вершины,— две прямые; для остальных точек плоскости — одна прямая. В последнем случае множество точек плоскости, лежащих вне криволинейного треугольника, распадается на три класса I, II, III, в зависимости от того, какой гиперболы — γ_1, γ_2, γ_3 — касается прямая.

Задача о четырехугольнике

Решим задачу, аналогичную задаче об огибающих для треугольника, для произвольного выпуклого четырехугольника *ABCD*. Для этого проведем через точки *E* и *F* — середины диагоналей *BD* и *AC* четырехугольника (рис. 8) — прямые *PQ* и *MN*, параллельные диагоналям *AC* и *BD* соответственно. Тогда прямыми, проходящими через вершины четырехугольника и делящими его площадь пополам, являются *AQ*, *CP*, *BM* и *DN* (см. задачу 2). Получаем четыре класса прямых, делящих площадь четырехугольника пополам. Границы этих классов — перечисленные выше прямые *AQ*, *CP*, *BM* и *DN*. Прямые классов I и III отсекают от углов *ADC* и *BAD* треугольники постоянной площади; прямые классов II и IV отсекают треугольники постоянной площади от углов, образованных прямыми *BC* и *AD*, *AB* и *DC*. Следовательно, огибающей семейства прямых, делящих четырехугольник на две равновеликие части, является криволинейный четырехугольник с вершинами в серединах граничных прямых, стороны которого — «кусочки» гипербол. Впрочем, называть эту фигуру четырехугольником нет особых оснований: отрезки гипербол γ_1 и γ_2 в точке своего стыка имеют общую касательную (прямую *CP*) и сопрягаются в одну гладкую кривую; так что скорее это — треугольник, сделанный из кусочков четырех гипербол.

Некоторые вырождения рисунка 8 (анализ которых мы оставляем читателю) происходят в случаях, когда либо две противоположные стороны четырехугольника параллельны, либо какая-нибудь диагональ делится точкой пересечения диагоналей пополам. Впрочем, внешний вид картинки меняется при этом мало — за исключением случая, когда два указанных события происходят оба сразу, т. е. когда наш четырехугольник является параллелограммом. В этом случае описанный выше криволинейный треугольник сжимается в одну точку.

Наконец, ответ на вопрос, поставленный в начале статьи,— о числе прямых, проходящих через данную точку и делящих площадь пополам,— для четырехугольника тот же, что для треугольника: если точка лежит вне криволинейного треугольника, такая секущая единственна; для внутренних точек треугольника — их три; для граничных точек, кроме вершин,— их две; в вершинах треугольника — такая секущая снова одна.

---

*) Задачу на эту тему прислал также десятиклассник из Киева *Д. Ароцкер*.

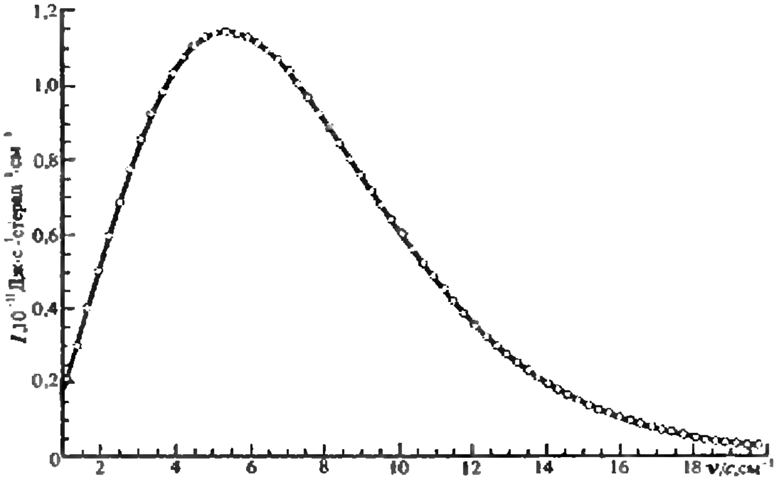
Распределение Планка (и реликтовое излучение)

Кривая, которую вы видите на рисунке,— знаменитое распределение Планка, показывающее, какую энергию излучает в виде фотонов определенной длины волны единица поверхности нагретого тела в единичный телесный угол в единицу времени. Именно с этой кривой 90 лет назад началась эра квантовой физики. Почему же очередное измерение этой кривой в начале 1990 года произвело сенсацию среди физиков?

Приведенная на рисунке кривая была получена не в лаборатории при спектральном анализе излучения раскаленного образца, а на спутнике COBE, который был запущен в США в ноябре 1989 года (аббревиатура COBE расшифровывается так: COsmic Background Explorer, что по-русски означает исследователь космического фона). Прибор на спутнике регистрировал фотоны, не имеющие видимых источников. В каком бы направлении прибор ни ориентировался, спектр этого излучения, называемого реликтовым, был одним и тем же. Это говорит о том, что реликтовое излучение однородно и изотропно, заполняет всю Вселенную. Кривая очень точно воспроизводит формулу Планка для потока энергии:

$$f(n)=\frac{2\varepsilon_\nu c n^2}{\exp(\varepsilon_\nu/kT)-1},$$

где $\varepsilon_\nu=h\nu$ — энергия фотона, а n — это число волн, которое укладывается на единице длины: $n=1/\lambda$, $\nu=cn$. По этой кривой можно определить температуру реликтового излучения с точностью до тысячных долей кельвина: $T=2{,}735$ К.



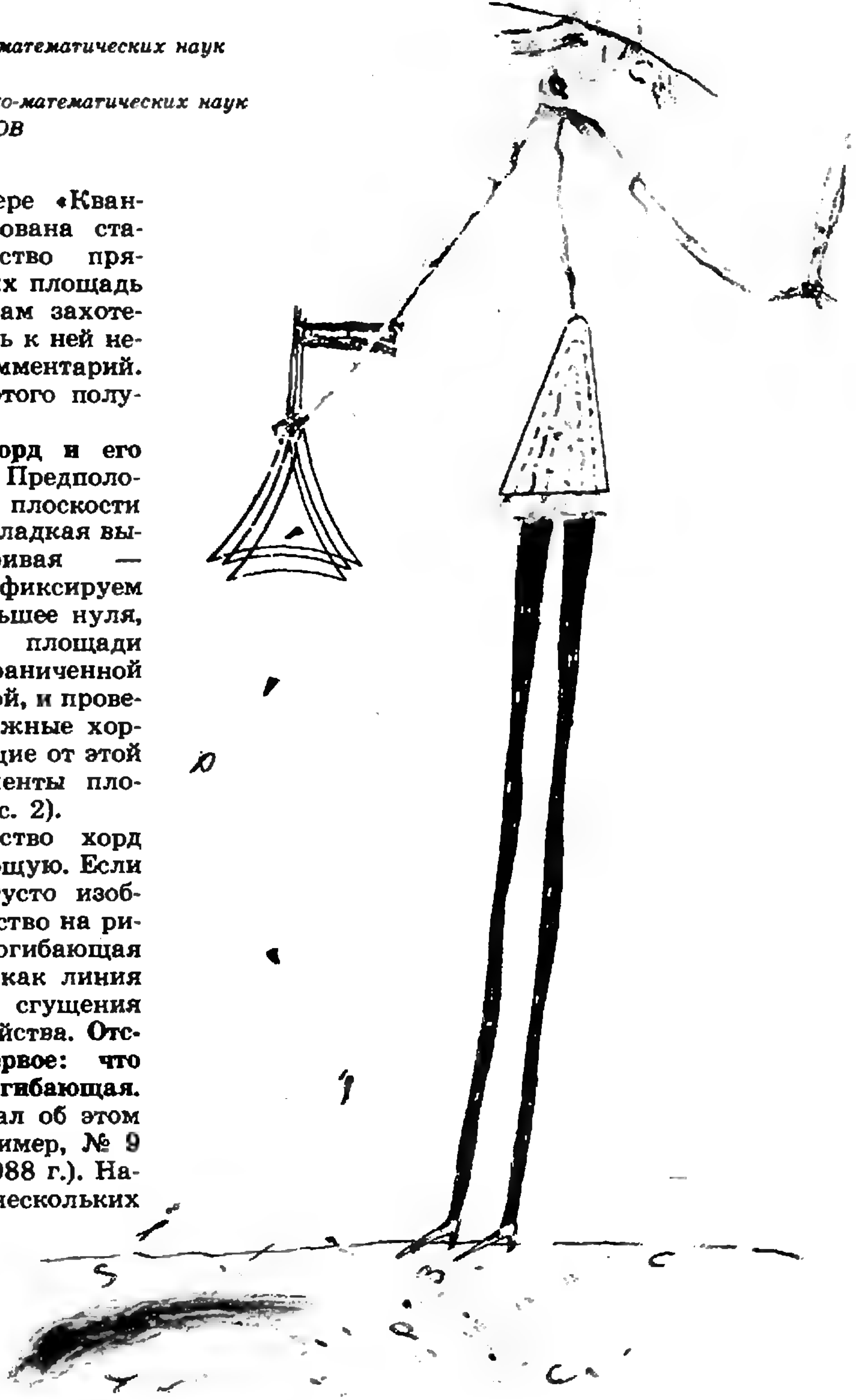
Исследование реликтового излучения позволяет заглянуть в столь давнее прошлое нашей Вселенной, когда в ней еще не было ни галактик, ни квазаров, а существовал только раскаленный сгусток плазмы и излучения. «Вскоре» после того как произошел Большой взрыв, примерно через 300 000 лет после начала отсчета времени, этот огромный горячий сгусток остыл настолько, что энергия фотонов упала ниже порога рождения частиц (электронов и позитронов в частности), и излучение, или, иными словами, фотонный газ, стало адиабатически охлаждаться равномерно по всей расширяющейся Вселенной. Характерная длина волны фотонов росла вместе с радиусом Вселенной, частота, а следовательно и энергия, падала. Значит, уменьшалась и температура. Показатель экспоненты $\varepsilon_\nu/kT=h\nu/kT$ при этом оставался неизменным. Поэтому не изменялась и форма распределения Планка.

Наверное, ни в одной лаборатории мира не получали такую точную кривую Планка. И тем не менее радость и изумление физиков несколько омрачаются вопросом: а с чего ей быть такой точной? Рождались галактики, взрывались звезды, происходили огромные пертурбации во Вселенной. Почему-то никакие катаклизмы не оставили следа на «челе» кривой. В этом еще надо разобраться. Мы постараемся вернуться к разговору о реликтовом излучении...

Я. С.

СЕГМЕНТЫ ПОСТОЯННОЙ ПЛОЩАДИ

Доктор физико-математических наук
Д. ФУКС,
кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ



В этом номере «Кванта» опубликована статья «Семейство прямых, делящих площадь пополам». Нам захотелось написать к ней небольшой комментарий. Вот что из этого получилось...

Семейство хорд и его огибающая. Предположим, что на плоскости нарисована гладкая выпуклая кривая — рис. 1. Зафиксируем число S, большее нуля, но меньшее площади фигуры, ограниченной данной кривой, и проведем всевозможные хорды, отсекающие от этой фигуры сегменты площадью S (рис. 2).

Это семейство хорд имеет огибающую. Если достаточно густо изобразить семейство на рисунке, то огибающая будет видна как линия наибольшего сгущения прямых семейства. **Отступление первое: что такое огибающая.** «Квант» писал об этом не раз (например, № 9 и № 10 за 1988 г.). Напомним в нескольких словах суть дела. Изобразим на чертеже несколько идущих друг за другом прямых нашего семейства (рис. 3, *а*). Отметим точки пересечения первой прямой со второй, второй и третьей и т. д. Отмеченные точки — вершины ломаной, составленной из отрезков прямых. Добавим еще несколько прямых из нашего семейства (они изображены красным цветом на рисунке 3, *б*) — и ломаная получит новые звенья. В пределе ломаная превратится в кривую; это и есть огибающая. Кстати, видно, как построить точки огибающей: нужно взять прямую l семейства и отметить на ней точку пересечения с другой прямой l'. Когда l' стремится к l, отмеченная точка стремится к точке касания прямой l и огибающей (рис. 4).

Огибающая нашего семейства хорд — геометрическое место середин этих хорд. Заголовок этого раздела — одновременно формулировка теоремы. Ее доказательство извлекается из рисунка 5.

Пусть AB и $A'B'$ — хорды нашего семейства, α — угол между ними. Поскольку AB и $A'B'$ отсекают сегменты равной площади, разовые секторы тоже имеют равные площади. Площади же этих секторов приближенно равны $^1/_2\ AE^2 \sin\alpha$ и $^1/_2 BE^2 \sin\alpha$, причем относительная погрешность с уменьшением α делается сколь угодно малой. Значит, $AE \approx BE$, и предельное (при $\alpha \to 0$) положение точки E есть середина хорды AB.

Отступление второе: задача о двух овалах. Предположим, что на плоскости нарисованы две выпуклые кривые — одна внутри другой (рис. 6). Требуется доказать, что найдется хорда большей из них, которая касается меньшей и делится точкой касания пополам. Эта задача не так безобидна, как кажется; попробуйте решить ее сами, прежде чем читать дальше.

А теперь — решение. Проведем всевозможные касательные к внутренней красной кривой и будем следить за площадью сегментов, отсекаемых от синей кривой. Для некоторой прямой l эта площадь достигает наименьшего значения S. Проведем две близкие прямые l' и l'', также отсекающие от синей кривой сегмент площадью S. Пусть A — точка касания прямой l с красной кривой, B и C — точки пересечения прямой l с l' и l'' (рис. 7). Поскольку S — наименьшее значение площади, прямые l' и l'' не содержат внутренних точек фигуры, ограниченной красной кривой. Поэтому точка A лежит между точками B и C. Устремляя l' и l'' к l, мы заставляем точки B и C стремиться друг к другу, а следовательно, к точке A. Значит, A — точка касания прямой l с огибающей семейства пря-

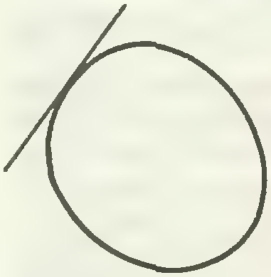


Рис. 1.

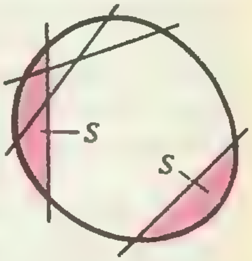


Рис. 2.

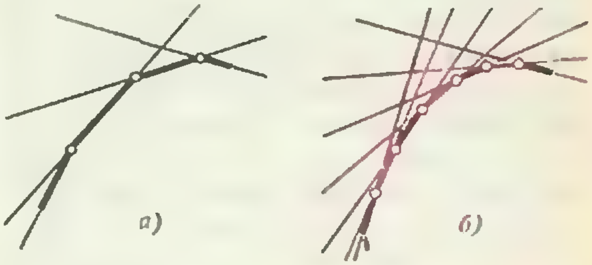


Рис. 3.

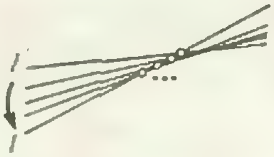


Рис. 4.

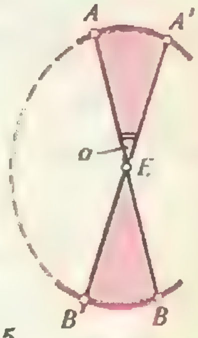


Рис. 5.

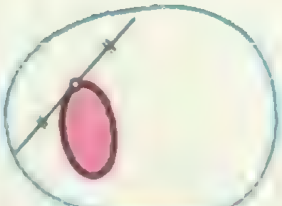


Рис. 6.

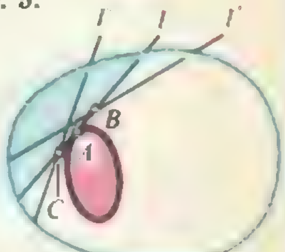


Рис. 7.

мых, отсекающих от синей кривой сегменты площадью S. Остается только воспользоваться теоремой из предыдущего пункта, согласно которой точка A делит хорду l пополам.

Это рассуждение можно повторить, заменяя минимум площади максимумом. В результате обнаружится еще одна хорда, удовлетворяющая условию задачи.

Заметим еще, что доказанный нами факт имеет пространственное обобщение: если одно выпуклое тело лежит внутри другого выпуклого тела, то существует плоскость, касающаяся границы внутреннего тела и такая, что точка касания служит центром тяжести сечения внешнего тела. Читатель может при желании попытаться это доказать.

Вернемся, однако, к нашей огибающей.

Чего у огибающей нет. Нет двух вещей: двойных касательных и точек перегиба. Двойная касательная — это прямая, которая касается кривой в двух точках, как на рисунке 8, *а*. А точка перегиба — это точка, в которой кривая пересекает касательную, как на рисунке 9, *а*. В произвольной близости как от двойной касательной, так и от касательной в точке перегиба, к кривой можно провести параллельные касательные (рис. 8, *б* и 9, *б*). Эти параллельные прямые не могут отсекать сегменты равной площади; значит, у огибающей не может быть ни двойных касательных, ни точек перегиба.

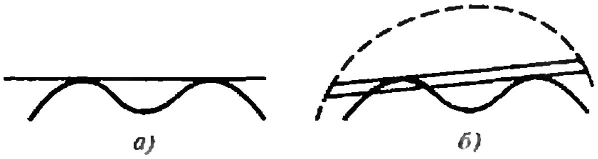


Рис. 8.

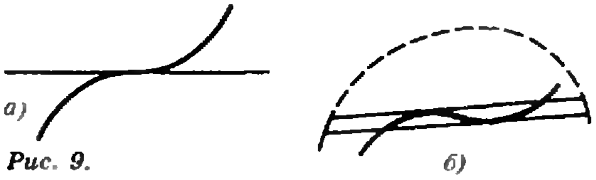


Рис. 9.

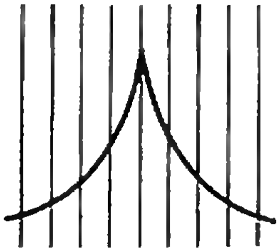


Рис. 10.

Что у огибающей есть. Об этом достаточно ясно сказано в статье «Семейство прямых, делящих площадь пополам» — есть точки возврата (или острия, или клювы — словом, то, что изображено на рисунке 10). Мы уже говорили, что об огибающих «Квант» писал не раз; и всякий раз — не поленитесь, посмотрите! — речь шла о точках возврата. Так что удивляться тут нечему. Но зададимся тем не менее вопросом:

в каких местах на огибающей появляются точки возврата?

Теорема. *Если середина хорды AB является точкой возврата огибающей, то касательные к нашей кривой в ее концах параллельны.*

Доказательство. Пусть эти касательные не параллельны. Тогда кривую вблизи точек A и B можно приблизить ее касательными, образующими угол. В статье «Семейство прямых, делящих площадь пополам» доказано, что огибающая семейства хорд, отсекающих от угла треугольник фиксированной площади,— это гипербола. То есть, гладкая кривая, не имеющая клювов. Поэтому наша огибающая тоже не будет иметь клюва в середине хорды AB (поведение огибающей около этой точки ясно из рисунка 11).

Теперь предположим, что касательные в точках A и B параллельны. Тогда нам необходимы дополнительные данные: в какой из этих двух точек больше кривизна кривой. О кривизне «Квант» тоже писал не раз. Но мы не верим в то, что вы и так не знаете, что такое кривизна. Например, на более крутом повороте (кривизна больше!) при равной скорости автомобиль больше заносит.

Так вот, предположим, что кривизна в точке A меньше, чем в точке B (как на рисунке 12). Из этого рисунка видно, что середины E' и E'' хорд $A'B'$ и $A''B''$ расположены по разные стороны от хорды AB и сдвинуты относительно ее середины E в сторону точки A. Значит, в точке E имеется острие, обращенное к точке B.

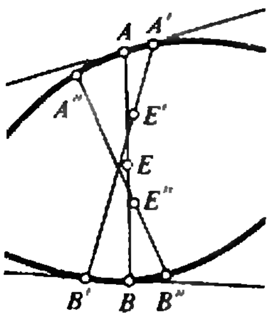


Рис. 11.

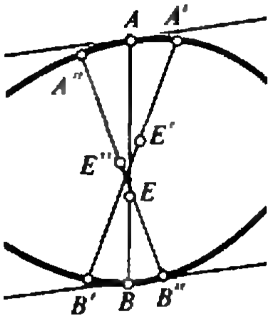


Рис. 12.

Итак: *точки возврата на огибающей отвечают хордам, в концах которых касательные параллельны; острия обращены в сторону концов хорд, в которых кривизна меньше.*

Правда, остался вопрос: а что будет, если в концах хорды с параллельными касательными кривизны одинаковы? Этот вопрос настолько сложен, что мы дадим на него два противоположных ответа; и оба будут правильными. Ответ первый: этого, фактически, никогда не бывает. Ведь в нашем семействе встречаются лишь отдельные хорды, касательные в концах которых параллельны. И совсем невероятно, чтобы кривизны в их концах совпали. Ответ второй: этот случай сейчас нас не касается, но в последующем мы с ним столкнемся. Пока же условимся о названии; назовем его «случаем максимального вырождения».

Сколько клювов? Неожиданным образом ответ зависит от того, равна ли площадь сегмента половине площади всей фигуры или не равна.

Случай I: *S есть половина площади фигуры.* В этом случае в каждом направлении проходит ровно одна хорда, отсекающая сегмент площадью S. Это значит, что касательная к огибающей при полном обходе вокруг нее повернется на 180° и совместится с собой с изменением направления (рис. 13). Итак — странное дело! — когда мы обходим огибающую, касательная меняет направление на противоположное. Как вообще это может быть? Но посмотрите, что происходит в точке возврата (рис. 14). Поставим на касательной к огибающей стрелку, так чтобы ее направление соответствовало направлению нашего движения. Вы сами видите, что после прохождения точки возврата направление касательной делается противоположным. И так в каждой точке возврата. Но после полного обхода направление касательной сменилось противоположным. Это значит..? Правильно!

Число точек возврата на огибающей нечетно.

Сколько же их? Не одна! Почему? Посмотрите на рисунок 10: пусть касательная в точке возврата вертикальна. У огибающей больше нет вертикальных касательных. Поэтому, если больше нет и точек возврата, то левее точки возврата кривая движется влево, а правее — вправо. Замкнуться такая кривая не может. Поэтому

число точек возврата не меньше трех.

Случай II: *S не равно половине площади фигуры.*

Теперь в каждом направлении проходят две хорды из нашего семейства (рис. 15), а при полном обходе огибающей касательная поворачивается на 360° (рис. 16). Повторяя предыдущие рассуждения, мы приходим к выводу:

число точек возврата на огибающей четно.

Отступление третье: теорема Мёбиуса. Разбирая первый случай, мы почти доказали известную теорему Мёбиуса. Она утверждает, что

кривая без двойных касательных и точек перегиба, касательная к кото-

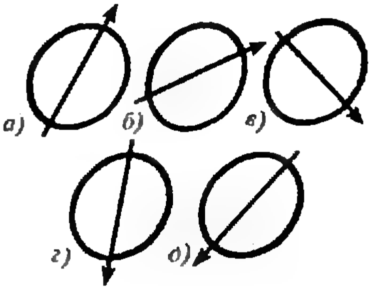


Рис. 13.

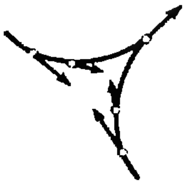


Рис. 14.

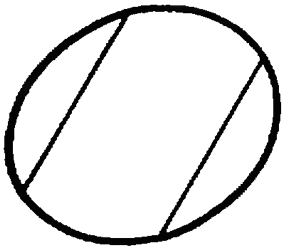


Рис. 15.

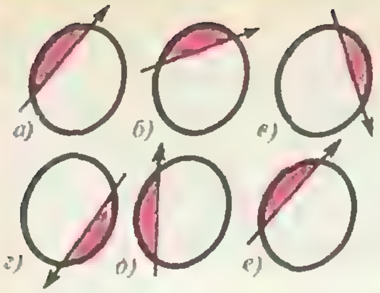


Рис. 16.

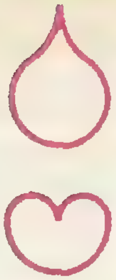


Рис. 17.

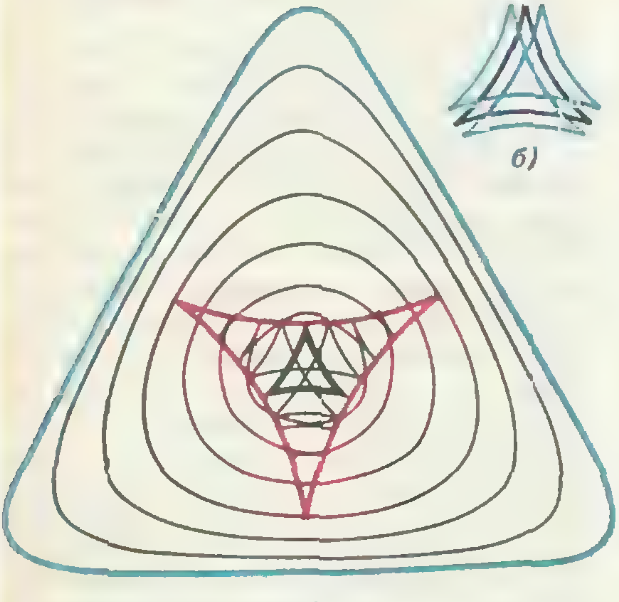


Рис. 18.

а)

б)

рой после полного обхода поворачивается на 180°, имеет нечетное число точек возврата, не меньшее 3.

Например, кривые на рисунке 17 условием теоремы исключаются. А доказать ее вы без труда сможете сами, глядя на рисунок 10.

На одном чертеже. *Попробуем теперь* нарисовать на одном чертеже огибающие семейства хорд, отсекающих от данной фигуры сегменты площадью S, при разных S — от 0 до половины площади фигуры. То, что у нас получилось, вы видите на рисунке 18, *а*.

Огибающие — черные линии. Самая внутренняя черная кривая — огибающая семейства хорд, делящих площадь пополам. Эта же кривая «под микроскопом» изображена на рисунке 18,*б*. Прилегающая к ней синяя кривая — огибающая хорд, отсекающих сегменты площадью чуть меньше половины. Эта синяя кривая дважды обходит вокруг внутренней черной кривой. Когда площадь S уменьшается, огибающая увеличивается и приближается к исходной зеленой кривой. При малых S огибающая становится гладкой, а при $S=0$ она сольется с исходной кривой. И при этом (новое наблюдение!) точки возврата огибающих сами скользят по некоторой (красной) кривой.

Эта красная кривая составлена из середин хорд, соединяющих точки, в которых касательные к исходной кривой параллельны. И сама она имеет точки возврата! *Именно в этих точках* попарно сливаются и исчезают (или попарно рождаются) точки возврата черных огибающих. Что же это за загадочные точки? Это наши знакомые «точки максимального вырождения», т. е. середины хорд, в концах которых касательные параллельны и кривизны одинаковы.

Сколько точек максимального вырождения? Их не меньше, чем точек возврата огибающей семейства хорд, делящих площадь пополам (а значит, не меньше *3*). *Ведь* у огибающей семейства хорд, отсекающих площадь, чуть меньшую половины (у синей кривой на рисунке 18, *б*), точек возврата вдвое больше. И все они при эволюции огибающих должны попарно исчезнуть в точках максимального вырождения. Значит, этих точек не меньше, чем клювов у огибающей семейства хорд, делящих площадь пополам.

Кроме того, число точек максимального вырождения нечетно. Потому, что число точек возврата синей кривой — а это удвоенное нечетное число — в точках максимального вырождения меняется на 2 и в конце эволюции огибающих становится равным нулю. Это возможно, только если число таких изменений нечетно.

Случай многоугольника. Нам остается обратиться к предмету статьи, которую мы старались прокомментировать,— к многоугольникам. Чтобы применить к этому случаю нашу теорию, мы должны приблизить многоугольник гладкой кривой: почти прямые стороны и резкие повороты в углах.

Начнем с треугольника. Точки, в которых касательные параллельны,— это вершина треугольника и любая

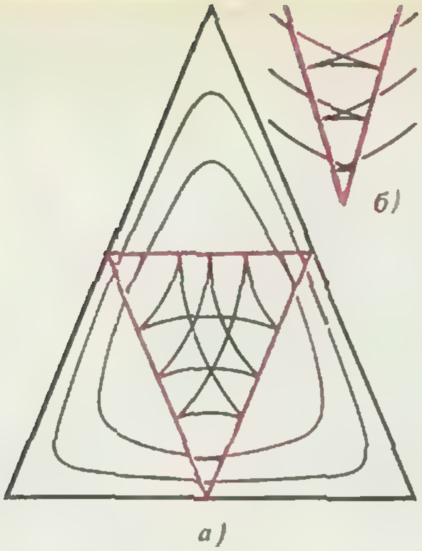


Рис. 19.

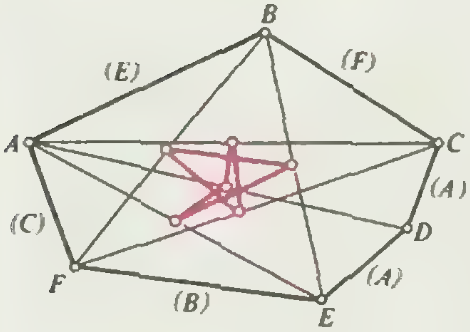


Рис. 20.

точка противоположной стороны. Значит, красная линия рисунка 18, *а* здесь становится треугольником, сделанным из средних линий. Огибающие семейства хорд, отсекающих от треугольника части данной площади, показаны на рисунке 19,*а*. Они *все* (рис. 19, *б*) имеют точки возврата (ведь *красная линия «дотягивается»* до сторон треугольника) и составлены из кусочков гипербол.

Из кусочков гипербол состоят эти линии и для всякого многоугольника. Назовем вершину *А* противоположной стороне *а*, если прямая, параллельная *а* и проходящая через *А*, лежит вне многоугольника. Всякая сторона противоположна одной вершине (во всяком случае, если у многоугольника нет параллельных сторон), но вершина может быть противоположной *нескольким сторонам, а может* быть не противоположной ни одной. На рисунке 20 около каждой стороны указано «имя» вершины, которой она противоположна. Красная линия составлена из средних линий треугольников, у которых основание — сторона многоугольника, а вершина — противоположная ей вершина многоугольника. На сторонах этой замкнутой ломаной лежат все точки возврата огибающих, а ее вершины — точки максимального вырождения. То, что получается в случае правильного *пятиугольника*, мы постарались изобразить на рисунке 21 (справа — увеличенная центральная часть левой картинки).

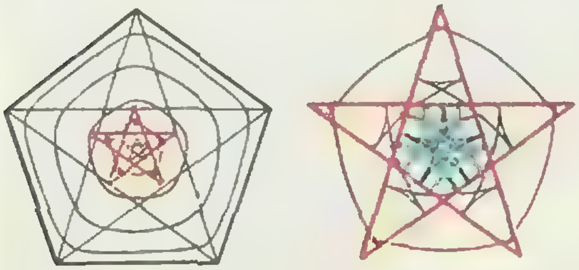


Рис. 21.

В заключение укажем на удивительное отличие «четноугольников» от «нечетноугольников». У «нечетноугольника», близкого к правильному (или просто правильного), огибающая семейства хорд, делящих площадь пополам, имеет столько же точек возврата, сколько вершин у многоугольника, и напоминает правильную звезду. Правильный «четноугольник» центрально-симметричен, и огибающая нашего семейства сжимается в точку (центр). Если же вы возьмете «четноугольник», близкий к правильному, *то для него огибающая* имеет точек возврата меньше, чем число вершин (помните — число точек возврата нечетно!). Случай четырехугольника исследован в статье «Семейство прямых, делящих площадь пополам» — огибающая будет криволинейным треугольником; в случае *же большего числа вершин многоугольника* эта огибающая ведет себя довольно замысловатым образом.

О ДИНАМИКЕ МЯЧА ДЛЯ ИГРЫ В ГОЛЬФ

(Сообщение, сделанное членом Королевского Общества сэром Дж. Дж. Томсоном в Королевском Институте в пятницу 18 марта 1910 г.)

С игрой в гольф связано так много проблем динамики, что обсуждение их всех заняло бы гораздо больше времени, чем имеется сегодня в *моем* распоряжении. Поэтому я даже не сделаю попытки затронуть множество важных вопросов, возникающих при рассмотрении взаимодействия клюшки с мячом, а ограничусь лишь обсуждением полета мяча после того, как он оторвался от клюшки. Как бы то ни было, эта проблема *очень интересна*; *она* была бы еще интереснее, если бы мы могли принять те объяснения поведения мяча, которые давались многочисленными авторами в обширнейшей литературе, посвященной игре в гольф. Если бы эти объяснения были верны, то мне пришлось бы представить вам сегодня *новую* динамику и объявить, что материя, когда она принимает форму мяча для гольфа, *подчиняется законам*, совершенно отличным от тех, которые определяют ее движение при любых других условиях.

Если бы мы могли послать мяч клюшкой без вращения, как из катапульты, то его поведение было бы педантично-правильным, но неинтересным: при отсутствии ветра его траектория лежала бы в вертикальной плоскости, не отклоняясь ни вправо, ни влево, и он упал бы на землю после относительно короткого полета.

К счастью, мяч для гольфа, отрываясь от клюшки, лишь в редких случаях не имеет вращения, и именно вращение придает интерес, разнообразие и живость полету мяча. Именно вращением объясняется отклонение мяча вправо или влево, именно вращение заставляет мяч взмывать над полем, или нырять, или делать неистовые зигзаги, порождая легенду о его артистическом темпераменте; он совершает эти чудачества, как акробат, забавы ради крутящий одно-два сальто. В действительности, однако, мяч является самым прозаическим предметом, знающим в воздухе только одно правило поведения, которому он подчиняется с глупой добросовестностью: он всегда следует за своим «носом» (передней частью). Это правило — ключ к пониманию поведения всех мячей, находящихся в воздухе, безразлично, являются ли они мячами для гольфа, бейсбола, крикета или тенниса. Теперь же, до того, как перейти к рассмотрению сути этого правила, проследим некоторые из его следствий...

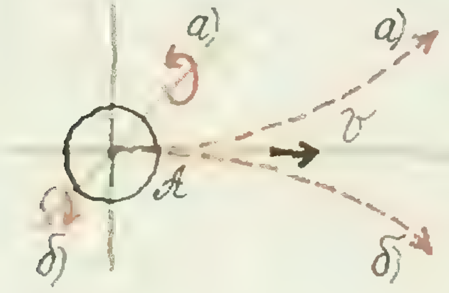


Рис. 1.

Представим, что мяч вращается вокруг горизонтальной оси, и предположим, что его скорость направлена горизонтально, как на рисунке 1, *а*. Тогда «нос» мяча *A* движется вверх, и так как по нашему правилу мяч пытается следовать за своим «носом», он будет подниматься, траектория полета будет изогнута, как показано пунктиром. Если бы мяч вращался в противоположном направлении (рис. 1, *б*), его «нос» *A* двигался бы вниз, и мяч, следуя за точкой *A*, «нырнул» бы вниз.

Предположим теперь, что мяч вращается вокруг вертикальной оси, как показано на рисунке 2, *б*. Тогда, если мы посмотрим вдоль направления его полета, то увидим, что «нос» *A* движется вправо, и, следовательно, согласно нашему правилу, мяч тоже

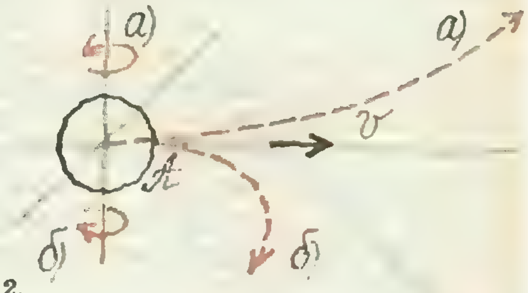


Рис. 2.

будет двигаться вправо по траектории, показанной пунктиром; фактически мяч будет себя вести как при закрученном вправо ударе. В действительности мяч, закрученный вправо, именно так вращается вокруг вертикальной оси. Если же мяч вращается вокруг вертикальной оси в противоположном направлении (рис. 2, *а*), то он полетит влево. Это будет «левая закрутка».

В случае, когда ось вращения совпадает с направлением полета и проходит через «нос» мяча, он, следуя нашему правилу, будет двигаться без отклонения...

Яркие примеры влияния вращения на полет мяча дает игра в бейсбол; опытный подающий может, придавая нужное вращение, заставить траекторию мяча изогнуться вправо или влево, вверх или вниз. Для того чтобы мяч отклонился в стороны, вращение должно быть вокруг вертикальной оси, для отклонения же вверх или вниз — вокруг горизонтальной.

Игрок в теннис использует этот эффект, когда закручивает мяч сверху, т. е. ударяет по верхней части мяча так, чтобы заставить его вращаться вокруг горизонтальной оси. «Нос» мяча движется вниз, как на рисунке 1, *б*, и мяч гораздо быстрее падает на площадку, не вылетая за ее пределы.

Перед тем как перейти к обсуждению эффектов, возникающих вследствие подобного вращения, я покажу несколько опытов. Так как силы, действующие на мяч, зависят от движения мяча и воздуха друг относительно друга, они не изменятся, если мы будем рассматривать неподвижный мяч в движущемся потоке воздуха. Так, предположим, что мяч стремительно летит через неподвижный воздух со скоростью v; силы при этом будут такими же, как и в случае, когда центр мяча находится в состоянии покоя, а ветер обдувает мяч со скоростью — v... В лекционных экспериментах пускать мяч по комнате неудобно, гораздо удобнее иметь неподвижный мяч и приводить в движение воздух.

Для начала я попытаюсь воспроизвести опыт, поставленный Магнусом *) в 1852 году. Его цель — показать, что на вращающееся тело, движущееся относительно неподвижного воздуха, действует сила в направлении движения «носа» мяча относительно его центра; следовательно, сила направлена под прямым углом как к направлению, в котором движется центр тела, так и к оси вращения. С этой целью цилиндр *A* (рис. 3) укреплен на опорах так, что он может быстро вращаться вокруг вертикальной оси; цилиндр прикреплен к одному концу стержня, на другом конце которого находится груз *B*, выбранный так, что, когда стержень подвешивают на проволоке, он принимает горизонтальное положение. Стержень чутко реагирует на любую горизонтально направленную силу, так что, когда на цилиндр будет действовать такая сила, она будет легко обнаружена по движению стержня.

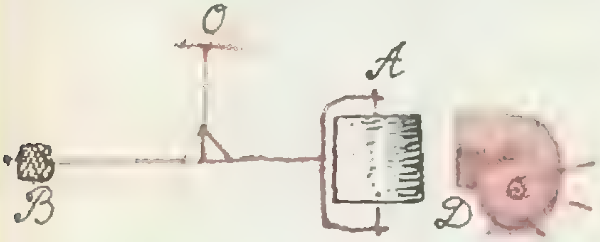


Рис. 3.

Перед цилиндром расположена труба *D*, по которой вентилятор гонит поток воздуха. Я устанавливаю стержень и ось цилиндра так, чтобы поток воздуха попадал на цилиндр симметрично. В этом случае, если цилиндр не вращается, действие на него потока воздуха не вызывает никакого движения стержня. Теперь я привожу цилиндр во вращение; вы видите, что при попадании на него потока воздуха стержень отклоняется. Он отклоняется в одну сторону при одном направлении вращения и в противоположную — при обратном. Как видите, стержень отклоняется в том же направлении, в каком вращается цилиндр (рис. 4), т. е. как если бы на цилиндр действовала сила в направлении движения его «носа». Если я прекращу подачу воздуха, то стержень не будет двигаться, хотя я вращаю цилиндр. Он также не движется, если подавать воздух на невращающийся цилиндр. Таким образом, для появления силы, действующей на цилиндр, требуется как его вращение, так и поступательное движение (или, что то же, обдувание его потоком воздуха)...

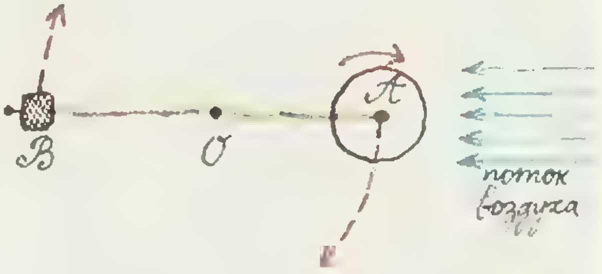


Рис. 4.

Рассмотрим теперь, как появляется эта сила. Она возникает потому, что при движении вращающегося тела давление воздуха с одной стороны тела не равно давлению с другой стороны, и, следовательно, на тело действует сила с той стороны, где давление больше.

---

*) Генрих Густав Магнус (1802—1870) — немецкий физик и химик. Занимался исследованиями в области механики, гидродинамики, оптики... Открыл явление возникновения поперечной силы, действующей на тело, вращающееся в набегающем на него потоке жидкости или газа (эффект Магнуса). (*Примеч. ред.*)

Так, когда мяч движется в воздухе так, как показано на рисунке 1, *а*, давление снизу, где линейная скорость вращения совпадает по направлению со скоростью поступательного движения, больше давления сверху, где скорость вращения противоположна по направлению скорости поступательного движения мяча в воздухе.

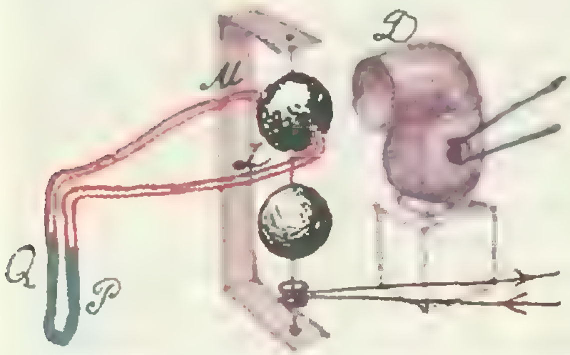


Рис. 5.

В приборе, показанном на рисунке 5, два мяча для гольфа — гладкий и с рифленой поверхностью — закреплены на оси и могут быть приведены в быстрое вращение электромотором. Поток воздуха, подаваемый от вентилятора по трубе *D*, может быть направлен на один из мячей; ось, несущую мячи, можно поднять или опустить, соответственно помещая в поток воздуха то гладкий, то рифленый мяч. Давление при этом измеряется с помощью манометра *PQ*, к которому присоединены специальные трубки *L* и *M*, прилегающие к противоположным сторонам мяча для гольфа; если давление воздуха со стороны *M* больше, чем со стороны *L*, уровень жидкости в трубке *Q* манометра понизится; если, наоборот, давление воздуха со стороны *L* больше, чем со стороны *M*, понизится уровень жидкости в трубке *P* манометра.

Сначала я покажу, что, когда поток воздуха направлен на мячи, но они не вращаются, давления с разных сторон одинаковы; вы видите, что жидкость в приборе не движется. Затем я выключаю вентилятор и привожу мячи во вращение. Результат тот же — в приборе вновь нет движения жидкости. Но когда мячи вращаются в направлении, показанном на рисунке 5, и я подаю на них поток воздуха, уровень жидкости в трубке *Q* опускается и поднимается уровень в трубке *P*. Давление в этом случае выше со стороны *M*, где скорость точек на поверхности вращающегося мяча противоположна скорости воздуха, чем со стороны *L*, где вращение стремится вынести мяч из потока воздуха. (Если изменить направление вращения мяча на обратное, то вы увидите, что разница давлений тоже изменилась.)

Случай, когда мяч неподвижен, а воздух движется справа налево, с точки зрения динамики ничем не отличается от случая, когда мяч летит в неподвижном воздухе слева направо. Итак, мы видим, что давление больше с той стороны, где вращение делает скорость движения поверхности относительно воздуха больше, чем она была бы без вращения...

Чтобы показать разницу между гладким и рифленым мячами, поместим гладкий мяч в поток воздуха и отметим разницу уровней жидкости в левом и правом коленах прибора. Если теперь заменить гладкий мяч на рифленый, то разница уровней увеличится более чем в два раза; это говорит о том, что при той же скорости вращения и скорости потока воздуха разница давлений по разные стороны рифленого мяча более чем в два раза выше, чем у гладкого.

Вернемся все же к обсуждению причин, по которым давление с противоположных сторон вращающегося мяча различно. Объяснение этому было дано Ньютоном почти 250 лет назад. В письме Ольденбургу о дисперсии света в 1671 году он пишет: «Я часто видел, как теннисный мяч при ударе наклонной ракеткой описывает кривую. Когда такой удар вызывает и поступательное, и вращательное движение, части мяча с той стороны, где движения совпадают, должны давить на прилегающий воздух сильнее и возбуждать пропорционально большее сопротивление и противодействие воздуха».

Это письмо имеет не только научную ценность — оно показывает, что Ньютон, интересуясь *спортивными играми*, создал прекрасный прецедент для последующих поколений физиков и математиков.

Такое же объяснение было дано Магнусом, а *математическая теория* эффекта представлена лордом Рэлеем в статье «О неправильном полете теннисного мяча», опубликованной в «Messenger of Mathematics» (1877 год, том VI, с. 14). *Лорд Рэлей показывает*, что сила, действующая на мяч и являющаяся результатом разницы давлений, направлена под прямым углом к направлению движения мяча и к оси его *собственного вращения*, а величина этой силы пропорциональна скорости мяча, умноженной на угловую скорость вращения и на синус угла между направлением движения мяча *и осью вращения*...

Поскольку я боюсь, что не все мои слушатели — хорошие математики, попытаюсь дать общее представление о том, как устанавливается эта разница давлений, *не используя формул.*

Рассмотрим мяч для гольфа, вращающийся в движущемся потоке воздуха (рис. 6). Движение воздуха с нижней стороны мяча будет задерживаться его вращением, и, следовательно, оно будет вблизи мяча медленнее, чем если бы мяча не было или если бы мяч не вращался. Иными словами, в потоке воздуха, движущемся по каналу *PQ*, скорость около мяча в точке *Q* должна быть меньше, чем в точке *P*; следовательно, должно возникнуть давление, действующее против движения воздуха, т. е. давление воздуха в точке *Q* должно быть больше, чем в точке, находящейся, подобно *P*, на некотором расстоянии от мяча. Посмотрим теперь, что происходит с другой стороны мяча. Здесь вращение стремится переместить мяч в направлении движения потока воздуха; если скорость поверхности мяча здесь больше скорости потока, то мяч увлекает за собой воздух, увеличивая скорость потока; в противном случае мяч, хотя и уменьшит скорость потока воздуха, но не до такой степени, как с противоположной стороны, и увеличение давления воздуха на верхнюю часть мяча (по сравнению с давлением воздуха в точке *P*) будет меньше, чем увеличение давления на нижнюю его часть. Таким образом, возле нижней части мяча давление воздуха будет больше, чем возле верхней, и на мяч будет действовать сила, заставляющая его подниматься вверх.

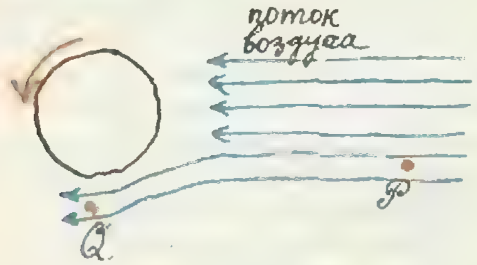


Рис. 6.

Здесь мы предполагали, что мяч для гольфа покоится, а воздух стремительно движется вдоль него справа налево; силы при этом будут те же самые, как если бы воздух покоился, а мяч для гольфа летел бы слева направо. Летящий мяч, вращающийся в направлении, показанном на рисунке 6, будет подниматься вверх, следуя за своим «носом»...

Разница давлений с двух сторон мяча для гольфа пропорциональна скорости мяча, помноженной на угловую скорость его вращения. Так как вращение, приданное мячу клюшкой при ударе вертикально вверх («свечкой»), пропорционально скорости, с которой мяч отрывается от клюшки, разность давлений в момент отрыва пропорциональна квадрату его начальной скорости. Чтобы создать подъемную силу, бо́льшую, чем сила тяжести, разность средних давлений с противоположных сторон мяча должна быть только около 0,2 % от атмо-

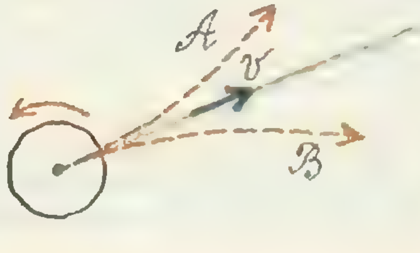


Рис. 7.

сферного давления. Мяч же при хорошем ударе отрывается от клюшки со скоростью, достаточной для создания гораздо большей разности давлений. Как следствие, когда мяч вылетает из лунки, вращаясь в направлении, показанном на рисунке 7 (это часто называют закручиванием снизу), сила, вызванная вращением и направленная вверх, больше силы тяжести, равнодействующая сила направлена вверх — и мяч взмывает над полем, вместо того, чтобы притягиваться к земле. Траектория мяча выгибается вверх, по кривой *А*, а не вниз, по кривой *В*, как если бы мяч не вращался. Фактически вращающийся мяч для гольфа является очень эффективным летательным аппаратом тяжелее воздуха; подъемная сила может превосходить вес мяча во много раз.

При изменении скорости вращения траектория мяча может принимать множество очень интересных форм. Мы можем проследить за всеми этими изменениями на установке, которую можно назвать «электрический игровой трек». Посредством этого устройства (см. рис. 8) я могу подвергнуть небольшие частицы действию сил точно того же типа, что и силы, действующие на вращающийся мяч для гольфа. Частицы вылетают из катода — раскаленного докрасна куска платины с нанесенным на него пятном оксида бария *А* — это можно назвать лункой; платина соединена с электрической батареей, которая заставляет отрицательно заряженные частицы вылетать из катода и лететь по стеклянной трубке, из которой удален почти весь воздух. Эти частицы светятся, и их траекторию очень легко видеть невооруженным глазом. Итак, наши мячи вылетают из лунки-катода, и мы должны теперь ввести вертикальную силу, действующую на частицы-мячи подобно силе тяжести. Это легко сделать при помощи горизонтальных пластин *В* и *С*, которые заряжены от электрической батареи; верхняя пластина при этом заряжена отрицательно, и, следовательно, когда отрицательно заряженная частица пролетает между пластинами, на нее действует сила, направленная, подобно силе тяжести, вниз. Вы видите, что, когда частицы пролетают между пластинами, их траектория имеет форму, показанную на рисунке 9, *а*; это — траектория мяча, летящего без вращения. Я могу имитировать эффект вращения, подвергнув частицы-мячи действию магнитных сил. Когда заряженные частицы находятся в магнитном поле, на них действует сила, направленная под прямым углом к направлению движения частиц и к направлению магнитного поля и пропорциональная произведению скорости частиц на величину магнитного поля и на синус угла между скоростью и полем. А сила, действующая на обыкновенный мяч для гольфа, направлена под прямым углом к направлению его полета и к оси вращения и пропорциональна произведению скорости мяча на угловую скорость мяча и на синус угла

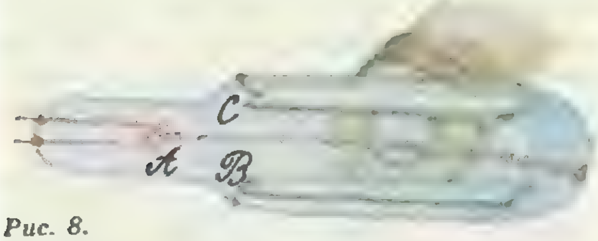


Рис. 8.

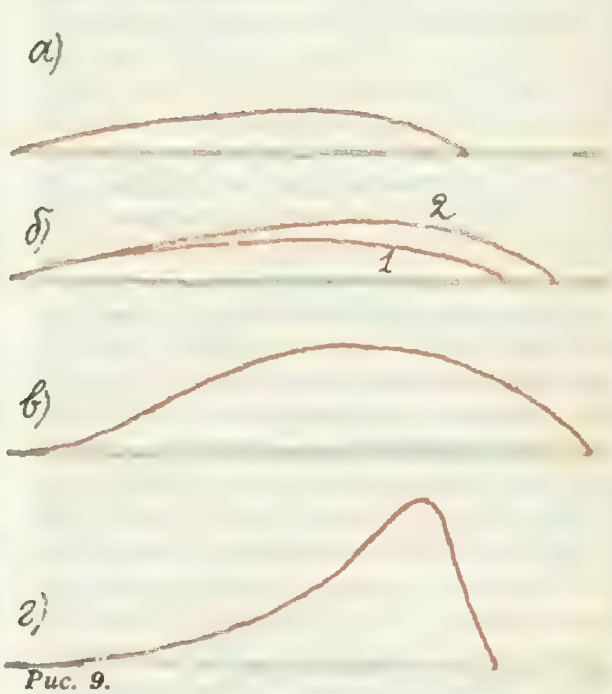


Рис. 9.

между осью вращения и вектором скорости. Сравнивая две эти зависимости, вы видите, что сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле, подобна силе, действующей на мяч для гольфа. Если считать, что направление магнитного поля соответствует направлению оси вращения, а его величина пропорциональна угловой скорости, то, наблюдая за поведением заряженных частиц в магнитном поле, мы получим представление о поведении вращающегося мяча для гольфа.

Давайте вначале рассмотрим воздействие «нижней закрутки» на полет мяча; в этом случае мяч вращается, как на рисунке 1, *а*, вокруг горизонтальной оси, расположенной под прямым углом к направлению полета. Для имитации этого вращения приложим горизонтальное магнитное поле под прямым углом к направлению полета частиц. Сделать это я могу с помощью электромагнита. Начнем с небольшой величины поля, моделирующей слабое вращение. Вы видите, как отличается траектория в этом случае (кривая *1* на рисунке 9, *б*) от траектории без магнитного поля; в начале полета траектория более плоская, хотя и остается несколько выпуклой, и длина пролета больше, чем раньше.

Теперь я увеличу магнитное поле, и вы видите, что длина пролета еще более увеличивается (рис. 9, *б*, кривая *2*). Если я еще более «закручу» наши частицы-мячи, увеличив магнитное поле, то начало траектории становится вогнутым, а не выпуклым, а длина пролета еще более возрастает (рис. 9, *в*). Увеличим поле еще больше, и мы видим, что частица взмывает на большую высоту, а потом резко падает (рис. 9, *г*); длина пролета при этом меньше, чем в предыдущем случае. Это — тоже знакомый тип траектории мяча для гольфа. Но увеличивая еще больше магнитное поле, мы получаем тип полета, который, насколько мне известно, еще не наблюдался на игровых площадках для гольфа и который можно было бы получить, если бы мячу придали большее вращение, чем способны игроки в настоящее время. Вы видите, что на кривой на рисунке 10, *а* есть загиб, т. е. в части траектории частица фактически движется назад. Увеличивая дальше поле, я получаю больше подобных завитушек на траектории (рис. 10, *б*). Мы смоделировали тип удара, который приходится предоставить осуществить будущим поколениям игроков в гольф...

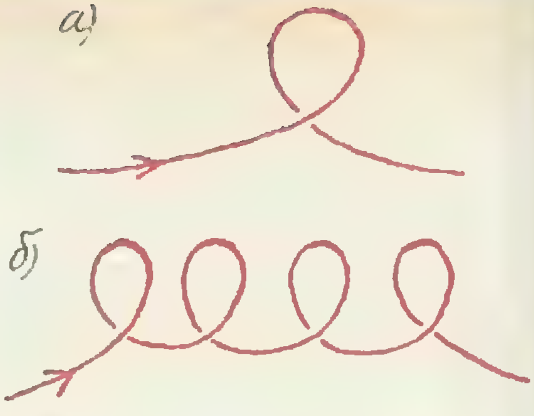


Рис. 10.

До сих пор нами рассматривалась лишь закрутка мяча сверху или снизу. Давайте теперь проиллюстрируем боковую закрутку; в этих случаях мяч вращается вокруг вертикальной оси. Следовательно, я должен расположить электромагнит так, чтобы он давал вертикально направленное магнитное поле (рис. 11). Я направлю поле вниз, и вы видите, что частицы отклоняются вправо — ведут себя, как мяч, закрученный справа налево (как на рисунке 2, *б*). Меняя направление поля на противоположное, мы увидим, что, подобно мячу с левой закруткой, частицы отклоняются влево.

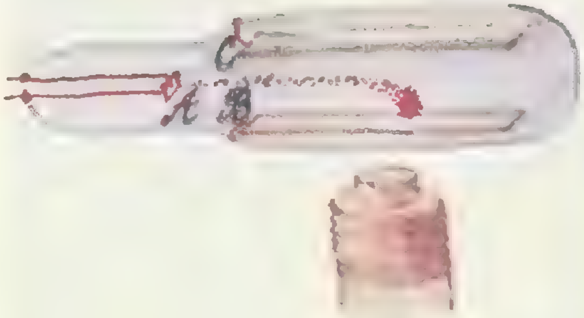


Рис. 11.

Увеличивая магнитное поле, мы можем получить значительно более сильную закрутку мяча, чем самые сильные из тех, что мы творим на игровых полях.

Хотя петли, изображенные на рисунке 10, *а*, насколько мне известно, не наблюдались, их можно получить, используя очень легкие мячи. Здесь у меня есть мяч, сделанный из очень тонкой резины, типа той, которая используется для детских воздушных шаров, и заполненный воздухом. Весит такой мяч чуть больше того воздуха, который он вытесняет. Если ударить по нему рукой так, чтобы подкрутить его вверх, вы увидите, что он опишет петлю, как на рисунке 12.

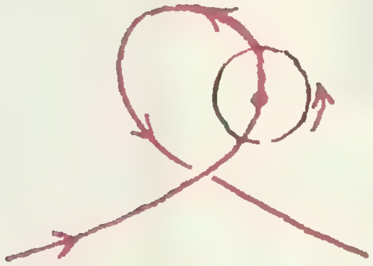


Рис. 12.

Если ударить по мячу так, чтобы придать ему вращение вокруг вертикальной оси, вы увидите, что он движется со страшно увеличенной закруткой вправо, если «нос» мяча движется вправо, и со столь же увеличенной левой закруткой, если «нос» мяча движется влево.

Хорошо известным свойством ударов с боковой закруткой является то, что вызванный таким вращением изгиб траектории становится значительно более выраженным при уменьшении скорости мяча по сравнению с начальной. Это можно легко понять, если рассмотреть, как сказывается на движении в сторону уменьшение скорости в два раза. Предположим, что закрученный мяч вылетает из точки A в направлении на точку B. Закрутка вызовет смещение мяча, и он попадет не в точку B, а в точку C (рис. 13). Как мы уже знаем, действующая в направлении BC сила пропорциональна произведению скорости мяча на угловую скорость вращения. Пусть при разных начальных скоростях угловая скорость вращения одна и та же. Тогда, уменьшая в два раза скорость, мы уменьшаем в два раза действующую в сторону силу; следовательно, за то же время, что и раньше, мяч пролетит в два раза меньшее расстояние, и время, необходимое мячу для прохождения пути от A до B, удваивается. Перемещение, происходящее под действием постоянной силы, пропорционально квадрату времени; следовательно, если бы сила оставалась неизменной, отклонение в сторону (BC) возросло бы в четыре раза, но так как уменьшение скорости наполовину в два раза уменьшает силу, то смещение в сторону возрастает лишь вдвое.

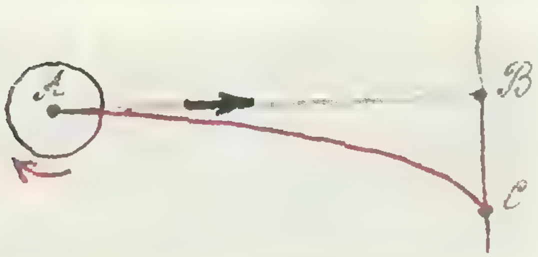


Рис. 13.

Если бы угловая скорость уменьшалась столь же быстро, как и скорость перемещения, изгиб траектории при уменьшении скорости не увеличился бы. Но так как сопротивление воздуха оказывает на скорость мяча большее воздействие, чем на его вращение, быстрее уменьшается именно линейная скорость.

Влияние ветра на движение вращающегося мяча можно легко понять из общих принципов, которые мы обсудили в предыдущей части лекции. Рассмотрим сначала случай со встречным ветром, при котором увеличивается скорость мяча относительно воздуха. Так как сила, вызванная вращением, пропорциональна скорости, встречный ветер увеличивает эту силу, и эффекты вращения более выражены при встречном ветре, чем в спокойный день. Несомненно, игроки в гольф имели возможность это заметить...

Рассмотрим теперь влияние поперечного ветра. Для определенности

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Врожденная
сила материи...
всегда
пропорциональна
массе и если
отличается
от инерции массы,
то разве только
воззрением
на нее.

И. Ньютон

А так ли хорошо знакома вам

масса ?

В приведенном определении Ньютона, введшего в механику понятие массы, речь идет, по существу, о свойстве инертности. И самый общий способ измерения массы тел — по их инертности. Однако в физических экспериментах и на практике массу чаще измеряют с помощью весов.

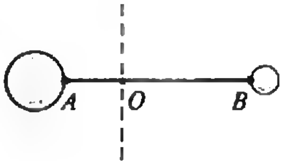
Инертность и весомость в классической физике — разные понятия, тем не менее со времен Галилея и Ньютона установлено, что отвечает за них одна и та же характеристика — масса. Этот замечательный факт — равенство инертной и гравитационной масс — позднее лег в основу общей теории относительности — современной теории структуры «пространства — времени».

В этом выпуске «Калейдоскопа» мы постараемся, пусть на простых примерах, выяснить, как проявляет себя «двуликая» масса.

Вопросы и задачи

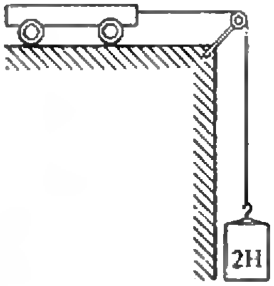
1. Из одного куска пластилина вылепили фигурку и ее копию, только в два раза большей высоты. Какова масса копии, если масса оригинала 50 грамм?

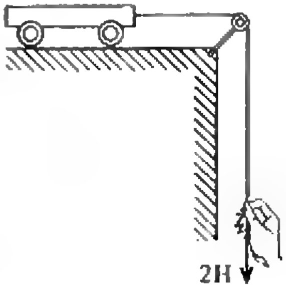
2. Два шарика массами 9 грамм и 3 грамма соединены нитью и вращаются в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. При каком соотношении длин нитей *AO* и *OB* их натяжение будет одинаковым?



3. На доске стоит человек. Увеличится или уменьшится прогиб доски в первый момент, если человек внезапно присядет? выпрямится?

4. Почему первая из изображенных на рисунке тележек набирает скорость медленнее, чем вторая, хотя массы тележек одинаковы?





5. Открытый сосуд частично заполнен водой, не смачивающей его стенки. Можно ли в условиях невесомости перелить воду из этого сосуда в другой такой же сосуд?

6. Как сравнить массы двух тел в условиях невесомости?

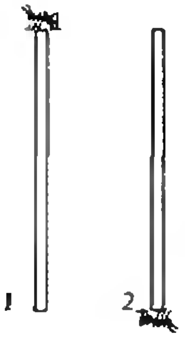
7. Каким молотком — легким или тяжелым — лучше пользоваться при ковке металла?

8. Почему нагруженный автомобиль движется по булыжной мостовой более плавно, чем незагруженный?

9. Почему не сто́ит при прополке сорняков выдергивать их из земли рывком?

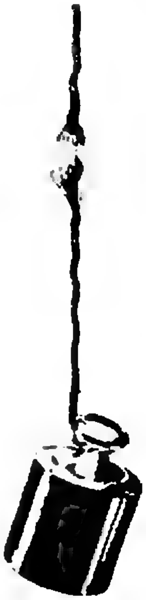
10. *Почему Земля* сообщает всем телам одно и то же ускорение независимо от их масс?

11. Две одинаковые соломинки с одинаковыми муравьями падают с одной высоты, все время оставаясь вертикальными. За



время падения оба муравья успевают переползти с одного конца соломинки на другой. Какая соломинка упадет быстрее?

12. Могут ли работать центробежные механизмы — сепараторы, насосы — на Искусственном спутнике Земли?



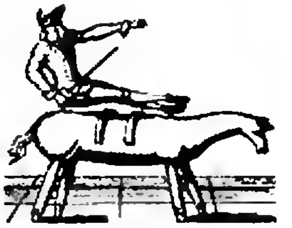
Микроопыт

На лист бумаги поставьте у края стола стакан с водой. Резко выдерните лист в горизонтальном направлении. Что произойдет? Почему?

Любопытно, что...

...физическая природа массы до сих пор не выяснена и количественной теории массы еще не создано.

...долгое время считалось, что нейтрино — безмассовая частица. Однако тончайшие эксперименты последних лет дают основания полагать, что масса нейтрино отлична от нуля.



...полковник Краус фон Циллергут, у которого бравый солдат Швейк украл пинчера, имел весьма смутное представление об инерции. «Когда весь бензин вышел,— говорил полковник,— автомобиль принужден был остановиться... И после этого еще болтают об инерции, господа!.. Ну, не смешно ли?»

...в опытах советских физиков эквивалентность инертной и гравитационной масс доказана с точностью до 10^{-12}, что в миллиард раз превышает точность проведенного еще Ньютоном опыта.

...современные масс-спектрометры измеряют массы атомных ядер с погрешностью порядка одной десятимиллионной атомной единицы.

...для накопления, хранения и последующего выделения энергии все чаще используются так называемые инерционные аккумуляторы, или, попросту, маховики.

Что читать о массе в «Кванте» (публикации последних лет)

1. «Как вводятся физические величины» — 1984, № 10, с. 7;
2. «Инерция и инертность» — 1985, № 11, с. 20;
3. «Закон всемирного тяготения» — 1987, № 11, с. 36;
4. «Что такое центр масс» — 1988, № 3, с. 39;
5. «Гармонические колебания» — 1988, № 11—12, с. 64;
6. «Размышления о массе» — 1990, № 2, с. 27.

О динамике мяча для игры в гольф

(Начало см. на с. 32)

предположим, что ветер дует слева направо. Тогда, если мяч закручен влево, давление на переднюю сторону мяча будет больше, чем на заднюю, и, таким образом, мяч будет тормозиться. Однако, если бы вращение было как при правой закрутке, давление на заднюю половину мяча было бы больше, чем на переднюю, и разность давлений подталкивала бы мяч и заставляла его пролететь дальше, чем в первом случае. Мораль заключается в следующем: если ветер дует слева, то, чтобы послать мяч дальше, мы должны использовать правую закрутку; если же ветер дует справа, мы должны закрутить мяч слева.

Времени, которое у меня осталось, хватит лишь на несколько слов о том, как мяч получает вращение от клюшки. Если вы усвоили, что взаимодействие биты и мяча зависит только от их относительного движения и что оно остается тем же независимо от того, закреплен ли мяч, а движется клюшка, или клюшка неподвижна, а мяч летит на нее, основные моменты очень легко понять.

Представим, что наклоненная плоскость на рисунке 14 — это часть головки поднятой для удара клюшки, двигающейся горизонтально справа налево. Удар будет таким же, как если бы клюшка покоилась, а мяч летел на нее горизонтально слева направо. Очевидно, что в этом случае мяч будет вкатываться вверх по поверхности, получая при этом вращение вокруг горизонтальной оси в направлении, показанном на рисунке; это — верхняя закрутка, увеличивающая дальность полета мяча.

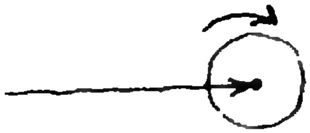


Рис. 14.

Предположим теперь, что поверхность клюшки движется при ударе вдоль направления PQ (рис. 15). Удар будет таким же, как если бы клюшка покоилась, а мяч летел вдоль RS: мяч приобретает вращение вокруг вертикальной оси в направлении, показанном на рисунке. Это — правая закрутка...

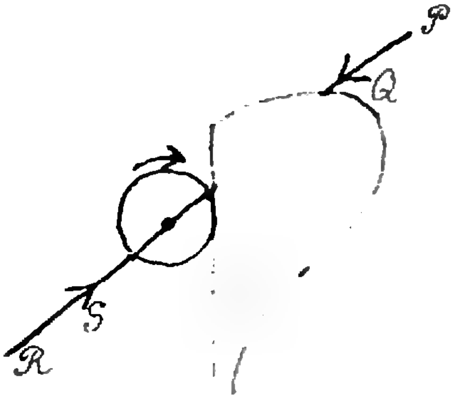


Рис. 15.

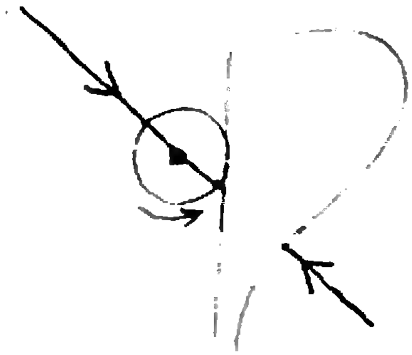


Рис. 16.

Если бы движение и положение клюшки были такими, как на рисунке 16, мяч был бы закручен влево.

Перевод с английского О. Симоновой

Задачник „Кванта"

Задачи

M1236—M1240, Ф1243—Ф1247

M1236. Найти множество точек O внутри данного квадрата на плоскости, для которых существует окружность с центром O, пересекающая стороны квадрата в 8 точках.

А. Толпыго

M1237. Пусть точка O внутри треугольника ABC такова, что $\vec{OK}+\vec{OM}+\vec{ON}=\vec{0}$, где K, M, N — основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны AB, BC, CA треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{OK+OM+ON}{AB+BC+CA}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

А. Магадеев

M1238. Множество натуральных чисел разбито на две части. В одной из них нет трехчленных арифметических прогрессий. Обязательно ли в другой есть бесконечная арифметическая прогрессия?

А. Скопенков

M1239. Даны две пересекающиеся окружности и точка P (рис. 1). Проведите через точку пересечения окружностей их общую секущую AB так, чтобы угол APB имел заданную величину.

В. Дубровский

M1240*. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 выделен квадрат $ABCD$ $n\times n$ клеток. Из вершины A в C по линиям сетки проводится случайная ломаная длины $2n$. В n клетках квадрата, случайно расположенных в разных строках и разных столбцах, расставляются n звездочек. С какой вероятностью все звездочки окажутся по одну сторону от ломаной? (Другими словами, какую долю среди всевозможных расположений ломаных и звездочек составляют такие, что звездочки лежат по одну сторону от ломаной?)

Д. Фомин

Ф1243. Таракан и два жука могут ползать по большому горизонтальному столу. Каждый из жуков может развивать скорость до 1 см/с. В первый момент насекомые находятся в вершинах равностороннего треугольника. Какую скорость должен уметь развивать таракан, чтобы при любых перемещениях жуков треугольник оставался равносторонним?

А. Коршков

Ф1244. Бытовой холодильник поддерживает в камере постоянную температуру —12 °С. При температуре в комнате +25 °С его мотор включается каждые 8 минут и, проработав 5 минут, выключается. Считая холодильник идеальной тепловой машиной, работающей по обращенному циклу, предскажите — как часто и на какое время он станет включаться, если в комнате температура понизится до +15 °С. При какой максимальной

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 октября 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1236» или «Ф1243». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи Ф1244, Ф1245 и Ф1247 предлагались на заключительном этапе XXIV Всесоюзной олимпиады по физике (Вологда, 1990).

температуре в комнате он сможет поддерживать в камере заданную температуру?

Р. Александров

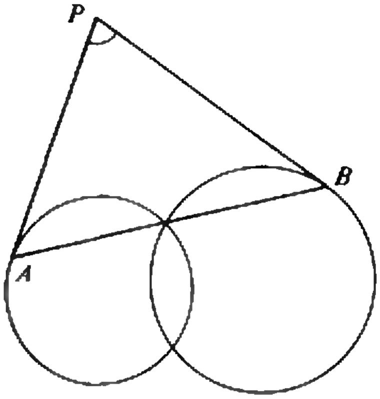


Рис. 1.

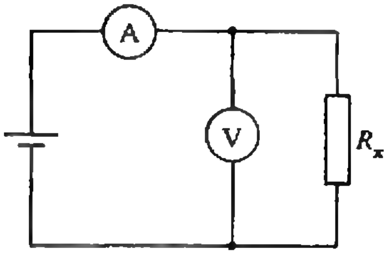


Рис. 2.

Ф1245. В схеме на рисунке 2 амперметр показывает ток 10 мА, вольтметр — напряжение 2 В. После того как резистор отключили от вольтметра и подключили параллельно амперметру, показания амперметра уменьшились до 2,5 мА. Определите по этим данным сопротивление резистора. Чему равно сопротивление вольтметра? Можно ли определить по этим данным сопротивление амперметра и напряжение батареи? Батарею считать идеальной.

А. Зильберман

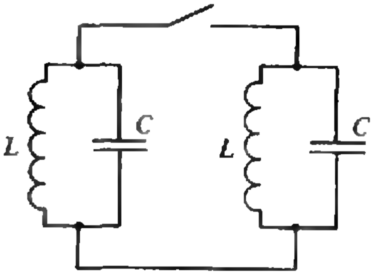


Рис. 3.

Ф1246. Два одинаковых LC-контура находятся далеко друг от друга. В первом возбуждены колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе U_0. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе оказалось нулевым, подключают проводами второй контур (рис. 3). Опишите процессы в цепи после подключения. Что изменится, если подключение произвести в тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально?

А. Алексеев

Ф1247. На противоположных стенах комнаты висят друг против друга два одинаковых круглых зеркала диаметром 1 м. Наблюдатель находится на оси симметрии оптической системы и смотрит на одно из зеркал. Сколько «вложенных» отражений он сможет насчитать, если угловое разрешение его глаза 1 минута? Зеркала находятся на расстоянии 5 м друг от друга. Размерами головы наблюдателя пренебречь.

К. Зуев

Решения задач

М1211—М1215, Ф1223—Ф1227

***М1211.** Можно ли расположить в пространстве тетраэдр, шар и плоскость таким образом, чтобы площади сечений тетраэдра и шара любой плоскостью, параллельной выбранной, были равны?*

Будем считать выбранную плоскость горизонтальной. Проведем две горизонтальные плоскости, касающиеся шара, и построим тетраэдр, у которого два противоположных ребра лежат в этих плоскостях, взаимно перпендикулярны и равны a (рис. 1); соотношение между a и радиусом R шара выберем ниже.

Сечение шара горизонтальной плоскостью, находящейся на расстоянии $R-h$ от центра шара, т. е. на расстоянии h от одной из касательных плоскостей и $2R-h$ от другой,— круг площади $\pi(R^2-(R-h)^2)=\pi h(2R-h)$ (рис. 2).

Сечение тетраэдра той же плоскостью — прямоугольник со сторонами $ah/2R$ и $a(2R-h)/2R$ (ясно, что длина каждой из сторон прямоугольника выражается

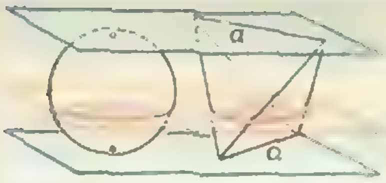


Рис. 1.

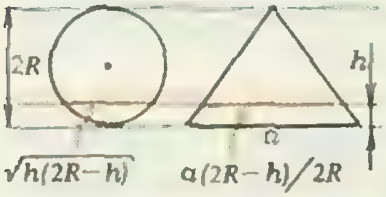


Рис. 2.

линейной функцией от h, которая в концах отрезка $0 \leqslant h \leqslant 2R$ принимает значения 0 и a). Площадь этого сечения равна $a^2h(2R-h)/4R^2$. Итак, достаточно взять $a=2\sqrt{\pi}R$, чтобы площади соответствующих сечений были равны.

Н. Васильев

M1212. *Множество всех целых чисел разбито на попарно непересекающиеся бесконечные арифметические прогрессии с положительными разностями d_1, d_2, d_3, ... Может ли случиться, что*

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}+\ldots<0{,}9? \quad (*)$$

Рассмотрите два случая:
а) число прогрессий конечно;
б) число прогрессий бесконечно (при этом условие (*) означает, что сумма любого конечного числа слагаемых в левой части (*) меньше 0,9).

а) Ответ: не может.

Пусть число прогрессий конечно и равно k. Докажем, что сумма $1/d_1+1/d_2+\ldots+1/d_k$ равна 1. Пусть M — некоторое (например, наименьшее) общее кратное чисел $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Рассмотрим любой отрезок из M последовательных целых чисел; в нем будет M/d_i членов i-й прогрессии с разностью d_i ($i=1, 2, \ldots, k$). Поэтому $M/d_1+M/d_2+\ldots+M/d_k=M$.

б) Ответ: может.

Приведем пример бесконечного числа прогрессий, для которых сумма $1/d_1+1/d_2+1/d_3+\ldots$ меньше 0,9. Возьмем в качестве $d_1, d_2, d_3, \ldots$ числа $4, 8, 16, \ldots, d_k=2^{k+1}, \ldots$; тогда $1/4+1/8+1/16+\ldots \leqslant 1/2$. Будем строить прогрессии последовательно, по индукции. Первая прогрессия — числа, кратные 4. *Для каждого $k>1$, считая*, что первые $k-1$ уже построены, мы выберем в качестве одного из членов k-й прогрессии с разностью $d_k=2^{k+1}$ *наименьшее по модулю* целое число, *не входящее в уже* построенные. Поскольку d_k делится на каждое d_i ($i<k$), *k-я прогрессия* не пересекается с предыдущими. С другой стороны, прогрессии содержат все без исключения целые числа: не более чем за $2k$ шагов мы включим в *прогрессии каждое* целое число, не превосходящее по модулю $k-1$.

Аналогично для любого $\varepsilon>0$ можно построить пример, в котором $1/d_1+1/d_2+1/d_3+\ldots<\varepsilon$.

А. Толпыго, Н. Констатинов

M1213. *а) Докажите, что если выпуклый шестиугольник можно разрезать на параллелограммы, то он имеет центр симметрии.*
б) Докажите, что если выпуклый шестиугольник, в котором каждая диагональ, соединяющая противоположные вершины, параллельна двум сторонам, можно разрезать на N па-

а) Рассмотрим *все параллелограммы* разбиения, у которых одна из сторон параллельна некоторой стороне a шестиугольника. Они образуют «поток», сечение которого любой прямой, *параллельной a*, имеет одну и ту же суммарную ширину (рис. 1). В самом деле, к каждому параллельному a отрезку, состоящему из одной или нескольких сторон параллелограммов, *сверху и снизу* примыкает «поток» одной и той же ширины. Поэтому вторая сторона шестиугольника, на которую выходит этот поток, будет параллельна и равна a.

(Попутно мы видим, что каждая сторона любого параллелограмма, входящего в разбиение, параллельна од-

раллелограммов равной площади, то N делится на 3.

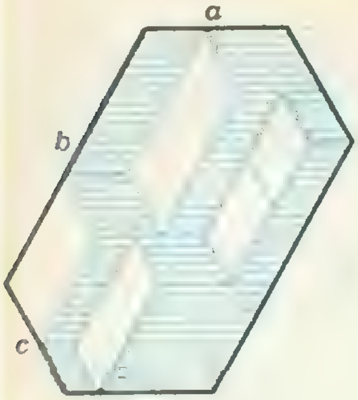


Рис. 1.

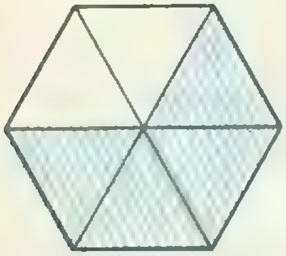


Рис. 2.

ной из сторон шестиугольника: он также включается в некоторый «поток», выходящий на границу шестиугольника.)

Аналогичное рассуждение показывает, что и четыре другие стороны шестиугольника разбиваются на две пары параллельных и равных сторон. Очевидно, параллельные стороны противоположны.

Остается заметить, что у выпуклого шестиугольника с параллельными и равными противоположными сторонами обязательно есть центр симметрии: три его большие диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке — общей середине этих диагоналей.

б) Пусть теперь шестиугольник таков, что его большие диагонали параллельны сторонам. Согласно решению задачи а), они пересекаются в центре симметрии шестиугольника, поэтому они разбивают его на шесть равных по площади треугольников (рис. 2). Пусть S — площадь каждого из этих треугольников и s — площадь каждого из N параллелограммов, на которые разбит шестиугольник, тогда $Ns=6S$. Суммарная площадь параллелограммов каждого потока, соединяющего две противоположные стороны шестиугольника, равна $4S$: она равна площади двух параллелограммов, заштрихованных на рисунке 2. Поэтому в поток должно входить $4S/s=2N/3$ параллелограммов. Отсюда следует, что N делится на 3.

В. Произволов

M1214. В некоторых клетках прямоугольной таблицы из n строк и $m>n$ столбцов расставлены звездочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что найдется звездочка такая, что в ее строке звездочек больше, чем в ее столбце.*

Из исходной таблицы A со звездочками построим две новые таблицы — «красную» и «голубую», в которых звездочки заменены числами: в красной таблице эти числа равны $1/k$, где k — количество звездочек в соответствующем столбце, а в голубой эти числа равны $1/l$, где l — количество звездочек в соответствующей строке. Тогда сумма всех красных чисел равна m — числу столбцов (в каждом столбце сумма равна 1), а сумма всех голубых чисел не больше n — числа строк (в каждой строке сумма равна 0 или 1). Поскольку $m>n$, то найдется звездочка такая, что соответствующее красное число $1/k$ больше голубого числа $1/l$: $1/k>1/l$, откуда $k<l$, т. е. для этой звездочки выполнено требуемое условие.

Точно так же можно доказать и более сильное утверждение: в условиях задачи найдется звездочка, для ко-

	*	*		
*		*•	*	
*	*		*	
*			*	*

	1/2	1/2		
1/3		1/2	1/3	
1/3	1/2		1/3	
1/3			1/3	1

	1/2	1/2		
1/3		1/3	1/3	
1/3	1/3		1/3	
1/3			1/3	1/3

торой отношение числа звездочек в ее строке и в ее столбце не меньше m/n.

Задача имеет и совершенно другие решения (в частности, по индукции), но приведенное — одно из самых простых.

Н. Васильев.

***M1215*.** Число 15 можно тремя способами разложить в сумму трех натуральных чисел так, что все 9 чисел различны:*

$$15=1+6+8=2+4+9=$$
$$=3+5+7.$$

Для каждого натурального n обозначим через $k(n)$ наибольшее число троек натуральных чисел, дающих в сумме n и состоящих из $3k$ (n) различных чисел.

Докажите, что

а) $k(n)>n/6-1$;

б) $k(n)<2n/9$;

в) $k(100)=21$;

г) $k(500)=110$.

а) Пусть $p=p(n)$ — наибольшее целое число, меньшее $(n+1)/6$. Тогда $p>n/6-1$ (поскольку между $n/6-1$ и $n/6+1/6$ обязательно есть целое число), и p троек, указанные на полях, удовлетворяют условию задачи. Таким образом, $k(n)\geqslant p(n)>n/6-1$.

$(1,\ 3p-1,\ n-3p)$
$(2,\ 3p-3,\ n-3p+1)$
$(3,\ 3p-5,\ n-3p+2)$
. . . .
$(p,\ p+1,\ n-2p-1)$

б) Пусть имеется k троек различных натуральных чисел, в сумме дающих n. Обозначим через s сумму всех $3k$ чисел, входящих в эти тройки. Тогда, с одной стороны, $s=nk$, а с другой стороны, $s\geqslant 1+2+\ldots+3k=3k(3k+1)/2$. Поэтому $nk\geqslant 3k(3k+1)/2$, откуда $k\leqslant(2n-3)/9$. Таким образом, $k(n)\leqslant(2n-3)/9<2n/9$.

в) По доказанному в пункте б) $k(100)\leqslant((2\cdot 100-3)/9)=21$. Далее, $p(100)=16$, так что согласно а) мы можем указать 16 троек: (1, 47, 52), (2, 45, 53), ..., (16, 17, 67).

При этом остались неиспользованными числа 18, 20, 22,..., 48, 50. Из этих чисел нам надо выбрать еще пять троек, в сумме дающих 100. Для этого из каждого из этих чисел вычтем 16 и полученные числа разделим пополам. Мы придем к набору чисел 1, 2, ..., 17; из них надо выбрать пять троек с суммой $(100-3\cdot 16)/2=26$. Так как $p(26)=4$, четыре тройки мы получаем сразу: (1, 11, 14), (2, 9, 15), (3, 7, 16), (4, 5, 17). Остались числа 6, 8, 10, 12, и из них надо выбрать три с суммой 26. Это сделать легко: $6+8+12=26$.

Теперь, удвоив числа и добавив к ним по 16, мы получим последние 5 троек с суммой 100; они приведены на полях.

(1, 47, 52)
(2, 45, 53)
(3, 43, 54)
. . . .
(16, 17, 67)
(18, 38, 44)
(20, 34, 46)
(22, 30, 48)
(24, 26, 50)
(28, 32, 40)

г) По неравенству б) $k(500)\leqslant 110$. Немного видоизменив тройки, указанные в пункте а), получим первые $p(500)=83$ тройки: (1, 249, 250), (2, 247, 251),..., (83, 85, 332). Остались неиспользованными числа 84, 86,..., 248. От этого набора чисел линейным преобразованием $x\to x/2-41$ переходим к набору 1, 2,..., 83, из которого надо выбрать 27 троек с суммой 127. Сразу же выбираем $p(127)=21$ тройку: (1, 62, 64), (2, 60, 65), ..., (21, 22, 84) Остались числа 23, 25,..., 63. От них преобразованием $x\to(x-21)/2$ переходим к набору 1, 2,..., 21, из которого надо выбрать 6 троек с суммой 32. А это сделать легко: (1, 15, 16), (2, 13, 16), (3, 11, 18), (4, 9, 19), (5, 7, 20), (6, 12, 14).

В общем случае подобное рассуждение приводит к результату: $\frac{2}{9}n-\frac{11}{6}\log_4\frac{n}{3}\leqslant k(n)\leqslant\frac{2n-3}{9}$ (при $n\geqslant 6$).

Л. Курляндчик

***Ф1223.** Горизонтальная поверхность вибротранспортера приводится в движение эксцентриками, синхронно вращающимися вокруг неподвижных горизонтальных осей O и O′ (рис. 1). При какой угловой скорости вращения эксцентриков лежащие на поверхности детали начнут перемещаться? В каком направлении они будут перемещаться при вращении эксцентриков по часовой стрелке? Коэффициент трения деталей с поверхностью μ, радиус эксцентриков r.*

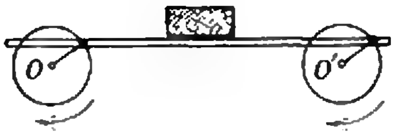


Рис. 1.

Все точки поверхности вибротранспортера движутся по одинаковым окружностям радиуса r. Предположим сначала, что деталь движется вместе с поверхностью (не скользит по ней). Тогда ее ускорение $\vec{a}$ в каждый момент направлено к центру окружности, по которой она движется, и равно

$$a = \omega^2 r,$$

где ω — угловая скорость вращения эксцентриков.

По второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{Q},$$

где $\vec{Q}$ — сила реакции поверхности, которую можно представить в виде суммы силы $\vec{N}$ нормальной реакции и силы $\vec{F}$ трения покоя (рис. 2). Так как максимальное значение силы трения равно μN, сила $\vec{Q}$ может отклоняться от вертикали на максимальный угол α_m, тангенс которого равен μ:

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \mu.$$

Другими словами, проскальзывания не будет, если касательные к окружности, описываемой вектором $m\vec{a}$, проведенные из конца вектора $m\vec{g}$, образуют с вертикалью угол, не превышающий α_m (см. рис. 2), откуда

$$\sin \alpha_m = a/g = \omega^2 r/g.$$

Из условия $\operatorname{tg} \alpha_m = \mu$ имеем

$$\sin \alpha_m = \operatorname{tg} \alpha_m / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m} = \mu / \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Поэтому максимальная угловая скорость эксцентриков,

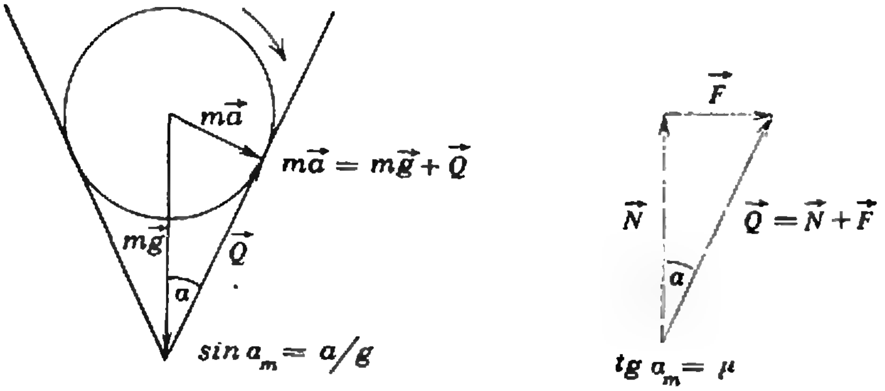

$m\vec{a}$
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{Q}$
$m\vec{g}$
$\vec{Q}$
α
$\sin \alpha_m = a/g$
$\vec{F}$
$\vec{N}$
$\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}$
α
$\operatorname{tg} \alpha_m = \mu$

Рис. 2.

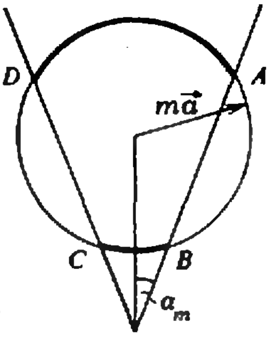


Рис. 3.

при которой еще нет проскальзывания детали по поверхности транспортера, равна

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{r} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}}.$$

При большей угловой скорости возникает проскальзывание, причем когда конец вектора $m\vec{a}$ проходит участок AB (рис. 3), ускорение детали относительно поверхности направлено влево, а когда участок CD — вправо. Возникшее на этих участках проскальзывание тормозится трением на участках BC и DA. Поскольку на участке DA трение оказывает большее действие, деталь перемещается относительно поверхности в среднем влево.

Е. Бутиков

Ф1224. *В горизонтальном дне цилиндрического сосуда сделано круглое отверстие диаметром $d=10$ см для слива воды. Если отверстие открыть, то не вся вода выльется, часть ее останется на дне. Оцените массу этой оставшейся воды, если дно сосуда плохо смачивается водой. Диаметр сосуда $D=50$ см. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}07$ Н/м.*

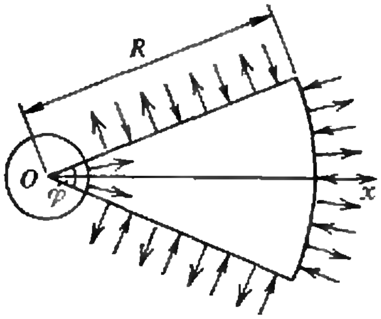


Рис. 1.

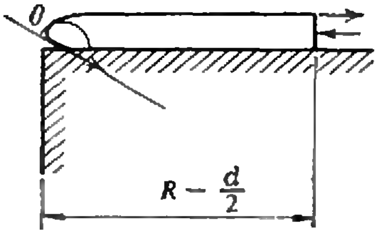


Рис. 2.

Ограничимся случаем, когда толщина H слоя оставшейся воды много меньше диаметра отверстия d.

Проведем две вертикальные плоскости, проходящие через ось симметрии отверстия и образующие между собой некоторый угол φ, и рассмотрим часть воды, которая заключена между этими плоскостями и произвольно проведенной вертикальной цилиндрической поверхностью (рис. 1; вид сверху). Радиус R этой поверхности выберем таким, чтобы расстояние $R-d/2$ было много больше H (но, разумеется, меньше $D/2$); тогда на этих расстояниях поверхность воды с хорошей точностью можно считать горизонтальной.

Условие равновесия этой части воды означает равенство нулю суммы всех действующих на воду сил, а значит, и суммы проекций этих сил на ось X. Что же это за силы?

На боковую цилиндрическую поверхность действуют силы поверхностного натяжения (красные стрелки на рисунке 1) и силы гидростатического давления (черные стрелки). Их проекции равны соответственно

$$2\sigma R\sin(\varphi/2) \text{ и } -\rho g H^2 R\sin(\varphi/2).$$

Аналогичные силы действуют и на радиальные боковые поверхности. Вклад от них есть

$$-2\sigma(R-d/2)\sin(\varphi/2) \text{ и } \rho g H^2(R-d/2)\sin(\varphi/2).$$

Здесь мы пренебрегли изменением толщины слоя воды вблизи отверстия в дне сосуда (этот участок имеет длину порядка H, а в нашем случае $H\ll R-d/2$). Нам осталось рассмотреть силы поверхностного натяжения, действующие на нашу воду в месте касания воды и дна сосуда (около отверстия). На рисунке 2 показан случай плохого смачивания жидкостью дна сосуда, когда угол θ между касательной к поверхности жидкости и горизонтальной поверхностью дна (краевой угол) больше $\pi/2$. Результирующая проекция сил поверхностного натяжения, действующих в месте касания (красная наклонная стрелка на рисунке 2), равна

$$-\sigma d\sin(\varphi/2)\cos\theta.$$

Итак, условие равновесия имеет вид

$$2\sigma R\sin(\varphi/2)-\rho g H^2 R\sin(\varphi/2)-$$
$$-2\sigma(R-d/2)\sin(\varphi/2)+\rho g H^2(R-d/2)\sin(\varphi/2)-$$
$$-\sigma d\sin(\varphi/2)\cos\theta=0.$$

Отсюда получаем высоту оставшегося слоя воды:

$$H=\sqrt{\frac{2\sigma(1-\cos\theta)}{\rho g}}.$$

Проведем верхнюю оценку массы оставшейся воды. Максимальная глубина H_{max} будет при полном несмачивании ($\theta=180^\circ$): $H_{max}=2\sqrt{\sigma/(\rho g)}\approx 5{,}3$ мм. В этом случае максимальная масса воды будет равна

$$m_{max}=\rho\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}H_{max}\approx 1 \text{ кг}.$$

При полном несмачивании оценку толщины слоя оставшейся жидкости можно получить и другим способом — из условия равенства избыточного давления под выпуклой поверхностью (обусловленного поверхностным натяжением) гидростатическому давлению на глубине $H_{max}/2$:

$$\frac{2\sigma}{H_{max}}=\rho g\frac{H_{max}}{2}.$$

Найденное отсюда значение $H_{max}=2\sqrt{\sigma/(\rho g)}$ полностью совпадает с расчетным значением, полученным первым способом. (Это означает, кстати сказать, что приближения, положенные в основу обоих способов расчета, равнозначны.)

В. Можаев

Ф1225. *Свинцовая проволочка диаметром $d_1=0{,}3$ мм плавится при пропускании через нее тока $I_1=1{,}8$ А, а проволочка диаметром $d_2=0{,}6$ мм — при токе $I_2=5$ А. При каком токе разорвет цепь предохранитель, составленный из двух этих проволочек, соединенных параллельно? А из двадцати тонких и одной толстой? Длины проволочек считать одинаковыми.*

На первый взгляд, задача тривиальна. Действительно, тонкая проволочка способна пропускать ток до $I_1=1{,}8$ А, толстая — до $I_2=5$ А; при параллельном соединении токи складываются, следовательно, ток плавления составного предохранителя будет равен $I_1+I_2=6{,}8$ А. Однако это рассуждение неверно! Оно основано на допущении, что при пропускании по цепи тока 6,8 А через тонкую проволочку потечет ток 1,8 А, а через толстую — 5 А. На самом же деле распределение токов будет другим (оно определяется сопротивлением проволочек) — если через одну проволочку течет максимальный для нее ток, то ток через другую не будет максимальным, и суммарный ток окажется меньше, чем мы только что вычислили.

Первое, что предстоит сделать, это найти «слабое звено», т. е. выяснить, какая проволочка расплавится раньше (если постепенно увеличивать ток в цепи). При параллельном соединении напряжение на обеих проволочках одинаково; следовательно, первой расплавится та проволочка, у которой напряжение плавления меньше. Найдем отношение этих напряжений.

Обозначим длину проволочек через l, удельное сопротивление материала проволочек — через ρ. Тогда сопротивление первой проволочки и ее напряжение плавления равны соответственно

$$r_1=\frac{\rho l}{\pi d_1^2/4} \text{ и } U_1=r_1I_1=\frac{\rho l I_1}{\pi d_1^2/4}.$$

Аналогично, для второй проволочки

$$r_2=\frac{\rho l}{\pi d_2^2/4} \text{ и } U_2=\frac{\rho l I_2}{\pi d_2^2/4}.$$

Отношение напряжений

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{I_1}{I_2}\,\frac{d_2^2}{d_1^2}.$$

Подставив числовые значения, найдем, что $U_1/U_2>1$; следовательно, $U_2<U_1$, и сначала расплавится вторая, более толстая, проволочка. В этот момент ток через нее будет, естественно, максимальный: $I_2=5$ А, а через первую проволочку потечет ток $I_1'=I_2r_2/r_1=I_2d_1^2/d_2^2=1{,}25$ А. Суммарный ток через предохранитель, таким образом, составит

$$I_1'+I_2=6{,}25\ \text{А}.$$

При пропускании по цепи такого тока первой расплавится более толстая проволочка, а сразу же вслед за этим, когда весь ток потечет через тонкую проволочку, расплавится и она.

Во втором случае в момент плавления толстой проволочки ток через каждую из тонких будет равен I_1', а суммарный ток через предохранитель составит

$$I'_{\text{общ}}=20I_1'+I_2=30\ \text{А}.$$

Но это еще не ответ! В отличие от первого случая, после плавления толстой проволочки ток $I'_{\text{общ}}$, распределившись поровну между двадцатью тонкими проволочками, окажется меньше предельного для них и не вызовет их плавления. Предохранитель будет продолжать проводить ток до тех пор, пока суммарный ток не достигнет значения

$$I''_{\text{общ}}=20I_1=36\ \text{А}.$$

А. Ходулев

Ф1226. ***На ленте магнитофона записан синусоидальный сигнал частотой 5 кГц при скорости ленты 19,05 см/с. При воспроизведении на этой скорости амплитуда сигнала воспроизводящей головки составила 1 мВ. Какой станет частота и амплитуда этого сигнала, если увеличить скорость ленты при воспроизведении до 38,1 см/с? А если уменьшить при записи и воспроизведении до 4,76 см/с? Ширину переднего зазора воспроизводящей головки принять равной 5 мкм. Максимальную намагниченность ленты после записи в обоих случаях считать одинаковой.***

При записи на пленке остаются области ориентированных магнитных частиц (находящихся в тонком слое на рабочей поверхности пленки), создающих магнитное поле. Будем считать, что головка усредняет поле, попадающее в ее зазор (его делают как раз для того, чтобы внешнее поле могло «войти» в сердечник из материала с большой магнитной проницаемостью).

Длина волны λ записанного сигнала определяется частотой f этого сигнала и скоростью v ленты:

$$\lambda=v/f\approx 40\ \text{мкм}.$$

Максимальный магнитный поток получится при симметричном положении зазора у максимума поля, минимальный по модулю поток равен нулю. Ширина зазора существенно меньше длины волны (рис. 1), поэтому можно считать, что усредненное значение потока в максимуме равно максимальному значению. Выходной сигнал — ЭДС индукции — равен производной по времени от магнитного потока. Ясно, что при увеличении скорости воспроизведения в 2 раза возрастут в 2 раза и частота, и амплитуда воспроизводимого сигнала.

При уменьшении скорости в 4 раза все будет сложнее: длина волны станет в 4 раза меньше (10 мкм), а ампли-

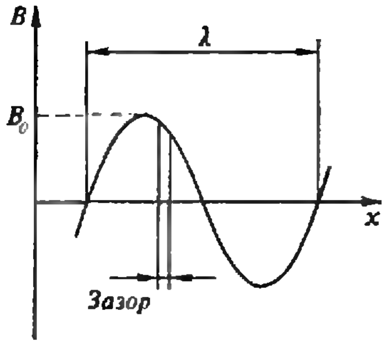


Рис. 1.

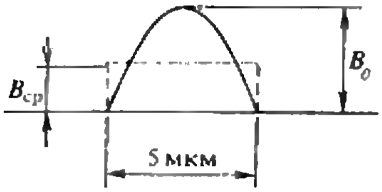


Рис. 2.

туда уменьшится более чем в 4 раза за счет усреднения потока (при длине волны 10 мкм этим уже нельзя пренебрегать). Проще всего получить результат, посмотрев на рисунок 2: максимальный поток определяется средним значением «половины» синусоиды и уменьшается в $\pi/2$ раз. Следовательно, амплитуда уменьшится в 2π раз и составит 0,16 мВ.

Интересно отметить, что при частоте исходного сигнала 10 кГц воспроизвести его на скорости 4,76 см/с уже не удастся — зазор перекроет участок ленты, на котором суммарный поток окажется равным нулю.

Р. Александров

Ф1227. Нелинейность вольт-амперной характеристики лампы накаливания связана с тем, что сопротивление нити увеличивается с ее нагревом. Получите зависимость тока через лампу от приложенного к ней напряжения при следующих упрощающих предположениях: теплоотдачу считать связанной с излучением ($P_{изл} \sim T^4$, где T — температура нити); сопротивление нити $R \sim T$. Лампа 60 Вт, 220 В.

Снизим напряжение до 200 В. Какой будет мощность лампы? Сильно ли упадет световой поток?

Зависимость между напряжением и током легко получить, комбинируя выражения для мощности лампы и для сопротивления ее нити:

$$P = UI = AT^4,$$
$$R = U/I = BT,$$

где A и B — некоторые постоянные величины. Исключая из уравнений T, получим

$$I = (A/B^4)^{0,2} U^{0,6}.$$

Представим это выражение в более удобном виде, учитывая заданные в условии величины — при напряжении $U_0 = 220$ В мощность лампы равна $P_0 = 60$ Вт:

$$I_0 = P_0/U_0 = 0,27 \text{ А},$$

и

$$I = I_0 (U/U_0)^{0,6} = 0,27 (U/220)^{0,6}.$$

Если снизить напряжение до $U_1 = 200$ В, то по этой формуле можно найти ток: $I_1 = 0,94 I_0$. Напряжение U_1 составляет примерно 0,9 U_0, значит, мощность упадет до

$$P_1 = U_1 I_1 \approx 0,85 P_0 \approx 50 \text{ Вт}.$$

Однако световой поток упадет при этом существенно больше, чем на 15 %, поскольку при уменьшении температуры нити максимум излучения смещается в область длин волн, для которых чувствительность глаза меньше.

Насколько разумна модель, предложенная для расчета? При небольших температурах излучение уже не составляет большей части отдаваемой нитью мощности — более существенной становится теплопроводность. Поэтому полученную формулу следует применять только в области высоких температур, т. е. при напряжениях, не очень отличающихся от $U_0 = 220$ В.

А. Зильберман

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. В коробке лежит домино (см. рисунок). Как расположены кости в его верхнем ряду?

2. Недавно сообщалось, что из-за понижения уровня Аральского моря его акватория (площадь) уменьшилась на 40 %, а объем воды уменьшился на 60 %. Может ли быть справедливым такое утверждение? А может ли получиться так, что уровень воды в водоеме упадет и его акватория уменьшится на 60 %, а объем воды уменьшится на 40 %?

3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

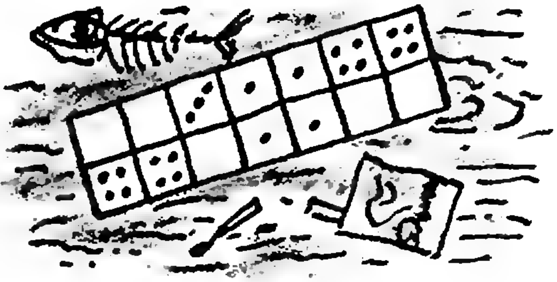
4. В четырехугольнике $ABCD$ (см. рисунок) углы при вершинах B и D — прямые, $AB=BC$, а высота BH равна 1. Найдите его площадь.

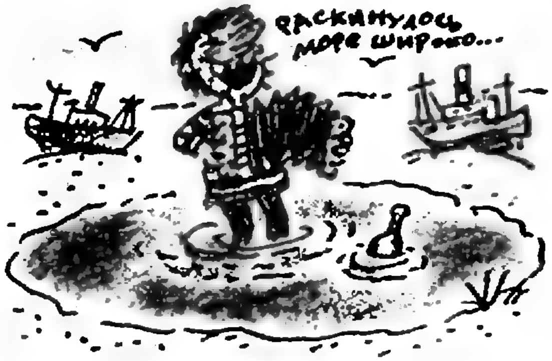
5. Таблица розыгрыша предыдущего первенства мира по футболу в той подгруппе, где участвовала советская команда, выглядит так:

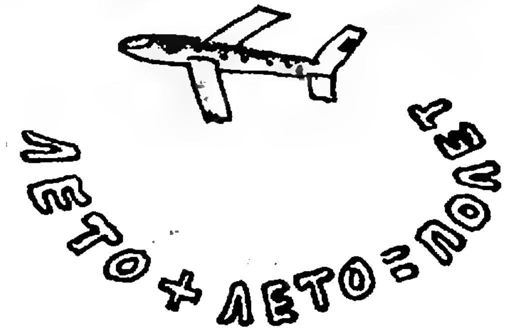
	В	Н	П	МЯЧИ	ОЧКИ
СССР	2	1	0	9—1	5
ФРАНЦИЯ	2	1	0	5—1	5
ВЕНГРИЯ	1	0	2	2—9	2
КАНАДА	0	0	3	0—5	0

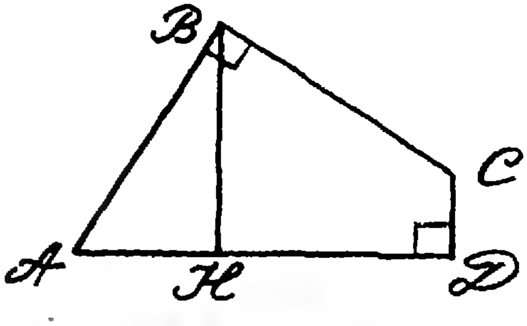
С каким счетом сыграли команды между собой, если известно, что только два матча закончились одинаково?

Эти задачи нам предложили А. Кордюк, Э. Парилис, ученица 10 кл. школы № 556 г. Москвы Марина Москаленко, В. Произволов, Д. Троценко.




Раскинулось море широко...





Вычислять или угадывать — выбирайте сами!

И. АКУЛИЧ

Задача 1. *Отцу 26 лет, сыну 6 лет. Через сколько лет отец будет втрое старше сына?*

Эту (и подобные ей) задачу принято решать одним из двух способов:

Арифметический способ. Если отец стал втрое старше сына, то разность их возрастов вдвое превышает возраст сына. Но эта разность постоянная и равна $26-6=20$ лет, поэтому возраст сына в искомый момент будет равен $20:2=10$ лет, что произойдет через $10-6=4$ года.

Алгебраический способ. Пусть отец станет втрое старше сына через x лет. Тогда $26+x=3(6+x)$, откуда $x=4$.

Добавим к двух этим способам еще один — «гадательно-подбирательный»: попробуем ответ угадать, точнее — подобрать. Используем весь наш опыт решения такого рода задач и вспомним, что в них, как правило, применяются только целые числа. Стало быть, область поиска резко ограничивается. Далее, когда отец станет втрое старше сына, его возраст, естественно, должен делиться на 3. Сначала такое наступит через год, т. е. отцу — 27 лет, сыну — 7 лет (не подходит!); затем — через 4 года, т. е. отцу — 30, сыну — 10 (теперь подходит!). Всё.

Если кто-то из читателей собирается с негодованием отвергнуть этот третий способ в пользу двух первых, убедительно прошу не спешить. Действительно, математику (пусть даже любителю) гадание вроде бы не к лицу. Но представьте себе такую ситуацию. Происходит математический бой (или КВН). Вызвали по одному участнику от каждой команды и предложили им упомянутую задачу. Победителем считается тот, кто первым назовет правильный ответ. Итак, время пошло! Согласитесь, что здесь третий способ выглядит, пожалуй, предпочтительней первых двух. Конечно, есть риск и вовсе не найти ответа, но быстрота и значительно меньший объем вычислений (а следовательно — гораздо меньшие возможности наделать арифметических ошибок, что весьма вероятно в горячке состязания), конечно, перевешивают.

Задача 2. *По преданию, на могильном камне имелась такая надпись: «Путник! Под этим камнем покоится прах Диофанта, умершего в глубокой старости. Шестую часть своей долгой жизни он был ребенком, двенадцатую — юношей, седьмую —*

провел неженатым. Через пять лет после женитьбы у него родился сын, который прожил вдвое меньше отца. Через четыре года после смерти сына уснул вечным сном и сам Диофант, оплакиваемый своими близкими. Скажи, если умеешь считать, сколько лет прожил Диофант?»

Алгебраический способ сводится к решению громоздкого уравнения, арифметический способ тоже не прост. А «гадальный»? Рассуждаем так: поскольку, скорее всего, все используемые числа должны быть целыми, то прожитое Диофантом число лет должно делиться на 6, на 12 и на 7, т. е. на НОК (6, 12, 7)=84. Значит, Диофант прожил кратное 84 число лет, а именно — 84 (бóльшие значения нереальны). Всё! В данном случае преимущества «гадального» метода прямо-таки бросаются в глаза.

Задача 3. *Однажды Черт предложил Бездельнику заработать.*

— Как только ты перейдешь через этот мост,— сказал он,— твои деньги удвоятся. Можешь переходить по нему сколько хочешь раз, но после каждого перехода отдавай мне за это по 24 копейки.

Бездельник согласился и... после третьего перехода остался без гроша. Сколько было у него денег сначала?

Попробуем угадать ответ, применяя самые общие рассуждения. Ясно, что у Бездельника было меньше 24 копеек — иначе бы он не обанкротился; другими словами, уже с самого начала имел место «дефицит бюджета». С удвоением денег, видимо, удваивался и дефицит, и после третьего удвоения он составил как раз 24 копейки. Значит, дефицит вначале был равен 24:8=3 копейки, т. е. у бездельника было 24—3=21 коп. Разумеется, ручаться за такой ответ нельзя, но он весьма правдоподобен.

Задача (4 принадлежит Сэму Лойду).

— Вот эти два индюка вместе весят 20 фунтов,— сказал мясник.— Однако фунт мяса индюшонка стоит на 2 цента дороже, чем фунт мяса крупного индюка.

Миссис Смит купила индюшонка за 82 цента, а миссис Браун заплатила 2 доллара 96 центов за большого индюка. Сколько весил каждый индюк?

Идем на риск: полагаем, что каждый индюк весил целое число фунтов и цена за фунт составляла целое число центов. Всего было уплачено 378 центов. Если отсюда вычесть наценку за мясо индюшонка, то остаток должен делиться на 20 — общий вес индюков. Ближайшее меньшее число, делящееся на 20 — это 360, т. е. наценка составляет 18 центов, и индюшонок весил 18:2=9 фунтов, а большой индюк соответственно 11 фунтов.

Ответ получен, но не тяжеловат ли получился индюшонок? При такой небольшой разнице в весе он стоит почти вчетверо меньше, и это при более высокой цене за фунт! Что-то неладно...

Да, это как раз тот случай, когда метод «гадания» дает осечку. Мы сделали неверное предположение и тем самым обрекли себя на неудачу. На самом деле хотя веса индюков и выражаются целым числом фунтов, но цена фунта индюшатины выражается не только целыми центами, но и их половинками. (А теперь, используя эту дополнительную информацию попробуйте угадать ответ.)

Задача 5 (тоже С. Лойда). *Некая леди, протянув почтовому служащему один доллар, сказала:*

— Дайте мне двухцентовых марок, в десять раз больше — одноцентовых, а на остальное — пятицентовых марок.

Как служащий сумел выполнить это довольно головоломное задание?

Можно поступить так: обозначим через x количество двухцентовых марок, через y — количество пятицентовых марок и из условия получим, что

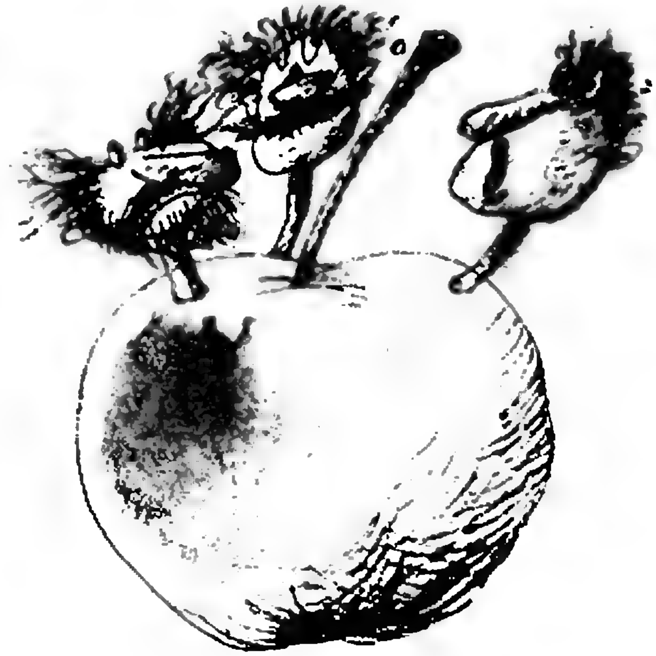
$$2x+10x+5y=100, \text{ или}$$
$$12x+5y=100.$$

Диофант, древнегреческий математик, уже упоминавшийся ранее, проделал огромную работу по нахождению целочисленных решений уравнений такого вида. В его честь они стали называться диофантовыми уравнениями. Итак, остается решить диофантово уравнение

$$12x+5y=100.$$

Но мы обойдемся без этого. Заметим, что общая стоимость двухцентовых марок, и, следовательно, их количество — должны делиться на 5 (почему?). Одноцентовых марок в 10 раз больше, следовательно, их количество делится на 50, что как раз составляет 50 штук на сумму 50 центов. Тогда двухцентовых марок — 5 штук на сумму 10 центов; остальные марки на сумму 40 центов — пятицентовые (их окажется 8 штук). Здесь наше решение оказалось абсолютно верным, хотя мы пытались его лишь угадать, без гарантии правильности, как в предыдущей задаче. (Кстати, задача имеет еще одно — «вырожденное» — решение: по нулю одно- и двухцентовых марок и 20 пятицентовых.)

А вот пример посложнее.



Задача 6. *Три брата получили 24 яблока, причем младшему досталось меньше всех, а старшему — больше всех. Видя это, младший брат предложил такой обмен яблоками:*

— Я оставлю себе половину имеющихся у меня яблок, а остальное разделю между вами поровну.

После этого пусть средний брат тоже оставит себе половину, а остальное даст мне и старшему брату поровну. А затем и старший брат пусть оставит себе половину имеющихся яблок, а остальные разделит между мной и средним братом поровну.

Братья, не подозревая коварство младшего, согласились. В результате у всех оказалось яблок поровну. Сколько яблок было у братьев в самом начале?

Обычно такие задачи принято решать «с конца». Мы же двинемся «напролом», последовательно определяя число яблок у младшего, среднего и старшего. Ясно, что младшему брату дали меньше 8 яблок. С другой стороны, число яблок у него делится на 4 (так как ему удалось половину из них разделить пополам). Значит, младшему дали 4 яблока. Тогда среднему дали меньше половины остальных яблок, т. е. меньше 10, следовательно — от 5 до 9 штук. Добавив одно яблоко, полученное им от младшего брата, мы должны получить число, также делящееся на 4. Это число должно лежать в пределах от 6 до 10, поэтому оно равно 8. Итак, среднему дали 8—1=7 яблок, а старшему — все остальное, т. е. 13 яблок. (Кстати, отметим, что в убытке от такого перераспределения остался лишь старший брат. Поэтому, возможно, средний и подозревал коварство в предложении младшего, но в своих же интересах промолчал.)

Как видите, гадание — вещь иной раз полезная и уж во всяком случае не заслуживающая полного презрения. При этом эффективность его тем выше, чем сложнее и запутаннее условие задачи, поскольку при гадании нам нет нужды вдаваться в тонкости. Ну а для лучшего усвоения и необходимой практики попробуйте угадать ответ в приводимых задачах.

Задачи

7. Веселый турист пешком отправился на слет. В первый день он прошел 1/3 пути, во второй — 1/3 остатка, в третий — 1/3 нового остатка. В результате туристу осталось пройти 32 км. Сколько километров от дома туриста до места слета?

8. Некто, будучи вопрошен, насколько он стар, ответствовал: «Когда я проживу еще половину, да треть, да четверть моих лет, тогда мне будет 100 лет». Сколько лет этому человеку?

9. — Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу?

— Вот сколько,— ответил философ.— Половина изучает математику, четверть — музыку, седьмая часть пребывает в молчании и, кроме того, есть еще три женщины.

Сколько учеников было у Пифагора?

10. Пятая часть пчелиного роя сидит на цветке кадамба, одна треть на цветках силиндка. Утроенная разность двух последних чисел направилась к цветам кутая. И осталась еще одна пчела, летающая взад и вперед, привлеченная ароматом жасмина и пандануса. Сколько всего пчел?

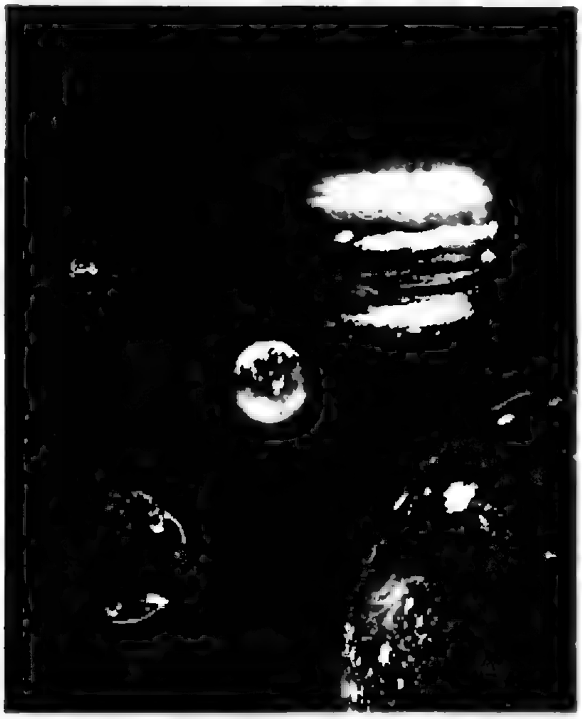
11. Из четырех жертвователей второй дал вдвое больше монет, чем первый, третий — втрое больше, чем второй, четвертый — вчетверо больше, чем третий, а все вместе они дали 132 монеты. Сколько монет дал первый жертвователь?

12. Капитан на вопрос, сколько людей в его команде, ответил: «2/5 моей команды в карауле, 2/7 в работе, 1/4 в лазарете да 27 налицо». Сколько людей в команде?

13. (Должно быть, самая сложная.) Сейчас мне и Вам вместе 86 лет. Число моих лет составляет 15/16 от возраста, который Вы будете иметь тогда, когда мой возраст составит 9/16 от того числа лет, которое Вы имели бы, если бы дожили до такого возраста, который вдвое больше числа моих лет в тот момент, когда я могу быть старше Вас вдвое. Сколько мне лет?

Конечно же, мы советуем решить все приведенные здесь задачи и «нормальным» способом. Кстати, этим вы проверите правильность и единственность полученных ответов. Все рассмотренные (и нерассмотренные) задачи не выдуманы специально для этой статьи, а взяты из уважаемых книг:

1. Сэм Лойд. Математическая мозаика. М., Мир, 1980.
2. Щепан Еленьский. По следам Пифагора. М., Детгиз, 1961.
3. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М., ГИТТЛ, 1956.
4. Чистяков В. Д. Старинные задачи по элементарной математике. Минск, Высшая школа, 1966.
5. Это странное привычное. Минск, Университетское, 1989.



[illegible]

Перспективы поиска обитаемых планет

Доктор физико-математических наук
Л. КСАНФОМАЛИТИ

Венера и Марс

Пожалуй, более или менее обоснованными были надежды встретить какие-то формы жизни на Венере и Марсе — наиболее близких к Земле планетах.

Венера выделяется сходством с Землей своей массой, средней плотностью, радиусом и величиной ускорения свободного падения у поверхности. Более того, количества энергии, получаемые обеими планетами от Солнца, также близки. Все это позволяло в недалеком прошлом рассматривать Венеру в качестве возможного «двойника» Земли.

Однако сведения, которыми мы располагаем ныне, говорят, что это весьма непохожие планеты. Масса атмосферы Венеры примерно в 100 раз больше массы атмосферы Земли, состав — не менее 95 % углекислого газа. Облачный слой, находящийся в интервале высот 49—70 км, состоит из мелких капель концентрированной серной кислоты, относительное содержание которой в атмосфере составляет несколько миллионных долей. Давление у поверхности планеты 93 атм, температура 730 К.

Еще недавно предполагалось, что вся планета может быть покрыта сплошным океаном, но при таких высоких температурах вода не может существовать в жидкой фазе — она вся должна перейти в атмосферу. Однако измеренное содержание водяных паров в облачном слое оказалось ничтожно малым. Напрашивается вывод — либо Венера всегда была бедна водой, либо ее запасы растеряны. Не исключено, что Венера была сформирована из материала, почти не содержащего воды, — вывод чрезвычайно интересный в космогоническом отношении, хотя и не окончательный.

Нынешний состав атмосферы нашей планеты полностью определяется существованием на Земле биосферы. Уже на ранней стадии ее эволюции происходило значительное обогащение атмосферы кислородом в результате гликолиза — процесса расщепления углеводов с помощью ферментов, используемого примитивными формами жизни. Постепенное накопление кислорода создало озоновый экран и условия для выхода жизни из океана на сушу. Атмосфера в нынешнем ее составе существует у Земли примерно $1{,}5 \cdot 10^9$ лет. Один из выводов — у планеты с развитой биосферой, по-видимому, не может быть такой атмосферы, как у Венеры. Не отсутствие ли жизни на Венере стало причиной того, что пути эволюции Венеры и Земли оказались столь различными и что углекислого газа так много в ее атмосфере?

По существующим оценкам, угле-

Начало этой статьи опубликовано в предыдущем номере журнала.

кислого газа, связанного в осадочных породах Земли, примерно столько же, сколько содержится ныне в атмосфере Венеры. В результате вулканической деятельности в атмосферу Земли выбрасывается большое количество паров воды и углекислого газа. Если предположить, что начальная температура Венеры была не очень высока, значительное количество углекислого газа должно было бы связываться в присутствии небольшого количества паров воды и образовывать карбонаты. В то же время часть углекислого газа накапливалась в атмосфере, содержащей небольшое количество паров воды. Это создавало сильный парниковый эффект, приводивший к разогреву атмосферы и поверхности. Сущность парникового эффекта заключается в том, что солнечное излучение довольно легко проникает в глубокие слои атмосферы и поглощается ими и поверхностью планеты. Но поскольку планета находится в тепловом равновесии (в среднем имеет постоянную температуру), такое же количество энергии должно излучаться в космос. Однако излучение происходит в длинноволновом, инфракрасном диапазоне, где углекислотная атмосфера с примесями водяного пара малопрозрачна. Чтобы при таких условиях достаточное количество энергии вышло из атмосферы, источник должен быть очень ярким. Вот почему так высока температура поверхности Венеры. Благодаря близости планеты к Солнцу, парниковый эффект мог становиться самоусиливающимся: с увеличением температуры образование карбонатов замедляется, больше углекислого газа остается в атмосфере, что приводит к дальнейшему усилению парникового эффекта. Затем достигается предел, когда карбонаты в осадочных породах разрушаются и весь углекислый газ переходит в атмосферу.

Наряду с гипотезой об извечной сухости Венеры, есть один (пока неподтвержденный) факт, который может представить проблему совсем в другом свете. Речь идет о значительно повышенной концентрации дейтерия в водородосодержащих соединениях на Венере. Это могло бы быть следствием катастрофических потерь воды планетой в прошлом, причем вначале на Венере даже могли бы существовать океаны. Однако нужно помнить, что пока это всего лишь одна из самых последних гипотез о таинственной истории столь непохожей «сестры» нашей Земли. Если гипотеза подтвердится, то одно из объяснений потери Венерой океанов может заключаться в том, что на Венере не возникла жизнь. Тогда для оценки вероятности возникновения жизни мы будем иметь не одну, а две планеты. Что же касается современных физических условий на Венере, то никакая известная нам форма жизни не могла бы им противостоять.

Заметим, что физика высокотемпературных органических полимеров, кажется, не объявляет абсолютного запрета на создание материалов, пригодных для построения некоторых органов живых существ. Но нужны какие-то особые источники энергии, которыми могли бы пользоваться живые организмы в бескислородной атмосфере Венеры.

Таинственная Венера, «страна багровых туч», оказалась безжизненной раскаленной пустыней.

Промерзшим и безжизненным оказался и Марс.

Планета Марс долго оставалась на первом месте в списке небесных тел, где существование жизни в виде простейших ее форм считалось возможным.

Во всяком случае, физические условия на Марсе, достаточно хорошо известные по результатам космических исследований последних лет, не противоречат этому. Более того, предполагается, что ряд земных микроорганизмов мог бы существовать в марсианских условиях. В действительности проблема, конечно, гораздо сложнее. Гипотетическая марсианская жизнь должна была зародиться и эволюционировать в марсианских условиях.

Необходимым условием для существования форм жизни, подобных земным, является наличие воды. Сведения о воде на Марсе за последние годы значительно расширились. Было доказано, например, что огромные массы водяного льда на марсианских полярных шапках, растаяв, могли бы образовать слой воды толщиной 5—10 м, равномерно распределенный по всей планете. Большое количество воды сконцентрировано, по-видимому, и в подпочвенной вечной мерзлоте.

На поверхности Марса имеется большое число водноэрозионных образований, которые связывают с ледниками, селями, местными подпочвенными таяниями больших масс вечной мерзлоты и обильными ливнями в далеком прошлом (2—3 млрд. лет назад).

В последнем случае подразумевается, что климат Марса в прошлом был гораздо мягче, чем теперь. Анализ изотопного состава некоторых малых составляющих атмосферы Марса как будто подтверждает такую возможность. Ныне углекислотная атмосфера Марса очень разрежена — давление у поверхности примерно в 150 раз ниже, чем у поверхности Земли. Парниковый эффект в такой атмосфере незначителен. Более того, в период пылевых бурь развивается значительный «антипарниковый» эффект, связанный с более высокой прозрачностью такой атмосферы для теплового, инфракрасного излучения, чем для солнечной радиации. При средних температурах поверхности около 210 К падение температуры во время пылевой бури может достигать 30 К и более.

По имеющимся оценкам, в далекие геологические эпохи Марса (2—3 млрд. лет назад) условия возникновения жизни на Марсе были наиболее благоприятными. Вопрос лишь в том, как долго они оставались благоприятными.

Современный анализ состава поверхности указывает на высокое содержание железа и некоторых других элементов, в частности кремния. Необычно много, по сравнению с Землей, имеется серы. Возможно, это является следствием затянувшейся эволюции Марса. Из-за малой средней плотности, малой массы и малого ускорения свободного падения гравитационная дифференциация планеты очень затянулась, степень сосредоточения тяжелых элементов в ядре невелика. По некоторым данным ядро Марса составляет не более 5 % его массы. Ускорение свободного падения на Марсе почти такое же, как на Меркурии (около 0,4 земного).

В марсианских условиях химические реакции, протекающие на поверхности планеты, которые, несомненно, должны были оказать влияние на зарождающуюся жизнь, могли носить специфический характер. Следует учесть также, что ультрафиолетовое излучение Солнца с длинами волн более 280—300 нм, по-видимому, стимулирует на поверхности планеты ряд своеобразных фотохимических взаимодействий. Анализ марсианского грунта в автоматической биохимической лаборатории «Викинга» указал на высокую химическую активность этого вещества, которая даже поначалу была истолкована как обнаружение жизнедеятельности микроорганизмов. Однако более тщательный анализ не показал наличия органических веществ, по крайней мере, в количестве более десятимиллиардных долей. По существу, этот результат нанес наиболее тяжелый удар надеждам встретить жизнь на Марсе. Вместе с тем, вопрос нельзя считать решенным окончательно — отсутствие микроорганизмов в местах посадки «Викингов» еще не является основанием для отрицательного ответа о планете в целом, хотя надежды отыскать жизнь на Марсе, по-видимому, очень малы.

Почему же не возникла жизнь на Марсе? Согласно одной из гипотез, причина в разреженности его атмосферы и мощном потоке ультрафиолетовой радиации, достигающей поверхности планеты, стерилизующей ее и исключающей возможность зарождения жизни.

Планеты-гиганты

Следующие четыре планеты — Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун — относятся к группе Юпитера. Их строение резко отличается от строения планет земной группы. Эти планеты находятся очень далеко от Солнца; Юпитер, например,— в среднем в 5,2 раза дальше, чем Земля, а Нептун — дальше в 30 раз. Массы и протяженности их атмосфер огромны. На 89 % по объему планеты-гиганты состоят из водорода, на 11 % — из гелия. Поскольку Солнце и Юпитер возникли из одного и того же протопланетного облака, по отношению водород — гелий можно определить, к звездам какого поколения относится Солнце. (Высокое содержание тяжелых элементов в протопланетной туманности и звездах поздних поколений, как предполагается, способствует возникновению жизни на планетах.)

Среди малых составляющих в атмосфере Юпитера присутствуют аммиак, метан, ацетилен, этан, фосфин, гидрид германия, водяной пар. В тропосфере располагаются слои облаков из замерзшего аммиака, водяного льда и других веществ, а также водного раствора аммиака

Большое Красное пятно — одно из наиболее загадочных образований Юпитера. На фоне планеты два из ее многочисленных спутников — Ио и Европа.

и жидких капель воды. Еще ниже, как предполагается, находится безоблачная атмосфера высокой плотности и температуры. Вероятная ее протяженность составляет не менее 1000 км. Согласно расчетам, солнечная радиация проникает максимум на несколько сотен километров в глубину такой атмосферы.

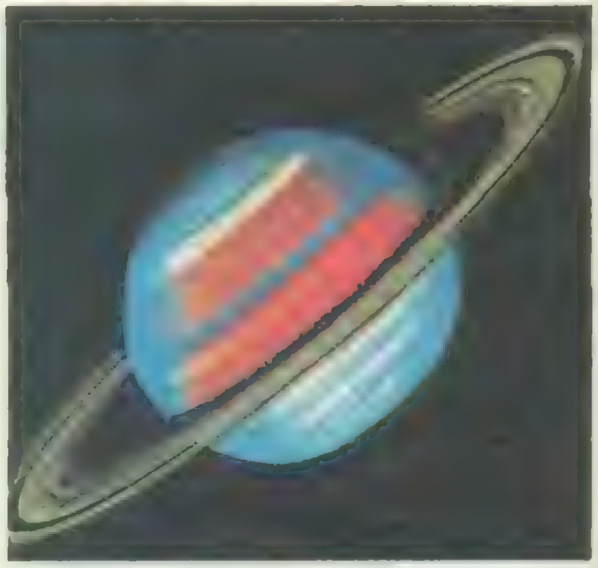
На всех планетах этой группы ускорение свободного падения на уровне видимой поверхности облаков близко к земному.

По крайней мере **Юпитер и Сатурн** не имеют поверхности в земном смысле. Из-за высоких температур водородная атмосфера Юпитера и других гигантов находится в сверхкритическом состоянии. Как известно, водород может оставаться жидким лишь при температуре ниже 33 К. Если же температура более высокая, он остается газом при любых давлениях, вплоть до миллиона атмосфер. Однако при более высоких давлениях может начаться переход водорода в жидкометаллическое состояние. Что же касается условной поверхности, то это поверхность газожидкого океана. Давление над нею около 200 тыс. атм, а температура близка к 2000 К (для Юпитера). В атмосферах Юпитера и Сатурна наблюдаются огромные устойчивые вихри, время жизни которых может достигать многих тысяч лет. Самое известное образование такого рода — Большое Красное пятно, по диаметру втрое превышающее земной шар.

Юпитер обладает сильным магнитным полем. Более слабые поля — того же порядка, что и земное — имеют Сатурн, Уран и Нептун.

Иногда можно встретить высказывания о возможном существовании каких-то организмов на уровне облачного слоя Юпитера. Конечно, это фантазии, которые к научным данным никакого отношения не имеют. Не говоря уже об очень низких температурах внешней части облачного слоя (130 К, или —140 °С), это предположение встречается с теми же трудностями, что и в случае Венеры. Сказанное относится и к другим планетам-гигантам, так как их атмосферы очень похожи. Однако температура внешней части облачного слоя еще ниже — у Сатурна приблизительно 95 К, а у Урана и Нептуна около 56 К.

Сатурн окружен широко известными кольцами, образованными грязными ледяными глыбами разных размеров — от сотен метров до мельчайших обломков. Более слабое, почти прозрачное кольцо есть и у Юпитера,



Сатурн, окруженный многочисленными кольцами. Внешний радиус планеты — 60 тыс., а радиус наружного кольца — 138 тыс. км.

а у Урана и Нептуна обнаружены системы узких, иногда незамкнутых колец. Спутники планет-гигантов — это также ледяные и силикатно-ледяные тела, иногда очень больших размеров, с низкой температурой поверхности.

В интересующем нас смысле (т. е. пригодности для жизни) все спутники Юпитера и Сатурна лишены атмосферы; точнее — все, кроме Титана, спутника Сатурна (размерами почти с планету Меркурий), и спутника Нептуна Тритона. С Титаном были связаны, может быть, последние надежды встретить жизнь в Солнечной системе. Уже по наземным наблюдениям было известно, что Титан обладает плотной атмосферой. Предполагалось, что в ней возможен сильный парниковый эффект, благодаря чему условия у поверхности могли бы даже быть приемлемыми для существования жизни. После марсианских разочарований было много разговоров о возможной жизни на Титане. Но Титан не оправдал этих надежд — это один из самых холодных миров в Солнечной системе. Телевизионная съемка с «Вояджера» показала, что поверхность спутника неразличима сквозь его плотную оранжевую атмосферу, состоящую, в основном, из азота. Парникового эффекта в атмосфере нет, поверхность холоднее атмосферы, ее температура 93 К. Титан — мир глубокого холода.

Два самых далеких гиганта — **Уран и Нептун** — еще более холодные тела, чем Титан. Не исключено, однако, что на дне их толстой водородно-гелиевой атмосферы имеется поверхность, находящаяся в условиях чрезвычайно высоких давлений и температур.

После получения новых данных о спутниках планет-гигантов внимание ученых привлекла возможность существования огромного, вероятно глобального, океана под толстой ледяной корой спутника Юпитера Европы. Европа по размерам близка к нашей Луне и имеет некоторые источники внутренней энергии (связанные с приливными явлениями). Поэтому даже высказано предположение о возможном существовании жизни в этом океане. Критики, однако, указывают, что такой океан плотно «запечатан» ледяной оболочкой и что одной только тепловой энергии недр для зарождения жизни недостаточно.

Последняя планета Солнечной системы — **Плутон**. Это ледяное тело, аналогичное крупным спутникам Юпитера и Сатурна, с очень тонкой метановой атмосферой. Недавно было установлено, что Плутон — не одна, а две маленькие планеты, обращающиеся вокруг общего центра с периодом 6,4 суток. Температура поверхности Плутона 40—50 К.

Таким образом, очень краткий обзор физических условий на планетах Солнечной системы показывает, что кроме Земли лишь планету Марс с некоторой натяжкой предположительно можно считать пригодной для жизни. Климат Марса близок к зимней Антарктиде, но ведь в антарктических условиях существуют микроорганизмы...

Ограничения для жизни

Понятие «планета, пригодная для жизни» включает много ограничений, которые можно было видеть на примере Солнечной системы. Это, например, состав поверхности планеты, наличие атмосферы, воды и температурного режима, благоприятного для возникновения единственной известной нам формы жизни — белково-нуклеинокислотной.

Еще один важный фактор — подходящий период вращения планеты. Так, слишком долгая ночь, вероятно, помешала бы развитию растений, использующих фотосинтез. Такова Венера, где длительность солнечных суток составляет 117 земных. С другой стороны, планета может иметь подходящий период вращения, но слишком большой угол между плоскостями экватора и орбиты, как, скажем, у Урана. Длительность полярной ночи, попеременно охватывающей на Уране целое полушарие (северное или южное), составляет половину орбитального периода — 42 года. Можно предположить, что столь долгая полярная ночь не способствует развитию жизни на планете.

Интересна роль гравитации в эволюции форм жизни. Если в комфортной зоне окажется планета с большой массой, как получалось, например, в одном из модельных экспериментов, проводимы с помощью компьютера, физические условия на ней были бы непохожими на земные. Большая масса обусловит удержание легких газов в атмосфере; следовательно, состав последней будет отличаться от земной. Повышенное давление сместит точку кипения жидкостей в область более высоких температур. Функционирование живых организмов в условиях повышенной тяжести потребовало бы бо́льших энергетических затрат на передвижение, более сильных мышц и т. д. Хорошая иллюстрация сказанному — изменение характера ходьбы человека в условиях малой тяжести. Напомним, что на Луне космонавты перешли на «порхающий» шаг, который там оказался более удобным.

Дать какие-либо количественные оценки оптимальной массы планеты трудно, но то что Земля с ее массой пригодна для жизни — всем хорошо известно.

При обсуждении программы поиска несколько лет назад было высказано мнение, что обитаемые планетные системы можно было бы встретить у карликовых звезд с малой массой, если планеты находятся достаточно близко к ним. (Интерес к звездам малой массы объясняется тем, что их много и они сравнительно близки к нам.) Анализ показал, однако, что это предположение не имеет достаточных оснований. Короче говоря, звезды поздних классов — неподходящее место для поиска обитаемых планет. Лучшие кандидаты для этого — звезды, подобные нашему Солнцу.

Заключение

Земля — родительский дом человечества. Но в своем стремлении увидеть, узнать, открыть уже теперь Земля становится тесной для человека. Большим домом человечества, по-видимому, станет Солнечная система, самые далекие миры которой, возможно, будут известны нашим близким потомкам лучше, чем удаленные уголки Земли. Но Земля всегда останется для человека местом, где когда-то зародились два величайших чуда природы — жизнь и разум.

Дорогие читатели!

Апрельские номера принято делать либо смешными, либо с какими-нибудь розыгрышами. Когда мы получили от вас письма с замеченными ошибками в № 4 за 1990 год, нам очень хотелось свалить все на традицию — такими невероятными оказались наши промахи.

Первый промах относится к статье В. Николаева «Космический полет — это так просто!?». На странице 54 в качестве примера самого длительного полета приведен полет Ю. Романенко. Не умаляя заслуг этого космонавта, следует согласиться, что на сегодняшний день рекорд принадлежит В. Титову и М. Макарову, экспедиция которых продолжалась целый год (с 21.12.87 по 21.12.88).

Вторая ошибка еще более невероятна. Из-за невнимательности редактора несложный ребус для младших школьников КВАНТ + КВАНТ + КВАНТ = ЗАДАЧА «превратился» в неразрешимую задачу КВАНТ + КВАНТ + КВАНТ = ЖУРНАЛ.

Редакция приносит свои извинения читателям и автору задачи.

Мы благодарим всех, кто так внимательно читает наш журнал и не поленился указать нам на ошибки.

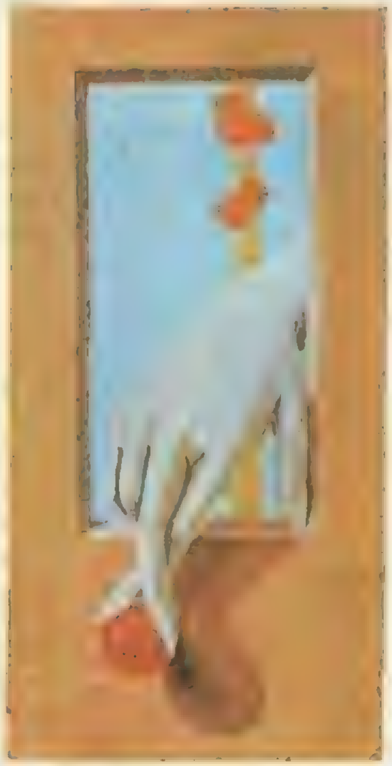
Комбинация из двух пальцев

На второй странице обложки юбилейного номера (Квант, 1990, № 1), посвященного двадцатилетию журнала, воспроизведена картина Макса Эрнста «Au premier mot limpide». Короткий сопроводительный текст, помещенный там, к сожалению, неправильно ориентирует читателя. Здесь я хочу дать другое толкование картины и показать, что ее основной мотив — это *парадокс Банаха — Тарского*. Прежде чем перейти к обоснованию этого тезиса, несколько слов о самом парадоксе.

В 1924 году польские математики Стефан Банах и Альфред Тарский доказали следующее утверждение:

> *любой шар можно разбить на конечное число частей, из которых без наложений и пустот можно составить два шара того же радиуса.*

Это конечно, удивительный парадокс. Это утверждение является парадоксом и на математическом, и на физическом, и на чисто житейском уровне. И тем не менее еще раз повторю — это строго доказанная теорема. К настоящему моменту число частей, на которые разбивается шар, доведено до пяти. Из двух частей складывается один шар, а из оставшихся трех еще один — оба, равные исходному. Стало доступнее и само доказательство. Думаю, что достаточно настойчивый старшеклассник сможет разобраться в нем. Вы, конечно, понимаете, что части, на которые разбивается шар в парадоксе Банаха — Тарского, устроены и перепутаны чудовищно сложным образом. Они относятся к так называемым неизмеримым множествам — к множествам, объем которых нельзя определить никаким разумным образом. Что касается невозможности физической реализации парадокса Банаха — Тарского, то тут и говорить не о чем. Впрочем, *вы можете познакомиться* с нехитрой фантазией на эту тему, прочитав статью А. К. Дьюдени «Об одном математическом *парадоксе и золотом слитке,* полученном из ничего» (В мире науки, 1989, № 6).



Фрагмент картины Макса Эрнста «Au premier mot limpide».

А сейчас, опровергая только что сказанное, приступим к практическому *удвоению реального шарика*. Лучше, если это будет твердый шарик диаметром в один или два сантиметра. Сойдет и шарик, скатанный из пластилина. Вернемся к картине Макса Эрнста, а именно к ее фрагменту.

Положите шарик на горизонтальную поверхность. *Лучше всего на та*кую, чтобы шарик катался по ней, но не скользил. Перекрестите между собой указательный и средний пальцы, как на картине, и наложите перекрещенные пальцы подушечками на шарик. Закройте глаза и слегка покатайте шарик —

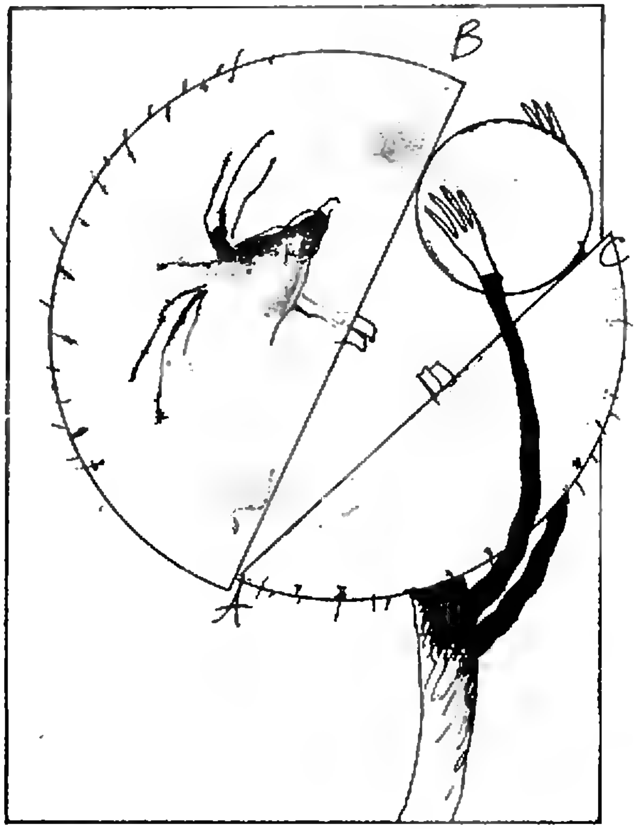
> *вы отчетливо ощутите, что шарик удвоился.*

К сожалению, когда вы откроете глаза и уберете пальцы —

> *два шарика превратятся в один.*

И все-таки присутствие духа парадокса Банаха — Тарского тут неоспоримо. *Конечно, наш анализ не* исчерпывает всего содержания картины Макса Эрнста, но думается, что основное схвачено. Кстати, картина датируется 1923 годом, парадокс Банаха — Тарского опубликован в 1924 году — знаменательное совпадение!

А. Панов



Школа в „Кванте"

Несколько эпизодов из жизни вписанных и описанных окружностей

Кандидат физико-математических наук
И. ШАРЫГИН

Вписанные и описанные окружности обладают целым рядом похожих свойств. Такие свойства и будут нас интересовать в первую очередь. Суть сходства хорошо иллюстрируют следующие две задачи.

Задача 1. *В треугольнике ABC известны стороны $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Найдите отрезки сторон, на которые они делятся точками касания с вписанной окружностью.*

Задача 2. *В треугольнике ABC известны углы A, B и C. Найдите углы, образованные радиусами описанной окружности, идущими в вершины треугольника, со сторонами, сходящимися в этих вершинах.*

Решим 1-ю задачу. Отрезки двух сторон, имеющие общую точку — вершину треугольника, попарно равны (рис. 1); обозначая их соответственно через x, y и z, получаем систему уравнений $x+y=c$, $y+z=a$, $z+x=b$, из которой найдем $x=\frac{1}{2}(b+c-a)=p-a$, $y=\frac{1}{2}(a+c-b)=p-b$, $z=\frac{1}{2}(a+b-c)=p-c$, где p — полупериметр треугольника.

Полученные формулы следует отнести к категории «рабочих»: во многих конкурсных и олимпиадных задачах они оказываются полезными, и потому их стоит запомнить.

Аналогичным образом можно решить и 2-ю задачу (рис. 2). Углы, прилежащие к одной стороне треугольника, попарно равны, обозначая их через x, y, z, приходим к системе $x+y=C$, $y+z=A$, $z+x=B$, из которой

$$x=\frac{1}{2}(B+C-A)=\frac{\pi}{2}-A,$$
$$y=\frac{1}{2}(A+C-B)=\frac{\pi}{2}-B,$$
$$z=\frac{1}{2}(A+B-C)=\frac{\pi}{2}-C.$$

Правда, в отличие от предыдущего случая, возможны отрицательные значения углов (углы следует считать ориентированными). Такими будут углы, прилежащие к большей стороне тупоугольного треугольника. Соотношения задачи 2 могут быть без труда получены из свойства центральных и вписанных углов ($\angle BOC=2\angle BAC$). Читатель же не только внимательный, но и вдумчивый, возможно, обратит внимание на полную эквивалентность формул задач 1 и 2 (особенно, если во второй серии вместо $\frac{\pi}{2}$ взять d — полусумму углов данного треугольника) и задумается о глубине аналогий между вписанной и описанной окружностью. В обоих случаях мы пользовались, по существу, лишь свойством равнобедренного треугольника, справедливым не только в нашей Евклидовой геометрии. Полученные соотношения верны и для сферических треугольников, для которых двойственность сторон и углов является важнейшим теоретическим фактом. Эта двойственность влечет и двойственность между вписанными и описанными окружностями, в частности для сферического треугольника существуют «внеописанные» окружности, соответствующие вневписанным окружностям. Мы не будем дальше развивать эту тему. *Перейдем* к рассмотрению вписанных и описанных четырехугольников. Их главные свойства мы сформулируем в виде следующих задач.

Задача 3. *Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник. Тогда $AB+CD=BC+AD$.*

Задача 4. *Если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$. ($\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$).*

При этом указанные соотношения являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы данный четырехугольник являлся описанным (вписанным).

Отметим еще два соотношения, дающие каждое необходимое и достаточное условие существования окружности, вписанной в данный четырехугольник, не являющийся трапецией.

Задача 3′. *Пусть противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ пересекаются при продолжении так, как показано на рисунке 3. Тогда если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то $KA+AM=KC+CM$, $KD+BM=MD+KB$. И обратно, если выполняется одно из этих соотношений, то четырехугольник $ABCD$ является описанным.*

Можно указать соответствующие два соотношения и для вписанного четырехугольника (*какие?*). Но мы этого делать не будем, так как для рассматриваемого нами плоского случая они малоинтересны.

Доказательство. Докажем сначала необходимость соотношения из задачи 3. Используя то, что соответствующие касательные попарно равны, будем иметь $KA+AM=KQ-AQ+AP+PM = KT+ML = KC-CT+CL+MC=KC+MC$.

Обычно достаточность условий теорем из задач 3, (3′) и 4 доказывают методом от противного. Мы же предложим несколько иной путь, еще больше подчеркивающий родство вписанной и описанной окружностей.

Докажем достаточность условия задачи 3. Отложим на KC отрезок $KE=KA$, а на MB возьмем $MF=MA$ (рис. 4). Из равенства $KA+AM=KC+CM$ следует, что $CF=MF-MC = MA-MC = KC-KA=EC$.

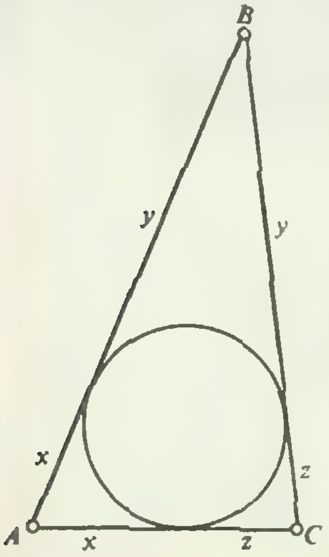


Рис. 1.

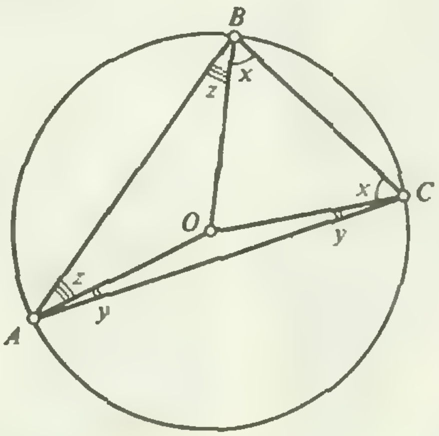


Рис. 2.

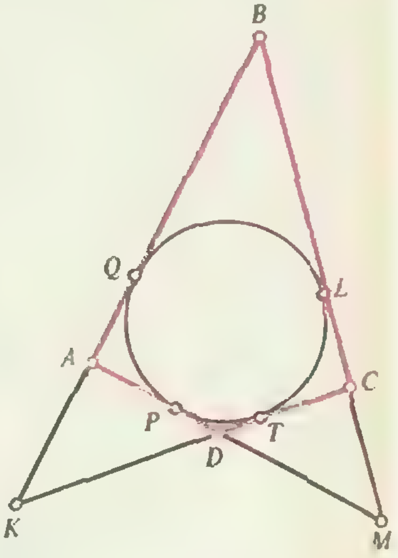


Рис. 3.

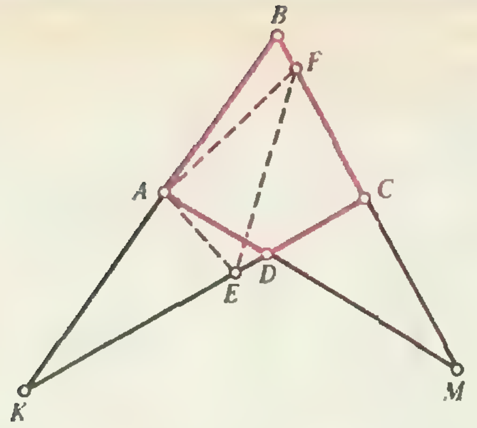


Рис. 4.

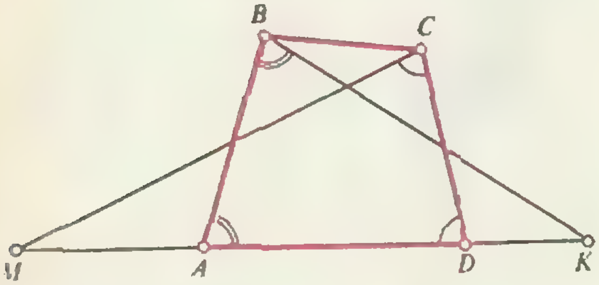


Рис. 5.

Таким образом, поскольку KA и KE, MA и MF, CE и CF соответственно попарно равны, биссектрисы углов AKD, AMB и BCD являются серединными перпендикулярами к AE, AF и FE. Значит, эти биссектрисы пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника AEF. Эта точка равноудалена от KB и KC, KC и BC, BC и AM. Следовательно, эта точка равноудалена от сторон четырехугольника $ABCD$ и является центром вписанной в него окружности.

Для доказательства достаточности условия задачи 4 предположим, что в четырехугольнике $ABCD$ суммы противоположных углов равны и для определенности $D<C$, $A<B$. Проведем через точки C и B соответственно прямые, образующие со сторонами DC и AB углы, равные углам D и C (рис. 5). Получились два равнобедренных треугольника CMD ($CM=MD$) и ABK ($AK=BK$). Треугольник BEC также является равнобедренным ($\angle CBE=\angle ABC-\angle BAD=\angle BCD-\angle CDA=\angle BCE$). Серединные перпендикуляры к сторонам AB, BC и CD являются биссектрисами внутренних углов треугольника MEK, а значит, пересекаются в одной точке. Эта точка равноудалена ото всех вершин четырехугольника и является для него центром описанной окружности, а для треугольника MEK она — центр вписанной окружности.

Как видим, в этих двух доказательствах вписанная и описанная окружности любезно раскланялись друг с другом.

В случае, когда $ABCD$ — трапеция, имеются специальные признаки.

Задача 5. *Для того чтобы в трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC можно было вписать окружность, необходимо и достаточно выполнение любого из следующих равенств:*

а) $TB+BP=DP$, $TC+AP=AD+CP$, *где P — точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции, T — проекция D на прямую BC;*

б) $\dfrac{AD}{BC}=\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}$.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

И в заключение решим две задачи.

Задача 6. *Пусть $ABCD$ — описанный четырехугольник. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и CDA, касаются друг друга.*

Доказательство. Пусть окружности вписанные в треугольники ABC и CDA касаются AC в точках K и M соответственно (рис. 6). Нам надо доказать, что точки K и M совпадают. По формулам задачи 1 имеем

$$MK=|AM-AK|=|{}^1/_2(AB+AC-BC)-{}^1/_2(AC+AD-CD)|={}^1/_2|AB+CD-BC-AD|=0.$$

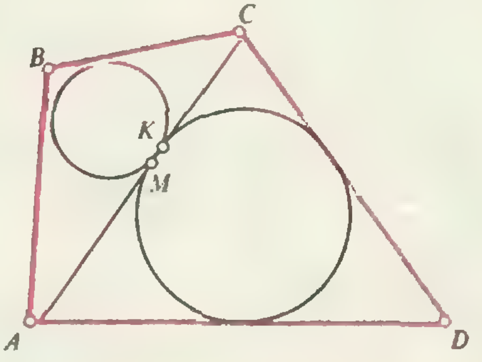


Рис. 6.

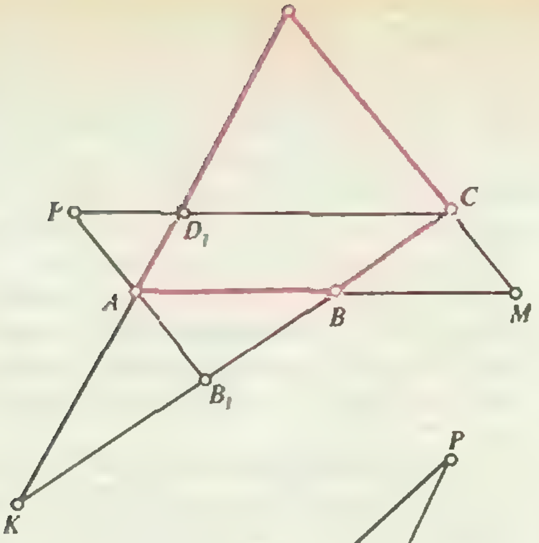


Рис. 7.

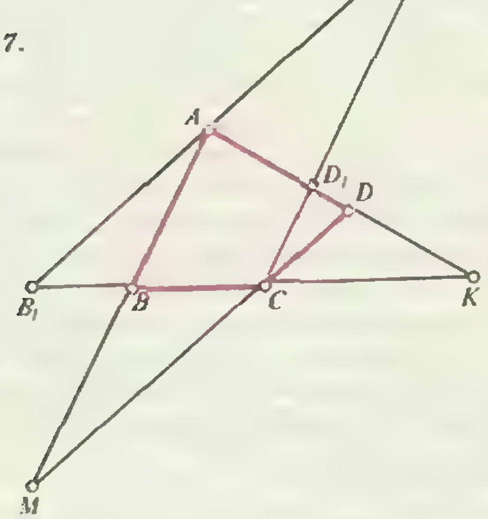


Рис. 8.

Задача 7. *Через вершину A четырехугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная DC, пересекающая прямую BC в точке B_1, а через вершину C проведена прямая, параллельная AB и пересекающая прямую AD в точке D_1. Докажите, что*

а) если $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то и AB_1CD_1 — также вписанный четырехугольник;

б) если $ABCD$ — описанный четырехугольник, то и AB_1CD_1 — также описанный четырехугольник.

Доказательство. Докажем пункт б), поскольку пункт а) доказывается совсем просто (по существу, пункт а) включен в условие из чисто эстетических соображений). Ограничимся также случаем, когда $ABCD$ не является трапецией. Обозначим через K и M точки пересечения прямых AD и BC, AB и CD соответственно. Возможны два случая (рис. 7 и 8). Пусть P — точка пересечения прямых AB_1 и CD_1. В случае, соответствующем рисунку 7, имеем $PA=CM$, $PC=AM$. Поскольку $ABCD$ — описанный четырехугольник, то (см. первое равенство задачи 3) $KA+AM=KC+CM$. Заменяя AM и CM на PC и PA, будем иметь $KA+PC=KC+PA$ и в соответствии с задачей 3′, четырехугольник AB_1CD_1 является описанным. В случае, соответствующем рисунку 8, наоборот, исходя из утверждения задачи 3 для четырехугольника $ABCD$, получим, что для четырехугольника AB_1CD_1 выполняется утверждение задачи 3′.

В заключение предлагаем вам несколько задач для самостоятельного решения.

Задачи

1. ABC — равнобедренный треугольник, на основании AC которого взята точка M. Найдите расстояние между точками касания окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBM, со стороной BM, если $AM=a$, $MC=b$.

2. Последовательные стороны описанного пятиугольника равны a, b, c, d, e. Найдите отрезки, на которые разделена точкой касания сторона a.

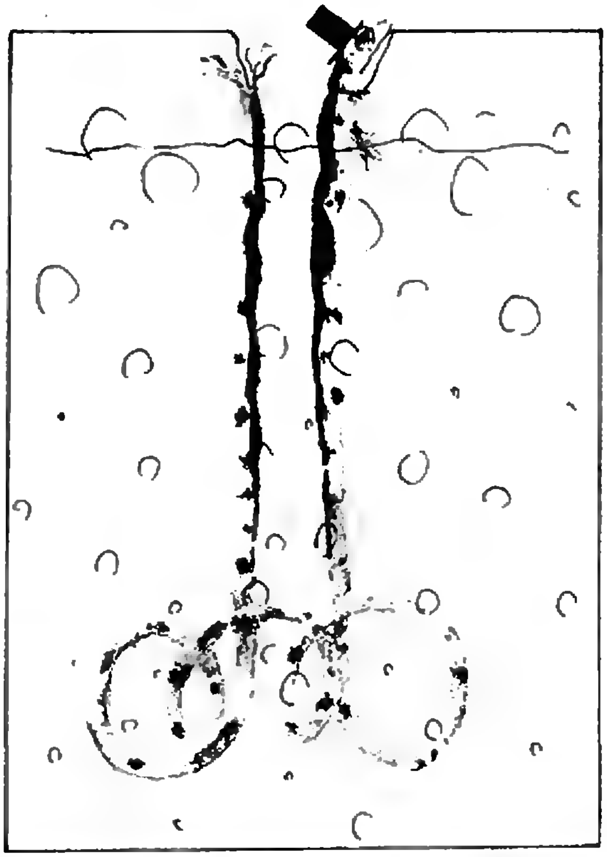
3. Докажите, что у описанного многоугольника с четным числом сторон суммы длин сторон, взятых через одну, равны.

4. Параллелограмм $ABCD$ прямыми, пересекающими стороны AB и CD, разделен на несколько трапеций, в каждую из которых можно вписать окружность. Докажите, что произведение отрезков, на которые оказалась разделена сторона AB, равно произведению отрезков, образовавшихся на стороне CD.

5. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M внутри треугольника. Рассмотрим три четырехугольника AB_1MC_1, BC_1MA_1 и CA_1MB_1. Докажите, что если два из этих четырехугольников являются описанными, то и третий также является описанным.

6. Докажите, что если боковые ребра четырехугольной пирамиды равны, то сумма двух двугранных углов при противоположных боковых ребрах пирамиды равна сумме двух других двугранных углов.

7. В пространстве даны два луча OA и OB. Найдите геометрическое место лучей OC, если величина $\alpha+\beta-\gamma$ является постоянной, где α, β и γ соответственно двугранные углы при ребрах OA, OB и OC получившегося трехгранного угла.



Лаборатория „Кванта"

«Электрический злодей и волшебное колечко»

Предлагаемые вашему вниманию задачи-вопросы взяты из книги американского ученого Дж. Уокера «Физический фейерверк». (В прошлом году издательство «Мир» выпустило второе издание этой книги, а первое издание увидело свет еще на десять лет раньше.) Почти все задачи так или иначе связаны с окружающим нас миром. Поэтому на многие вопросы вы сумеете ответить, лишь проведя соответствующие наблюдения или опыты. Ответы, приведенные в конце журнала, как правило, только уточняют задачу или подсказывают путь к ее решению.
Итак, наблюдайте и экспериментируйте.

Биоэлектричество

1. «Прилипание» к электрическому проводу. Если вы случайно схватитесь за электрический провод, так что через вашу руку пройдет ток порядка 25 мА, то не исключено, что вы будете не в силах оторвать руку от провода. Почему? Только не пытайтесь проверить это на себе нарочно — это опасно.

2. Электрический угорь. Как может поразить током электрический угорь? Крупный угорь вырабатывает напряжение до 600 В при токе до 1 А. Откуда он черпает такую невероятную мощность? Происходит ли непрерывный разряд угря через морскую воду? Почему угорь не поражает током сам себя?

Способность различных морских животных ориентироваться под водой долгое время оставалась загадкой. Однако исследования последних лет показали, что некоторые из этих животных реагируют на электрические поля, которые возникают вследствие движения океанских течений в магнитном поле Земли. Полагают, что именно эти поля помогают морским существам ориентироваться под водой. Во-первых, постарайтесь объяснить, как движение воды приводит к возникновению электрического поля. Во-вторых, каким образом животное может обнаружить столь слабое поле?

Электростатика

3. По ковру ходить опасно!

Иногда вас может «ударить током», если вы просто пройдетесь по ковру или поерзаете на сиденьи автомобиля. Очевидно, при этом каким-то образом накапливается заряд. Можете ли вы более подробно объяснить, что именно происходит? Почему, например, вас «бьет током», когда вы идете по ковру, но ничего не случается, если вы стоите на нем? Почему эти эффекты зависят от времени года?

На занятиях по физике обычно демонстрируют другой опыт: чтобы наэлектризовать стеклянные палочки, их яростно натирают кошачьим мехом или чем-то подобным. Почему их так натирают? Будут ли они электризоваться медленнее, если тереть их спокойнее? Действительно ли трение играет какую-то роль в электризации? Почему знак заряда палочки зависит от того, чем ее натирают? Почему, наконец, заряд палочки уменьшается, если ее подержать над зажженной спичкой?

4. Капельница Кельвина. Часто демонстрируется и другой опыт — капельница Кельвина (рис. 1). Вкратце суть его такова: вода капает сквозь две жестяные банки, которые соединены проводами, как показано на рисунке. Через некоторое время одна пара жестянок заряжается положительно, а другая — отрицательно. Почему? Прибор как будто симметричен. Почему же банки заряжаются по-разному? Можете ли вы, в частности, объяснить, почему начинается накопление зарядов?

5. Электризация проволочных изгородей при снегопаде. Поражения электрическим током часто связаны с песчаными и снежными бурями. Например, когда в Скалистых горах в Колорадо разыгрывается метель, проволочные изгороди в долине накапливают заряд такой величины, что, прикоснувшись к ним, человек или животное могут буквально быть сбиты с ног; иногда из изгородей в ближайшие заземленные предметы летят искры. Жители долин порой наблюдают искры, отскакивающие на целый метр от изгороди. (Трехсантиметровая искра может свалить вас с ног так, что вам придется отлеживаться несколько часов.) Каким образом падающий снег электризует изгороди?

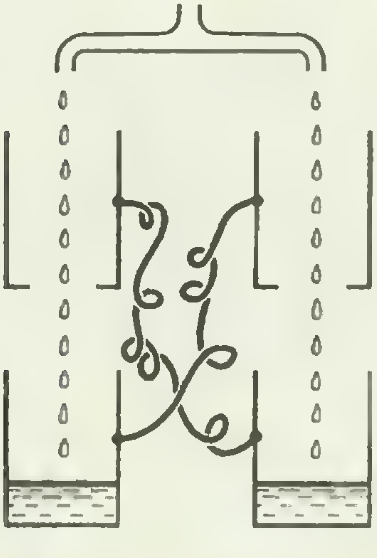


Рис. 1.

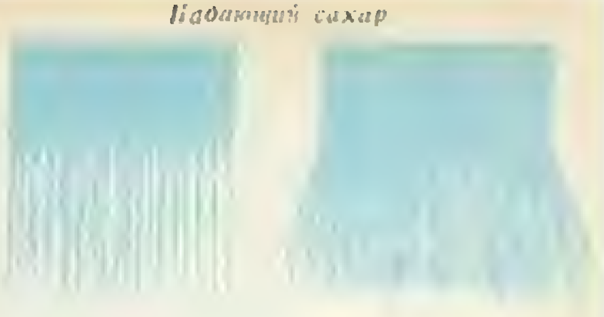


Рис. 2.

6. Свечение клейкой ленты. Если вы станете отматывать клейкую ленту с катушки в темной комнате, то увидите, что линия, по которой лента отрывается от рулона, слабо светится. Чем вызвано это свечение? Имеет ли оно какой-то определенный цвет? Если да, то почему?

7. Просеивание сахара. Однажды я просеивал сахарную пудру, чтобы посыпать ею пирог. Вдруг с пудрой произошло нечто странное: сначала она сыпалась прямо вниз, но постепенно все большая ее часть стала отлетать в сторону (рис. 2). Почему это произошло?

8. Отрицательный заряд дарит блаженство. Бытует мнение, что, попав в область отрицательного заряда, например под душ, человек испытывает невероятное блаженство. Итак, отрицательный заряд делает вас счастливыми, а положительный вызывает неприятные эмоции. Не исключено, что то удовольствие, которое мы получаем от душа, в равной мере обусловлено как ощущением собственной чистоты, так и отрицательным зарядом, возникающим в ванной. Как объяснить такое «эмоциональное воздействие» положительных и отрицательных зарядов?

Магнетизм

9. Электромагнитное «парение». Металлическое кольцо, надетое на катушку электромагнита, через которую пропускают переменный ток неизменной амплитуды, спокойно висит в воздухе (рис. 3). Однако если ток резко включить, то кольцо весьма

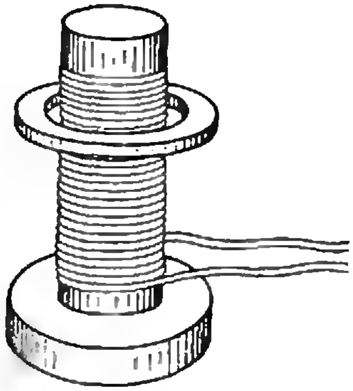


Рис. 3.

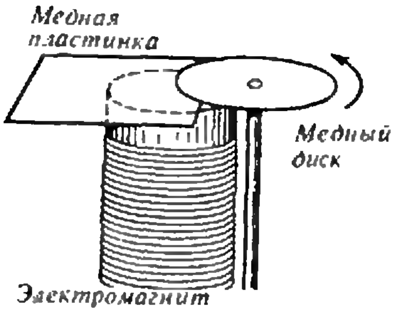


Рис. 4.

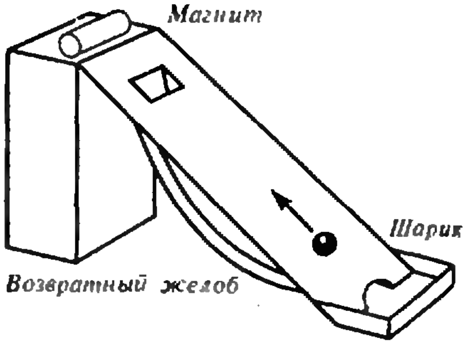


Рис. 5.

эффектно подпрыгнет. Почему кольцо ведет себя по-разному в этих двух случаях? Что удерживает кольцо во взвешенном состоянии и чем определяется высота, на которой оно висит? Насколько устойчиво положение кольца? (Возвращается ли кольцо в прежнее положение, если его сдвинуть с места или наклонить?) Если вы возьметесь предсказывать поведение различных колец в магнитном поле, интуиция может вас подвести. Попробуйте ради забавы угадать, что произойдет с кольцом в следующих случаях (а затем проверьте свои догадки на опыте).

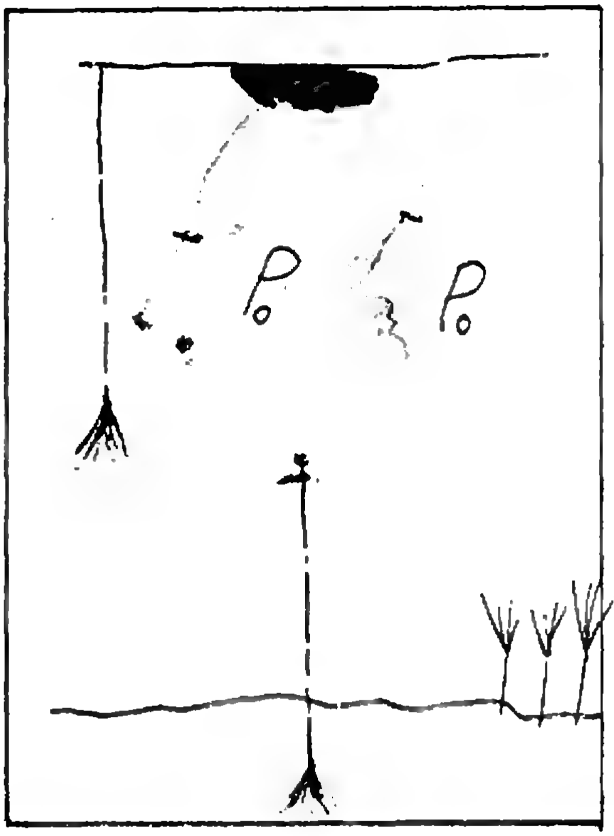
На одной ли высоте «повиснут» тонкое и толстое кольца, если их диаметры и плотности одинаковы? Что случится, если медленно увеличивать ток в катушке, на которую надеты кольца? Как будут вести себя кольца, если диаметр одного из них окажется больше, чем другого?

10. Вращение диска в «тени» магнитного поля. Над одним из полюсов переменного электромагнита поместите свободно вращающийся на оси медный диск (рис. 4). Диск будет отталкиваться от магнита, но не придет во вращение. Теперь вставьте между диском и магнитом медный лист, тем самым частично экранируя диск от магнитного поля. Диск тут же начнет вращаться. Почему?

11. Автомобильный спидометр. Притягивает ли подковообразный магнит алюминиевые предметы? Как правило, нет. (Почему?) Однако можно сделать устройство, в котором алюминий будет двигаться под действием магнита. Подвесьте подковообразный магнит на нитке над алюминиевым диском. Диск следует укрепить так, чтобы он мог вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. Если теперь раскрутить магнит, то диск начнет вращаться. Будет ли диск вращаться в ту же сторону, что и магнит?

Примерно так же работает спидометр автомобиля, с той лишь разницей, что в автомобильном спидометре вращающийся магнит находится внутри круглой алюминиевой коробочки, к которой прикреплены стрелка и пружинка; коробочка не вращается, так как ее удерживает пружина.

12. «Вечное» магнитное движение. Из множества забавных вечных двигателей, когда-либо придуманных людьми, одним из простейших является двигатель, сделанный епископом Честерским в 70-х годах XVII в. (рис. 5). Магнит, укрепленный на стойке, должен тянуть железный шарик вверх по наклонной плоскости, пока тот не поднимется до отверстия вверху. Провалившись в отверстие, шарик скатывается вниз по желобу и снова под действием магнита начинает двигаться вверх по наклонной плоскости. Забавно, не правда ли? Почему же этот двигатель не работает?



Практикум абитуриента

Газовые законы и механическое равновесие

Д. АЛЕКСАНДРОВ

Школьный курс физики принято разбивать на отдельные темы, например — «Основы динамики», «Газовые законы», «Электростатика» и т. п. Соответственно и задачи по физике обычно подвергаются такой же классификации. Хорошо это или нет?

При известном опыте подобное «распределение» может помочь абитуриенту уже при беглом ознакомлении с условием задачи прикинуть, какие физические законы пригодятся для ее решения. Однако нередко на вступительных экзаменах встречаются задачи, которые трудно отнести к каким-то конкретным темам. Это может вызвать определенные затруднения, в результате чего в общем несложная задача решена не будет.

В этой статье мы рассмотрим круг задач, которые с первого взгляда можно было бы назвать «газовыми». На самом же деле для их решения, помимо газовых законов, вам понадобятся также и другие законы, прежде всего — законы механического равновесия.

Задача 1. *Воздушный шарик, вынесенный из теплой комнаты ($t_1=+27\,^\circ C$) на мороз ($t_2=-23\,^\circ C$), некоторое время свободно плавает в воздухе. Определите массу резиновой оболочки шарика. Его диаметр $d=40$ см, молярная масса воздуха $M=29$ г/моль, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па. Упругостью оболочки можно пренебречь.*

С виду это обычная задача на газовые законы. Такое впечатление усиливают и заданные в условии величины — кроме как в уравнение Менделеева—Клапейрона (уравнение состояния идеального газа) их больше некуда подставить. С другой стороны, очевидно, что массу оболочки из этого уравнения найти нельзя. Как же быть?

Прочитаем условие задачи еще раз, более внимательно; порой наиболее ценная информация содержится не в числовых данных, а в словах. Обратим внимание на две фразы: «Воздушный шарик... свободно плавает в воздухе» и «Упругостью оболочки можно пренебречь». В первом предложении зашифровано условие механического равновесия шарика: сила тяжести резиновой оболочки и теплового воздуха внутри шарика уравновешивается выталкивающей силой (силой Архимеда). По закону Архимеда эта сила равна весу жидкости или газа в объеме погруженного в них тела. Вторая фраза означает равенство давлений воздуха внутри шарика и снаружи.

Итак, запишем прежде всего условие равновесия шарика (рис. 1):

$$m_0g+m_1g=m_2g,$$

где m_0 — искомая масса резиновой оболочки, m_1 и m_2 — массы теплого

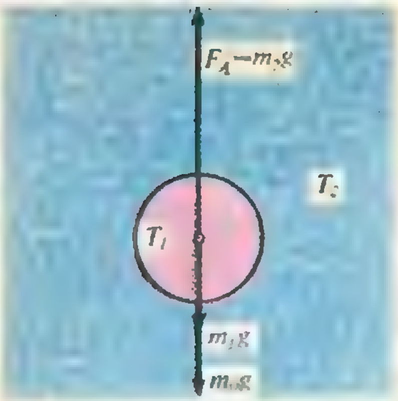


Рис. 1.

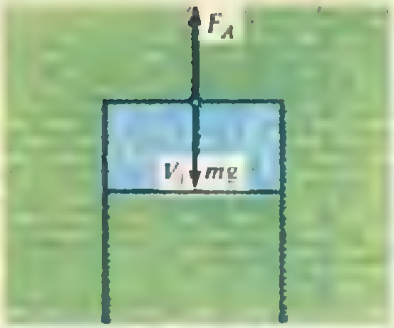


Рис. 2.

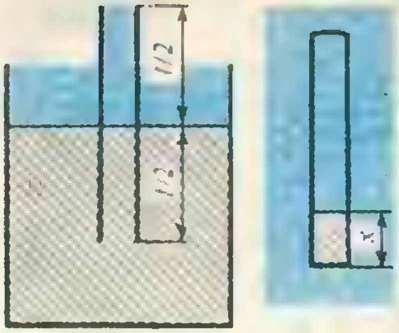


Рис. 3.

и холодного воздуха в объеме шарика. Из уравнений Менделеева—Клапейрона найдем m_1 и m_2:

$$m_1=\frac{Mp_0V}{RT_1},\ m_2=\frac{Mp_0V}{RT_2},$$

где $V=\pi d^3/6$

(здесь мы и воспользовались отсутствием упругости оболочки). Окончательно получаем

$$m_0=\frac{Mp_0\pi d^3}{6R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)=$$

$$7{,}8\cdot10^{-3}\text{ кг}=7{,}8\text{ г.}$$

Задача 2. *На какую глубину нужно погрузить в воду тонкостенный стакан, перевернутый вверх дном, чтобы он утонул? Масса стакана $m=100$ г, его объем $V=200$ мл, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.*

Будем считать, что стакан погружается очень медленно. В таком случае и стакан, и заполняющая его вода в каждый момент времени будут находиться в равновесии. Очевидно, для этого к стакану придется прикладывать силу, уравновешивающую сумму архимедовой силы и силы тяжести. Вблизи поверхности воды эта сила должна быть направлена вниз, так как из данных в условии задачи следует, что масса воды в объеме стакана больше массы самого стакана, и, следовательно, сила Архимеда в начальный момент больше силы тяжести. По мере погружения выталкивающая сила будет уменьшаться — она пропорциональна объему запертого в стакане воздуха, а он уменьшается, поскольку воздух сжимает все возрастающая сила давления со стороны воды. Нам нужно найти такую глубину, на которой архимедова сила сравняется по величине с силой тяжести. При погружении стакана на чуть большую глубину он утонет без посторонней помощи.

Теперь проведем соответствующие расчеты. Условие равновесия стакана в воде имеет вид (рис. 2)

$$mg=F_A,\text{ где }F_A=\rho gV_1.$$

Объем V_1 запертого воздуха найдем из закона Бойля — Мариотта (уравнения изотермического процесса), так как температуру можно считать постоянной (это подразумевалось в условии задачи, хотя и не оговаривалось явно):

$$p_0V=(p_0+\rho gh)V_1,$$

где h — искомая глубина, на которую погружен стакан, ρ — плотность воды.

Собрав вместе все уравнения, получим

$$mg=\frac{p_0\rho gV}{p_0+\rho gh},$$

откуда

$$h=\frac{p_0}{\rho g}\left(\frac{\rho V}{m}-1\right)=10\text{ м.}$$

Заметим, кстати, что давление водяного столба высотой 10 м как раз соответствует нормальному атмосферному давлению, равному приблизительно 10^5 Па.

Задача 3. *Открытую стеклянную трубку длиной $l=1$ м наполовину* *погружают в ртуть. Затем трубку сверху закрывают и вынимают (рис. 3). Какой длины столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление $p_0 = 750$ мм рт. ст.*

Пренебрежем капиллярными явлениями и будем считать, что ртуть из трубки вытекает очень медленно. Тогда очевидно, что ртуть будет вытекать до тех пор, пока разность сил давления воздуха снаружи и внутри трубки не уравновесит силу тяжести оставшегося столбика ртути. Отсюда найдем давление внутри трубки: $p = p_0 - \rho g x$, где x — искомая длина оставшегося столбика ртути. С другой стороны, это же давление можно найти из закона Бойля — Мариотта (температуру считаем постоянной)

$$p_0 \frac{l}{2} S = p(l-x)S.$$

Исключив p из обоих уравнений, получим

$$p_0 \frac{l}{2} = (p_0 - \rho g x)(l-x).$$

Это уравнение можно упростить, учитывая, что атмосферное давление задано в миллиметрах ртутного столба (в задачах такого рода это действительно удобнее). Подставив $p_0 = \rho g H$, где $H = 750$ мм, получим квадратное уравнение

$$x^2 - (H+l)x + \frac{Hl}{2} = 0.$$

Больший корень этого уравнения превышает длину трубки и нам не подходит. Остается второй корень:

$$x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + l^2}}{2} = 0{,}25 \text{ м} = 25 \text{ см}.$$

Задача 4. *В сообщающиеся цилиндрические сосуды одинаковых размеров, один из которых запаян, а второй открыт, налита ртуть. Уровни ртути в сосудах одинаковы, длина части запаянного сосуда, заполненной воздухом, равна l_0, атмосферное давление p_0, измеренное в миллиметрах ртутного столба, равно H. Какой станет разность уровней ртути в сосудах, если абсолютную температуру воздуха в запаянном сосуде увеличить в 2 раза?*

Решение этой задачи аналогично решению предыдущей, с той лишь разницей, что закон Бойля — Мариотта надо заменить объединенным газовым законом, поскольку температура газа изменяется:

$$\frac{p_0 l_0}{T} = \frac{p(l_0 + x)}{2T}.$$

Здесь x — расстояние, на которое опустится уровень ртути в запаянном сосуде (рис. 4). На такую же величину поднимется уровень ртути в открытом сосуде (диаметры сосудов одинаковы), поэтому уравнение гидростатики примет вид

$$p = p_0 + 2\rho g x.$$

Отсюда, подставив $p_0 = \rho g H$, получаем квадратное уравнение

$$2x^2 + (H + 2l_0)x - Hl_0 = 0.$$

Один корень этого уравнения отрицательный и не может быть ответом к задаче. Поэтому получаем

$$x = \left(\sqrt{(H+2l_0)^2 + 8Hl_0} - (H + 2l_0)\right)/4.$$

Таким образом, искомая разность уровней ртути в сосудах равна

$$h = 2x.$$

Задача 5. *Запаянный с одного конца капилляр, длина которого l,*

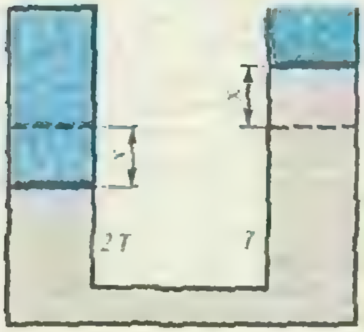


Рис. 4.

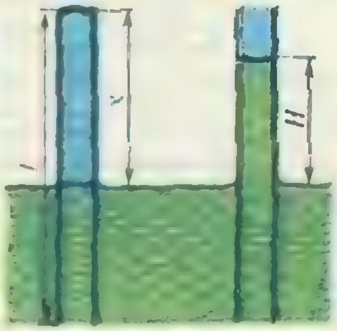


Рис. 5.

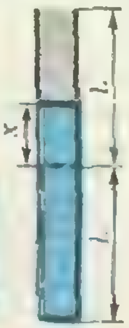


Рис. 6.

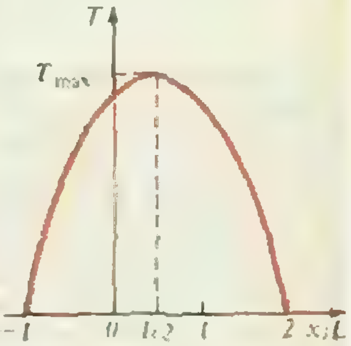


Рис. 7.

опускают открытым концом в сосуд с водой так, что уровни воды в сосуде и капилляре совпадают (рис. 5). Определите длину непогруженной части капилляра, если в таком же открытом капилляре вода поднимается на высоту H. Атмосферное давление p_0.

Решая третью задачу, мы пренебрегли поверхностными явлениями в жидкости. Это действительно можно делать, но только в том случае, если радиус трубки достаточно велик, а значит, силы поверхностного натяжения малы. В данной задаче с капилляром это условие уже не выполняется.

При погружении запаянного капилляра в воду запертый в нем воздух сжимается, и его давление p становится больше атмосферного. В состоянии равновесия разность давлений воздуха уравновешивается дополнительным давлением, обусловленным силами поверхностного натяжения. В открытом капилляре это давление компенсировало давление столба воды плотностью ρ и высотой H. Так как силы поверхностного натяжения зависят лишь от самой жидкости и от степени ее смачивания стенок сосуда, а и то и другое одинаково для запаянного и открытого капилляров, можно записать:

$$p-p_0=\rho gH.$$

Согласно закону Бойля — Мариотта,

$$px=p_0l,$$

где x — искомая длина «воздушной» части запаянного капилляра. Решая эти уравнения, получим

$$x=\frac{p_0l}{p_0+\rho gH}.$$

В заключение — более сложная задача, в которой обыгрывается интересный механический эффект.

Задача 6. *Нижний конец вертикальной узкой трубки длиной $2L$ (в мм) запаян, а верхний открыт в атмосферу. В нижней половине трубки находится газ при температуре T_0, а верхняя половина трубки заполнена ртутью. Трубку начинают медленно нагревать. До какой минимальной температуры нужно нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление p_0, измеренное в миллиметрах ртутного столба, равно L.*

Найдем сначала, при какой температуре T газ в трубке вытеснит столбик ртути длиной x (рис. 6). Для этого запишем объединенный газовый закон и уравнение гидростатики:

$$\frac{(p_0+\rho gL)L}{T_0}=\frac{p(L+x)}{T},$$

$$p=p_0+\rho g(L-x).$$

Учитывая, что $p_0=\rho gL$, получим

$$T=T_0\left(1-\frac{x}{2L}\right)\left(1+\frac{x}{L}\right).$$

Если попытаться найти из этой формулы ответ к задаче, подставив $x=L$, то получится, что $T=T_0$. Другими словами, газ и не надо было нагревать вовсе. Но это не так. Дело в том, что функция $T(x)$ — не монотонная (рис. 7) и при $x=L/2$ имеет максимум, равный $T_{\max}=9/8T_0$ (чтобы это получить, вспомним, что вершина параболы лежит посередине между корнями, а они, очевидно, равны $x_1=2L$ и $x_2=-L$). Так вот, для вытеснения всей ртути из трубки ее достаточно нагреть до температуры $T_{\max}$, при которой равновесие ртути становится неустойчивым, а дальше все произойдет само собой.

Упражнения

1. Воздушный шарик объемом $V=1$ м^3 завис на высоте $h=1{,}5$ км, где плотность воздуха (его молярная масса $M_в=29$ г/моль) на 20 % меньше, чем у поверхности земли. Оболочка шарика, нерастяжимая и герметичная, имеет массу $m=770$ г. Температура воздуха у поверхности $T=300$ К, давление $p=10^5$ Па. Каким газом заполнен шарик?

2. На какую глубину в жидкость плотности ρ надо погрузить открытую трубку длиной L, чтобы, закрыв верхнее отверстие, вынуть столбик жидкости длиной $L/2$? Атмосферное давление p_0.

3. На поверхности жидкости плотности ρ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько погрузится стакан, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана H, давление воздуха p_0.

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9, 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (и приложить две фотокарточки размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 939-26-56.

Школа будущих инженеров

Дорогие ребята! Если вы любите изобретать и конструировать, то есть не равнодушны к инженерному творчеству, если вы хотите научиться логически мыслить, глубже узнать, понять и полюбить физику, математику, овладеть электронно-вычислительной техникой, приглашаем вас в Заочную инженерную физико-математическую школу. Ходить на уроки в этой школе не придется — мы будем посылать вам по почте и объяснения нового материала, и контрольные задания, а вы будете присылать нам ответы. Не будет обычных дневников и оценок, главное в нашей школе — Знания и Творчество!

Вы будете изучать не какой-то один предмет сам по себе, а комплекс наук, которые должен знать и уметь использовать современный инженер. Не зря Козьма Прутков писал: «Одностороннего специалиста уподоблю флюсу!» Специалистов математиков, физиков — сотни, а инженеров — миллионы! И еще: современный инженер должен не просто знать и уметь, он должен Творить каждый день, каждую минуту своей работы. Этому и будет учить наша школа в течение трех лет.

Конечно, мы будем общаться не только по почте. Будут слеты, олимпиады учащихся, экскурсии в вычислительные центры, музеи и многое другое. Такие школы, как наша, существуют во многих странах, и мы предполагаем обмен группами с ними.

Итак, Заочная инженерная физико-математическая школа объявляет набор! Для того чтобы быть зачисленным в 9-й класс, нужно выполнить конкурсное задание, аккуратно переписать его в тонкую тетрадь и до 15 октября 1990 года отправить по адресу: 190031, Ленинград, Московский проспект, д. 9, ЛИИЖТ, ЗИФМШ, на конкурс. Результаты конкурса мы сообщим вам письменно.

Желаем успеха!

Конкурсное задание ЗИФМШ

1. Два поезда идут навстречу друг другу, один со скоростью 36 км/ч, другой со скоростью 54 км/ч. Пассажир в 1-м поезде замечает, что 2-й поезд проходит мимо него в течение 6 секунд. Какова длина второго поезда?

2. В металлических деталях при отливке часто образуются раковины — участки, заполненные воздухом. Снаружи они не видны, но могут существенно влиять на прочность детали. Как проверить, имеются ли такие раковины в детали, если у вас есть деталь из того же металла другой формы и объема, заведомо без раковин, мензурка с водой, в которую может поместиться любая из деталей, и весы?

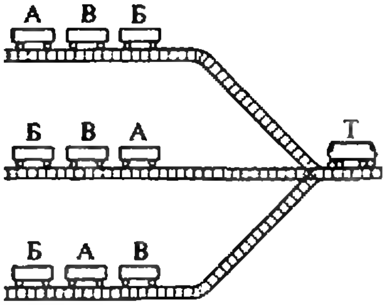
3. Два электровоза проходят путь от станции *А* до станции *В*, причем один из них первую половину пути прошел со скоростью 80 км/ч, а вторую половину пути со скоростью 40 км/ч. Второй электровоз первую половину времени шел со скоростью 80 км/ч, а вторую половину времени — 40 км/ч. Какой из них затратил на путь больше времени и чему равны их средние скорости?

4. Лампа установлена в середине длинного вагона. Для того, чтобы включить или выключить ее, приходится пройти через весь вагон. Можно ли установить два выключателя (или переключателя) в начале и в конце вагона, чтобы свет можно было включить или выключить любым из них? Нарисуйте схему соединений лампы и выключателей.

5. Как в солнечный день определить высоту телеграфного столба с помощью одной линейки? На столб, конечно, влезать нельзя.

6. На каждом из трех путей стоят вперемешку вагоны с арбузами (А), бананами (Б) и виноградом (В) так, как это изображено на рисунке.

Опишите последовательность действий машиниста, необходимых для того, чтобы сформировать на каждом из путей составы с одинаковыми плодами, если маневровый тепловоз (Т) может передвигать любое количество вагонов одновременно в любую сторону по любому пути. Попробуйте составить общую «инструкцию» действий машиниста, если число вагонов произвольное, используя любую краткую форму записи, которую сможете придумать.



Дополнительная задача. Если вы сами придумали полезное устройство, то опишите, для чего оно предназначено, как устроено и как его использовать. Ваше изобретение может заменить решение одной из предложенных задач. Его можно также послать в патентное бюро журнала «Юный техник».

Ответы, указания, решения

«Электрический злодей и волшебное колечко»

1. Руку удерживают на проводе отнюдь не электрические силы. Проходя по мышцам руки, ток заставляет их сокращаться, и рука крепко «схватывает» провод. Электрики, работая с проводами, которые находятся (или могут оказаться) под напряжением, стараются прикасаться к ним тыльной стороной руки. В этом случае сокращение мышц под действием тока, напротив, отбрасывает руку от провода.

2. Под воздействием нервного импульса некоторые особые клетки начинают пропускать через мембраны поток ионов (электрический ток). У электрической рыбы эти клетки соединены последовательно от головы до хвоста, и между головой и хвостом рыбы создается большая разность потенциалов (разность потенциалов в каждой клетке равна примерно 0,15 В). Множество таких последовательных цепочек электрических клеток соединяются параллельно. В результате возникает ток, достаточный для того, чтобы оглушить или убить жертву или врага. Например, у гигантского морского ската Torpedo nobiliana параллельно соединены 2000 таких цепочек, каждая из которых содержит около 1000 соединенных последовательно электрических клеток. При подобном последовательно-параллельном соединении через каждую клетку течет слабый ток, а суммарный ток достаточно велик. У пресноводных электрических рыб последовательно соединяется большее число клеток, так как проводимость пресной воды значительно меньше, и чтобы рыба могла создать ток такой же величины, разность потенциалов между ее головой и хвостом должна быть значительно больше.

3. Когда два материала (скажем, подошвы туфель и ковер или кошачий мех и стеклянная палочка) соприкасаются, электроны из одного из них туннелируют через поверхностный энергетический барьер в другой. Если, например, стекло соприкасается с кошачьим мехом, электроны туннелируют с поверхности стекла на поверхность меха. Поскольку ни тот, ни другой из этих материалов не является хорошим проводником, электроны могут переходить с одной поверхности на другую лишь в тех точках, где материалы плотно соприкасаются. При трении одной поверхности о другую площадь контакта значительно возрастает, благодаря чему достигается переход большого числа электронов. Материал, который теряет электроны, заряжается положительно, материал, который принимает их, заряжается отрицательно.

4. Прибор необходимо отрегулировать так, чтобы вытекающие из трубок струйки разбивались на капли примерно на уровне верхних банок. Вначале, когда включают воду, одна банка имеет чуть больший отрицательный заряд, чем другая. Какая именно из банок имеет больший заряд, определяется чистой случайностью, так

как изначальный заряд банок обусловлен космическим излучением или естественной радиоактивностью. Допустим для определенности, что больший отрицательный заряд имеет нижняя левая банка. Тогда, поскольку банки крест-накрест соединены между собой проводами, верхняя правая банка будет также иметь больший отрицательный заряд, чем верхняя левая. Правая струйка, проходя через верхнюю правую банку, поляризуется. Если капли образуются именно на уровне этой банки, то они заряжаются положительно, так как отрицательный заряд отталкивается отрицательно заряженной банкой вверх по струйке. Далее эти положительно заряженные капли падают в нижнюю правую банку, и ее положительный заряд возрастает. Несмотря на то что начальная разность потенциалов между банками ничтожна, в некоторых самодельных капельницах Кельвина удается получить разность потенциалов до 15 кВ.

5. Электризация проволочных изгородей, самолетов и других металлических объектов под действием быстро летящего снега также объясняется переносом электронов (см. задачу 3). Частицы снега отдают электроны металлическим предметам, и те приобретают отрицательный заряд.

6. По-видимому, происходит разделение зарядов при сматывании ленты с рулона. Липкий слой приобретает заряд, знак которого противоположен знаку заряда на чистой стороне ленты. Свечение — это электрический разряд между разделяемыми поверхностями клейкой ленты.

7. При просеивании сахарная пудра заряжается в результате процессов, аналогичных описанным в задачах 5 и 6. Поскольку падающие крупинки сахара имеют заряд одного знака, они отталкиваются друг от друга, и часть сахара отлетает вбок.

8. Влияние электрических зарядов на организм человека пока не получило достаточного объяснения.

9. Изменяющийся ток в катушке создает изменяющееся магнитное поле. Это поле возбуждает в кольце ток, магнитное поле которого направлено противоположно магнитному полю катушки. Магнитное поле катушки заставляет кольцо «парить» на катушке. Когда ток включают, резкий скачок тока в катушке возбуждает в кольце большой ток и соответственно большое магнитное поле. Из-за взаимодействия полей кольцо подпрыгивает.

10. Переменное магнитное поле возбуждает токи как в неподвижной медной пластинке, так и в диске. В отсутствие пластинки ток существовал бы только в диске и был бы направлен так, что его магнитное поле вызывало бы отталкивание всего диска от магнита. Однако, когда диск частично экранирован от магнита пластинкой, токи, индуцированные в диске и пластинке, вызывают их взаимное притяжение (магнитное поле одного проводника втягивает другой проводник с током), и диск приходит во вращение.

11. Переменное магнитное поле, создаваемое вращающимся магнитом, возбуждает в алюминиевом диске токи, которые в свою очередь создают собственное магнитное поле. При взаимодействии этих магнитных полей возникает момент сил, действующих на диск, который заставляет диск вращаться в том же направлении, что и магнит.

12. Почему бы вам самим не построить этот простой прибор и не посмотреть, будет ли он работать? Если магнитное поле достаточно велико, чтобы втащить шарик на наклонную плоскость, то не окажется ли оно достаточно сильным и для того, чтобы не дать шарику скатиться вниз по желобу?

Газовые законы и механическое равновесие

1. Шарик заполнен гелием.

2. $x=\frac{L}{2}\left(1+\frac{\varrho gL}{2p_0}\right)$.

3. $x=H\frac{2p_0+3\varrho gH}{4p_0+2\varrho gH}$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. У торговца было 1480 фунтов.

2. Очевидно, что $П=2$, так как в противном случае число слева не будет трехзначным. Так как число $ТУН$ — полный квадрат, то $Н$ может принимать лишь значения 1, 4, 5, 6, 9. Но если двузначное число начинается с 4 или большей цифры, то его квадрат уже четырехзначное число. Итак, $Н=1$. Осталось заметить, что квадрат числа оканчивается на 1 лишь в том случае, если само число оканчивается на 1 или 9, следовательно, $НЕ=19$, а $ТУН=19^2=361$.

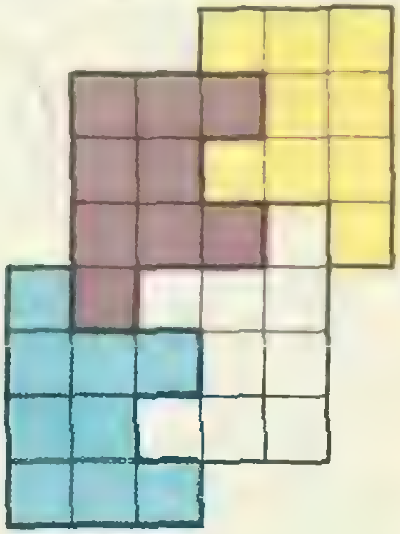


Рис. 1.

3. См. рис. 1.

4. Пусть $(10a+b)^2=100n^2+m^2$. Заметим, что $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$, поэтому $n^2\geqslant a^2$, но $(10a+b)^2<(10a+10)^2=100(a+1)^2$, поэтому $n^2<(a+1)^2$, следовательно, $n^2=a^2$. Далее, $a>3$, но меньше, чем 5, так как $20ab$ меньше 100. Следовательно, $a=4$. Поскольку $20\cdot4\cdot b<100$, получаем, что $b=1$. Ответ: это число $41^2=1681$.

5. Рассмотрим рисунок 2. Треугольник AOB — равнобедренный прямоугольный, поэтому радиус двухлаптевой монеты равен радиусу одно-

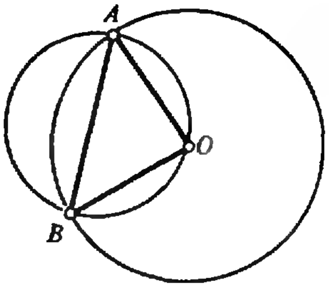


Рис. 2.

лаптевой монеты, умноженному на $\sqrt{2}$, а площадь большей монеты вдвое больше площади меньшей монеты. Чтобы веса этих монет были в отношении 1:2, толщина каждой монеты (в 1 и 2 лапти) должна быть одинаковой, т. е. равной 1 мм. То же рассуждение примените к паре монет в 2 и 4 лапти.

с. обложки

(см. «Квант» № 6)

1. См. рис. 3.
2. См. рис. 4.
3. См. рис. 5, 6.
4. См. рис. 7.

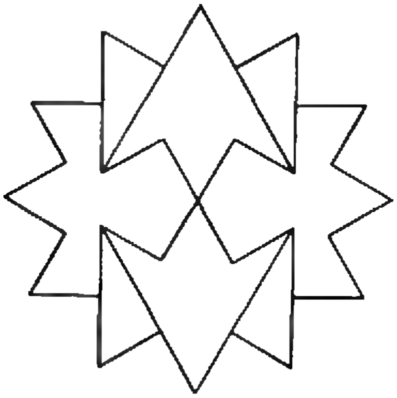


Рис. 3.

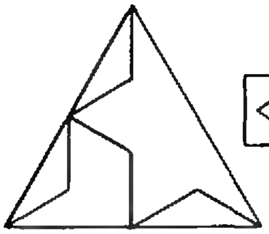


Рис. 4.

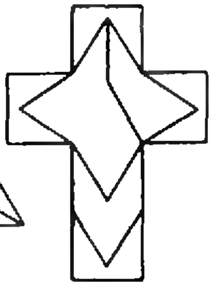


Рис. 7.

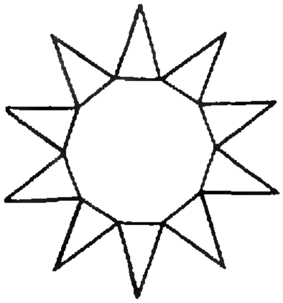


Рис. 5.

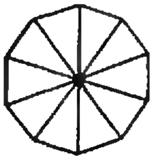


Рис. 6.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, Л. Стасенко,
С. Табачников, В. Уроев, А. Черноуцан,
А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев,
А. Серебров, Я. Смородинский, И. Сурин,
Е. Сурков, В. Фабрикант, Л. Фаддеев,
В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров, Л. Кардасевич,
И. Клумова, Т. Петрова, С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов, С. Лухин, Э. Назаров,
И. Смирнова, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор Н. Румянцева

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

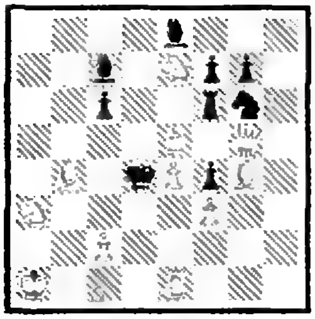
Сдано в набор 24.05.90. Подписано к печати 29.06.90.
Т-09812. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,92.
Тираж 184 350 экз. Заказ 947. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

«ОПРОВЕРЖЕНИЕ» ШУТКИ

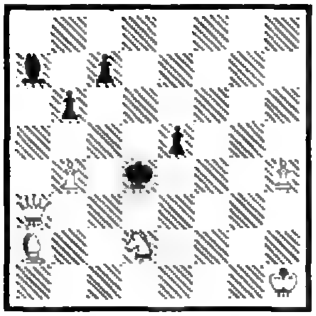
В «Кванте» № 6 за 1988 год мы рассказывали о том, как компьютеры опровергают шахматные задачи, находят в них побочные решения и другие дефекты. Вот еще два интересных примера на эту тему.



Л. Лошинский, 1964 г.
Мат в 3 хода.

Перед нами задача гроссмейстера по композиции, завоевавшая первый раз на одном из конкурсов. После 1. Ле2 создана угроза 2. Лd2+ Кре3 3. Кc4×. Защита состоит во взятии слоном или конем на e5: 1...С:e5 2. Cd7 и грозит 3. Фg1×; если уходит слон с e5, то либо 3. Фc5×, либо (при 2...Cd6) 3. К:c6×. После 1...К:e5 2. Сe6 вновь грозит 3. Фg1×; если уходит конь с e5, то либо 3. Фc5×, либо (при 2...Kd7) 3. К:c6× (2...Лg6 3. Kf5×, 2...Kd3 3. c3×).

Увы, компьютер нашел другое решение с прямолинейным вступлением 1. ef, но зато с эффектным вторым ходом — 1...Cd6 2. Фe5+!! С(К):e5 3. Kf5×; 2...Кр:e5 3. Cc3×. На 1...Cb6 следует 2. Kpb2! и 3. Cc3× (2...Кe5 3. Kf5×).

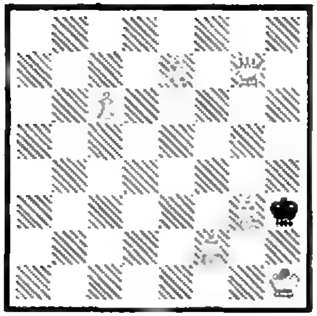


Л. Куббель, 1926 г.
Мат в 4 хода.

Эта задача принадлежит классику шахматной композиции. Авторское решение 1. b5 с угрозой 2. Се6. 3. Кc4 и 4. Фc3×. Основной вариант: 1...e4 (1...c6 2. Kf1 e4 3. Фd6+ Крc3 4. Фd2×) 2. Cg8!! e3 3. Фb2+ Крc5 4. Кe4×, 3...Крd3 4. Cc4×, 2...Крe5 3. Фg3+ Крd4 4. Кb3×.

Компьютер обнаружил совсем другое решение: 1. Фb3 c6 2. Kf1 (грозит 3. Фe3×) 2...c4 3. Фb2+ Крd3 4. Фd2×, 2...Крe4 3. Cb1+ Крd4 (3...Крf4 4. Фg3×) 4. Фd3×; 1...e4 2. Кb1! (грозит 3. Фc3×) 2...Крe5 (2...e3 3. Фd5×) 3. Фg3+ Крf6 4. Фg5×.

Опровержение этой серьезной задачи Куббеля напомнило мне одну интересную историю с «опровержением» его же шуточной задачи, правда, дело на сей раз обошлось без участия компьютера.



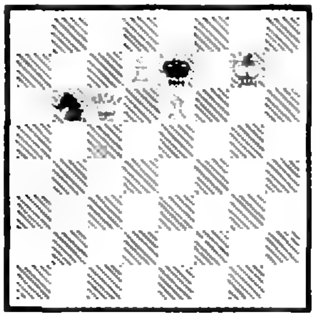
Л. Куббель.
Мат в 2 хода.

Одного черного короля заматовать в два хода невозможно, гораздо легче... двух! **1. e8Кр (черный!!) Крd8 2. Фd7×.** Эффектный мат сразу двум королям.

Но раз шутки не запрещены, был придуман другой забавный способ выполнить задание: доска поворачивается на 90° против часовой стрелки и следует мат в один ход: 1. g7×. Последовало предложение исправить популярную шутку Куббеля, переставив пешку с f2 на h2. Теперь поворот доски на 90° не помогает. Однако, повернув доску еще на 90° (а всего на 180°), я обнаружил побочное решение и при пешке на h2: 1. Крb8! Крa5 2. a8Ф(Л)×.

Несколько лет назад я решил опубликовать эту задачу в журнале «64 — Шахматное обозрение» и предложить читателям исправить ее. На призыв откликнулось множество шахматистов. Вот лучшее исправление, предложенное сразу 15-ю читателями: белый король ставится на место пешки f2, а пешка g3 заменяется слоном. Повороты теперь не опасны, и решение Куббеля строго единственное. К тому же в задаче сэкономлена целая фигура.

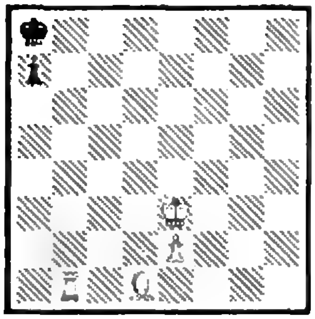
Автор следующей позиции вообще убрал все фигуры из этого угла.



Б. Полушкин.
Мат в 2 хода.

1. d8Кр(черный)!, и на любое отступление коня — **2. Фd7×.**

А вот позиция, в которой используются обе шуточные темы.

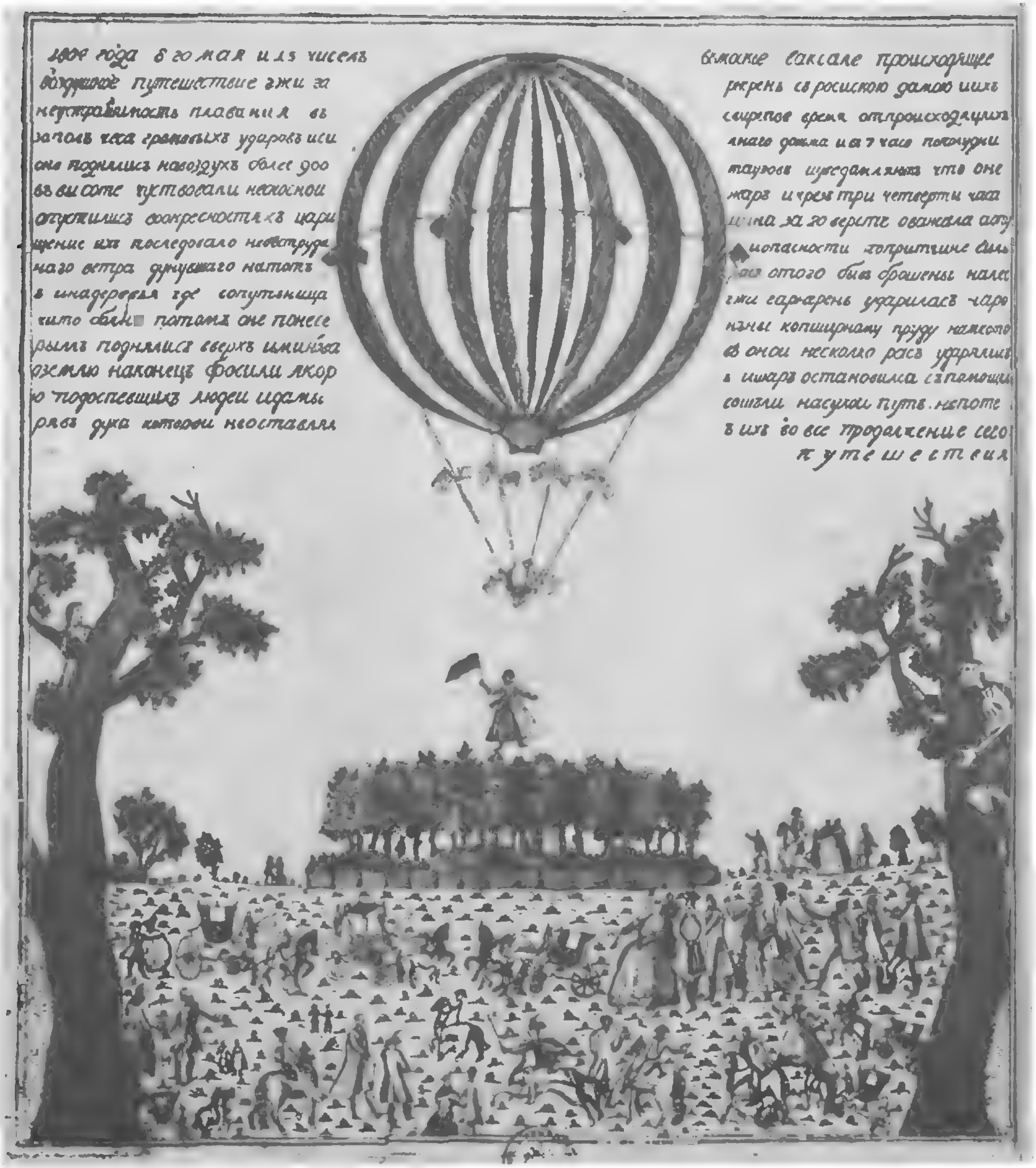


А. Дикусаров.
Мат в 2 хода.

Слон не может попасть на большую диагональ, поэтому одного короля в два хода не заматуешь. А двух? Сначала доска поворачивается на 180°, после чего решает **1. d8Кр (черный)! Крc8 2. Сc6×!** Мат обоим королям, причем для реализации замысла вновь хватило шести фигур.

Может, кто-нибудь из читателей «Кванта» в часы досуга тоже придумает какие-нибудь забавные манипуляции с доской и фигурами!?

Е. Гик



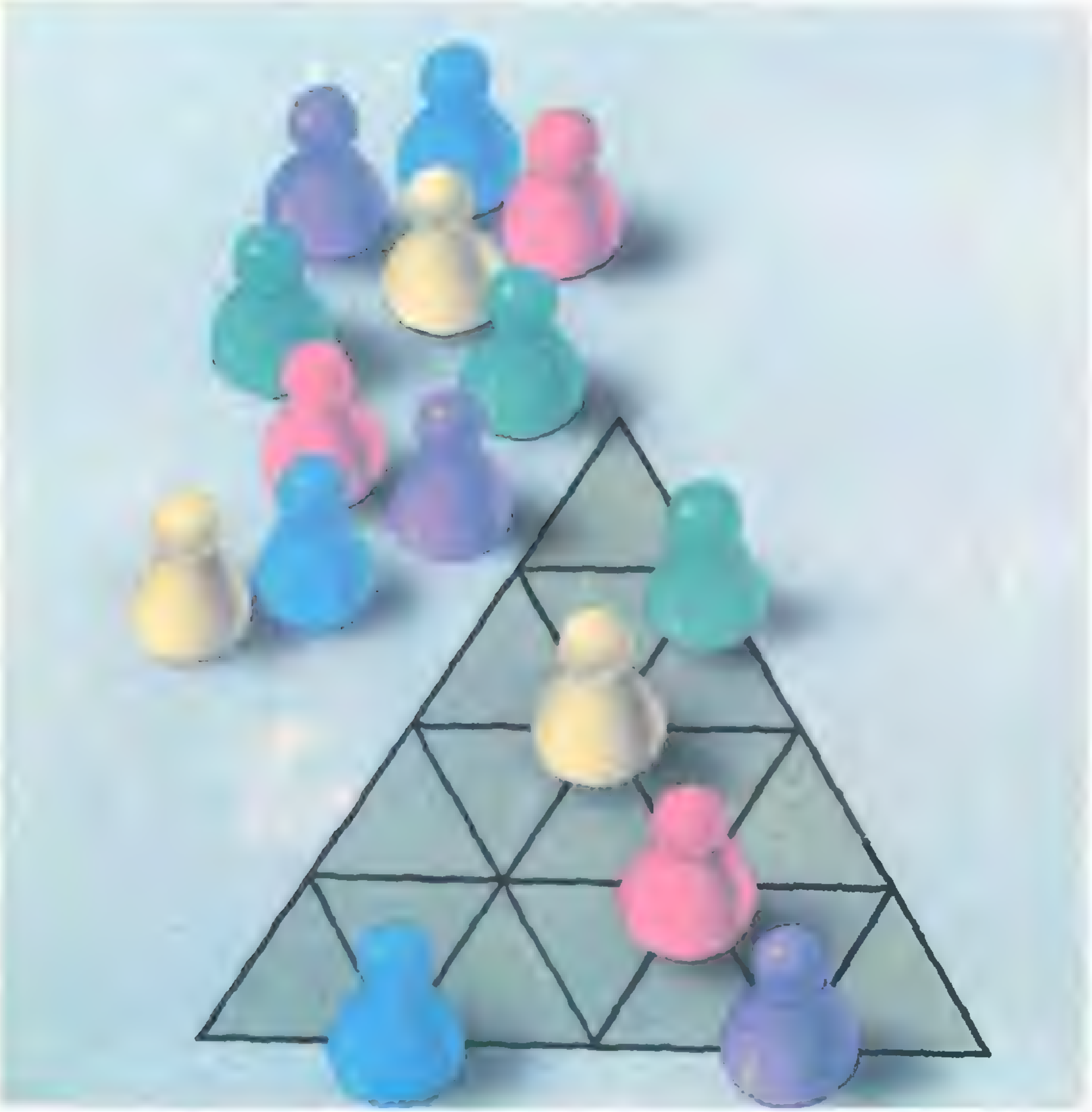
1804 года 6 го мая и 15 числъ
воздушное путешествие гжи за
неудобность плавания въ
зачаль часа громовыхъ ударовъ иси
оне поднялись навоздухъ более 900
въ висоте путвовали неспосной
опустились воокрестностяхъ цари
щение ихъ последовало невструдне
наго ветра дующаго натотъ
в инадеревня где сопутьница
чито обен потомъ оне понесе
рымъ поднялися сверхъ иминза
оземлю наконецъ бросили якор
ю подоспевшихъ людеи идамы
рявъ духа которои неоставля

въ москве в саксале происходящее
рнерень съ росиского дамою иихъ
своиствое время отпроисходящихъ
анаго дожжа и а 7 часе пополудни
таувое извещаляють что оне
наръ и чрезъ три четверти часа
щина за 20 верстъ оважала аоту
и опасности хопритчине вил
оа отого бьва брошены нале
гжи гарнерень ударилась чаро
нэны копищурнаму пруду намкото
въ онои несколько расъ ударялись
и шаръ остановился с помощи
сошли насухои путь. непоте
в ихъ во все продолжение сего
путешествия

45 коп.
Индекс 70465

Головоломка, которую вы здесь видите, вряд ли окажется для вас крепким орешком: требуется расставить 15 фишек пяти цветов в узлах треугольного поля так, чтобы ни на одной линии, параллельной его стороне, цвета не повторялись. Однако исследование этой головоломки для полей произвольного размера (n полей вдоль каждой стороны и, конечно, n цветов, $n=2, 3, \ldots$) — уже вполне серьезная задача. Очевидно, что головоломка неразрешима для $n=2$. Имеется по крайней мере еще одно «нехорошее» значение n. Найдите его. А вот задача посложнее: придумайте общий способ решения головоломки при нечетных n. Быть может, ваш способ окажется пригодным и для четных n; нам общее решение для четного случая неизвестно.

Д. К.



НОМЕР
9

Квант
1990
9
Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *П. Блиох.* Со стороны виднее
8 *А. Барг. С. Лицын.* Что есть Фортуна,
17 *Р. Морик. Р. Хобби.* Ультразвук в медицине

Задачник «Кванта»

23 Задачи М1241 — М1245, Ф1248 — Ф1252
24 Решения задач М1216 — М1220, Ф1228 — Ф1232

«Квант» для младших школьников

35 Задачи
36 *В. Бронштэн.* Кто придумал «ночезрительную трубу»?

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
Физика 9, 10, 11:

42 Кинематика плоскопараллельного движения
44 Генератор незатухающих колебаний
47 Избранные школьные задачи по физике
48 Конкурс «Математика 6—8»

Р — значит ракета

50 *К. Феоктистов.* Полет к звездам

Математический кружок

58 *С. Генкин, Л. Курляндчик.* Числовые конструкции

Практикум абитуриента

62 *А. Гольдман, Л. Звавич.* Числовые средние и геометрия
65 *В. Шуликовская.* Неравенство Коши и объемы

Информация

66 Памяти академика Колмогорова

Игры и головоломки

67 Движущиеся игрушки из картона и бумаги
69 Головоломка «цветной треугольник»

Олимпиады

70 Задачи LIII Московской математической олимпиады
71 Избранные задачи Московской олимпиады по физике
73 Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

74 **Ответы, указания, решения**
79 **Анкета 9—90**
«Квант» улыбается *(20)*
Нам пишут *(22)*
Смесь *(16, 39)*
Реклама *(21, 49)*

Наша обложка

1 *«Изображение» сердца человека, полученное с помощью... ультразвука (см. с. 17).*
2 *Репродукция картины русского живописца Л. Бакста (1866—1924) «Древний ужас» (1908 г.). Что изобразил художник — стихию, рушащийся мир? А может, в год падения Тунгусского метеорита Бакст «увидел» путь освоения Вселенной, который сегодня предлагает К. Феоктистов (см. с. 50)?*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «ходом ладьи».*

© Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1990

СО СТОРОНЫ ВИДНЕЕ

(Рассказ об РБО)

Доктор физико-математических наук
П. БЛИОХ

Взгляните на рисунок 1. Как четко видны на снимке береговая линия, река и детали рельефа местности. На вопрос: каковы были условия освещения во время фотографирования? — почти наверняка последует ответ: был ясный солнечный день, солнце находилось со стороны верхней части снимка, так как склоны гор, обращенные в ту сторону, освещены, а противоположные склоны погружены в тень.

Однако не будем торопиться. Обратите внимание: тени гор в верхней части снимка короче, чем в нижней. Значит, для объектов, запечатленных на верхней части снимка, солнце было ближе к зениту, чем для нижних. Но на участке местности в несколько десятков километров (а судя по снимку масштаб примерно такой) земля освещается солнцем практически под одним и тем же углом. Следовательно, ответ по поводу условий освещения содержит какое-то противоречие.

Этого не произошло бы, если бы мы заранее предупредили, что на рисунке 1 приведена не фотография, а *«радиофотография»* — снимок, сделанный не в световых, а в радиолучах (с помощью радиоволн). Солнце, разумеется, тут вообще не при чем, а источником «освещения» является радиолокатор, установленный на самолете. Самолет пролетал где-то за верхней границей снимка, и углы падения радиоволн были тем круче (больше), чем выше (на снимке) на-

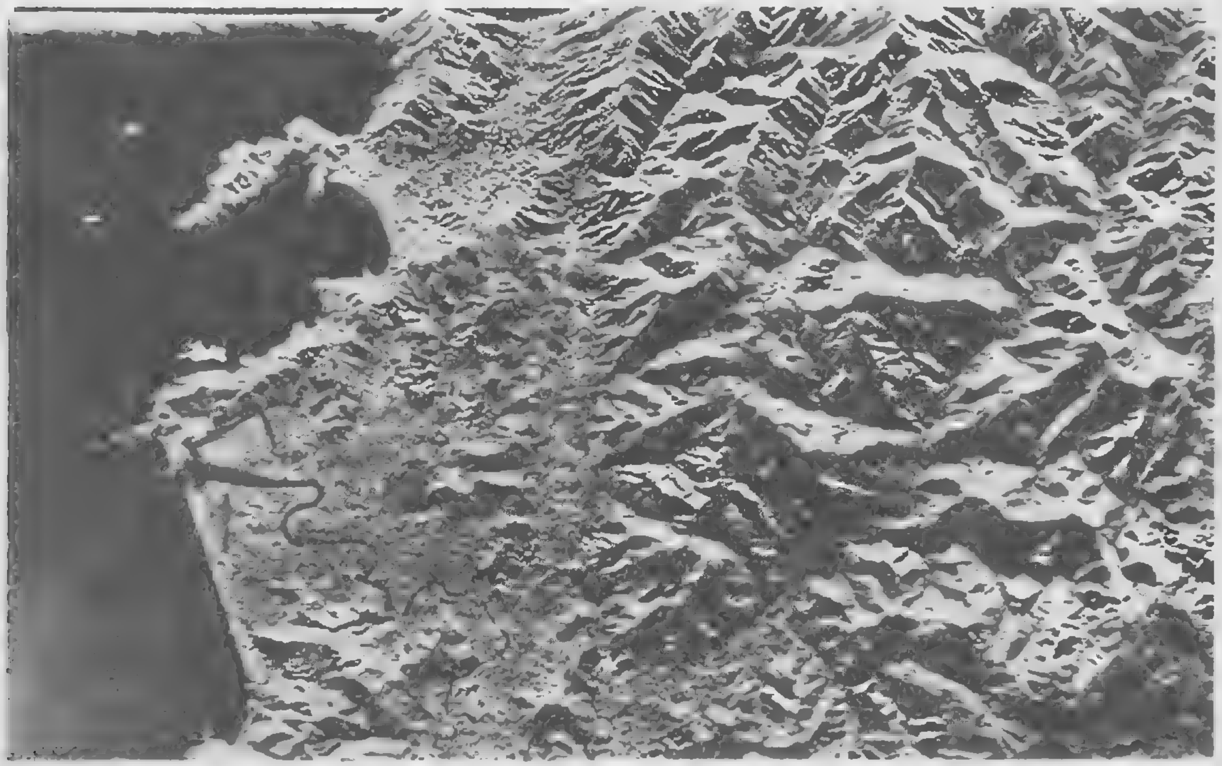


Рис. 1. Карта местности, снятая с самолета.

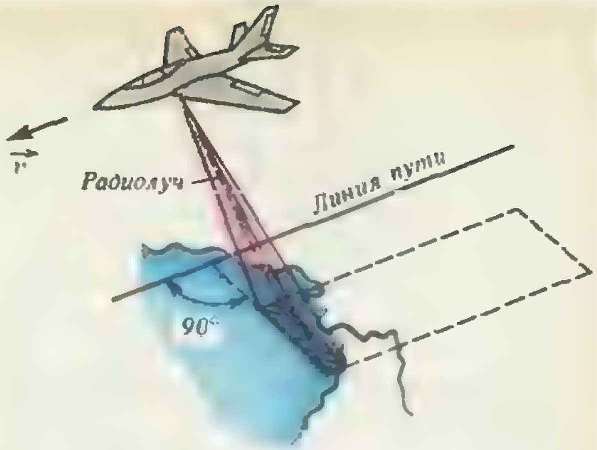


Рис. 2. Схема получения «радиокарты». Пунктиром выделен участок местности, изображенный на рисунке 1.

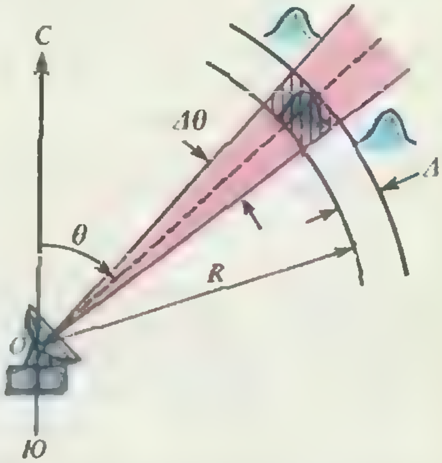


Рис. 3. Координаты «цели» (расстояние R и угол θ).

ходится участок местности. Поэтому «радиотени» горных склонов внизу длиннее, чем вверху. Каковы были погодные условия, когда делался «радиоснимок», совершенно не имеет значения. Могли быть ночь, туман, сплошная облачность. На качестве снимка это не отражается. А вот одно обстоятельство, казалось бы, совершенно не имеющее отношения к четкости изображения, на самом деле является чрезвычайно важным. Взгляните на рисунок 2 и обратите внимание, куда «смотрит» радиолокатор: антенна посылает радиоволны под углом 90° к линии пути. Именно это, как мы убедимся дальше, играет решающую роль. Настолько решающую, что таким радиолокаторам (они были изобретены сравнительно недавно, в 60-х годах) даже дано специальное название — радиолокаторы бокового обзора (РБО).

Почему хорошая «радиофотография» получается только «сбоку»? Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо сначала разобраться, от чего зависит четкость изображения на экране обычного неподвижного радиолокатора.

Итак, пусть радиолокатор стоит на земле. Четкость изображения местности зависит от того, с какой точностью определяются координаты «целей» — отдельных деталей рельефа, от которых отражаются радиоволны. Координаты отражателей определяются следующим образом. Передатчик радиолокатора генерирует радиоволны короткими импульсами и антенна излучает их в определенном направлении. Радиоимпульсы отражаются от какой-либо неровности на местности и возвращаются обратно к радиолокатору, в приемник. Зная время запаздывания — так называют время от испускания импульса передатчиком до приема отраженного импульса, т. е. время прохождения импульса до «цели» и обратно,— легко рассчитать расстояние до места отражения:

$$R = ct_{\text{зап}}/2, \qquad (1)$$

где c — скорость распространения радиоволн ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с). Кроме расстояния R, надо знать еще и направление, откуда пришел отраженный сигнал. Оно определяется непосредственно по положению антенны: куда направлена антенна, там и находится объект, отразивший радиоволны (рис. 3).

Казалось бы, определив очень точно угол θ и расстояние R до каждого из отражателей, мы сможем построить четкую карту местности. Так оно и есть, но вся беда в том, что определить абсолютно точно R и θ не удается. Действительно, импульсы имеют определенную продолжительность, поэтому момент прихода отраженного сигнала фиксируется с некоторой погрешностью, которую будем обозначать Δt. Эта погрешность примерно равна длительности импульса. (Аналогич-

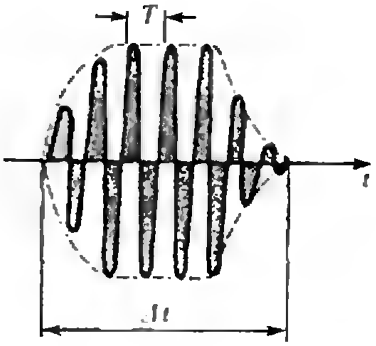


Рис. 4. Импульс радиоволн, излучаемых радиолокатором.

ная неточность возникает и в обычных часах за счет того, что их стрелки всегда имеют некоторую ширину.) Ошибка в определении времени запаздывания на Δt повлечет за собой, согласно (1), погрешность в расстоянии до «цели»

$$\Delta R = c\cdot\Delta t/2. \qquad (2)$$

Нечто подобное происходит и при определении направления. Когда говорят, что антенна излучает радиоволны под углом θ, то допускают существенную неточность. На самом деле излучение происходит всегда в некотором угле, который будем обозначать $\Delta\theta$. Это «размытие» радиолуча приводит к тому, что координата отражающего объекта, находящегося на расстоянии R от излучателя, «размывается» на $R\cdot\Delta\theta$. Заштрихованная на рисунке 3 площадка в виде криволинейного четырехугольника со сторонами ΔR и $R\cdot\Delta\theta$ как раз и определяет четкость «радиоснимка». Дело обстоит так, как будто бы мы взялись нарисовать карту местности с помощью толстой кисти. Ясно, что нам не удастся изобразить детали более тонкие, чем толщина кисти.

Теперь, когда установлены причины «размытия» радиоизображения, путь к повышению четкости становится вполне понятным: надо, насколько это возможно, сокращать длительность импульса Δt и ширину радиолуча $\Delta\theta$. Однако на этом пути мы повстречаемся с очень серьезными физическими ограничениями.

Начнем с радиоимпульса (рис. 4). Он не сразу при включении передатчика достигает своей максимальной амплитуды и не мгновенно спадает до нуля после выключения. Если попытаться сделать импульс очень коротким, он просто не успеет «дорасти» до максимума. Длительность импульса должна быть такой, чтобы за время его существования успело произойти достаточно много колебаний. Обозначим число их через N. Тогда можно записать $\Delta t = NT$, где T — период колебаний, и $\Delta R = NcT/2 = N\lambda/2$, где $\lambda = cT$ — это длина волны. Видно, что чем короче волна, тем меньше погрешность ΔR. Численную оценку можно сделать только зная, чему равно N. Обычно оно не бывает меньше нескольких десятков или даже сотен. Положим для определенности $N=200$. Тогда $\Delta R \approx 100\lambda$. Если радиолокатор работает на волне $\lambda = 10$ см, точность определения расстояния составит 10 м, что в большинстве случаев вполне достаточно.

Значительно более сложной оказывается проблема сужения радиолуча. Чтобы понять, от чего зависит $\Delta\theta$, рассмотрим схематически работу антенны при излучении радиоволн. На рисунке 5, *а* показано, как распространяются радиоволны от отдельных элементов *1*, *2*, *3*, ... антенного раскрыва в направлении оси антенны (ось x на рисунке). Видно, что волны от всех точек антенного раскрыва имеют одну и ту же фазу. Поэтому они все складываются, создавая результирующую волну вдоль оси x.

Попробуем повторить те же рассуждения, но рассматривая излучение не вдоль оси x, а в направлении x' под углом $\Delta\theta$ к оси антенны (рис. 5, *б*). На самой антенне колебания по-прежнему остаются синфазными, но на некотором расстоянии от нее для волн от разных точек возникает разность фаз за счет отличия в длинах путей. Видно, что в точках *1'* и *5* фазы отличаются друг от друга на π, т. е. волны, идущие от нижней и верхней частей антенны в направлении x', будут гасить друг друга. Нетрудно определить, как связан угол $\Delta\theta$, под которым произойдет полное взаимное гашение, с размером антенны и длиной излучаемых волн: $\sin\Delta\theta = \lambda/2a$ (a — диаметр антенны), или, поскольку при малых углах $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$,

$$\Delta\theta \approx \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{a}. \qquad (3)$$

Конечно, наши рассуждения не являются вполне строгими — ведь мы рассмотрели разность хода только для краевых волн в одном сечении антенны. Однако зависимость $\Delta\theta$ от λ и a получилась совершенно правильной, и в ней проявляется очень важное свойство любого волнового процесса (не только радиоволн): концентрация излучения в определенном направлении происходит тем эффективнее, чем больше размеры излучающей системы и меньше длина волны.

Попробуем оценить, какая потребуется антенна, чтобы на длине волны $\lambda = 10$ см получить радиоизображение объекта, находящегося на расстоянии $R = 100$ км, с разрешением $\rho = 10$ м. Иными словами, мы хотим получить такое изображение, на котором координаты объекта определены с точностью до 10 м, т. е. $\Delta R = R\cdot\Delta\theta = \rho$. Из формулы (3) находим: $a \approx \lambda/(2\Delta\theta)$, следовательно,

$$a \approx \frac{\lambda R}{2\rho} = 0{,}5 \text{ км}.$$

(Отметим еще, что заданное разрешение определяет и максимальную длительность импульса (см. (2)): $\Delta t = 2\Delta R/c \approx 0{,}66\cdot 10^{-7}$ с.)

Итак, для получения радиокарты с разрешением ~ 10 м на волне $\lambda = 10$ см требуется антенна диаметром 0,5 км! Если даже мы снизим требования к четкости и будем считать допустимым размытие ~ 100 м, все равно размеры антенны ($a \approx 50$ м) оказываются столь большими, что об установке ее на самолете не может быть и речи. Но четкие радиокарты с самолета и спутника все же получаются (см. рис. 1)! Как же удалось преодолеть такие серьезные трудности?

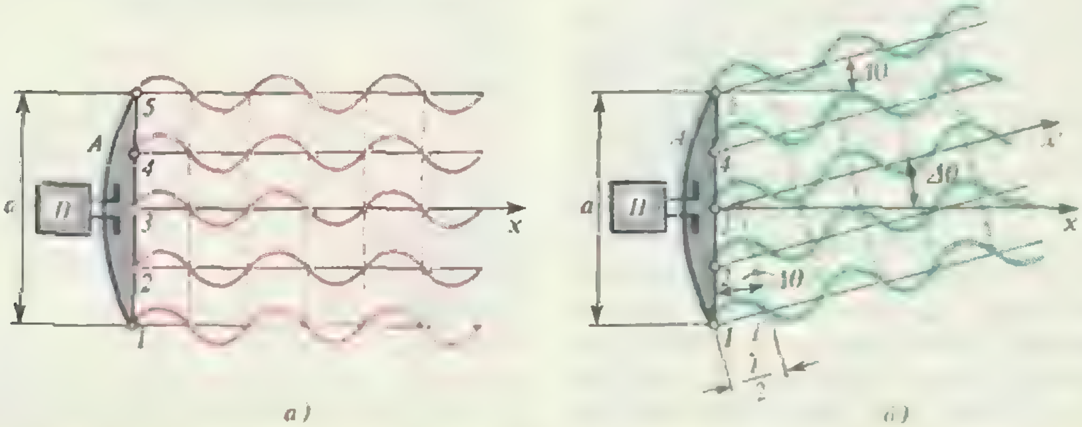
Тут самое время вспомнить, что мы рассмотрели пока работу неподвижного радиолокатора, а ведь самолет все время движется, или, что то же, предметы, отражающие радиоволны, движутся относительно радиолокатора. Оказывается, при отражении от движущегося препятствия с радиоволной происходят очень важные изменения, которые и удалось использовать для получения четких «радиоснимков».

Итак, нам надлежит рассмотреть, как отражаются радиоволны от движущегося предмета. Прежде всего вспомним математическое выражение для синусоидальных колебаний:

$$E = A\sin(\omega t + \psi). \qquad (4)$$

Поскольку речь идет об излучении радиолокатора, здесь буквой E обозначена напряженность электрического поля, A — амплитуда, ω — круговая частота, ψ — начальная фаза колебаний.

Сигнал, отраженный от какого-либо препятствия на расстоянии R от радиолокатора, проходит путь туда и обратно за время $t = 2R/c$. Поэтому для математического описания отраженного сигнала надо заменить в формуле (4) время t на $t - 2R/c$ (таким образом мы учтем запаздывание отраженного сигнала относительно исходного излучения). Амплитуда сигнала



а) б)

Рис. 5. Излучение радиоволн антенной радиолокатора.

при отражении, естественно, уменьшается (степень этого изменения зависит от свойств отражателя). Поэтому для отраженной волны мы можем записать

$$E_{\text{отр}}=A_{\text{отр}}\sin(\omega(t-2R/c)+\varphi)=$$
$$=A_{\text{отр}}\sin(\omega t+(\varphi-2R\omega/c)).$$

Видно, что в отраженном сигнале строго определенным образом изменилась и фаза (φ заменяется на $\varphi-2\omega R/c$). Однако этот вывод не годится для самолетного радиолокатора, так как расстояния от летящего самолета до объектов на местности все время меняются. При равномерном движении вдоль радиолуча $R_t=R_0\pm vt$, где R_0 — начальное расстояние (при $t=0$), а v — скорость самолета (знак «—» соответствует приближению к объекту, а «+» — удалению от него). Теперь отраженный сигнал записывается так:

$$E_{\text{отр}}=A_{\text{отр}}\sin\left(\omega\left(t-2\frac{R_0\pm vt}{c}\right)+\varphi\right).$$

Упростим эту формулу, введя следующие обозначения:

$$\omega'=\omega(1\mp 2v/c),\quad \varphi'=\varphi-2R_0/c.$$

Тогда

$$E_{\text{отр}}=A_{\text{отр}}\sin(\omega' t+\varphi').$$

Сравнив это выражение с (4), замечаем, что по сравнению с исходным сигналом у отраженного сигнала изменились амплитуда, частота и фаза. Чрезвычайно важным является изменение частоты, которое можно очень точно зарегистрировать с помощью специальных устройств — частотомеров.

Изменение частоты излучения при движении отражателя называют эффектом Доплера (по имени австрийского физика Христиана Доплера (1803—1853), исследовавшего влияние движения на волновые процессы). Заметим, что если вместо радиолокационных отражений рассмотреть распространение волны в одном направлении, то при относительном движении приемника и передатчика со скоростью v, изменения частоты будут описываться выражением $\omega'=\omega(1\mp v/c)$, которое обычно приводится в учебниках («—» — удаление, «+» — приближение). Замена v на $2v$ в нашей формуле объясняется тем, что мы рассматриваем отражение сигнала, а длина пути туда — обратно изменяется вдвое быстрее.

Сформулируем в качестве итога наших рассуждений ту главную особенность, которая отличает движущийся самолетный радиолокатор от наземного. За счет эффекта Доплера частоты сигналов, отраженных от местных предметов, будут разные: отражения, приходящие спереди по курсу самолета, имеют повышенную частоту ($\omega'>\omega$, знак «+» в формуле для ω'), а приходящие сзади — пониженную ($\omega'<\omega$, знак «—» в формуле для ω'). Что же касается отражений, приходящих точно сбоку (под углом 90° к курсу самолета), их частота не меняется и совпадает с исходной частотой ($\omega'=\omega$). Поэтому, измеряя частоту отраженного сигнала ω', можно узнать, в каком направлении находится отражающий объект. Несложный математический расчет покажет, что за счет эффекта Доплера направление определяется с очень высокой точностью. Эти возможности реализуются в радиолокаторе бокового обзора.

Взгляните на рисунок 6, на котором изображены самолет и отражающий объект в какой-то момент времени. Отражатель в точке P расположен под углом $\Delta\theta$ к оси x, которая совпадает с осью антенны и перпендикулярна курсу самолета. Если самолет движется со скоростью $\vec{v}$ вверх на рисунке, то скорость отражателя P относительно самолета равна $-\vec{v}$ и на-

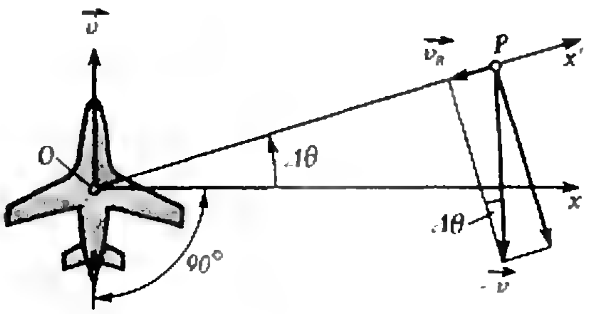


Рис. 6. Во время пролета самолета расстояние от антенны (точка O) до отражающего предмета (точка P) изменяется со скоростью v_R.

правлена вниз. Изменения расстояния между точками O и P определяются проекцией скорости $-\vec{v}$ на линию OP. Эта проекция (мы будем обозначать ее v_R) равна $v_R \approx -v\sin\Delta\theta$, а при малых углах $\Delta\theta$, для которых $\sin\Delta\theta \approx \approx \Delta\theta$, $v_R \approx -v\cdot\Delta\theta$. За счет этой скорости частота отраженного сигнала возрастет: соответствующее изменение частоты будет равно

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \approx \frac{2\omega v\cdot\Delta\theta}{c}.$$

Измерив $\Delta\omega$ с помощью частотомера, сразу же определим $\Delta\theta$:

$$\Delta\theta \approx c\cdot\Delta\omega/(2\omega v). \qquad (5)$$

Направленные свойства самой антенны здесь совсем не играют роли, следовательно, антенны больших размеров, о чем говорилось ранее, нам не понадобятся. Казалось бы, вообще нет ограничений на точность определения угла. Надо только очень точно измерить ω' и соответствующую разность частот $\Delta\omega$. Однако тут-то и спрятаны «подводные камни». Дело в том, что для измерения частоты колебаний требуется определенное время. Действительно, по значению сигнала в какой-нибудь один момент времени судить о его частоте вообще нельзя. Надо проследить за изменениями сигнала по крайней мере за один период, а еще лучше — в течение нескольких периодов. Существует универсальный закон: погрешность в определении частоты $\Delta\omega$ обратно пропорциональна времени измерения Δt и равна $\Delta\omega \approx 2\pi/\Delta t$. Подставив это соотношение в формулу (5), получим

$$\Delta\theta \approx 2\pi c/(2\omega v\cdot\Delta t).$$

Далее вспомним, что $\omega = 2\pi f = 2\pi T$ (f — частота, T — период колебаний), а $cT = \lambda$. Поэтому выражение (5) для $\Delta\theta$ можно переписать так:

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{2v\cdot\Delta t} = \frac{\lambda}{2L}, \qquad (6)$$

где $L = v\cdot\Delta t$ — путь, пройденный самолетом за время измерения частоты отраженного сигнала. Сравните формулы (3) и (6): они очень похожи, только вместо размеров антенны a стоит отрезок пути самолета L. Можно сказать, что в РБО создается эффективная антенна, совпадающая с траекторией самолета. Отсюда еще одно название РБО, которое часто используется в литературе,— радиолокатор с синтезированной антенной.

Вернемся к нашему исходному примеру. Ранее мы пришли к выводу, что для получения радиокарты на волне $\lambda = 10$ см с погрешностью, не превышающей 10 м, требуется неподвижная антенна размером $a \approx 500$ м. Однако для самолета, летящего со скоростью $v \approx 300$ м/с, соответствующая точность будет достигнута, если на обработку сигнала затратить время $\Delta t \approx 1{,}7$ с ($L = v\cdot\Delta t \approx 500$ м). Это не очень большое время, и «радиоснимок» можно получить практически сразу при пролете самолета. Именно таким образом и сделана та четкая «радиофотография» которую мы привели на рисунке 1.

В заключение немного пофантазируем о возможностях применения РБО для радиолокации космических тел. В этом случае нет необходимости ставить радиолокатор на самолет или на спутник. Ведь наземный радиолокатор движется вместе с Землей, участвуя и во вращении Земли вокруг своей оси (для этого движения характерные скорости в средних широтах составляют ~300 м/с), и во вращении Земли вокруг Солнца (здесь скорость ~30 км/с). Более того, для очень удаленных объектов надо учитывать движение самого Солнца, которое происходит с еще бо́льшими скоростями.

Все эти сложные движения позволяют синтезировать антенны огромных размеров и определять очень точно углы прихода радиоволн. Быть может, самое интересное в описанных «фантазиях» то, что они уже реализованы, и эффект Доплера используется в космической радиолокации и радиоастрономии в полной мере. Более того, фактически первый РБО заработал во время радиолокации Луны в 1960 году. Самолетные же РБО появились несколько позже, а для радиокартографирования местности стали применяться только в 70-х годах.

ЧТО ЕСТЬ ФОРТУНА,

или Как не проиграть в «Спортпрогноз»

Кандидат технических наук
А. БАРГ,
кандидат технических наук
С. ЛИЦЫН

> *Учитель таин заповедных!*
> *Что есть Фортуна, счастье всех племен*
> *Держащая в когтях своих победных?*
> Данте. Божественная комедия,
> Ад. VII, 67—69

Школьный фольклор содержит историю о человеке, который с помощью ЭВМ разработал систему для игры «Спортлото» и выиграл целое состояние. Этого человека никто не видел, да и вряд ли он существует, так как заведомо выигрышной стратегии для этой игры нет. Иными словами, нельзя указать такой способ игры, при котором выигранная сумма будет всегда больше потраченных на покупку карточек денег. Не являются исключением и предлагаемые нами стратегии. Тем не менее, со «Спортлото» и другими сходными играми связано множество интересных математических задач. О некоторых из них мы и расскажем.

Как правило, со «Спортлото» и «Спортпрогнозом» связывают задачи подсчета вероятности угадывания некоторого количества верных номеров (результатов). Мы не будем возвращаться к этим хорошо известным вопросам, а лишь скажем, что вероятность угадывания шести номеров из сорока девяти*) $p(49,6)\approx 7\cdot 10^{-8}$; в тех же обозначениях $p(49,5)\approx\approx 2\cdot 10^{-5}$, $p(49,4)\approx 10^{-3}$, $p(36,5)\approx\approx 3\cdot 10^{-6}$ (вы можете доказать это самостоятельно).

Правила игры

В «Спортпрогноз» играют следующим образом. Из календаря спортивных соревнований выбираются 13 матчей, исход которых, по мнению организаторов лотереи, трудно предсказуем. Игрок должен сделать прогноз результатов этих матчей, ставя в каждой из 13 клеточек таблицы знак «1», если он считает, что победит команда хозяев, «2» — команда гостей и «0» в случае ничьей. После того как результаты матчей становятся известными, определяются выигравшие карточки. Премии делятся между угадавшими не меньше 11 результатов и растут с увеличением числа верных предсказаний в карточке. Каждый прогноз будем представлять 13-мерным вектором (т. е. строкой из 13 цифр) с компонентами 0, 1 и 2. Например, вектор $x=(1,1,0,2,2,1,2,0,0,0,1,1,2)$ отвечает выигрышу гостей в 4, 5, 7 и 13 матчах, хозяев — в 1, 2, 6, 11 и 12 матчах и ничьим — в остальных встречах.

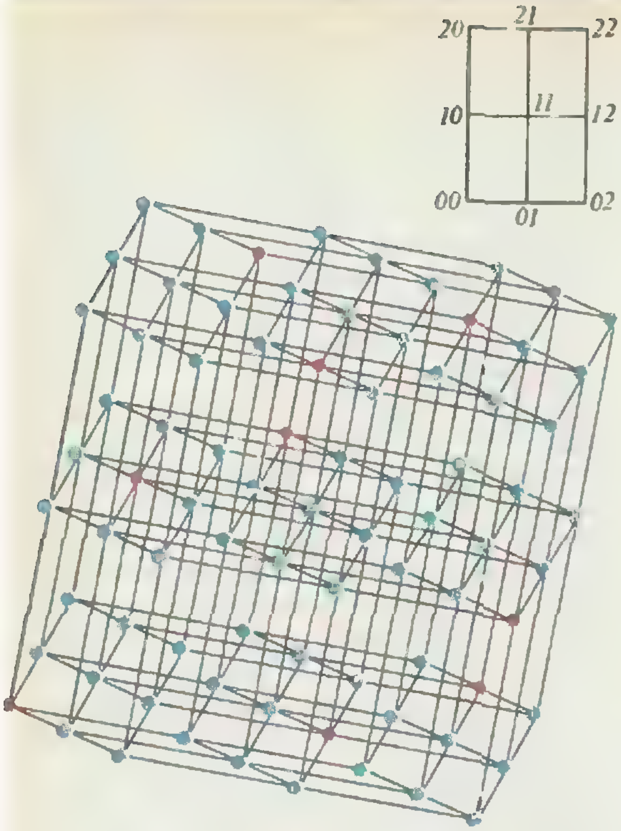
В игре «Спортлото» требуется угадать 6 из 49 или 5 из 36 номеров. Выигравшими считаются карточки, в которых указано не менее 3 из выпавших в результате случайного розыгрыша номеров. Прогноз в этом случае можно описать 49- (36-) мерным вектором, содержащим «0» в 43 (31) позициях и «1» в 6 (5) оставшихся позициях. Номера единичных позиций соответствуют предсказываемым номерам.

В каждом из тиражей один игрок может предложить несколько вариантов прогноза. Назовем набор этих вариантов l-системой, если независимо от исхода тиража среди них найдется хотя бы один, в котором верно угаданы не менее l результатов. Для нас интерес представляют только l-системы с $11\leqslant l\leqslant 13$ для «Спортпрогноза» и с $3\leqslant l\leqslant 6$ (5) для «Спортлото». Очевидные примеры l-систем с максимальным l получаются при заполнении всех возможных вариантов прогноза. Эти системы не очень интересны хотя бы потому, что количество заполняемых при этом карточек «Спортпрогноза» равно 1 594 323, т. е. нужно затратить около полумиллиона рублей и около двух лет непрерывной (по полминуты на карточку) работы. Для «Спортлото» соответствующие числа еще больше. Плохо и то, что, даже справившись с заполнением, нельзя быть уверенным в том, что сумма выигрыша превзойдет сделанные затраты. Для меньших l мы будем стараться придумать такие системы, в которых общее число вариантов было бы как можно меньше.

Итак, если вы играете по системе, то хотя бы один из ваших прогнозов

---

*) Сейчас в карточке «Спортлото» 45 номеров. Когда авторы были моложе и увлекались «Спортлото», карточка содержала 49 номеров.



Структура пространства E_3^4. На верхнем рисунке показаны 9 точек пространства E_3^2, пронумерованные числами от 0 до 8 в троичной системе счисления. Ребрами соединены точки, «троичные» номера которых отличаются друг от друга ровно в одном символе (точки находятся на расстоянии 1). E_3^4 получается из E_3^2 заменой каждой точки на 9 точек пространства E_3^2; различные пространства также нумеруются «троичными» числами от 0 до 8. Пронумеруем точки в каждом из этих пространств так же, как на верхнем рисунке. Тогда «троичный» номер каждой точки из E_3^4 получается приписыванием номера точки к номеру того пространства E_3^2, в котором она лежит. На рисунке отмечены девять точек, принадлежащих линейной системе C_0.

обязательно окажется достаточно верным. При этом количество купленных карточек будет не очень велико.

«Спортпрогноз» на 4 матча

Нам будет проще объяснить идею построения l-систем на примере игры в «Спортпрогноз-4», в которой предлагается угадать результаты лишь четырех матчей. Обозначим множество всех 4-мерных векторов из трех символов — нулей, единиц и двоек — через E_3^4. Размер 4-системы при этом равен числу элементов множества E_3^4 ($=81$). Случай 3-системы уже заставляет задуматься. Наша задача сводится к выбору из E_3^4 такого подмножества C из минимального количества векторов, что для любого вектора $e \in E_3^4$ в C можно указать хотя бы один вектор c, отличающийся от e не более, чем в одной позиции.

Определение. *Расстоянием Хэмминга между векторами a и b называется количество различающихся компонент этих векторов.*

Например, расстояние между векторами $a=(0,1,2,0)$ и $b=(0,2,0,0)$ равно $d(a, b)=2$.

Упражнение 1. Проверьте, что расстояние Хэмминга удовлетворяет неравенству треугольника

$$d(a, b)+d(b, c) \geqslant d(a, c).$$

Рассмотрим следующую систему C_0: (0,0,0,0); (1,0,1,1); (2,0,2,2); (0,1,1,2); (0,2,2,1); (1,1,2,0); (2,1,0,1); (1,2,0,2); (2,2,1,0).

Докажем, что C_0 является 3-системой. Прямая проверка показывает, что расстояние между любой парой векторов из C_0 равно 3. В силу неравенства треугольника для расстояния Хэмминга не существует вектора $e \in E_3^4$, находящегося на расстоянии 1 одновременно от двух векторов a и b из C_0 (иначе $d(a, b)=2$). Множество векторов из E_3^4, находящихся на расстоянии $\leqslant 1$ от любого вектора из C_0, содержит 9 элементов (докажите!). Поскольку эти множества не пересекаются, их объединение содержит $9 \cdot 9=81$ вектор. Но в E_3^4 всего 81 вектор! Значит, любой вектор из E_3^4 принадлежит одному из таких множеств, что и требовалось доказать.

Пример 1. Вектор (2,1,2,1) принадлежит множеству векторов, находящихся на расстоянии $\leqslant 1$ от вектора $(2,1,0,1) \in C_0$.

Итак, построена 3-система игры в мини-«Спортпрогноз». Эта система замечательна тем, что любой вектор из E_3^4 находится на расстоянии $\leqslant 1$ только от одного вектора из C_0 (в общем случае это может и не выполняться, а в большинстве случаев и не может выполняться). Системы с таким свойством называются *совершенными*. Мы к ним еще вернемся.

Операции по модулю 3 и l-системы

Построенная в предыдущем параграфе 3-система обладает еще рядом красивых свойств (открытых в 40-х годах американским ученым Ричардом Хэммингом), для объяснения которых потребуется небольшое отступление.

Мы имеем дело с векторами, компоненты которых могут принимать значения из множества $Z_3=\{0,1,2\}$. Элементы Z_3 можно складывать и умножать так, что в результате будут снова получаться элементы из этого же множества. Для этого достаточно, выполнив обычное сложение или умножение, найти остаток от деления полученного результата на 3 (как говорят, привести его по модулю 3). Например, $5\equiv 2(mod\ 3)$, $-2\equiv 1(mod\ 3)$.

Используя эти операции, можно определить сложение троичных векторов. Назовем суммой векторов a и b вектор c, каждая координата которого является суммой по модулю 3 соответствующих координат векторов a и b. Например, $(0,1,1,2)+(1,2,1,1)=$ $=(1,0,2,0)$. Определим произведение вектора на троичное число $v\in Z_3$ как вектор, координаты которого получены умножением координат вектора на v по модулю 3. Например, $2\cdot(1,0,2,2)=$ $=(2,0,1,1)$. В математике такие совокупности векторов с определенными на них операциями сложения и умножения на число называются *векторными пространствами*.

Упражнение 2. Проверьте, что введенная в предыдущем параграфе 3-система C_0 обладает следующими свойствами: для любых вектора $a\in C_0$ и константы $v\in Z_3$ произведение va также принадлежит C_0; для любых двух векторов a, $b\in C_0$ их сумма — тоже вектор из C_0. Такие системы называются *линейными*.

Операции по модулю 3 позволяют дать краткое описание 3-системы C_0. Во-первых, заметим, что первые две координаты (x_1, x_2) векторов из C_0 могут быть любой парой троичных чисел. Назовем эту пару троичным *номером* вектора. Значения двух оставшихся координат x_3 и x_4 можно вычислить по следующему правилу (действия по модулю 3):

$$x_3=x_1+x_2,\quad x_4=x_1+2x_2 \qquad (1)$$

(проверьте!).

Упражнения

3. Можно ли в качестве номера выбрать другие координаты вектора? Какой вид будет тогда иметь *правило* (1)?

4. Покажите, что если ко всем векторам системы C_0 добавить произвольный (один и тот же) вектор, то ее свойства как l-системы не изменятся.

5. Воспользовавшись результатом упражнения 4, покажите, что в систему C_0 можно включить любой наперед заданный вектор (прогноз, кажущийся вам наиболее правдоподобным).

Предположим, что вы заполнили карточки в соответствии с системой C_0. В утренней газете опубликованы результаты матчей, включенных в тираж (вектор y). Как быстрее найти выигравшую карточку (то, что она есть, следует из свойств системы)? Очевидный, но иногда далеко не лучший способ — сравнить результаты тиража со всеми заполненными карточками и найти наименее отличающуюся.

Для описания более быстрого способа перепишем уравнения (1) в эквивалентном виде:

$$x_1+x_2+2x_3=0,\quad x_1+2x_2+2x_4=0. \qquad (2)$$

Наш способ будет основан на том, что координаты каждого вектора системы C_0 удовлетворяют уравнениям (2). Если y удовлетворяет (2), он принадлежит системе C_0, и соответствующая ему карточка может быть найдена по ее троичному номеру. В противном случае y отличается от какого-нибудь вектора $c=(c_1, c_2, c_3, c_4)\in C_0$ в одной координате. Пусть ее номер равен j. Найдем $S_1=y_1+y_2+2y_3$ и $S_2=y_1+2y_2+2y_4$.

Упражнение 6. Покажите, что выигравшую карточку c можно найти следующим образом:

а) если $S_1=0$ и $S_2\neq 0$, то $j=4$; если $S_2=0$ и $S_1\neq 0$, то $j=3$ (в обоих случаях $c_j=y_j+S_i$, где $i=1$ или 2 — индекс отличного от нуля S_i);

б) если $S_1\neq 0$ и $S_2\neq 0$, то при $S_1S_2=1$ $j=1$, а $c_1=y_1+2S_i$ (i — любое). При $S_1S_2=2$ $j=2$, а $c_2=y_2+2S_1=y_2+S_2$.

Продолжение примера 1. Воспользуемся предыдущим упражнением для определения ближайшей карточки, если результаты матчей представлены вектором $y=(2,1,2,1)$. Тогда $S_1=1$, $S_2=0$. Обращаясь к случаю а), получаем $j=3$, а $c_3=y_3+$

$+S_1=0$. Вновь найден вектор $c=(2,1,0,1)\in C_0$, находящийся от y на расстоянии 1.

Для «Спортпрогноза» на 4 матча этот способ определения выигравшей карточки выглядит (и является) чересчур громоздким, особенно в сравнении с простым перебором всех девяти карточек системы. Его преимущества *выяснятся ниже.*

Отметим еще одно применение описанной системы. Пусть, заполняя карточку большого «Спортпрогноза», вы полагаете, что точно знаете результаты 9 из 13 матчей. Вам хотелось бы знать наверняка, что в прогнозе исходов остальных четырех матчей вы ошибетесь не более, чем однажды. Тогда следует заполнить 9 карточек с фиксированной комбинацией на известных 9 позициях и всеми векторами 3-системы C_0 на оставшихся четырех позициях.

Коды, исправляющие ошибки

Не следует думать, что l-системы изобретены и изучались для получения крупных выигрышей в лотерее — у математиков есть и более интересные занятия. Оказывается, очень похожие конструкции появляются, например, в теории *передачи сообщений.* Представим себе, что по линии связи с помехами требуется передать вектор из k букв, каждая буква которого может принимать одно из q значений (для сообщений на русском языке $q=34$ — буквы алфавита и промежуток между словами). Будем считать, что непосредственная передача с большой вероятностью исказит хотя бы одну букву сообщения, поэтому хотелось бы иметь способ исправления ошибок после приема.

Поступим следующим образом. Добавим к передаваемому вектору несколько букв, зависящих от букв исходного сообщения. Такой набор расширенных *сообщений назовем кодом,* а число букв в расширенном сообщении (кодовом векторе) обозначим через n и назовем длиной кода. Если при передаче кодового вектора в канале связи произошло искажение t букв, то принятый вектор находится на расстоянии Хэмминга t от переданного вектора. По принятому вектору требуется однозначно восстановить переданный вектор. Для этого код должен удовлетворять определенным свойствам.

Утверждение. Код C исправляет любые t или менее ошибок, если множества векторов из E_q^n, находящихся на расстоянии $\leqslant t$ от кодовых *векторов, попарно не пересекаются.*

СПОРТПРОГНОЗ
ВАРИАНТЫ
1
2
3
А 005 329617
Б 005 329617
005 329617

Упражнения

7. Докажите, что каждое такое множество из утверждения содержит $V(n, t)=\Sigma_{i=0}^{t} C_n^i \times$ $\times (q-1)^i$ векторов (C_n^i — биномиальный коэффициент, равный $\frac{n!}{(n-i)!\,i!}$).

8 (граница Хэмминга). Докажите, что для любого кода

$$k \leqslant \log_q[q^n/V(n, t)]$$

$$([x] \text{ — целая часть } x). \qquad (3)$$

Если для параметров кода в (3) имеет место равенство, то код называется *совершенным*.

Возникшая около сорока лет назад математическая теория кодирования ныне является развитой и весьма глубокой наукой. У ее истоков стояли Клод Шеннон, уже упоминавшийся Ричард Хэмминг, Марсель Голей и другие ученые. Более подробно о кодах, исправляющих ошибки, вы можете прочитать в книгах Аршинова М. Н., Садовского Л. Е. «Коды и математика» (М., «Наука», 1983, Библиотечка «Квант», вып. 30), Яглома А. М., Яглома И. М. «Вероятность и информация» (М., «Наука», 1973).

Несложно видеть, что совершенные l-системы совпадают с совершенными кодами. В частности, 3-система для игры в мини-«Спортпрогноз» — это код с $q=3$, $k=2$ и $n=4$, исправляющий одну ошибку. Из сказанного выше следует, что этот код является линейным (в смысле упражнения 2) и совершенным и содержит, как ему и положено, $q^k=9$ векторов.

«Спортпрогноз-13»

Предложенная выше 3-система для тиража из четырех матчей допускает обобщение на «реальный» случай 13 матчей; при этом получается 12-система C_1, состоящая из $3^{10}=59\,049$ карточек. Будем считать, что вектор $x \in E_3^{13}$ принадлежит системе C_1, если его координаты удовлетворяют следующим уравнениям (вновь операции по модулю 3):

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+\\ &\quad +x_8+x_9+x_{10},\\ x_{12} &= x_1+x_2+x_5+x_6+x_7+2x_8+\\ &\quad +2x_9+2x_{10},\\ x_{13} &= x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_6+\\ &\quad +2x_7+x_9+2x_{10}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Как и выше, номером вектора будем называть набор из его первых девяти координат.

Упражнение 9. Пусть номер вектора $x=(x_1,\ldots,x_{13}) \in C_1$ равен $(x_1,\ldots,x_{10})=(0,1,1,1,2,0,2,1,2,1)$. Найдите x.

Утверждение. Построенная 12-система является линейной и совершенной.

Действительно, пусть векторы x и y удовлетворяют (4), тогда и $x+y$ и $2x$ удовлетворяют этой системе уравнений. Несколько сложнее доказывается то, что расстояние между любыми двумя векторами системы C_1 не меньше трех. Рассмотрим 2 вектора x, $y \in C_1$. Если их номера совпадают, то $x=y$. Если номера различаются в трех или более позициях, то все доказано. Пусть номера различаются в одной позиции, скажем, i-й. Тогда заметим, что любое x_i ($1 \leqslant i \leqslant 10$) входит с ненулевыми коэффициентами в правые части по меньшей мере двух уравнений системы (4), т. е. по меньшей мере две из трех последних координат векторов x и y будут различными. Если же номера векторов x и y различаются в двух позициях, скажем, i-й и j-й, то для доказательства достаточно показать, что они различаются еще по крайней мере в одной позиции. Этого может не быть только в случае, когда i-я и j-я переменные в правые части всех уравнений (4) входят с одинаковыми коэффициентами. Проверка показывает, что таких переменных не существует. Итак, доказано, что расстояние между двумя любыми векторами $x, y \in C_1$ не меньше трех. Тогда множества векторов из E_3^{13}, находящихся от x и y на расстоянии $\leqslant 1$, не пересекаются. В соответствии с упражнением 7 каждое такое множество содержит $27=3^3$ векторов. Общее же количество векторов в системе равно числу различных номеров, т. е. 3^{10}, а общий объем соответствующих им непересекающихся множеств равен $3^{10}\cdot 3^3=3^{13}$, что совпадает с числом всех возможных карточек. Что и требовалось доказать.

Упражнение 10 (трудное). Придумайте быстрый способ нахождения выигравшей карточки для системы C_1 по результату тиража (сравните с упражнением 6). Этот способ позволит найти выигравшую карточку значительно быстрее, чем при полном переборе.

Построенная 12-система является кодом с $q=3$, $n=13$, $k=10$, исправляющим одну ошибку. Этот код — представитель семейства совершенных кодов Хэмминга с $q=3$, $n=(3^m-1)/2$, $k=n-m$.

Нелинейные системы

Вернемся на время к системе C_0 для мини-«Спортпрогноза». Выпишем все ее девять векторов в строки таблицы. Вычеркивая из этой таблицы любой столбец, получим линейную систему из девяти векторов для «Спортпрогноза-3». Можно показать, что эта система является наилучшей среди линейных, т. е. содержит наименьшее возможное число карточек. Оказывается, отказ от условия линейности позволяет улучшить эту систему. Наилучшая нелинейная 2-система длины 3 состоит всего из пяти векторов. Вот она:

(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (2,2,2).

В таблице приведены рекорды построения l-систем для $l=n-3$, $n-2$ и $n-1$ при $n\leqslant 13$. Для игры «Спортпрогноз» понадобятся только первые два столбца, но для математиков интерес представляет и более общий случай. Заметим, что любое улучшение таблицы достойно статьи в солидных международных математических журналах. Разумеется, системы из этой таблицы строились их авторами не простым перебором на ЭВМ (кстати, как это сделать? Ответ в общем случае неизвестен), а применением общих конструкций, приводящих к семействам систем различных длин. Так что если кому-то из читателей посчастливится улучшить таблицу, авторы готовы оказать помощь по подготовке статьи. Поиск лучше начать с длин $n\geqslant 6$, т. е. улучшение при меньших длинах маловероятно.

Таблица

n	$l=n-1$	$l=n-2$	$l=n-3$
1	1*	1*	1*
2	3*	1*	1*
3	5*	3*	1*
4	9*	3*	3*
5	27	8	3*
6	73	17	6*
7	186	34	12
8	486	81	27
9	1458	219	54
10	3645	558	108
11	10935	729*	243
12	29889	2187	729
13	59049*	6561	1215

* — известно, что улучшить нельзя.

Замечательная 9-система длины 11

При внимательном наблюдении за таблицей бросается в глаза звездочка, одиноко мерцающая в ее середине. Здесь находится замечательная 9-система C_2 длины 11. Ее история и применения могли бы послужить сюжетом для увлекательного математического романа. Но прежде несколько слов о самой героине. Это линейная совершенная система. Совершенность доказать несложно, если знать, что любые два вектора системы находятся на расстоянии не менее пяти. Тогда, как и раньше, множества (их $729=3^6$) векторов из E_3^{11}, находящихся на расстоянии $\leqslant 2$ от некоторой точки системы, не пересекаются. Поскольку в каждом из этих множеств $243=3^5$ векторов, суммарный объем этих множеств совпадает с общим числом векторов в E_3^{11}.

Приведем уравнения, связывающие троичный номер $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ любого вектора x, принадлежащего системе C_2, с остальными пятью его координатами:

$$\begin{aligned}
x_7&=x_1+\phantom{2x_2+2x_3+{}} x_3+2x_4+2x_5+x_6,\\
x_8&=x_1+x_2+\phantom{2x_3+{}} x_4+2x_5+2x_6,\\
x_9&=x_1+2x_2+x_3+\phantom{2x_4+{}} x_5+2x_6,\\
x_{10}&=x_1+2x_2+2x_3+x_4+\phantom{2x_5+{}} x_6,\\
x_{11}&=x_1+x_2+2x_3+2x_4+x_5 .
\end{aligned} \tag{5}$$

Эта система совпадает с совершенным кодом с параметрами $q=3$, $n=11$, $k=6$, исправляющим две ошибки. Он называется кодом Голея в честь открывшего и опубликовавшего его в 1949 году математика. Для задания кода с помощью системы уравнений (5) Голею пришлось использовать теорию так называемых квадратичных вычетов. Однако летом

1989 года выяснилось, что этот код (как хорошая система для игры «Спортпрогноз») открыт и опубликован в 1947 г. в финской спортивной газете «Вейкаайя» *). Автор этого открытия Юхани Виртакаллио — не математик и, наверное, не знал, что для построения кода необходимо использовать квадратичные вычеты. Он писал: «Эта система из 729 столбцов пришла мне в голову в дни небывало низких выигрышей в «Спортпрогноз». Видимо, мы имеем дело с примером истинно рамануджановского озарения (см. статью С. Г. Гиндикина в «Кванте» № 10 за 1987 год).

Помимо этой троичной системы, М. Голей в своей работе 1949 года описал еще одну линейную совершенную систему — 20-систему C_3 длины 23 с векторами из нулей и единиц — код с параметрами $q=2$, $n=23$, $k=12$, исправляющий 3 ошибки. Эта система содержит $2^{12}=4096$ векторов и могла бы оказаться полезной для «Спортпрогноза» на 23 поединка в игре без ничьих.

Упражнение 11. Используя результаты упражнений 7 и 8, покажите, что система C_3 совершенна (и следовательно, содержит наименьшее возможное число карточек среди систем с такими параметрами).

Открытие, сделанное Виртакаллио, тем более удивительно, что при $q=3$ других нетривиальных совершенных l-систем с $l \leqslant n-2$ ни для каких значений n не существует. При $l=n-1$ существуют еще системы с параметрами, приведенными в конце предыдущего параграфа. При $q=2$ список нетривиальных совершенных систем с $l \leqslant n-1$ исчерпывается 20-системой C_3 и семейством $(n-1)$-систем с $n=2^m-1$ и $k=n-m$. Эти два утверждения следуют из глубокой теоремы о совершенных кодах, доказанной только в начале 70-х гг.

Возникающие в связи с кодами Голея C_2 и C_3 математические задачи, как правило, довольно трудны. Даже задача быстрого (непереборного) нахождения выигравшей карточки системы C_2 по известному результату тиража весьма непроста. Желающие попробовать свои силы в этой трудной (хотя и решенной) проблеме должны воспользоваться системой уравнений (5) и действовать в духе упражнений 6 и 9. Может быть, вам удастся открыть какой-нибудь новый способ решения этой задачи?

Последняя задача, которой мы хотим здесь коснуться в связи со «Спортпрогнозом», возникает в случае, когда игрок предполагает, что в t из n матчей возможен любой из трех исходов — ничья, выигрыш и проигрыш одной из команд, а в $b=n-t$ матчах ее выигрыш практически невероятен. (Например, в футбольном матче «Барселона» (Мадрид) — «Звезда» (Пермь) одна из команд может в лучшем случае рассчитывать на ничью.) Обозначим через $E_{2,3}(b, t)$ множество векторов длины $b+t$, у которых первые b координат принимают значения 0 или 1, а последние t — значения 0, 1 или 2. l-система C для смешанного «Спортпрогноза» должна состоять из таких векторов из $E_{2,3}(b, t)$, что для любого вектора $a \in E_{2,3}(b, t)$ найдется вектор $c \in C$, находящийся от a на расстоянии Хэмминга не более l.

Упражнения

12. Покажите, что на расстоянии $\leqslant l$ от фиксированного вектора $a \in E_{2,3}(b, t)$ находится $\sum\limits_{i=0}^{l} 2^{l-i} C_b^i C_t^{l-i}$ векторов.

13. Постройте 3-систему при $t, b=2$, состоящую из шести карточек.

«Спортлото»

Уже понятно, что построение систем для игры «Спортлото» связано с рассмотрением множества всех векторов из множества $E_2^{n,w}$ двоичных векторов длины n, содержащих ровно w единиц. Нам неизвестны хорошие системы для «Спортлото», однако можно получить простое неравенство, показывающее, что любая такая система должна содержать довольно много карточек. Их количество, разумеется,

---

*) В Финляндии при заполнении карточки «Спортпрогноза» в 1947 году требовалось предсказать результаты 12 матчей (теперь — 13). Карточка считалась выигравшей, если в ней было верно угадано не менее 10 результатов. Поэтому систему C_2 можно было использовать, если результаты одного матча игрок знал наверное.

зависит от того, насколько высоки наши требования к ожидаемому выигрышу. Как и выше, назовем множество карточек m-системой D, если при любом результате тиража y хотя бы одна из этих карточек выиграет не менее m номеров. Рассмотрим «Спортлото — 6 из 49». 6-система D_0 содержит $C_{49}^6=13\,983\,816$ карточек — все векторы из множества $E_2^{49,6}$ двоичных векторов длины 49 с шестью единицами. В любой 5-системе D_1 найдутся 2 вектора c_1 и c_2 с $d(c_1, c_2)=2$. В самом деле, любые два вектора, содержащие одинаковое число единиц, находятся один от другого на четном расстоянии. Поэтому если не существует векторов c_1 и c_2 таких, что $d(c_1, c_2)=2$, то $\min_{c_1,c_2} d(c_1,c_2)=4$, и найдется такой вектор $y \in E_2^{49,6}$, что ближайший к нему вектор системы находится от y на расстоянии 2. Тогда, если y будет результатом тиража, в D_1 не найдется карточки с пятью выигравшими номерами.

Упражнение 14 (граница Хэмминга для векторов с одинаковым числом единиц).

а) Докажите, что число векторов из $E_2^{49,6}$, находящихся на расстоянии $\leqslant 2s$ от данного вектора $c \in E_2^{49,6}$, равно $M(s)=\sum_{i=0}^{s} C_6^i C_{43}^i = \sum_{i=6-s}^{6} C_6^i C_{43}^{6-i}$.

б) Докажите, что $|D_1|$ — количество карточек в 5-системе D_1 — не меньше, чем $\lceil C_{49}^6/M(1)\rceil=53\,992$ ($\lceil x\rceil$ — наименьшее целое, большее или равное x).

Аналогично показывается, что любая 4-система D_2 не может содержать меньше, чем 1014 карточек, любая 3-система D_3 — меньше, чем 54 карточки. Для «Спортлото — 5 из 36» $|D_1|\geqslant 2417$, $|D_2|\geqslant 79$, $|D_3|\geqslant 8$.

В заключение приведем пример 2-системы D для мини-«Спортлото», в котором требуется угадать 6 из 8 номеров:

$$D=\begin{matrix} 1&1&1&1&1&1&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&1&1\\ 1&1&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1. \end{matrix}$$

Поскольку любой результат тиража y содержит два нуля, найдется такой вектор $c \in D$, что в некоторой координате векторы y и c оба содержат нуль. Тогда расстояние между y и c не больше двух, т. е. D — действительно 2-система. Покажем, что 2-системы с меньшим числом векторов не существует. Действительно, три вектора вместе содержат всего шесть нулей, и даже если все они находятся на разных позициях, все же остаются две позиции, не содержащие нулей. Помещая на эти позиции нули вектора y, мы видим, что он находится на расстоянии 4 от каждого из трех векторов системы. Значит, 2-система D длины 8 оптимальна.

Дорогие читатели!

В будущем, 1991 году журнал «Квант», как и прежде, будет распространяться только по подписке. К сожалению, на момент подписания этого номера в печать мы не знаем окончательно, как отразится на подписной цене удорожание бумаги и повышение типографских расходов и расходов, связанных с доставкой журнала. Однако в любом случае мы будем стараться, чтобы «Квант» остался доступным для тех, кому он действительно необходим,— для школьников, увлекающихся математикой, физикой, астрономией, космонавтикой, информатикой, для преподавателей, работа в школе для которых — призвание, для студентов, избравших свой профессиональный путь в науке или технике...

Журнал «Квант» не стоит на месте, и в будущем году на его страницах появятся новые рубрики и материалы, предложенные вами. Мы надеемся, что он будет разнообразнее и занимательнее. К тому же мы планируем увеличить количество материалов, доступных более широкому кругу читателей.

Оформить годовую подписку можно до 31 октября 1990 года. Подписка принимается без ограничений в агентствах «Союзпечать», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала

«Квант» в каталогах «Союзпечати» 70465.

Редакция журнала «Квант»

УЛЬТРАЗВУК В МЕДИЦИНЕ

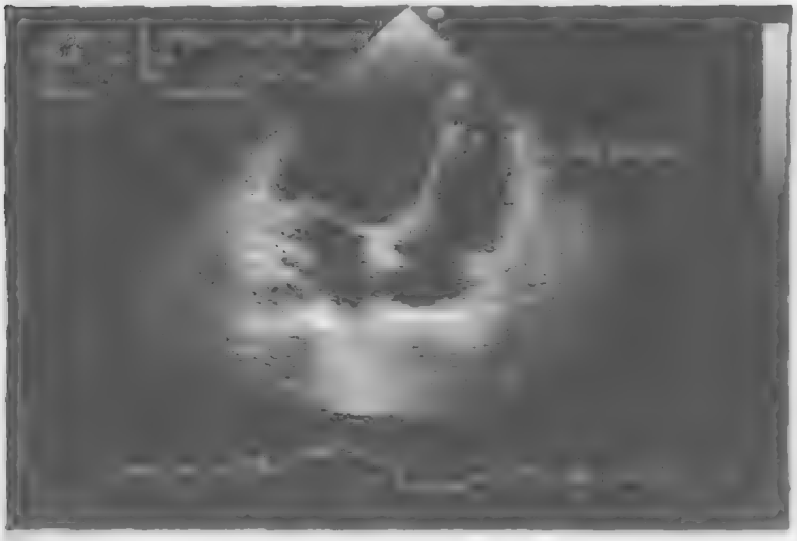
Р. МОРИН. Р. ХОББИ (США)

Ультразвуковая диагностика — сравнительно недорогой метод исследования структуры и работы органов.

Как и слышимый звук, ультразвук представляет собой волны, распространяющиеся в среде. В медицине используются ультразвуковые волны с частотами от 1 до 10 МГц (для сравнения: слышимый звук имеет частоты от 30 Гц до 20 кГц). Скорость распространения звуковых волн в материале зависит от модуля объемной упругости B и от плотности материала ϱ: $v=\sqrt{B/\varrho}$. Для мягких тканей ее значение варьируется от 1400 до 1600 м/с. Соответствующие длины волн лежат в интервале 0,14—1,6 мм. (В таких твердых материалах, как кости, скорость звука достигает 4000 м/с.) При переходе волны из одной среды в другую происходит ее частичное отражение от границы, причем отношение амплитуд прошедшей и отраженной волн определяется отношением так называемых акустических импедансов этих сред (это чем-то напоминает частичное отражение света на границе двух сред с различными показателями преломления). Акустический импеданс среды с модулем объемной упругости B и плотностью ϱ равен $Z=\varrho v=\sqrt{B\varrho}$. Чем сильнее отличаются импедансы двух сред, тем больше энергии отражается обратно на их границе раздела. Анализ отраженных от границ органов ультразвуковых сигналов позволяет строить достаточно четкие изображения.

Ультразвуковой сигнал получают с помощью прибора, преобразующего колебания электрического напряжения в механические колебания. Тот же самый прибор и некоторых электронных схемах, работающих в импульсном режиме, может использоваться и для обратного преобразования ультразвуковых колебаний в слабый электрический сигнал. В установках, действующих в непрерывном режиме, для излучения и детектирования волн используются различные приборы.

Измерения довольно сложны, так как волна при распространении в тканях теряет много энергии. Например, для волн с частотой 1 МГц ослабление составляет примерно 100 дБ/м. А это значит, что эхо (отраженный сигнал), приходящее от отдаленной поверхности, очень слабое. Разницу



Ультразвуковая эхограмма, полученная методом B-scan. Это как бы мгновенный снимок продольного сечения сердца. Серия таких снимков позволяет судить о состоянии сердца. Маленькое светлое пятно вверху снимка — это датчик. Он был установлен на теле пациента ниже сердца, и поэтому изображение сердца перевернутое.

Из книги: D. Halliday, R. Resnick «Fundamentals of Physics», Third edition extended, 1988. (John Wiley & Sons, N. Y.)

Ультразвуковые эхограммы любезно предоставлены Д. М. Атауллахановой (Институт клинической кардиологии им. А. Л. Мясникова АМН СССР).

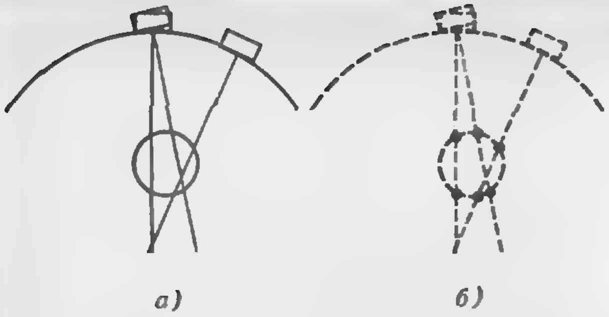


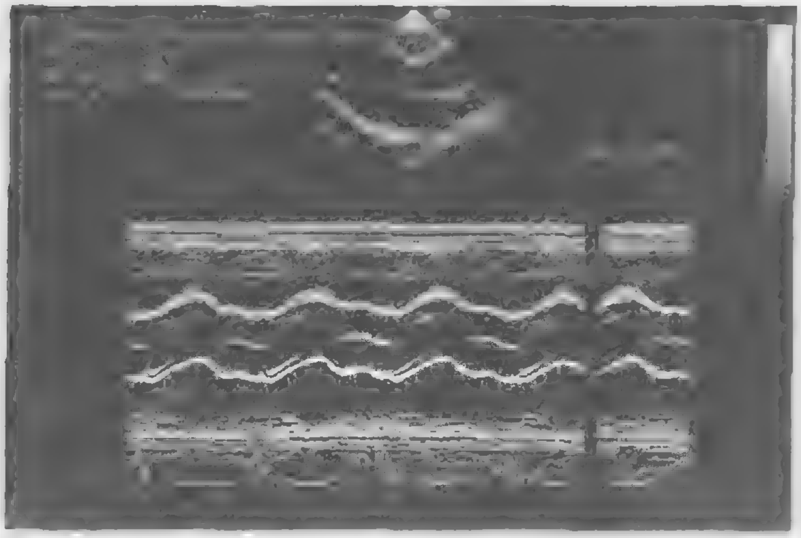
Рис. 1. Схема исследования методом B-scan. Излучатель может быть установлен на одном месте или перемещаться по поверхности тела (а). Информация об отраженных лучах вдоль многих направлений позволяет строить изображение (б).

между сильными и слабыми сигналами удается несколько сгладить использованием усилителей. В импульсных устройствах усилитель настраивают так, чтобы сигналы с бóльшим запаздыванием и, соответственно, с бóльшим ослаблением и усиливались больше.

Наиболее распространенным методом построения изображений является метод B-scan. Для излучения и для приема отраженных волн используется один прибор, который можно перемещать над телом пациента. Во избежание больших потерь энергии на границе тело — воздух, между прибором и кожей наносится гель. Прибор излучает короткие ультразвуковые импульсы. Измеряются время запаздывания и амплитуда отраженной волны. По времени запаздывания определяется расстояние до отражающей границы и потери энергии волны в среде. В результате на дисплее высвечивается точка, яркость которой пропорциональна амплитуде отраженной волны (с учетом поправки на затухание), которая, в свою очередь, зависит от отношения импедансов на отражающей поверхности. (Метод построения эхограммы отражен в названии: B-scan — от англ. Brightness — яркость, scan — поле зрения.)

Для получения полного изображения органа необходимо провести серию измерений в нескольких местах и в разных направлениях (рис. 1). В общей сложности это занимает несколько минут.

Для исследования тех органов, которые не остаются неподвижными, используется метод M-scan (М — от английского Moving — движущийся). Этим методом исследуют, например, движения клапанов сердца. Через небольшие промежутки времени испускаются короткие импульсы ультразвука. Положение клапана со временем меняется, меняется и время запаздывания. Как получают эхограмму, показано на рисунке 2. Для построения обычно используют самописец, который вырисовывает как бы график зависимости запаздывания эха во времени. Точнее, получается множество графиков, каждый из которых соответствует колебаниям небольшого участка клапана, стенки сердца или еще чего-нибудь, находящегося за и перед сердцем.



Эхограмма, полученная методом M-scan. Две яркие волнистые линии — это «график» изменения поперечного сечения аорты (верхняя кривая — движение передней стенки аорты, нижняя — задней); «пунктир» в сечении аорты — аортальный клапан в моменты закрытия створок. (В верхней части снимка — B-scan изображение поперечного сечения сердца.)

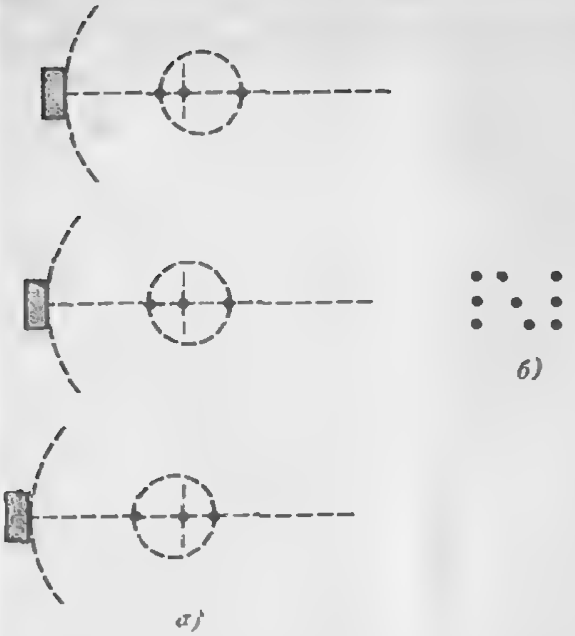


Рис. 2. Схема исследования методом М-scan. Отражающая площадка двигается в неподвижной цилиндрической оболочке (а). Запаздывания эха от «сердечного клапана» меняются со временем, и соответствующие точки на экране (б) создают «изображение» движения.

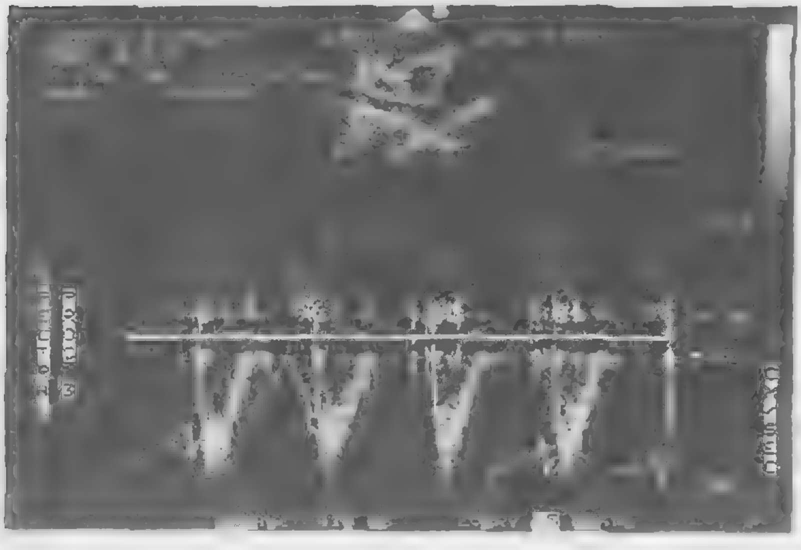
С помощью ультразвука можно измерять скорость течения крови в сосудах. Метод измерения основан на так называемом вторичном эффекте Доплера — зависимости частоты отраженного сигнала от скорости движения отражателя. Если отражающие частицы (например, красные кровяные тельца) движутся со скоростью u под углом θ к направлению распространения волны, то частота отраженной в обратном направлении волны будет сдвинута относительно исходной части ν на величину $\Delta\nu = 2\nu u \cos\theta/v$. Для $u = 0{,}1$ м/с и $\nu = 2$ МГц при $\theta = 0$ этот сдвиг составит 260 Гц. Если составить биения из отраженной и исходной волн, то частота биений будет лежать в слышимом диапазоне (130 Гц). По сдвигу частоты можно судить о состоянии кровеносных сосудов (так, при сужении сосудов скорость кровотока уменьшается). При измерении скорости излучатель настраивают так, чтобы биения были громкими и частыми. Сигнал при этом звучит как серия «паф-паф» в такт с ударами сердца. Затем аппарат определяет значение $\Delta\nu$.

Интенсивность ультразвука, используемого для диагностики, обычно не превышает 10^3 Вт/м^2. Насколько известно, при таких интенсивностях вредные побочные эффекты отсутствуют.

При более высоких интенсивностях ткани довольно сильно нагреваются. Иногда это используют для снятия острых болевых ощущений в спине, в плечевом поясе, а также при повреждениях мышц.

При интенсивностях свыше 7×10^6 Вт/м^2 повышение температуры может привести к повреждению тканей. При 10^7 Вт/м^2 и более перепады давления в ультразвуковой волне могут приводить к образованию и схлопыванию микрополостей. Эти эффекты используются в хирургии.

Перевод с английского И. Мартина



На этой эхограмме изображен спектр потока крови в устье легочной артерии — изменение скорости тока крови во времени (в зависимости от фазы сердечного цикла). По спектру можно определить максимальную, среднюю, интегральную скорости потока, а эти данные позволяют судить о наличии или отсутствии патологии.

„Квант" улыбается

Кто во что горазд

По давней традиции семестр начинался в полной неразберихе. Курсовые журналы где-то затерялись; студенты бесцельно бродили по лекционному залу. Время от времени мою лекцию прерывало аханье, и к выходу, краснея, неуверенно пробирался очередной студент, наконец-то сообразив, что здесь читают курс дифференциальных уравнений, а не введение в философию.

Я рассказал, какие нужны учебники и какие будут самостоятельные работы, а потом произнес обычную фразу: «У кого есть вопросы?» Если бы вопросов не оказалось, я успел бы на автобус 11.20, идущий в Уивертаун; тогда можно было бы поиграть в гольф.

Поднялся какой-то студент; обе руки он держал в карманах.

— Профессор, а зачем нам этот курс вообще?

Аудитория тревожно загудела, нервно зашаркала ногами.

— Кто вы такой, молодой человек? — осведомился я.

— Бэроун, сэр. Фрэнк Бэроун.

— Так вот, мистер Бэроун, по требованию университетской программы все студенты, специализирующиеся в математике, обязаны пройти минимум...

— Это-то я знаю! — прервал он меня, но тут же поспешно добавил: — Сэр.

Я с улыбкой кивнул.

— Вот что меня интересует,— продолжал он.— Есть ли хоть какая-то практическая польза от изучения абстрактных понятий? *Мне нужно совсем другое:* руководство в том, как стать полезным членом общества.

Я сделал вывод, что студент сбежал с философского факультета, но тем временем его низкий грудной голос и уверенные манеры уже покорили аудиторию. Прочие студенты ждали, что я отвечу. Я прокашлялся.

— Мистер Бэроун,— начал я,— что вы хотите вынести из университета?

— Еще не знаю, сэр. Я думал, два года учебы в колледже помогут мне выбрать профессию, но они не помогли. Понимаете, мне не приходится зарабатывать себе на жизнь.

Он заявил это так же просто, как мы с вами могли бы сказать: «У меня разболелись зубы».

— Откуда же вы берете средства к существованию, мистер Бэроун?

— Да вот, сэр, такой у меня... дар.

— Ах, так,— съехидничал я.— Очевидно, прикосновение Мидаса?

Тотчас же я раскаялся в своем ехидстве. Лицо Бэроуна побагровело. Он поделился со мной величайшей тайной, а я сделал из него посмешище.

— Гораздо лучше, профессор!— воскликнул он.— Смотрите!

Бэроун повел рукой в мою сторону. Лекторская кафедра бесшумно взмыла вверх и воспарила над моей макушкой. Кто-то

Рассказ перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики в 15-ти томах. Том 10» (М., Молодая гвардия, 1967).

вскрикнул. Я обернулся к аудитории и увидел, как Бэроун делает знак хорошенькой сокурснице. В тот же миг она попыталась прикрыть наготу общей тетрадью.

— Мистер Бэроун!— повысил я голос.— Достаточно!

— Нет еще, профессор!

Он замахал руками и стиснул пальцы, словно ловил бабочку. Когда он разжал кулаки, оттуда вылетел рой летучих мышей, которые беспорядочно закружились по залу. Студентки с визгом нырнули под стулья.

Надо было остановить Бэроуна. Я набрал побольше воздуху в легкие и загремел:

— Прекратить!

Неожиданно зал стих; все замерли. В напряженной тишине слышался лишь шорох мышиных крыльев да всхлипывание обнаженной девушки. Все глаза были устремлены на меня, даже глаза Бэроуна. Что ж, не ударю лицом в грязь.

Я повел бровью в сторону кафедры, и она мягко опустилась. Быстрый взмах руки вернул девушке одежду.

Я сцепил пальцы и сосредоточился. Потом, разжав кулаки, выпустил соколов. Они очистили воздух от летучих мышей и, вернувшись ко мне в ладони, послушно исчезли.

Аудитория превратилась в сплошной разинутый рот. Надо было разрядить обстановку.

— Есть еще вопросы?

Студенты молча покачали головами. Только Бэроун не шевельнулся.

— Прекрасно. К следующему разу прочтите страницы учебника с третьей по семнадцатую включительно. Решите все задачи на семнадцатой странице. Вы свободны.

Аудитория расходилась медленно. Бэроун, который покидал зал последним, замешкался у двери. Он оглянулся через плечо. На несколько секунд наши взгляды скрестились. Затем, словно приняв какое-то решение, он мрачно кивнул. Зубы его сверкнули в мимолетной улыбке, и он вышел, напевая песенку.

Я перевел дыхание и собрал свои конспекты. Выходя, я посмотрел на часы. 11.30.

Может, успею на следующий автобус — в 1.15.

Б. Куросака (США)
Перевод с английского
Н. Евдокимовой

● МАТЕМАТИКА ● ФИЗИКА ● ХИМИЯ ● БИОЛОГИЯ ● ЛИТЕРАТУРА ● МАТЕМАТИКА

АБИТУРИЕНТ — 91

Заочные курсы с оригинальными методиками обучения помогут Вам стать студентом одного из ведущих вузов страны.

Приглашаются учащиеся и выпускники школ, техникумов, ПТУ, медицинских училищ и уволенные в запас воины.

Квалифицированные преподаватели, применяя индивидуальный подход и учитывая специфику выбранного Вами вуза, сделают все возможное для того, чтобы Ваше поступление в вуз стало реальностью.

В течение учебного года Вы получите 5 методических разработок по каждому предмету, в которых содержится теоретический материал, разбор вопросов и задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах, и контрольные работы.

Для поступающих в московские вузы во время вступительных экзаменов проводятся очные консультации.

Стоимость курса обучения по одному предмету — 50 руб. Для инвалидов и воинов-интернационалистов предоставляется скидка 50 %. Оплата производится после получения уведомления о зачислении.

Для поступления на курсы Вы должны прислать заявление, где будет указан предмет, выбранный вуз, Ваши фамилия, имя и отчество, учебное заведение, в котором Вы учитесь или которое закончили, и 2 конверта с написанным на них Вашим почтовым адресом.

Наш адрес:
121467, Москва, а/я № 30,
Советский фонд
милосердия и здоровья,
ВМЦ ТПО «АГАФО»,
Учебно-методический сектор

АГАФО

Нам пишут

По поводу задачи «С ветром и без него»

Издательство «Наука» выпустило в 1989 году книгу И. Н. Сергеева, С. Н. Олехника и С. В. Гашкова «Примени математику». На странице 126 этой книги имеется задача 13.11 следующего содержания: «Велосипедист проезжает 1 км при попутном ветре за 3 минуты, а при движении против того же ветра — за 5 минут. За сколько минут он проезжает 1 км в безветренную погоду?». Авторы книги считают описанную ситуацию аналогичной движению катера по реке (вверх и вниз по течению) и как следствие дают решение, смысл которого сводится к следующему. Пусть скорость велосипедиста в безветренную погоду равна v, скорость же ветра — u. Тогда скорость велосипедиста при попутном ветре равна $(v+u)$, а при встречном — $(v-u)$. Следовательно, $v+u=1/3$ км/мин, $v-u=1/5$ км/мин, откуда $v=\frac{4}{15}=\frac{1}{3^3/_4}$ км/мин, т. е. велосипедист без ветра проедет 1 км за $3\frac{3}{4}$ мин $=3$ мин 45 с.

Такое решение действительно пригодно для плывущего катера и даже в какой-то степени для летящего самолета, но для велосипедиста — нет. Почему? Потому что для катера и самолета вода и воздух соответственно являются единственной средой, в которой они движутся и с которой взаимодействуют в направлении движения. А велосипедист хотя и движется в потоке воздуха, но едет-то он по шоссе, имеет с ним сцепление, да и движение приводится именно вследствие взаимодействия с шоссе. (Иначе легко было бы получить парадоксальную ситуацию: если $v=u$, то при встречном ветре велосипедист, крутя педали, оставался бы на месте!)

Не хочется, однако, сводить содержание этого письма лишь к критике авторов за неудачно подобранную задачу. Разумнее будет попытаться правильно ее решить. Прежде всего заметим, что велосипедист расходует энергию на преодоление сопротивления воздуха, трение велосипеда о дорогу и внутреннее трение цепной передачи. Если шоссе твердое и ровное (проскальзывание практически отсутствует) и велосипед хорошо подготовлен к велопробегу (почищен, смазан и т. п.), то в сумме трех упомянутых величин подавляющую часть будет составлять именно сопротивление воздуха. Опыт подтверждает это. Вспомним, каких скоростей достигают велосипедисты в «гонках за лидером» — мотоциклом, сильно уменьшающим это самое сопротивление. Поэтому будем считать, что движению велосипедиста препятствует лишь сопротивление воздуха, которое, как известно, пропорционально квадрату относительной скорости движения велосипедиста и воздуха: $F=\alpha v^2_{\text{отн}}$. Тогда для случая попутного ветра: $F_1=\alpha\left(\frac{1}{3}-u\right)^2$; при встречном ветре: $F_2=\alpha\left(\frac{1}{5}+u\right)^2$; и, наконец, при езде со скоростью v в безветренную погоду: $F_3=\alpha v^2$ (здесь все скорости измеряются в км/мин).

Естественно считать, что во всех трех случаях велосипедист развивает одинаковую мощность N. Так как мощность есть произведение силы на скорость, то для первых двух случаев соответственно получаем:

$$N=\alpha\left(\frac{1}{3}-u\right)^2\cdot\frac{1}{3}$$

$$N=\alpha\left(\frac{1}{5}+u\right)^2\cdot\frac{1}{5}.$$

Отсюда

$$\frac{N}{\alpha}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-u\right)^2=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+u\right)^2,$$

тогда

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}-u\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{5}+u\right),$$

т. е.

$$u=\frac{1}{15}(17-4\sqrt{15})\text{ км/мин}$$

и

$$\frac{N}{\alpha}=\frac{32}{225}(4-\sqrt{15})\text{ км/мин.}$$

При движении в безветренную погоду $N=(\alpha v^2)\cdot v=\alpha v^3$, т. е. $v=\sqrt[3]{\frac{N}{\alpha}}=\sqrt[3]{\frac{32}{225}(4-\sqrt{15})}$ км/мин, следовательно, 1 км велосипедист проедет за время, равное

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{32}{225}(4-\sqrt{15})}}\approx 3{,}81\text{ мин}=3\text{ мин }48{,}6\text{ с.}$$

Расхождение с авторским ответом вроде бы невелико, но дело-то не столько в ответе, сколько в подходе. Но согласится ли читатель?

И. Акулич

Задачник „Кванта"

Задачи

М1241 — М1245, Ф1248 — Ф1252

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 ноября 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1241» или «Ф1248». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1241 — М1245, Ф1248 и Ф1250 предлагались на заключительном этапе XXIV Всесоюзной олимпиады по математике и физике.

М1241. Имеется 1990 кучек, состоящих соответственно из 1, 2, 3, ..., 1990 камней. За один шаг разрешается выбросить из любого множества кучек по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?

Н. Агаханов

М1242. На двух сторонах AB и BC правильного $2n$-угольника взято по точке K и N так, что угол KEN, где E — вершина, противоположная B, равен $180°/2n$. Докажите, что NE — биссектриса угла KNC.

Н. Агаханов, Н. Нецветаев, Д. Терешин, Д. Фомин

М1243. а) На доске записано уравнение $*x^2+*x+*=0$. Первый из двух играющих называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек. Может ли первый добиться, чтобы полученное уравнение имело различные рациональные корни, или второй всегда сможет ему помешать?

б) На доске написано уравнение $x^3+*x^2+*x+*=0$. Первый из двух играющих называет любое число, второй ставит его на место любой из звездочек; затем первый называет еще одно число, второй ставит его на место одной из двух оставшихся звездочек; наконец, первый ставит любое число на место последней оставшейся звездочки. Может ли первый добиться того, чтобы полученное уравнение имело три различных целых корня?

А. Берзиньш

М1244. В сенате, состоящем из 30 сенаторов, каждые двое дружат или враждуют, причем каждый враждует ровно с 6 другими. Найдите общее количество троек сенаторов, в которых либо все три попарно дружат, либо все три враждуют друг с другом.

Д. Фомин

М1245. На плоскости задана точка O и n векторов, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите, что можно отложить эти векторы, начав в точке O, друг за другом в таком порядке, что полученная замкнутая (быть может, самопересекающаяся) ломаная будет целиком расположена внутри или на границе некоторого угла в 60° с вершиной в точке O.

С. Августович, С. Севастьянов

Ф1248. На горизонтальной доске лежит кусок мела. Доске мгновенно придают горизонтальную скорость V_0 и останавливают доску тоже мгновенно через время τ после первого толчка. Коэффициент трения между мелом и доской равен μ. Найти длину следа мела на доске и полное смещение мела относительно доски.

А. Зильберман

Ф1249. Круглую пластинку диаметром $d=40$ мм и толщиной $a=0,5$ мм осторожно положили на поверхность воды. Благодаря поверхностному натяжению она оста-

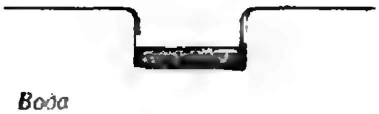


Рис. 1.

лась на плаву, причем в месте соприкосновения верхней плоскости пластинки с поверхностью воды угол между ними оказался равным 90° (рис. 1). Определить плотность материала пластинки. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.

М. Гаврилов

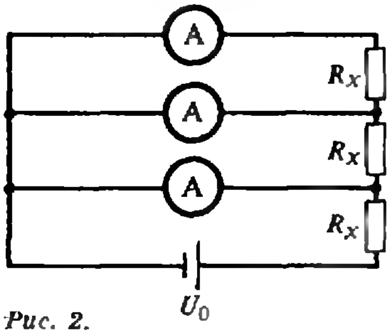


Рис. 2.

Ф1250. В схеме на рисунке 2 все амперметры одинаковые и все резисторы R_x одинаковые. Верхний амперметр показывает ток $I_в=1$ мА, средний — ток $I_с=4$ мА. Напряжение батарейки $U_0=4{,}5$ В. Что показывает нижний амперметр? Чему равно R_x?

А. Зильберман

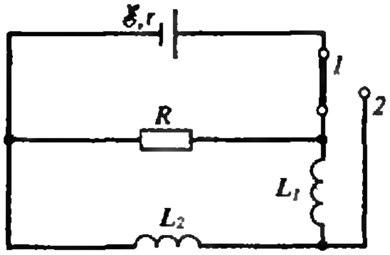


Рис. 3.

Ф1251. В схеме, приведенной на рисунке 3, после установления токов мгновенно перебрасывают ключ из положения *1* в положение *2*. Считая катушки идеальными, определить количество тепла, которое выделится на резисторе R после переключения. ЭДС источника $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление r.

В. Можаев

Ф1252. Вертикальную спицу двигают перед дисплеем слева направо со скоростью $v=1$ м/с, при этом на светящемся экране отчетливо видна наклонная «тень» спицы. Почему это происходит? Чему равен угол наклона «тени» к вертикали? Электронный луч рисует полный кадр за время $t=0{,}02$ с, число строк в кадре примите равным $n=512$. Будет ли угол таким же, если двигать спицу перед телеэкраном?

А. Кожевников

Решения задач

М1216—М1220, Ф1228—Ф1232

М1216. *Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.*

Ответ: $\angle A=60°$, $\angle B=45°$, $\angle C=75°$.

Воспользуемся тем, что в *любом* треугольнике (в обозначениях задачи) $\angle CAH=\angle BAO$ (а значит, и $\angle HAD=\angle OAD$; рис. 1). Действительно, $\angle CAH=90°-\angle ACB$, $\angle BAO=90°-\angle AEB$, где E — второй конец диаметра, проведенного из A, а углы ACB и AEB опираются на общую дугу AB.

Теперь из равенства $AC=AD$ получаем, что $\angle CAH=\angle HAD$ (AH — высота в треугольнике ACD). Следовательно, AH, AD и AO разбивают угол A треугольника ABC на равные части, и если $\angle CAH=\alpha$, то

$$\angle A=4\alpha,\ \angle B=90°-3\alpha,\ \angle C=90°-\alpha.$$

Второе замечание, касающееся произвольного треугольника: если F — точка, симметричная ортоцентру H относительно, скажем, стороны AB (рис. 2), то $\angle AFB=\angle AHB=180°-\angle C$, а значит, F лежит на описанной окружности.

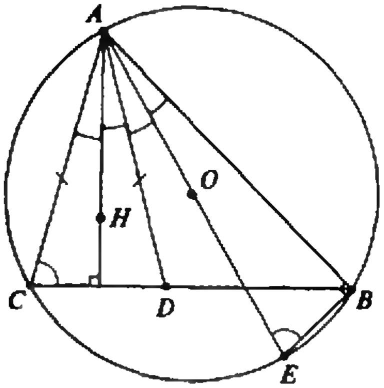


Рис. 1.

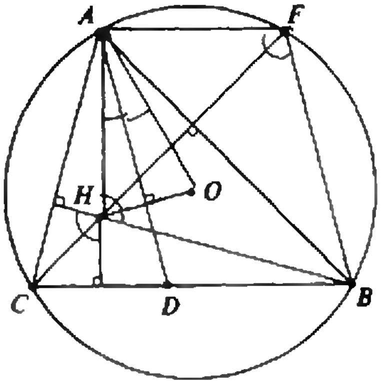


Рис. 2.

Поскольку $AF=AH$, а $AH=AO$ (т. к. биссектриса угла A треугольника HAO по условию задачи совпадает с его высотой), угол ACF опирается на хорду AF, равную радиусу окружности. Следовательно, $\angle ACF=30°$; в то же время $\angle ACF=90°-4\alpha$. Таким образом, $\alpha=(90°-30°)/4=15°$, откуда и получается приведенный выше ответ.

К. Нисторєску, В. Дубровский

M1217. *Докажите для любого натурального n равенство* $\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1\right)^2=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$.

Заметим, что дробь $1/k$ встречается в k последних скобках левой части. Поэтому после раскрытия скобок (по формуле, приведенной на полях) дробь $1/k^2$ встретится k раз, а дробь $1/(kl)$ для каждого $l>k$ — тоже k раз, причем каждому l отвечают $l-1$ значений k ($k=1, 2, \ldots, l-1$). Следовательно, сумма слева равна

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2}+2\sum_{l=1}^{n}\frac{k(l-1)}{kl}=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+$$
$$+2\left(1-\frac{1}{1}+1-\frac{1}{2}+\ldots+1-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Можно решить задачу и более прямолинейно — по индукции.

Легко проверить, что доказываемое равенство выполнено при $n=1$ $(1=2-1)$ и $n=2$ $(1/2^2+(1/2+1/1)^2=4-1-1/2)$. Теперь докажем его для любого $n>2$, предполагая, что верно аналогичное равенство для $n-1$:

$$\frac{1}{n^2}+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\ldots+1\right)^2=$$
$$=\frac{n}{n^2}+2\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n-1}+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\ldots+1\right)\right)+\left(\frac{1}{n-1}\right)^2+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{1}{n-1}+\ldots+1\right)^2=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{n-1}+\frac{n-2}{n-2}+\ldots\right.$$

$$(x_1+\ldots+x_n)^2=$$
$$=x_1^2+\ldots+x_m^2+$$
$$+2x_1x_2+\ldots+2x_{m-1}x_m,$$

или, пользуясь знаком Σ для суммы,

$$\left(\sum_{k=1}^{m}x_k\right)^2=$$
$$=\sum_{k=1}^{m}x_k^2+2\sum_{1\leq k<j\leq m}x_kx_j.$$

$$\ldots+\frac{2}{2}+1)+2(n-1)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}+2+2n-2-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Н. Васильев

М1218. *На отрезке AC взята точка B и построены дуги: $AC=\alpha$ и $BC=\beta$, сумма градусных величин которых равна $\alpha+\beta=360°$, лежащие в одной полуплоскости от прямой AC. Произвольная дуга AB пересекает их в точках K и L (рис. 1). Докажите, что всевозможные прямые KL пересекают прямую AC в одной и той же точке.*

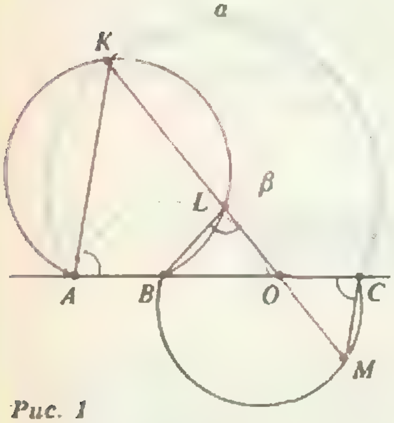


Рис. 1

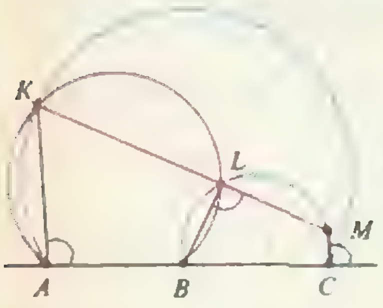


Рис. 2.

Достроим дугу β до окружности (рис. 1) и продолжим KL до пересечения с новой дугой в точке M. Тогда прямые AK и CM будут параллельны, поскольку $\angle KAB=180°-\angle KLB=\angle BLM=\angle BCM$. Пусть O — точка пересечения KM и BC; достаточно доказать, что отношение $OA:OC$ не зависит от выбора точки K. В силу подобия треугольников OAK и OCM это отношение равно $AK:CM$. Угловые величины дуг AK и CM равны, так как дуги AKC и CMB по угловой величине равны $(360°-\beta-\alpha)$, а дуги KC и MB стягивают равные вписанные углы KAC и MCB и тоже равны по величине. Следовательно, отношение хорд AK и CM равно отношению радиусов дуг α и β, а значит, не зависит от K.

В этом решении мы неявно пользовались тем, что точка M лежит на «достроенной» дуге. Однако иначе и быть не может. В самом деле, легко видеть, что хорды AK и CM параллельны при любом расположении секущих ABC и KLM (рис. 2). И если бы K и M оказались по одну сторону от BC, то сумма дуг KC и BM, равная $2(\angle KAB+\angle BCM)=2\cdot180°$, оказалась бы равна сумме дуг AKC и BMC, что неверно.

Из решения видно, что точка O — это центр гомотетии дуг AKB и CMB; по сути дела, на этой идее и построено решение. Но можно было применить и более хитрое преобразование — инверсию (о нем рассказывалось в статье В. Уроева «Инверсия» в «Кванте» № 5 за 1984 г.). Для читателей, знакомых с инверсией и ее свойствами, укажем два различных способа ее использования в нашей задаче. Первый основан на том, что при инверсии с центром O и коэффициентом k (определяемой равенством $OA\cdot OB=OC^2=k$) окружности α и β переходят друг в друга, а переменная (красная на рисунке 1) окружность переходит сама в себя. Поэтому точки K и L меняются местами, и, значит, $O\in KL$. Второй способ использует инверсию с центром C и коэффициентом, скажем, $CA\cdot CB$. После инверсии условие задачи превратится в следующее громоздкое, но совершенно очевидное утверждение (рис. 3):

из точек A и B по одну сторону от AB проведены лучи a и β так, что $\angle aAB=\angle\beta BA$, а также произвольная дуга AB, пересекающая лучи в точках K и L; тогда окружность CKL, где C — фиксированная точка прямой AB, пересекает AB вторично в одной и той же точке O.

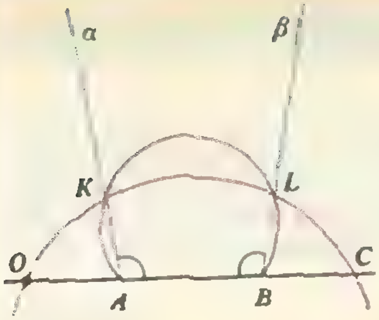


Рис. 3.

Кстати, отсюда видно, что порядок точек A, B и C может быть любым, а лучи (т. е. дуги в исходной задаче) можно дополнить до прямых (соответственно, до окружностей).

В. Дубровский

M1219*. *Докажите, что для любых n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n>1)$ справедливо неравенство*

$$(x_2+\ldots+x_n)^{x_1}+\ldots+(x_1+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n)^{x_i}+\ldots+(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})^{x_n}>n-1.$$

Например, для любых положительных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x+y)^z+(y+z)^x+(z+x)^y>2.$$

Обозначим сумму, стоящую в левой части неравенства, через S. Если для некоторого индекса i имеем $x_i \geqslant 1$, то каждое слагаемое суммы S, кроме, быть может, i-го слагаемого, не меньше 1; кроме того, i-е слагаемое положительно; отсюда сразу же следует требуемое неравенство.

Пусть теперь для каждого индекса i имеем $0<x_i<1$. Ниже в предположении, что $x>0$ и $0<y<1$, будет доказано неравенство

$$x^y>\frac{x}{x+y}. \qquad (1)$$

Считая это неравенство справедливым, получим

$$S>\frac{x_2+\ldots+x_n}{x_1+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_1+\ldots+x_{i-1}+x_{i+1}+\ldots+x_n}{x_1+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_1+\ldots+x_{n-1}}{x_1+\ldots+x_n}=n-1,$$

что и требовалось доказать.

Вернемся к неравенству (1). Пусть $x>0$ и $0<y<1$; положим $a=1/y$. Используя известное *неравенство Бернулли*, получим

$$(1+y/x)^a>1+ay/x=1+1/x>1/x.$$

Отсюда $\frac{y+x}{x}>\frac{1}{x^y}$ и $x^y>\frac{x}{x+y}$. Итак, *неравенство* (1), *а вместе с ним* и неравенство нашей задачи, доказано.

Докажем теперь использованное нами неравенство, носящее имя Якоба Бернулли: *при* $h>0$, $a>1$

$$(1+h)^a>1+ah. \qquad (2)$$

Если $h=0$, то обе части (2) равны 1. Поэтому достаточно убедиться, что производная левой части больше, чем правой: *отсюда будет следовать,* что левая часть с ростом h растет быстрее. Имеем:

$$a(1+h)^{a-1}>a,$$

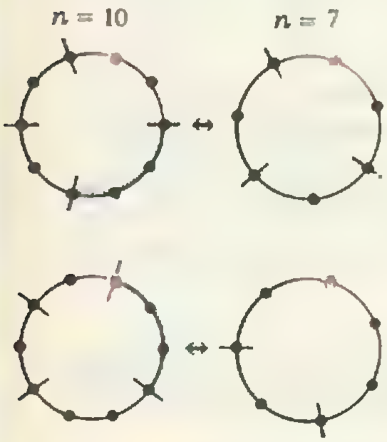
поскольку $a-1>0$ и $1+h>1$. (Можно доказать, что неравенство Бернулли (2) справедливо для произвольных значений a и h таких, что $0 \neq h>-1$ и $a>1$. Кстати, при $a>1$ и $h=-1$ неравенство (2) сохраняется, а при $a=1$ или $h=0$ — обращается в равенство.)

В заключение отметим, что если выбрать $x_1=1$ и $x_2=\ldots=x_n=\varepsilon$, то $S=(n-1)\varepsilon+(n-1)\cdot(1+(n-2)\varepsilon)^{\varepsilon}$, т. е. S сколь угодно близко к $n-1$ при достаточно малом

ε. Следовательно, для каждого значения $n>1$ константа $n-1$ в правой части нашего неравенства точна, т. е. ее нельзя заменить большей константой так, чтобы неравенство при этом оставалось верным для произвольных наборов положительных чисел x_1, ..., x_n.

А. Михайлов

М1220*. *Определим последовательность b_n условиями: $b_1=0$, $b_2=2$, $b_3=3$, $b_{n+1}=b_{n-1}+b_{n-2}$ при $n\geqslant 3$. Докажите, что при простом p число b_p делится на p.*



Приведем два решения. Первое основано на комбинаторной интерпретации чисел b_n.

Возьмем окружность, поделенную точками A_0, A_1, ..., A_{n-1} на n равных частей, и рассмотрим ее разбиения на дуги, составленные из двух или трех частей; назовем их «подходящими n-разбиениями». Пусть a_n — число таких разбиений. Тогда, очевидно, $a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=3$. Докажем, что $a_{n+1}=a_{n-1}+a_{n-2}$ при $n\geqslant 3$, а значит, $a_n=b_n$ при всех n. Для этого поставим в соответствие каждому подходящему $(n+1)$-разбиению либо $(n-1)$-разбиение, либо $(n-2)$-разбиение, и покажем, что полученное соответствие взаимно однозначно.

Стянем в точку ту дугу произвольного подходящего $(n+1)$-разбиения, которая следует за дугой, содержащей A_0, при обходе по часовой стрелке. (Если точка A_0 оказалась между двумя дугами, то стягивается дуга, начинающаяся в этой точке при указанном направлении обхода; см. рисунок.) Чтобы восстановить по $(n-1)$- или $(n-2)$-разбиению исходное $(n+1)$-разбиение, достаточно вставить дугу соответственно из двух или трех частей вслед за дугой, содержащей A_0 (а если A_0 — граница двух дуг, то между этими дугами). В силу обратимости нашего соответствия оно взаимно однозначно.

Рассмотрим теперь все подходящие p-разбиения при простом p. Объединим в одну группу те из них, которые получаются друг из друга поворотами на углы $2\pi k/p$, $k=0, 1, \ldots, p-1$. Заметим, что повороты на $2\pi k_1/p$ и $2\pi k_2/p$ при $k_1\neq k_2$ переводят данное разбиение в разные. (В противном случае мы имели бы разбиение, которое переходит в себя при повороте на $2\pi k/p$, где $k=k_1-k_2$, а значит, и при всех поворотах на $(2\pi k/p)\cdot\ n$, $n=0, 1, \ldots, p-1$. Но при простом p один из этих поворотов совпадает с поворотом на $2\pi/p$, а такой поворот не может переводить в себя никакое подходящее разбиение.) Итак, в каждой группе ровно p разбиений, следовательно, $b_p=a_p$ делится на p.

Второе решение — чисто алгебраическое, однако использует некоторые факты, выходящие за пределы школьной программы.

Пусть λ_1, λ_2, λ_3 — три корня уравнения $t^3-t-1=0$ (два из них — комплексные числа). Тогда каждая из последовательностей λ_1^n, λ_2^n, λ_3^n, а значит, и их сумма $a_n=\lambda_1^n+\lambda_2^n+\lambda_3^n$ удовлетворяет соотношению $a_{n+1}=a_{n-1}+a_{n-2}$. При этом по теореме Виета (получающейся раскрытием скобок в равенстве $(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)=t^3-t-1$)

$$a_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,$$

$$\lambda_1^3\lambda_2+\lambda_2^3\lambda_3+\lambda_3\lambda_1=-1, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=1,$$

откуда

$$a_2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)=2;$$

$$a_3=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3-$$
$$-3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+3\lambda_1\lambda_2\lambda_3=3.$$

Следовательно, $a_n=b_n$ при всех n.

Теперь заметим, что

$$a_p=\lambda_1^p+\lambda_2^p+\lambda_3^p=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^p-\Sigma C_p^{(k,l,m)}\lambda_1^k\lambda_2^l\lambda_3^m,$$

где суммирование ведется по всем наборам (k, l, m) целых неотрицательных чисел с суммой $k+l+m=p$, отличным от $(p, 0, 0)$, $(0, p, 0)$ и $(0, 0, p)$, а

$$C_p^{(k,l,m)}=\frac{p!}{k!l!m!},$$

и докажем, что при простом p число a_p делится на p.

Ясно, что для указанных наборов (k, l, m) коэффициент $C_p^{(k,l,m)}$ делится на простое p. Далее, выделим в сумме группы слагаемых, отличающихся только перестановкой показателей k, l, m. Коэффициенты $C_p^{(k,l,m)}$ у всех таких слагаемых одинаковы, а сумма соответствующих одночленов $\lambda_1^k\lambda_2^l\lambda_3^m$ — это так называемый *симметрический многочлен* от λ_1, λ_2, λ_3 (т. е. не меняющийся при перестановках аргументов). Известно, что такой многочлен всегда можно представить как некий многочлен с целыми коэффициентами от основных симметрических функций $\sigma_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $\sigma_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$, $\sigma_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ — это частный случай основной теоремы о симметрических многочленах (см., например, книгу В. Г. Болтянского, Н. Я. Виленкина «Симметрия в алгебре», М.: Наука, 1987). У нас числа $\sigma_1=0$, $\sigma_2=-1$, $\sigma_3=1$ — целые, поэтому сумма слагаемых каждой группы, а значит, и вся сумма делится на p. Тем самым, поскольку $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, и a_p делится на p.

Д. Фомин, Н. Васильев

Ф1228. *Из стальной упругой тонкой ленты сделаны два обруча разных радиусов. При скольжении по горизонтальному столу обручи испытывают торможение силами вязкого трения, причем силы пропорциональны скоростям обручей и их поперечным размерам. Если толкнуть*

При таком трении длина пройденного обручем пути пропорциональна его начальной скорости. Очень существенно, что обручи сделаны из ленты одинаковой ширины — при этом масса каждого обруча оказывается пропорциональной его диаметру, и ускорения обоих обручей при одинаковых скоростях будут одинаковыми ($a=F_{\text{тр}}/m$, $F_{\text{тр}}\sim d$, $m\sim d$). Это означает, что относительное ускорение обручей определяется лишь их относительной скоростью.

Запишем законы сохранения импульса и энергии для абсолютно упругого удара обручей:

меньший обруч со скоростью v_0, он проедет до полной остановки путь L_0. Толкнем малый обруч так, чтобы он налетел на большой, имея перед ударом скорость v. На каком расстоянии друг от друга остановятся обручи?

$$m\vec{v}=m\vec{v}_1+M\vec{v}_2,$$

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2}.$$

Сделаем некоторые преобразования:

$$m(\vec{v}-\vec{v}_1)=M\vec{v}_2, \qquad (1)$$

$$m(v^2-v_1^2)=Mv_2^2 \qquad (2)$$

Заметим, что

$$(\vec{v}-\vec{v}_1)(\vec{v}+\vec{v}_1)=v^2-v_1^2$$

и

$$\vec{v}_2\vec{v}_2=v_2^2.$$

Тогда соотношение (2) можно записать иначе:

$$m(\vec{v}-\vec{v}_1)(\vec{v}+\vec{v}_1)=M\vec{v}_2\vec{v}_2.$$

Теперь совершим замену из уравнения (1) и получим

$$\vec{v}+\vec{v}_1=\vec{v}_2, \text{ или } \vec{v}_2-\vec{v}_1=\vec{v},$$

т. е. относительная скорость обручей после абсолютно упругого удара (даже нецентрального!) не меняется.

Таким образом, очевидно, что расстояние, на котором остановятся друг от друга обручи (а оно в данном случае зависит только от их относительной скорости), будет равно

$$L=L_0\frac{v}{v_0}.$$

А. Коршков

Ф1229. *В стакан с водой опустили кипятильник, и вода начала понемногу нагреваться. График зависимости температуры воды от времени приведен на рисунке 1. По истечении трех минут кипятильник отключают от сети. Через какое время вода остынет до 50 градусов? до 30?*

Начальный участок графика (см. рис. 1) — почти прямолинейный; значит, потери тепла тут малы. Будем считать, что их нет вовсе. Это нам даст возможность оценить теряемую тепловую мощность при разных температурах воды в долях по отношению к мощности нагревателя. Для этого нам нужно сравнить наклоны касательных в разных точках графика.

В области температуры 60 °C тангенс угла наклона касательной в 8 раз меньше тангенса угла наклона начального прямолинейного участка. Это означает, что здесь 7/8 потребляемой энергии уходит наружу. Аналогично получаем, что при температурах, близких к 50 °C, теряется 3/4 энергии. При меньших температурах точность получается совсем плохой, поэтому на второй вопрос (об остывании до 30 °C) ответ можно дать лишь приблизительный.

Примерный «график остывания», т. е. график зависимости температуры воды при остывании от времени, приведен на рисунке 2. Из этого графика видно, что время остывания от 60 до 50 °C составляет примерно 0,3 мин, а до 30 °C — 2,5—3 мин.

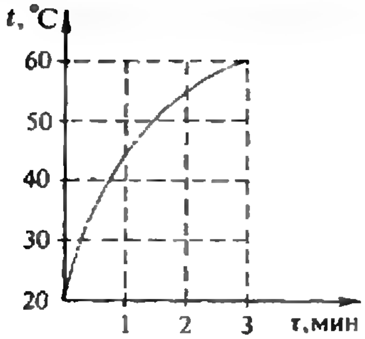


Рис. 1.

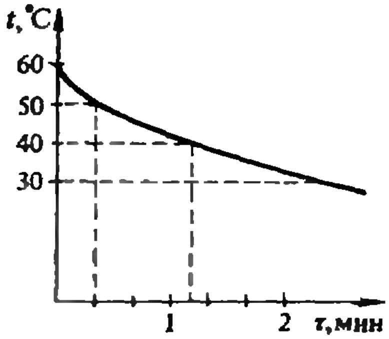


Рис. 2.

Примечание. Полученные ответы, конечно же, очень сильно зависят от вида исходного графика (см. рис. 1). Поэтому не стоит серьезно полагаться на приведенные цифры, лучше постарайтесь аккуратно получить их из своих данных.

З. Рафаилов

Ф1230. ***Две удаленные друг от друга проводящие сферы, внешние радиусы которых R и $3R$, имеют толщину стенок $R/20$. В центры сфер помещены заряды Q и $2Q$. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы поменять местами эти заряды (в стенках для этой цели предусмотрены маленькие отверстия)?***

Удаленность сфер друг от друга означает, что можно пренебречь их взаимным влиянием. Очевидно, что минимальная работа при «перестановке» зарядов не зависит от способа этой перестановки. Важно, чтобы в центре сферы *1* (ее внешний радиус $R_1=R$) оказался заряд $2Q$, а в центре сферы *2* ($R_2=3R$) — заряд Q. Поэтому нам достаточно перенести из второй сферы в первую заряд Q. Минимальность же совершенной работы означает отсутствие возможного рассеяния (диссипации) энергии при движении наведенных зарядов по сферам.

Перенос заряда Q из сферы *2* в сферу *1* будем производить последовательно бесконечно малыми порциями dq. Пусть в некоторый произвольный момент времени мы уже перенесли в первую сферу заряд q. Тогда в центре сферы *1* будет находиться заряд $Q+q$, а в центре сферы *2* — заряд $2Q-q$. Найдем работу dA, которую необходимо совершить, чтобы перенести очередную порцию заряда dq. Электрическое поле каждого из зарядов ($Q+q$ или $2Q-q$), находящихся в центре сфер, будем рассматривать как суперпозицию полей: поля точечного заряда для всех имеющих смысл расстояний r от центра сферы и поля этого же заряда с противоположным знаком в области $R_1-\delta\leqslant r\leqslant R_1$ ($\delta=R/20$ — толщина сферы) для сферы *1* и в области $R_2-\delta\leqslant r\leqslant R_2$ для сферы *2*. Тогда работа dA будет складываться из двух частей: работы по перемещению заряда dq в поле точечных зарядов $Q+q$ и $2Q-q$ и работы по перемещению этого заряда в областях $R_1-\delta\leqslant r\leqslant R_1$ и $R_2-\delta\leqslant r\leqslant R_2$, где поле создается точечными зарядами $-(Q+q)$ и $-(2Q-q)$.

Обозначим первую часть работы через dA_1, а вторую — через dA_2. Легко сообразить (это вытекает из симметрии пространства), что

$$dA_1=0.$$

Работу dA_2 можно записать в виде

$$dA_2=\frac{2Q-q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2-\delta}-\frac{1}{R_2}\right)dq+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_1-\delta}\right)dq.$$

Здесь использовано выражение для потенциала $\varphi(r)$ поля точечного заряда q:

$$\varphi(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Проведя суммирование по всем зарядам (проинтегрировав по dq от 0 до q), мы и найдем необходимую работу A. При вычислении работы используем, что

$$\int_0^Q dq=Q \text{ и } \int_0^Q q\,dq=\frac{Q^2}{2}.$$

Окончательно получим

$$A=A_2=\frac{3Q^2\delta}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2(R_2-\delta)}-\frac{1}{R_1(R_1-\delta)}\right).$$

Всегда полезно находить ответ в общем виде, поскольку это позволяет провести анализ полученного результата. Например, в данном случае очевидно, что при $\delta\to 0$ работа также должна стремиться к нулю, что и следует из нашего выражения. При $R_1=R_2$ работа также должна быть равна нулю, и это тоже следует из нашего решения.

По условию задачи, δ много меньше R_1 и R_2, поэтому можно записать полученное решение в виде

$$A=\frac{3Q^2\delta}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_1^2-R_2^2}{R_1^2R_2^2}.$$

При подстановке заданных значений R_1, R_2 и δ получим

$$A=-\frac{79}{4484}\,\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}\approx-\frac{1}{60}\,\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

Возможен еще один способ решения этой задачи — энергетический. Рассмотрим его для приближенного случая ($\delta\ll R$). Запишем энергию нашей системы в начальном состоянии:

$$W_{\text{н}}=W_1-\frac{\varepsilon_0E_1^2}{2}4\pi R_1^2\delta+W_2-\frac{\varepsilon_0E_2^2}{2}4\pi R_2^2\delta.$$

Здесь W_1 и W_2 — энергии электрических полей точечных зарядов Q и $2Q$, $E_1\approx Q/(4\pi\varepsilon_0R_1^2)$ — напряженность электрического поля заряда Q на расстояниях $R_1-\delta\leqslant r\leqslant R_1$, $E_2\approx 2Q/(4\pi\varepsilon_0R_2^2)$ — напряженность поля заряда $2Q$ на расстояниях $R_2-\delta\leqslant r\leqslant R_2$. После подстановки получим

$$W_{\text{н}}\approx W_1-\frac{Q_2\delta}{8\pi\varepsilon_0R_1^2}+W_2-\frac{Q^2\delta}{2\pi\varepsilon_0R_2^2}.$$

Для конечного состояния:

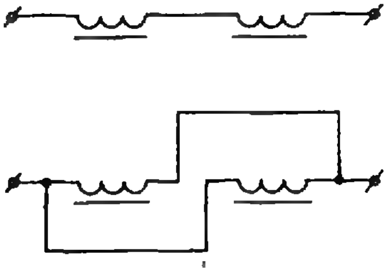
$$W_к \approx W_2 - \frac{Q^2\delta}{2\pi\varepsilon_0 R_1^2} + W_1 - \frac{Q^2\delta}{8\pi\varepsilon_0 R_2^2}.$$

Искомая работа будет равна разности конечной и начальной энергий:

$$A = W_к - W_н \approx \frac{3Q^2\delta}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

В. Можаев

Ф1231. *Две цилиндрические катушки с ферритовыми сердечниками помещены недалеко друг от друга и соединены последовательно. Индуктивность одной из них равна 1 мГн, другой — 2 мГн, а измеренная индуктивность катушек, соединенных последовательно, составила 3,6 мГн. Не меняя взаимного положения катушек, их переключают в параллель (см. рисунок). Какую индуктивность мы измерим теперь?*



Если бы катушки находились далеко друг от друга, их взаимным влиянием можно было бы пренебречь. Тогда магнитный поток определялся бы величиной

$$\Phi = L_1 I + L_2 I = (L_1 + L_2) I,$$

т. е. результирующая индуктивность была бы равна сумме индуктивностей катушек. В нашем случае это не так:

$$L_{общ} = 3{,}6\ мГн > L_1 + L_2,$$

значит, существенную часть полного магнитного потока составляет «взаимный» поток, создаваемый током одной катушки через витки другой. Другими словами,

$$\Phi_{общ} = L_1 I + L_2 I + MI + MI = (L_1 + L_2 + 2M) I.$$

Здесь буквой M мы обозначили «взаимную индуктивность» (точнее — коэффициент взаимной индукции) — коэффициент пропорциональности между током в одной катушке и магнитным потоком, пронизывающим витки другой катушки (индуктивность катушки, кстати, раньше называли «коэффициентом самоиндукции»). Собственно, коэффициентов взаимной индукции два: между током первой катушки и потоком во второй и между током второй катушки и потоком в первой. Эти коэффициенты всегда одинаковы. Для катушек, имеющих разное количество одинаковых витков, это равенство легко доказать (попробуйте), в общем случае сделать это довольно трудно — однако сам факт известен хорошо.

Найдем теперь коэффициент взаимной индукции:

$$M = (L_{общ} - L_1 - L_2)/2 = 0{,}3\ мГн.$$

При переключении концов катушек их взаимное положение не меняется, а значит, и «взаимная индуктивность» остается прежней, хотя вклад взаимных потоков может быть как положительным, так и отрицательным (в зависимости от порядка подключения проводов). При получении ответа мы будем учитывать оба возможных варианта, считая $M = \pm 0{,}3$ мГн.

Итак, обозначим токи катушек после параллельного включения через I_1 и I_2. ЭДС индукции ветвей одинаковы; значит, одинаковы и магнитные потоки:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2, \quad \Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1, \quad \Phi_1 = \Phi_2, \quad I_1 + I_2 = I_{общ}.$$

Теперь можно выразить любой из потоков через общий ток и коэффициент пропорциональности между ними — это и будет измеренное значение индуктивности:

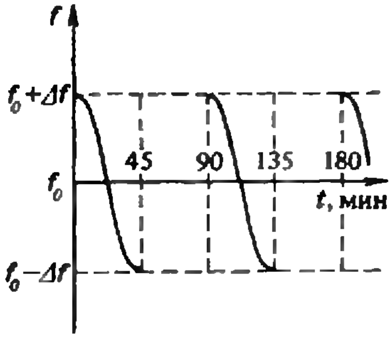
$$\Phi_1=L_1I_1+MI_2=I_{\text{общ}}((L_1L_2-M^2)/(L_1+L_2-2M)).$$

Выражение во внешних скобках и есть искомая индуктивность. Подставляя $M=0{,}3$ мГн, получим $L_{\text{общ }1}=0{,}8$ мГн; при $M=-0{,}3$ мГн $L_{\text{общ }2}=0{,}53$ мГн.

Интересное применение обнаруженного эффекта: для подбора индуктивности катушки можно составить ее из двух и плавно регулировать общую индуктивность, меняя в некоторых пределах взаимное расположение катушек (для этого их выводы должны быть достаточно длинными).

А. Зильберман

Ф1232. *На большом расстоянии от Земли находится планета ДВК-1, вокруг которой по круговой орбите вращается спутник БК-0010Ш. На спутнике установлена радиостанция, излучающая сигнал постоянной частоты. На Земле принимают этот сигнал, однако при этом возникают перерывы — 45 минут сигнал есть, потом 45 минут он отсутствует, потом опять 45 минут есть и т. д. Этим дело не ограничивается — частота принимаемого сигнала изменяется относительно среднего значения $f_0=1{,}5\cdot10^9$ Гц по закону, показанному на рисунке ($\Delta f=3\cdot10^4$ Гц). Считая, что отрезок Земля — планета лежит в плоскости орбиты спутника, найдите массу ДВК-1.*



Период обращения спутника планеты равен, очевидно,

$$T=2\cdot45\text{ мин}=90\text{ мин}.$$

Половину этого времени спутник закрыт планетой; значит, он летает совсем близко к ее поверхности. Изменение частоты принимаемого сигнала связано с эффектом Доплера:

$$\frac{\Delta f}{f_0}=\frac{v}{c}.$$

Здесь v — скорость спутника, c — скорость распространения сигнала (скорость света).

С другой стороны, из соотношений механики

$$T=\frac{2\pi R}{v}\text{ и }\frac{mv^2}{R}=G\frac{mM}{R^2},$$

где R — радиус, M — масса планеты, G — гравитационная постоянная.

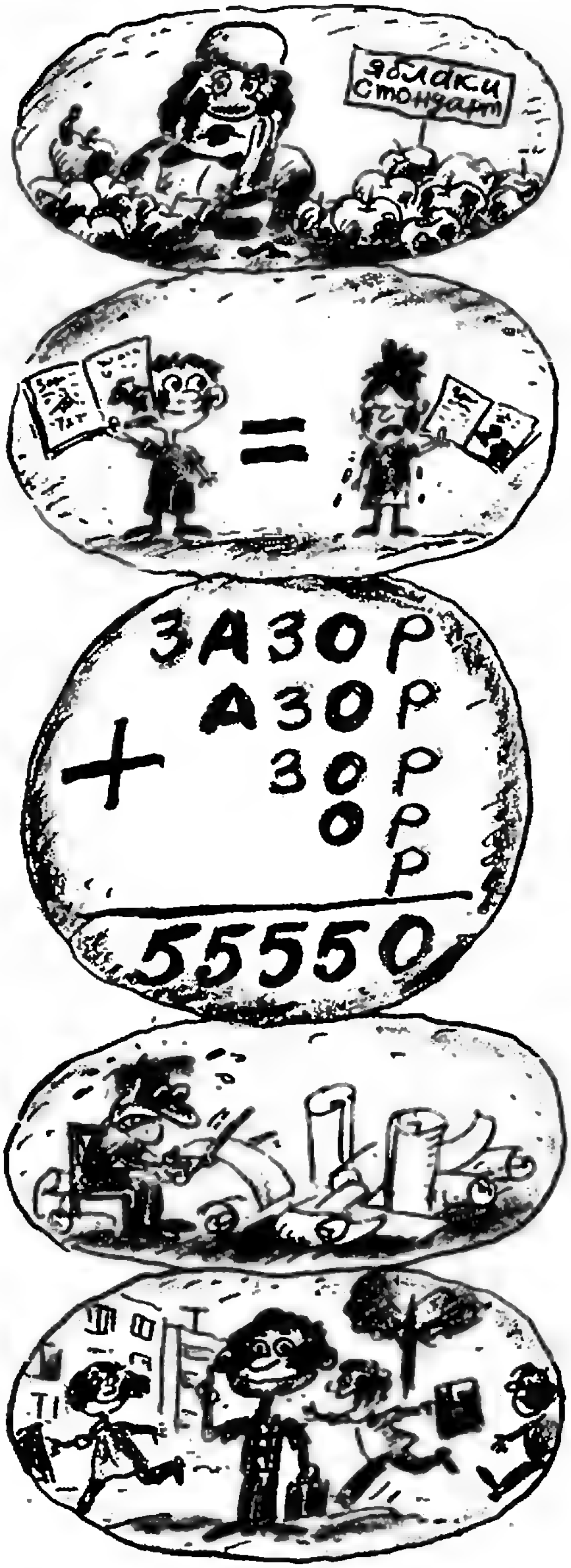
После простых преобразований находим искомую массу планеты:

$$M=\left(c\frac{\Delta f}{f_0}\right)^3\frac{T}{2\pi G}\approx2{,}8\cdot10^{24}\text{ кг}.$$

М. Гаврилов

„Квант" для младших школьников

Задачи



1. Цену на яблоки подняли на 20 %. Однако продавцу для того, чтобы изменить ценник, оказалось достаточным поменять местами цифры стоимости килограмма яблок. Сколько стоили яблоки до их подорожания, если эта цена была меньше рубля?

2. Учитель задал на уроке замысловатую задачу. В результате количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, ее не решивших. Кого в классе больше — решивших задачу или девочек?

3. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

4. Два разных цилиндра имеют одинаковую боковую поверхность, равную 100 см^2. Покажите, что можно вырезать из бумаги параллелограмм площадью 100 см^2, которым можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндра.

5. Школа находится на одной улице с моим домом. Однажды, идя в школу, я стал считать на моей стороне улицы сумму номеров домов, мимо которых я проходил. Когда сумма номеров стала равна 99, перешел через поперечную улицу. После этого я начал считать снова и насчитал сумму 117. Затем перешел через еще одну поперечную улицу. И в следующем квартале считал сумму номеров домов. Там она оказалась равной 235, включая и номер дома школы, которая стоит последней в этом квартале. В доме с каким номером живу я? Какой номер дома имеет школа?

Эти задачи нам предложили Г. Щеголихин, ученик 11 класса школы № 149 г. Харькова Сергей Ляшенко, ученик 10 класса ФМШ № 1 г. Еревана Ваган Абрамян, В. Произволов, В. Кот.

Кто придумал «ночезрительную трубу»?

Кандидат физико-математических наук
В. БРОНШТЭН

Года три назад я получил письмо от юного любителя астрономии Яна Харитонова из Харькова. Вот что он писал:

«Недавно вышла замечательная книга П. Г. Куликовского «М. В. Ломоносов — астроном и астрофизик», а также новое издание известной книги Ф. Ю. Зигеля «Астрономическая мозаика». В первой книге рассказывается о творческой деятельности М. В. Ломоносова. В том числе на с. 82 приведен рисунок «ночезрительной трубы» Ломоносова. В книге Ф. Ю. Зигеля... имеется рассказ о телескопе Леонардо да Винчи, причем на с. 22 приведен рисунок этой трубы (в реконструкции В. А. Гурикова). Если убрать 5 перечеркивающих рисунок линий, то получим... рисунок «ночезрительной трубы» Ломоносова».

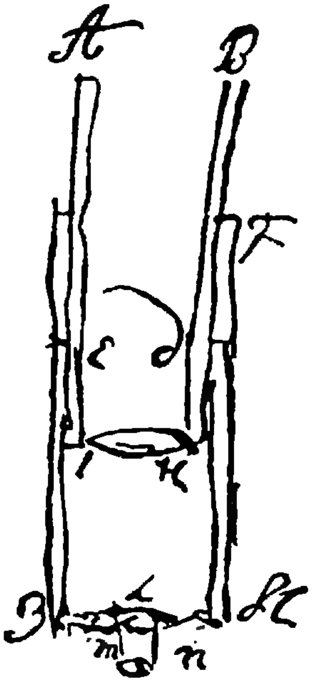


Рисунок из книги П. Г. Куликовского.

Сняв с полки названные книги, я убедился, что Я. Харитонов прав. Рисунки совершенно идентичны. Позвонил обоим авторам, задал им один и тот же вопрос: откуда вы взяли этот рисунок? П. Г. Куликовский ответил: из статьи С. И. Вавилова «Ночезрительная труба Ломоносова» в томе II сборника «Ломоносов», изданного в 1946 году. Ф. Ю. Зигель: из статьи В. А. Гурикова в журнале «Земля и Вселенная», вот только год и номер не помню.*)

Беру сборник со статьей С. И. Вавилова. Статья большая, интересная, вот только рисунка этого в ней нет. Беру том IV «Полного собрания сочинений М. В. Ломоносова», где помещена статья о «ночезрительной трубе», и там нахожу этот рисунок, воспроизведенный даже дважды: в латинском тексте (Ломоносов писал на латыни) и в русском переводе. Вот что пишет Ломоносов в пояснении к рисунку:

«С этой целью я приладил две трубы таким способом, какой мы применяли для устройства телескопов и микроскопов. В просвете трубы *ABCD* я поместил двояковыпуклую линзу, диаметр которой составлял около 4 лондонских дюймов [около 10 см — *В. Б.*]... В крышке трубы *EFGH*, внутри которой передвигалась первая труба, было круглое отверстие, в которое были вставлены собирательные линзы *mn*, двояковыпуклые и обладающие различными диаметрами и фокусами».

Обратите внимание на то, что в тексте Ломоносова упоминаются и объясняются буквенные обозначения, имеющиеся на рисунке.

Однако в окончательный текст статьи Ломоносов этот кусок и рисунок не включил, перечеркнул текст и рисунок и заменил их более коротким текстом (без рисунка). Поэтому в томе IV «Полного собрания сочинений» ученого старый текст и перечеркнутый рисунок приводятся в подстрочном примечании.

Итак, ясно: рисунок «ночезрительной трубы» несомненно принадлежит

---

*) Этот разговор происходил незадолго до безвременной кончины Ф. Ю. Зигеля, последовавшей 15 ноября 1988 г.

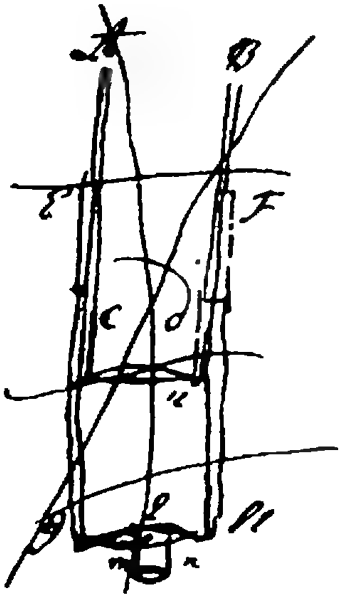


Рисунок из книги Ф. Ю. Зигеля.

Ломоносову. Откуда же взялась версия, что это — чертеж Леонардо да Винчи?

После длительных поисков я нашел статью В. А. Гурикова «Зрительная труба Леонардо да Винчи» в журнале «Земля и Вселенная» № 4 за 1977 год (с. 70—73). На с. 73 нахожу уже знакомый мне рисунок с подписью «Схема зрительной трубы (рисунок Леонардо да Винчи)». Звоню автору статьи и задаю ему тот же вопрос: откуда вы взяли рисунок? Откуда следует, что он принадлежит Леонардо? В. А. Гуриков сообщает, что позаимствовал его из книги Я. Г. Дорфмана «Всемирная история физики (с древнейших времен до конца XVIII в.)» (М.: Наука, 1974). Нахожу эту книгу и на с. 125 вижу... тот же рисунок и с той же подписью, что и у В. А. Гурикова. Увы, спросить Я. Г. Дорфмана уже нельзя: он скончался в 1974 году. Нужно искать дальше.

Прежде всего: у кого позаимствовал Я. Г. Дорфман описание трубы Леонардо? Вижу — даны ссылки на работу С. И. Вавилова, только, конечно, на другую, не ту, где он описывал «ночезрительную трубу» Ломоносова. Прекрасно! Уж такой специалист, как С. И. Вавилов, знавший сочинения обоих корифеев науки, не мог ошибиться и приписать Леонардо схему трубы Ломоносова. Нахожу в третьем томе «Собрания сочинений» С. И. Вавилова (М.: АН СССР, 1956) нужную работу и читаю ее внимательно, заодно сверяя текст с текстом Я. Г. Дорфмана. Вот что написано в обеих работах:

Вавилов, с. 247—248:	*Дорфман, с. 124—125:*
Несомненно, что Леонардо не только мечтал о телескопических устройствах, но действительно их осуществлял. В кодексе А (л. 12) находятся следующие строки, поясненные рисунком (ср. фиг. 6):	Несомненно,— говорит С. И. Вавилов,— что Леонардо не только мечтал о телескопических устройствах, но действительно их осуществлял. В записях Леонардо имеется следующее указание, поясненное рис. 16:

И дальше оба автора приводят одни и те же слова Леонардо: «Чем дальше отодвигаешь ты стекло от глаза, тем большими покажет оно предметы для глаза 50 лет; если глаза для сравнения глядят один через очковое стекло, другой вне его, то для одного предмет покажется большим, а для другого малым, но для этого видимые вещи должны быть удалены от глаза на 200 локтей». Только у Дорфмана слово «локтей» заменено на «футов» (хотя флорентийский локоть был равен двум футам (60 см)).

«Рис. 16» у Дорфмана — это уже хорошо знакомый нам рисунок Ломоносова. Но «фиг. 6» у Вавилова выглядит совсем иначе. На нем лучи от одного объекта проходят через линзу, а от другого не проходят. Те и другие сходятся в глазу наблюдателя. Нет никакой трубы!

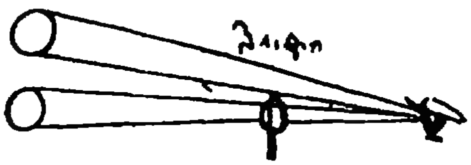


Рисунок из книги С. И. Вавилова.

Итак, ошибку допустил Я. Г. Дорфман, а его ошибку повторили В. А. Гуриков и Ф. Ю. Зигель. Как такой опытный историк науки, каким был Я. Г. Дорфман, мог допустить подобную ошибку, остается загадкой.

В связи с этим стоит сказать два слова о судьбе сочинений Леонардо и заодно предупредить могущий возникнуть у кого-нибудь из читателей «каверзный» вопрос: а не мог ли

Ломоносов познакомиться с сочинениями Леонардо и в них позаимствовать идею своей трубы?

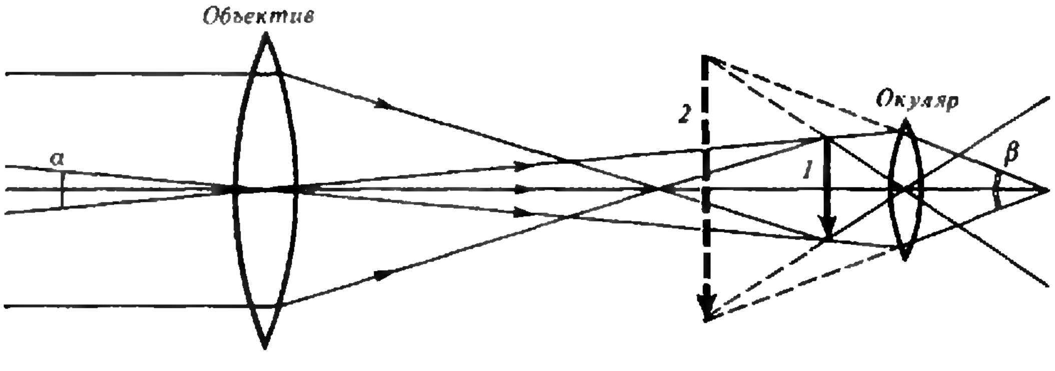
Нет, не мог. Леонардо при жизни ничего не опубликовал из своих сочинений, и они оставались в рукописях, хранившихся в тех городах, где жил и работал Леонардо — во Флоренции, в Милане, в Риме. Лишь в 1796—1797 годах во время завоевания Италии Наполеон Бонапарт вывез из Милана 13 рукописей Леонардо, и в 1797 году профессор Вентури сделал их анализ, о чем доложил в Национальном институте в Париже. Но публикация трудов Леонардо началась столетием позже, в конце XIX века. Сейчас эти труды изданы многими изданиями, в основном на итальянском и французском языках. Издан и кодекс А, о котором пишет С. И. Вавилов. В него сведены рукописи смешанного содержания, написанные около 1492 года и попавшие в Париж. Там, в хранилище Национального института, и находится рукопись кодекса А.

Что касается рукописи Ломоносова, то она хранится в Архиве Академии наук СССР в Москве. Его статья была представлена в Академию наук 19 января 1758 года, за 40 лет до вывоза рукописей Леонардо во Францию. А в Италии Ломоносов, как известно, не бывал. Так что никакого заимствования здесь произойти не могло.

Этот случай показывает, насколько бережно и внимательно надо подходить к творческому наследию наших великих предшественников.

Ну, а теперь посмотрим на этот вопрос с другой точки зрения. Какие цели преследовал Ломоносов, создавая «ночезрительную трубу»? Сам Ломоносов отвечает на этот вопрос так: «чтобы различать в ночное время скалы и корабли». И в самом деле, объектив трубы Ломоносова имел диаметр (10 см) в 2—3 раза больше, чем у большинства подзорных труб, применявшихся тогда, например, во флоте. Следовательно, он собирал в 4—9 раз больше света, чем эти трубы. (Первоначально Ломоносов называл свое изобретение «машина для сгущения света».) Выражаясь современным языком, труба Ломоносова была более светосильной. Академики, рассматривавшие предметы в эту трубу при слабом освещении, отметили, что «предмет, поставленный в темную комнату, различается через эту трубу яснее, чем без нее». Эта первая демонстрация «ночезрительной трубы» состоялась, как следует из протокольной записи, 13 мая 1756 года.

И все же многие академики (А. Н. Гришов, Н. И. Попов) не приняли идею Ломоносова, полагая, что он наделяет свою трубу «чудесными качествами, не имеющими смысла с научной точки зрения». Хотя Ломоносов не согласился со своими оппонентами, он был вынужден убрать из текста статьи схему и подробное описание трубы. Вот почему его рисунок перечеркнут крест-накрест.



Ход лучей в «ночезрительной трубе» Ломоносова. 1 — действительное изображение предмета, даваемое объективом; 2 — мнимое изображение, видимое в окуляр; α — угловой размер наблюдаемого (невооруженным глазом) объекта; β — угловой размер изображения объекта, даваемого трубой; отношение β/α называется увеличением телескопа (β/α≫1).

В течение 1757 года Ломоносов несколько раз сам откладывал публичное выступление с описанием своего проекта. К этому времени у него объявился новый противник, академик Ф. Эпинус, написавший против идеи Ломоносова даже специальную статью, которая, однако, до нас не дошла.

Наконец, 19 января 1758 года конферец-секретарь Академии наук Г. Ф. Миллер принял работу Ломоносова, в тот же день был прочитан его доклад, а вскоре была опубликована и статья.

Но споры вокруг «ночезрительной трубы» продолжались. Одно дело — наблюдения слабо освещенных предметов на близком расстоянии, говорили оппоненты великого ученого, а другое дело — на море. И тогда Ломоносов заказал академическим мастерам шесть труб: три обычных подзорных трубы и три «ночезрительных». Все шесть были переданы адмиралу В. Я. Чичагову, эскадра которого готовилась к отплытию в дальнее полярное плавание. Но вскоре после ее отплытия М. В. Ломоносов скончался. Это произошло 15 апреля 1765 года. Чем закончились испытания «ночезрительных труб» — нам неизвестно.

Дальнейшие разработки подтвердили правоту Ломоносова. Светосильные трубы и бинокли получили широкое распространение не только в астрономии (хотя бы для поисков комет), но и на флоте, в авиации и артиллерии, во многих областях науки и техники.

Заказы принимаются

(по страницам темплана Главной редакции физико-математической литературы ИПКО «Наука» на 1991 г.; начало см. в № 8)

Физика

58. Добролюбов А. И. *Скольжение — качение — волна.* 70 к.

61. Абрагам А. *Время вспять, или Физик, физик, где ты был: Автобиография.* 2 р. 50 к.

74. Марков М. А. *О трех интерпретациях квантовой механики.* 1 р. 40 к.

84. Гинзбург В. Л. *О физике и астрофизике.* 2 р. 50 к.

93. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика для поступающих в вузы.* 1 р. 20 к.

Астрономия

96. Докучаева О. Д. *Астрономическая фотография.* 7 р.

99. *На рубежах познания Вселенной.* 2 р.

100. Климишин И. А. *Элементарная астрономия.* 1 р. 20 к.

101. Куликов С. *Нить времен.* 50 к.

102. Степанян Н. Н. *Наблюдаем Солнце.* 30 к.

103. Ходж П. *Галактики.* 60 к.

104. *Астрономический календарь на 1992 год.* 1 р. 20 к.

105. Куликовский П. Г. *Справочник любителя астрономии.* 2 р. 70 к.

106. Бакулин П. И., Кононович Э. В., Мороз В. И. *Курс общей астрономии.* 1 р. 50 к.

Информатика

76. *ПЭВМ Корвет в физической лаборатории.* 2 р.

81. Шмид Е. В., Шпиц Г., Леш В. *Компьютеры в теоретической физике.* 1 р. 70 к.

108. Вольский В. И., Лезина З. М. *Голосование в малых группах.* 1 р. 10 к.

110. Дейт К. *Введение в системы баз данных.* Т. 1. 3 р.

111. Дейт К. *Введение в системы баз данных.* Т. 2. 3 р.

112. Калашников В. В., Носовский Г. В., Фоменко А. Т. *Компьютерные методы распознавания звездных конфигураций. Датировка звездного каталога Альмагеста.* 4 р.

113. Калиниченко Л. А., Рывкин В. М. *Процессоры баз данных.* 4 р.

115. Котов В. Е., Сабельфельд В. К. *Теория схем программ.* 4 р.

117. Льюнг Л. *Идентификация систем. Теория для пользователей.* 5 р.

122. Шварц М. *Сети связи: протоколы, моделирование и анализ.* 8 р.

123. Смирнов А. Д. *Архитектура вычислительных систем.* 90 к.

Библиотечка «Квант»

125. Богданов К. Ю. *Физик в гостях у биолога.* 70 к.

126. Гамов Дж. *Приключения мистера Томпкинса.* 60 к.

127. Канер В. В., Руденко О. В. *В мире мощного звука.* 50 к.

128. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. *Введение в теорию вероятностей.* 70 к.

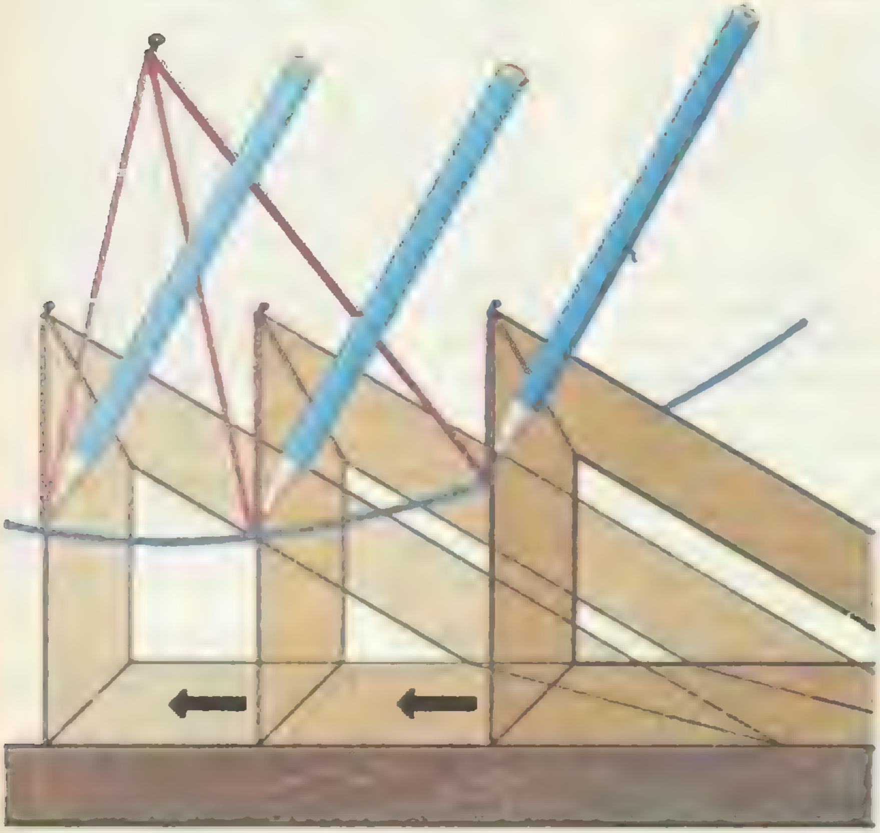
129. Носов Ю. Р. *Дебют оптоэлектроники.* 60 к.

130. *Опыты в домашней лаборатории.* 50 к.

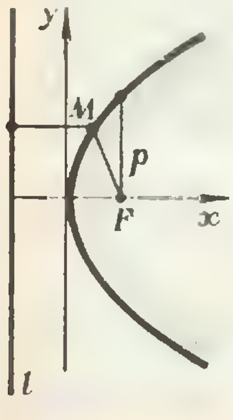
131. Хонсбергер Р. *Математические изюминки.* 60 к.

Калейдоскоп „Кванта“

Парабола



Параболу можно определить как кривую, состоящую из всех точек M плоскости, одинаково удаленных от заданной точки — фокуса параболы — и от заданной прямой — директрисы.



Такое определение параболы наводит на идею создания чертежного прибора, способного вычерчивать параболу.

Прибор состоит из линейки и угольника, к одному из острых углов которого прикреплена нитка, по длине равная прилегающему к этому углу катету (будем считать этот катет первым). Другой конец нитки закрепляется в точке плоскости — фокусе параболы, линейка прикладывается к директрисе, угольник скользит вторым катетом по линейке, а карандаш удерживает нить в натянутом состоянии и прижимается к первому катету (скользя вдоль него). При движении угольника вдоль линейки карандаш вычерчивает параболу.

В математике принято записывать уравнение параболы либо в виде $y=ax^2$, либо в виде $y^2=2px$. В первом случае ось симметрии параболы направлена по оси y, а во втором — по оси x. Координаты фокуса параболы во втором случае будут $(p/2; 0)$. Вершина параболы — точка ее пересечения с осью симметрии — в обоих случаях будет находиться в начале координат. Параболой будет и график любого квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$.

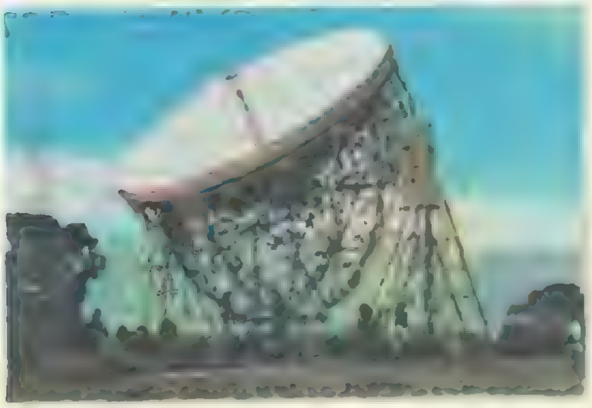
Парабола относится к семейству кривых, называемых коническими сечениями. Она получается при сечении конуса плоскостью, параллельной образующей конуса. Шарик, касающийся конуса по окружности и одновременно касающийся этой плоскости, будет иметь точку касания с плоскостью в фокусе параболы.

Знание свойств параболы помогает при решении квадратного уравнения, поскольку точки пересечения параболы, являющейся графиком квадратного трехчлена, с осью абсцисс и есть корни этого трехчлена.

На первый взгляд, параболы имеют разную форму. Например, парабола, заданная уравнением $y=10x^2$ кажется узкой, а парабола $y=0{,}1x^2$ — широкой. В действительности, все параболы подобны друг другу и, стало быть, имеют оди-

наковую форму. Так, парабола $y=0,1x^2$ подобна параболе $y=10x^2$ с коэффициентом подобия, равным 100.

Американский физик Роберт Вуд получил параболическое зеркало, вращая сосуд с налитой в него ртутью. Зеркало получилось отличным. *Поверхность такого зеркала называется параболоидом вращения.*

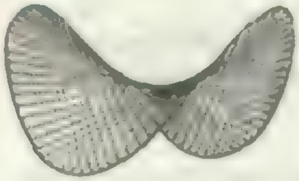


Если параболоид вращения пересекать плоскостями, то будут получаться в сечении либо эллипсы, либо параболы. Это свойство поверхности сохранится, если ее сжать к одной из плоскостей, проходящих через ось вращения. В силу этого свойства такая поверхность называется эллиптическим параболоидом.

Уравнение эллиптического параболоида имеет вид

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$

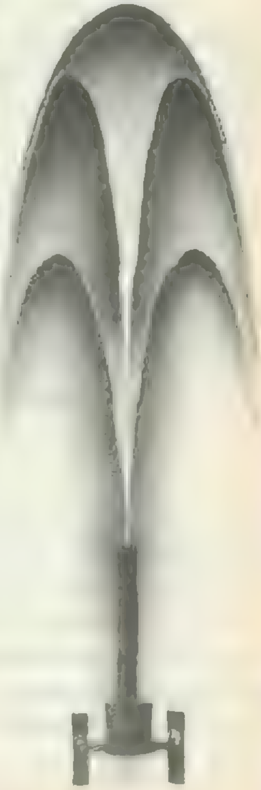
Существует еще один тип параболоидов — гиперболический параболоид. Его сечения плоскостью дают либо гиперболу, либо параболу. Внешне он похож на седло. Любопытно, что его можно «соткать» из прямых.

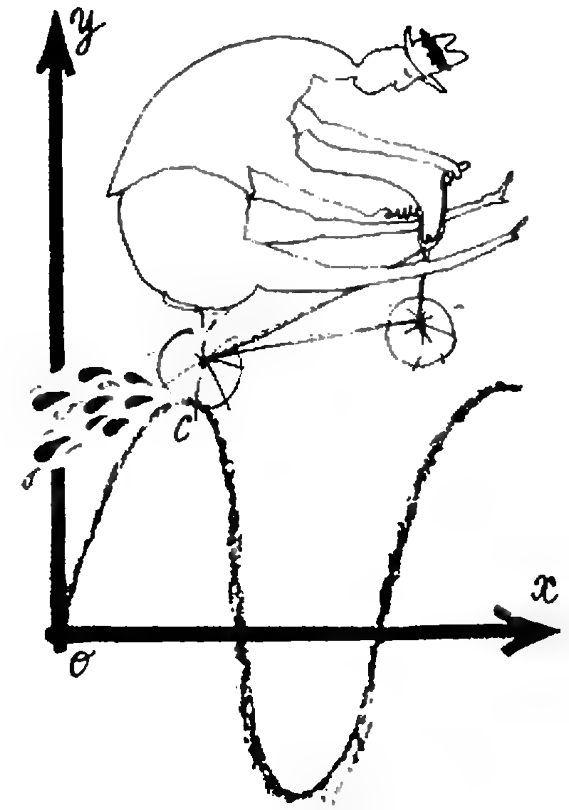


Парабола обладает очень важным оптическим свойством: лучи, исходящие из источника света, находящегося в фокусе параболы, после отражения от параболы оказываются направленными параллельно ее оси. Это *свойство* используется при изготовлении зеркал для прожекторов, автомобильных фар, телескопов.

Хорошо известно, что траектория камня, брошенного под углом к горизонту, при отсутствии сопротивления *воздуха будет* параболой, однако мало кому известно, что зона достижимости для пущенных нами камней или *снарядов, вылетающих* из пушки, также будет ограничена параболой.

Здесь мы говорим об огибающей кривой траекторий камней, выпущенных из данной точки под разными углами, но с одной и той же начальной скоростью. Если рассматривать такую огибающую в пространстве (см. рисунок), то возникнет поверхность, образованная вращением этой параболы вокруг ее оси — параболоид вращения.





Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Кинематика плоскопараллельного движения» предназначена девятиклассникам, заметка «Генератор незатухающих колебаний» — одиннадцатиклассникам.

Кроме того, с этого учебного года мы начинаем регулярные публикации «Избранных школьных задач по физике».

Кинематика плоскопараллельного движения

Что общего между вращением Земли вокруг своей оси, движением стрелок часов, колес автомобиля на прямолинейном участке пути и т. п.? С точки зрения кинематики, все это примеры так называемого плоскопараллельного движения твердого тела, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях.

Разумеется, в самом общем случае различные точки тела могут двигаться по-разному. Однако принято выделять два частных случая и говорить о двух простейших типах движения — о поступательном движении и о вращении вокруг неподвижной оси. В первом случае все точки тела совершают одинаковые перемещения. Это движение самое простое, и здесь мы его обсуждать не будем. Во втором случае все точки описывают одинаковые траектории — окружности с центрами на оси вращения. Основной характеристикой такого движения является угловая скорость вращения ω.

Давайте вычислим, например, угловые скорости стрелок часов. Так как стрелки вращаются равномерно, то угол поворота φ со временем изменяется по закону $\varphi=\omega t$ (уравнение равномерного вращения). Секундная стрелка делает один оборот за 60 секунд; следовательно, ее угловая скорость равна $\omega_с=2\pi/60\ с=0{,}1047\ с^{-1}$. Аналогично, скорость часовой стрелки равна $\omega_ч=2\pi/(12\cdot60\cdot60)\ с=0{,}0001455\ с^{-1}$.

А как добиться того, чтобы секундная и часовая стрелки двигались с различными угловыми скоростями, но синхронно? Оказывается, для этого используется *зубчатая передача:* два зубчатых колеса могут вращаться вокруг разных осей, но при этом они входят в зацепление друг с другом (рис. 1). Поскольку линейные скорости точки A одинаковы —

$$v_A=\omega_1 R=\omega_2 r,$$

получаем

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{r}{R}=\frac{z_1}{z_2},$$

где z_1 и z_2 — число зубцов шестеренок.

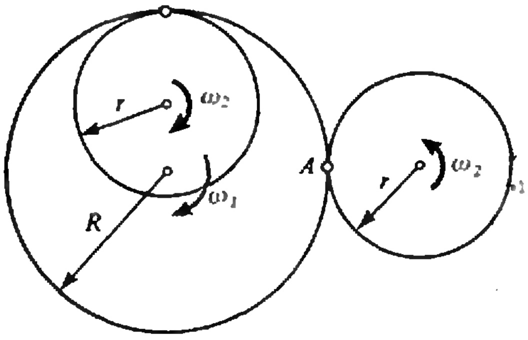


Рис. 1.

Кроме того, можно заметить, что при внутреннем зацеплении вращение шестеренок происходит в одном направлении, а при внешнем — в противоположных направлениях. С помощью таких (и более сложных) зубчатых передач осуществляется соединение стрелок в часах, передача усилий в домкрате, изменение величины скорости и «задний ход» у автомобиля.

Теперь рассмотрим более сложное плоскопараллельное движение твердого тела, когда тело вращается, но ось вращения сама поступательно перемещается в пространстве. Скорости такого движения проще всего найти, используя понятие *мгновенного центра вращения* — так называют точку, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Скорости всех остальных точек тела при этом будут такими, как будто тело вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр вращения.

В качестве примера разберем движение колеса на прямолинейном участке пути без проскальзывания. Так как колесо не проскальзывает, точка C (рис. 2), в которой колесо касается дороги, имеет скорость равную нулю. Значит, точка C и есть мгновенный центр вращения. Найдем, какой будет угловая скорость вращения колеса, если скорость его центра O (скорость поступательного движения колеса) равна v_0:

$$v_0 = \omega r, \text{ и } \omega = v_0/r.$$

Легко находится и скорость произвольной точки A. Она направлена по линии AB и равна

$$v_a = \omega \cdot CA = 2\omega r \cos\alpha = 2v_0 \cos\alpha.$$

На рисунке 2 изображена также траектория, которую описывает каждая точка обода катящегося колеса. Эта удивительная кривая — циклоида — встретится вам во многих случаях: по такой траектории движутся частицы в «скрещенных» (взаимно перпендикулярных) электрическом и магнитном полях, по циклоиде шарик скатывается за минимальное время и т. д.

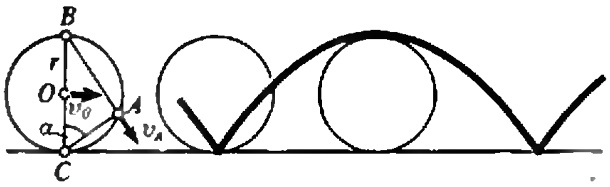


Рис. 2.

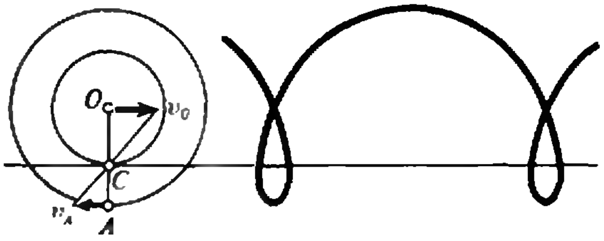


Рис. 3.

Теперь легко ответить на вопрос, который обычно вызывает затруднения: почему, если смотреть на движущегося велосипедиста, то верхние спицы колес сливаются в одно целое, а нижние видны раздельно. Очевидно, это связано с тем, что скорости нижней половины колеса меньше, чем верхней (подумайте, почему, если смотреть на велосипедиста из окна движущегося в ту же сторону автобуса, этот эффект пропадает?).

А что если мы захотим определить скорость колес вагона движущегося поезда? Мы обнаружим, что на ободе колеса имеются точки, которые движутся назад, в противоположную движению поезда сторону. Это — точки выступающей части колеса, например точка A на рисунке 3. Мгновенный центр вращения (точка C) находится на неподвижном рельсе, по которому колесо катится без проскальзывания. Траектория точки обода колеса еще более любопытна, чем в предыдущем случае,— на траектории имеются возвратные участки движения (петли). Интересно отметить, что аналогичные петлеобразные траектории описывают в своем движении планеты. Их наблюдали еще древнегреческие астрономы, однако объяснить увиденное они не смогли. Сейчас мы знаем, что эти траектории связаны с наложением двух вращений — Земли и наблюдаемой планеты вокруг Солнца.

Всегда ли при плоскопараллельном движении траектории оказываются такими сложными? Попробуйте определить, например, какую траекторию описывают точки обода колеса радиу-

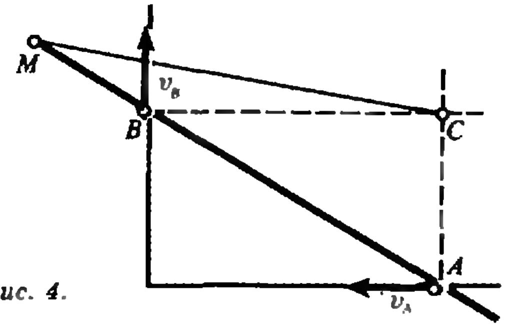


Рис. 4.

сом r, которое катится по внутренней поверхности неподвижного колеса радиусом 2 r.

В заключение мы хотим познакомить вас с простым по конструкции, но важным для практики прибором — линейкой-эллипсографом (рис. 4), который служит для вычерчивания эллипсов. Точки A и B такого прибора двигаются по взаимно перпендикулярным направляющим OA и OB, а точка M при этом описывает эллипс (подумайте, почему). Где находится мгновенный центр вращения в этом случае? Как найти скорость точки M, зная скорости точек A и B?

Рассмотрим жесткий треугольник CBA (точка C лежит на пересечении перпендикуляров к направляющим). Проекции скоростей двух точек твердого тела на линию их соединения всегда равны. Для точек C, A и C, B это возможно, если $v_C=0$, т. е. если точка C — мгновенный центр вращения. Скорость точки M можно определить, зная скорость точки A, например:

$$v_A=\omega\cdot CA, \text{ и } v_M=v_A\cdot CM/CA.$$

Аналогичным образом, используя понятие мгновенного центра вращения, можно легко находить скорости любых точек механизмов, совершающих плоскопараллельное движение.

М. Фистуль

Генератор незатухающих колебаний

Такие генераторы применяются во многих устройствах — радиоприемниках, телевизорах, магнитофонах, компьютерах, электроорганах и т. п.— и бывают самыми разными. Так, частоты генераторов могут лежать в диапазоне от нескольких десятков герц (низкие ноты в электрооргане) до сотен мегагерц (телевидение) и даже до нескольких гигагерц (спутниковое телевидение, радиолокаторы, используемые сотрудниками ГАИ для определения скорости автомобиля). Мощность, которую может отдать генератор потребителю, составляет от нескольких микроватт (генератор в наручных часах) до десятков ватт (генератор телевизионной развертки), а в некоторых специальных случаях мощность может быть такой, что и писать нет смысла — все равно вы не поверите. Форма колебаний возможна как самая простая — синусоидальная (гетеродин радиоприемника) или прямоугольная (таймер компьютера), так и весьма сложная — «имитирующая» звучание музыкальных инструментов (музыкальные синтезаторы).

Конечно, мы не будем рассматривать все это разнообразие, а ограничимся совсем простым примером — маломощным генератором синусоидального напряжения умеренной частоты (сотни килогерц).

Как известно, в простейшем колебательном контуре, состоящем из идеального конденсатора и идеальной катушки, могут происходить незатухающие гармонические колебания. Уравнение процесса легко получить, приравняв (с учетом знаков) напряжения на конденсаторе и на катушке — ведь они включены параллельно (рис. 1):

$$\frac{q}{C}=-LI'.$$

Ток, протекающий через катушку, изменяет заряд конденсатора; эти величины связаны соотношением

$$I=q'.$$

Теперь можно записать уравнение

$$q''+\frac{q}{LC}=0.$$

Решение этого уравнения хорошо известно — это гармонические колебания. Их частота определяется параметрами колебательного контура: $\omega=1/\sqrt{LC}$, а амплитуда зависит только от энергии, которую вначале сообщили контуру (и которая для идеального контура остается постоянной).

Что изменится, если элементы контура не идеальные, как и бывает реально на практике (за много лет автор так и не увидел ни одной идеальной катушки, хотя очень интересовался этим вопросом)? Пусть, для определенности, вся неидеальность контура связана с тем, что у катушки, точнее — у провода, из которого она намотана, есть активное (омическое) сопротивление r (рис. 2). На самом деле, конечно, потери энергии есть и у конденсатора (хотя на не очень высоких частотах сделать очень хороший конденсатор можно без особого труда). Да и потребитель отнимает у контура энергию, что также способствует затуханию колебаний. Одним словом, будем считать, что r — это эквивалентная величина, отвечающая за все потери энергии в контуре. Тогда уравнение процесса приобретает вид

$$LI'+rI+\frac{q}{C}=0.$$

Ясно, что именно второе слагаемое не дает получить желанное уравнение незатухающих колебаний. Поэтому наша задача — это слагаемое скомпенсировать. Физически это означает, что в контур надо подкачать дополнительную энергию, т. е. ввести еще одну ЭДС. Как же это сделать, не разрывая цепь? Проще всего воспользоваться магнитным полем — создать дополнительный магнитный поток, пронизывающий витки катушки контура. Для этого неподалеку от этой катушки нужно разместить еще одну катушку (рис. 3) и пропускать через нее ток, величина которого должна изменяться по нужному закону, т. е. так, чтобы этот ток создал как раз такое магнитное поле, которое, пронизывая катушку контура, создаст в ней такой магнитный поток, который, изменяясь, наведет такую ЭДС индукции, которая в точности скомпенсирует неугодное нам слагаемое в уравнении процесса. Вся эта длинная фраза, напоминающая «дом, который построил Джек»,— просто пересказ известного вам закона Фарадея для явления электромагнитной индукции.

Разберемся теперь с током, который должен течь по дополнительной катушке. Понятно, что для него необходим источник энергии (для пополнения потерь энергии в контуре) и регулирующее устройство, обеспечивающее нужный закон изменения тока со временем. В качестве источника можно использовать обычную батарейку, а в качестве регулирующего устройства — электронную лампу или транзистор.

Транзисторы бывают различных типов — обычные (их называют биполярными) и полевые, которые до-

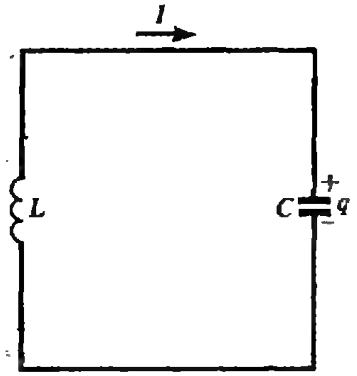


Рис. 1.

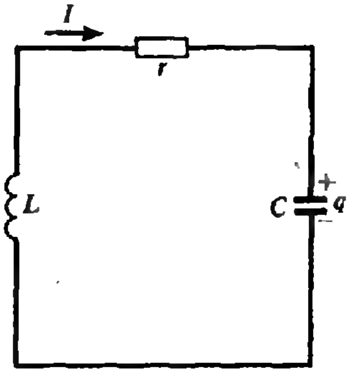


Рис. 2.

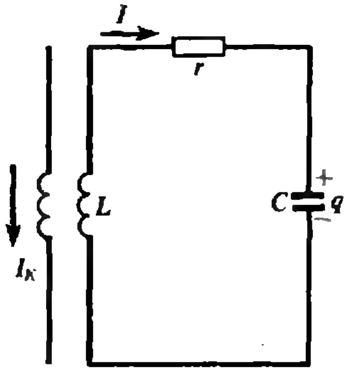


Рис. 3.

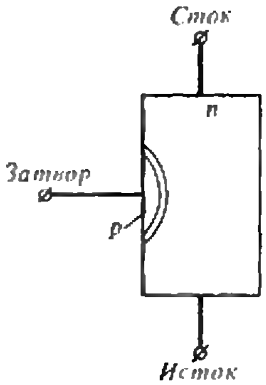


Рис. 4.

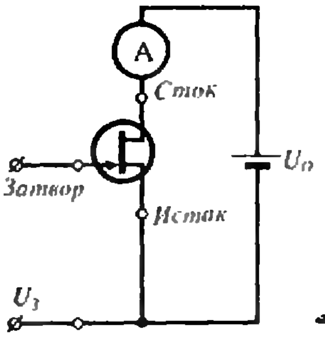


Рис. 5.

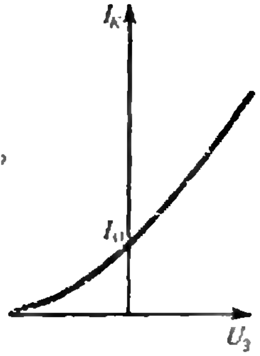


Рис. 6.

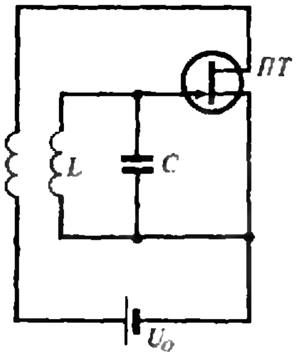


Рис. 7.

полнительно подразделяются на полевые с изолированным затвором (их обычно используют в цифровых устройствах) и с управляющим p — n-переходом. Любой полевой транзистор содержит «канал» с двумя выводами — их изобретательно называют истоком и стоком, а его проводимость регулируется подачей на третий вывод — затвор — управляющего напряжения (рис. 4). В полевом транзисторе с управляющим p — n-переходом — а мы дальше будем говорить именно о нем — затвор отделен от канала именно таким переходом, для чего область затвора делается противоположного по отношению к каналу типа проводимости. Например, если канал имеет примесную проводимость типа p, то затвор — типа n, и наоборот.

Когда на переход подают запирающее напряжение $U_з$ (рис. 5), сечение проводящего канала уменьшается, а при определенном напряжении — его называют напряжением отсечки — канал перекрывается полностью и ток прекращается. Зависимость тока канала $I_к$ от напряжения на затворе $U_з$ показана на рисунке 6. Зависимость эта почти такая же, как и у электронной лампы (триода). Важно отметить, что управляющее напряжение — запирающее, а значит, ток в цепи управления чрезвычайно мал (обычно он составляет несколько наноампер), соответственно мала и мощность управления, что очень хорошо. При небольших значениях управляющего напряжения зависимость тока от напряжения можно считать линейной и записать в виде

$$I_к = I_0 + SU_з,$$

где S — постоянная величина. Для генератора существенны и отклонения от линейности, но об этом позже.

На рисунке 7 изображена принципиальная схема генератора незатухающих колебаний. Здесь управляющим для полевого транзистора напряжением является напряжение на конденсаторе колебательного контура:

$$U_з = U_C = \frac{q}{C},$$

и ток через дополнительную катушку равен

$$I_к = I_0 + \frac{Sq}{C}.$$

Дополнительный магнитный поток пропорционален этому току, а добавочная ЭДС контура равна производной этого потока, взятой с противоположным знаком:

$$\mathcal{E}_и = -\Phi' = -(MI_к)' = -\frac{MS}{C}q'.$$

Знак «минус» тут довольно условен — катушку можно подключить к полевому транзистору либо одним концом, либо другим, при этом знак дополнительной ЭДС изменится на противоположный. Одним словом, дополнительная ЭДС должна быть такой, чтобы скомпенсировать потери энергии в контуре. Запишем еще раз уравнение процесса:

$$LI' + rI + \frac{q}{C} - \frac{MS}{C}q' = 0.$$

Если выбрать величину M такой, чтобы четвертое слагаемое компенсировало второе, то мы получим уравнение

$$LI'+\frac{q}{C}=0,$$

которое соответствует гармоническим незатухающим колебаниям.

А как можно повлиять на величину M? Оказывается, она увеличится, если намотать побольше витков в дополнительной катушке или если эту катушку расположить поближе к катушке контура. Нужно сказать, что достаточный для генерации коэффициент M на практике получить довольно просто. Лучше выбрать эту величину с некоторым запасом — при этом получится контур не только без потерь, но даже с подкачкой энергии от внешнего источника (с «отрицательными» потерями). При включении генератора амплитуда колебаний сначала будет возрастать, но через некоторое время установится — энергия, поступающая в контур за один период, станет равной потерям энергии за то же время. И действительно, при увеличении амплитуды напряжения на конденсаторе (управляющее напряжение полевого транзистора) транзистор начинает усиливать хуже, поскольку при большом отрицательном напряжении ток в цепи канала прекращается, а при положительных напряжениях переход начинает открываться, что тоже увеличивает потери в контуре. В результате колебания получаются не совсем синусоидальными, но, если потери в контуре невелики, искажения незначительны.

Для того чтобы использовать полученные колебания — а ведь именно для этого и делается генератор,— нужно либо подключиться непосредственно к контуру, либо намотать еще одну катушку. Но в обоих случаях необходимо учесть «уход» энергии из контура и скомпенсировать его в числе прочих потерь.

А. Зальберман

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Поезд первую половину пути шел со скоростью в 1,5 раза большей, чем вторую половину. Средняя скорость движения на всем пути равна v. Каковы скорости поезда на каждой половине пути?

3. С крыши здания высотой $h=27$ м через одинаковые промежутки времени падают капли воды, причем первая ударяется о землю в тот момент, когда четвертая капля отделяется от крыши. Каковы расстояния между каплями в момент удара первой капли о землю?

3. На рисунке 1 приведен график ускорения тела, движущегося прямолинейно. Постройте графики скорости, перемещения и пути в зависимости от времени. Начальная скорость тела равна нулю.

4. Ракета запущеиа вертикально вверх. Найдите время от момента запуска до того момента, когда ракета достигнет максимвльной высоты $H=74$ км (при минимальиом расходе горючего), если ускорение ракеты при работающем двигателе постоянно и равно $a=2g$. Сопротивлением воздуха и изменением величины ускорения свободного падения g пренебречь.

5. На движущуюся вертикально вверх со скоростью v ровную горизонтальную плиту свободно падает шарик. Расстояние от точки начала падения до места встречи шарика с плитой равно h. На какую высоту от этого места подскочет шарик после соударения с плнтой? Удар абсолютно упругий, т. е. скорость после удара такая же, как и до него.

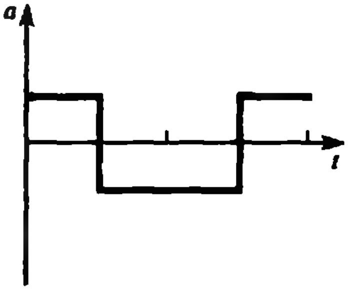


Рис. 1.

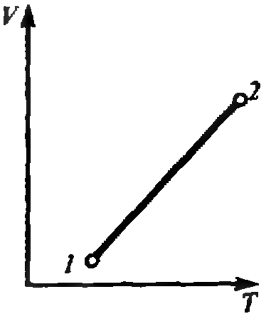


Рис. 2.

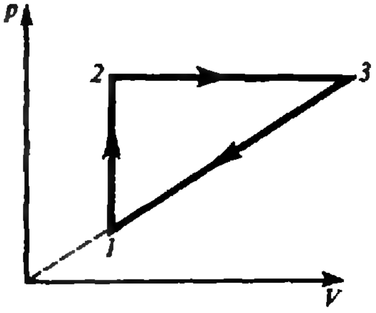


Рис. 3.

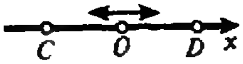


Рис. 4.

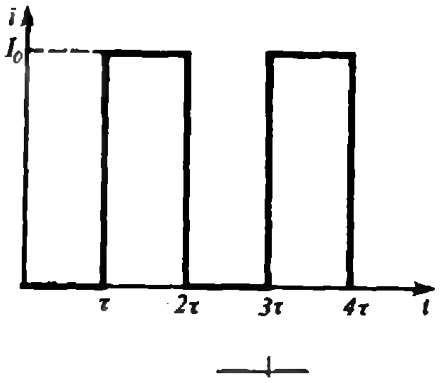


Рис. 5.

10 класс

6. Определите по графику зависимости объема от температуры (рис. 2) характер изменения давления газа во время нагревания.

7. Газ последовательно переводится из состояния *1* с температурой T_1 в состояние *2* с температурой T_2, а затем в состояние *3* с температурой T_3 и возвращается в состояние *1*. Определите температуру T_3, если процессы изменения состояния происходили так, как это показано на рисунке 3, а температуры T_1 и T_2 известны.

8. Определите подъемную силу воздушного шара объемом $V=100$ м^3, наполненного горячим воздухом при температуре $t_1=147$ °С. Шар сообщается с атмосферой. Температура наружного воздуха $t_2=27$ °С, его давление $p=700$ мм рт. ст.

9. В сосуде находится смесь $m_1=10$ г углекислого газа и $m_2=15$ г азота. Найдите плотность этой смеси при температуре $t=27$ °С и давлении $p=1{,}5\cdot10^5$ Па.

10. В закрытом откачанном цилиндре подвешен на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. Под поршень вводится некоторое количество воздуха так, что поршень поднимается на высоту $h=10$ см при температуре $t_1=27$ °С. На какую высоту поднимется поршень, если количество воздуха под ним увеличить в 5 раз, а температуру повысить до $t_2=37$ °С?

11 класс

11. Точка совершает гармонические колебания между положениями C и D (рис. 4). Зная, что ее максимальная скорость равна $v_m=10$ м/с, найдите ее среднюю скорость на пути от C к D.

12. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l/2$ от нее вбит гвоздь. Найдите период колебаний маятника.

13. В колебательный контур с индуктивностью L, емкостью C и активным сопротивлением R включили последовательно источник синусоидальной ЭДС с амплитудой $\mathcal{E}_m$. Затем, меняя частоту источника, добились того, что амплитуда тока стала максимальной. Какой? При какой частоте это произошло?

14. Ток в цепи изменяется по закону, представленному на рисунке 5. Определите действующее значение такого тока.

15. Длина воздушной линии электропередачи $l=300$ км. Частота напряжения $\nu=50$ Гц. На какую долю периода отличаются фазы напряжения в начале и в конце этой линии?

Публикацию подготовила В. Тихомирова

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» начинает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае будущего года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика».

Решение задач из этого номера высылайте не позднее 15 ноября 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

1. Найдите такое десятизначное число, что число из двух его первых цифр делится на 2, из трех первых цифр — на три, и так далее до того, что само число делится на 10.

А. Швецов

2. Докажите, что число $1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot1987\cdot1989+2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot1990$ делится на 1991.

В. Произволов

3. В три магазина привезли 1990 книг. В первые три дня первый магазин продал соответственно 1/37, 1/11 и 1/2 часть полученных книг, второй магазин — 1/57, 1/9 и 1/3 полученных книг, третий магазин — 1/25, 1/30 и 1/10 полученных книг. Сколько книг получил каждый магазин?

Л. Курляндчик

ОРФО — высокоинтеллектуальная система для компьютеров типа IBM PC/XT/AT

ОРФО

ОРФО *осуществляет автоматизированную грамматическую проверку и коррекцию русскоязычных текстов*

ОРФО *поможет вам выучить русский язык*

ОРФО *избавит ваши тексты от опечаток и от ошибок в орфографии, в согласовании слов и т. д.*

ОРФО *снабжена словарем русского языка (120 000 слов) и способна расширять свой словарь*

ОРФО *совместима с любым текстовым редактором*

ОРФО *проста в обращении*

Обращаться по адресу: 103104, Москва, ул. Остужева, д. 7, стр. 2, МРНТО «Информатик». Наши телефоны: 299-99-04, 290-35-24

Р-значит ракета

Полет к звездам

Доктор технических наук К. ФЕОКТИСТОВ

Почти с самого начала космических работ стало ясно, что пространство Солнечной системы, ее планеты находятся в пределах досягаемости космических аппаратов и кораблей, которые мы можем создать, и, следовательно, люди смогут если не высадиться, то во всяком случае добраться до любой планеты. Но одновременно стало проясняться в сознании, что здесь, «дома», скорее всего ничего необычного мы не найдем. Маловероятно, что по данным, полученным в путешествиях по нашей системе, мы существенно продвинемся вперед в понимании мира, в котором живем.

Естественно, возникала мысль о полетах к звездам. Да это и раньше подразумевалось, что полеты около Земли, полеты к другим планетам Солнечной системы не являются конечной целью. Проложить дорогу к звездам — вот что казалось главной задачей космической техники. Это представлялось очевидным.

Значит, нужно было начинать думать о звездных кораблях.

Каким должен быть этот корабль? Как его построить? Какие проблемы нужно решить, чтобы звездные полеты оказались возможны? Размышления, самые простые оценочные расчеты показали, что здесь возникают принципиальные трудности.

Первая — время. Даже если построить звездный корабль, который сможет летать со скоростью, близкой к скорости света (скажем, со скоростью около 0,7 c), время путешествий будет исчисляться тысячелетиями и десятками тысячелетий, так как диаметр Галактики порядка 100 000 световых лет (за год свет «проходит» расстояние $365{,}25 \cdot 86\,400 \cdot 3 \cdot 10^8 \approx \approx 10^{16}$ м, т. е. десять тысяч миллиардов километров).

Что останется даже от замороженых космонавтов к концу путешествия? Или от их зародышей? Да и вправе ли мы решать судьбу еще не родившихся людей? (Это едва ли лучше, чем, не мучаясь сомнениями, облагодетельствовать потомков жизнью при социализме, не представляя, что это такое, каким он будет, можно ли при нем будет жить, и определить для них на вечные времена некую руководящую и направляющую силу.) А если решить эти проблемы — то ведь после путешествия они вернутся в совершенно другой мир. Посмотрите на изменения в течение последних 200 лет, и станет понятным, что вернувшийся из дальнего путешествия космонавт окажется в совершенно чужом мире: путешествие к звездам всегда будет «односторонним». Для окружающих, родных, друзей это будет чем-то вроде самоубийства.

Вторая трудность — опасный поток газа и пыли. Пространство между звездами не пустое. Везде есть остатки газа, пыли, потоки частиц. При движении звездного корабля со скоростью, близкой к скорости света, они создадут поток высокой энергии, который будет воздействовать на корабль.

Мощность потока энергии от частиц, с которыми сталкивается тело, движущееся со скоростью v (без учета релятивистских эффектов) можно оценить по формуле

$$W = nvm_{\text{ч}}\frac{v^2}{2} = nm_{\text{ч}}\frac{v^3}{2}.$$

Здесь n — концентрация частиц в межзвездном пространстве ($[n] = 1/\text{м}^3$), nv — число частиц, налетающих на 1 м^2 поверхности тела за время 1 с ($1/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$), $m_{\text{ч}}$ — масса частицы (кг), $m_{\text{ч}}v^2/2$ — энергия каждой частицы (Дж) относительно корабля.

Галактический газ состоит в основном из водорода. Масса атома водорода $\sim 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ кг. Концентрация частиц в среднем в Галактике $\sim 0{,}5 \cdot 10^6$ м$^{-3}$, в рукавах Галактики $\sim 10^6$ м$^{-3}$, в облаках водорода $\sim 2 \cdot 10^7$ м$^{-3}$. Масса пыли в межзвездном пространстве примерно в 100 раз меньше массы газа.

Этот поток можно оценить следующими величинами: мощность потока частиц и газа 10^4—10^5 Вт/м^2, потока пыли 10^2—10^3 Вт/м^2, поток частиц — это $3 \cdot 10^{14}$ частиц/(с·м^2) с энергией каждой частицы порядка 500 МэВ. Воздействие этих потоков приведет к испарению любого защитного экрана и к недопустимо высоким для длительного полета мощностям дозы радиации.

Третья трудность — энергетика. Если в движителе корабля использовать наиболее эффективную термоядерную реакцию, то для путешествия в оба конца со скоростью порядка скорости света даже при идеальной конструкции корабля отношение начальной и конечной масс его оказывается больше 10^{30}, что представляется нереализуемым.

Оценку минимального потребного соотношения масс (начальной и конечной) звездного корабля с термоядерным движителем, летящего со скоростью, близкой к скорости света (но позволяющей не учитывать в первом приближении релятивистские поправки), можно провести следующим образом.

Наиболее эффективная термоядерная реакция —

$${}^2_1\text{D} + {}^3_1\text{T} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0n + 17{,}6 \text{ МэВ},$$

причем 14,1 МэВ из этих 17,6 уносятся нейтронами. Таким образом, для ускорения гелия в движителе можно будет использовать энергию $E \sim 3{,}5$ МэВ на один атом гелия. Максимальную скорость истечения гелия в идеальном движителе можно вычислить из соотношения $E_{\text{ч}} = m_{\text{ч}}v_{\text{и}}^2/2$:

$$v_{\text{и}} = \sqrt{2E_{\text{ч}}/m_{\text{ч}}}.$$

Подставляя массу атома гелия $m_{\text{ч}} \sim 4 \cdot 1{,}67 \times \times 10^{-27}$ кг и $E_{\text{ч}} = 3{,}5 \cdot 10^6$ эВ $\approx 3{,}5 \cdot 10^6 \times \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 5{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж, получаем $v_{\text{и}} \approx 1{,}3 \cdot 10^7$ м/с.

Соотношение начальной и конечной масс звездного корабля (без учета релятивистских поправок) определяется формулой Циолковского:

$$\frac{M_0}{M_{\text{к}}} = e^{4v_{\text{к}}/v_{\text{и}}},$$

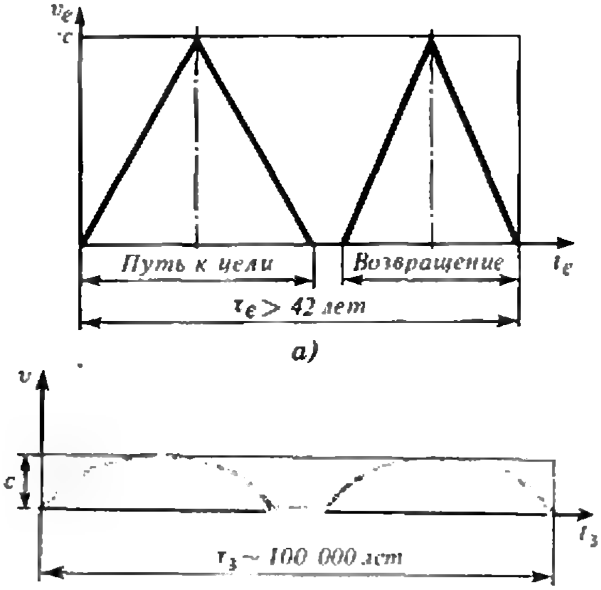
где $v_{\text{к}}$ — максимальная скорость полета корабля. Приняв $v_{\text{к}} \sim 0{,}7\ c$, получим:

$$\frac{M_0}{M_к} \sim e^{4 \cdot 0{,}7 \cdot 3 \cdot 10^6/(1{,}3 \cdot 10^7)} \sim$$

$$\sim e^{70} \sim 2{,}5 \cdot 10^{30}.$$

Если же думать о фотонном движителе, использующем аннигиляцию материи, то здесь пока одни проблемы (хранение гигантских запасов антивещества, защита зеркала отражателя фотонов от выделяемой энергии и от остатков непрореагировавшего антивещества, времена разгона, размеры и т. п.) и не видно решений.

Искушенный читатель, возможно, скажет: но ведь эти оценки сделаны без релятивистских поправок. А что до фотонного движителя — поживем, разберемся и как-нибудь сделаем.



а)

б)

График космического полета с точек зрения космонавта (а) и земного наблюдателя (б).
а) Собственное время полета космонавта τ_e можно рассчитать по формуле

$$\tau_e = 4c/a \cdot \operatorname{arch}(1 + a \cdot S/2c^2).$$

(Здесь arch *— одна из обратных так называемых гиперболических функций — гиперболический арккосинус:* $\operatorname{arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$.) *Подставляя скорость света* $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с, ускорение* $a = 9{,}8$ *м/с² (привычная нагрузка для космонавта-землянина), дальность полета* $S \approx 4{,}7 \times \times 10^{20}$ *м, получаем* $\tau_e \approx 42$ *года. Скорость в корабельной системе —* $v_e \approx \int_{t_e} a\,dt$.

б) На Земле при этом пройдет время
$\tau_з = \tau_e \cdot \operatorname{sh}(\operatorname{arch}(1 + aS/2c^2))/\operatorname{arch}(1 + aS/2c^2) \approx \approx 100\,000$ *лет*
(sh $x = (e^x - e^{-x})/2$ *— так называемый гиперболический синус).*

Попробуем показать, что с учетом релятивистских поправок картина получается не лучше. Представим себе Галактический фотонный корабль, способный летать со скоростью, достаточно близкой к скорости света. Собственное время полета космонавта туда и обратно на расстояние порядка половины диаметра Галактики при оптимальном графике полета (непрерывный разгон, а затем — непрерывное торможение) составит 42 года. На Земле при этом пройдет 100 000 лет (см. рисунок).

Предположим, что нам удалось получить идеальный процесс в фотонном движителе, сделать идеальную конструкцию с нулевой массой баков, экранов, отражающего зеркала, насосов и других элементов, и попробуем оценить некоторые параметры такого идеального корабля.

Отношение начальной массы корабля к конечной составит $\sim 7 \cdot 10^{18}$. Это означает, что при массе жилых и служебных помещений и аппаратуры (т. е. того, что везет корабль) всего 100 тонн стартовая масса составит $\sim 7 \cdot 10^{20}$ тонн — больше массы Луны! Причем половина этой массы — антивещество.

Чтобы обеспечить ускорение 9,8 м/с², движитель должен развить тягу $P \sim \sim 10^{24}$ Н. Чтобы получить такую тягу, нужно в фокусе зеркала разместить источник излучения с мощностью порядка 10^{33} Вт (эту оценку мы получили по формуле $W = Pc/2$). Напомним, что мощность излучения нашего Солнца менее $4 \cdot 10^{26}$ Вт, т. е. в фокусе фотонного движителя корабля нужно зажечь миллионы Солнц (и поддерживать это «горение»)! Есть теоретическое предложение везти с собой только антивещество. Тогда эти цифры сокращаются, но все равно остаются совершенно фантастическими — в фокусе зеркала фотонного движителя оказывается необходимым зажечь сотни, тысячи Солнц.

Из наших сегодняшних представлений о мире складывается впечатление: нельзя решить проблему транспортировки материальных тел на галактические расстояния со скоростями, близкими к скорости света. Похоже, бессмысленно «ломиться» через пространство и время с помощью механической конструкции. Нужно найти способ межзвездных путешествий, не связанный с необходимостью транспортировки материального тела. И тут мы приходим к идее, давно обкатываемой в фантастической литературе,— о путешествиях разумных существ в виде пакета информации.

Электромагнитные волны распространяются практически без потерь во всей наблюдаемой Вселенной. Возможно, здесь и есть ключ к межзвездным полетам.

Если не впадать в мистику, то следует признать, что личность современного органического человека нельзя отделить от тела. Но можно представить специально сконструированного человека, у которого личность и тело разделимы. Аналогично тому, как математическое обеспечение может быть отделено от конструкции современных ЭВМ.

Личность — это индивидуальный комплекс особенностей данного человека в его восприятии внешнего мира, в его реакциях на принимаемую информацию, в его воображении, симпатиях и антипатиях, в его знаниях и т. п.

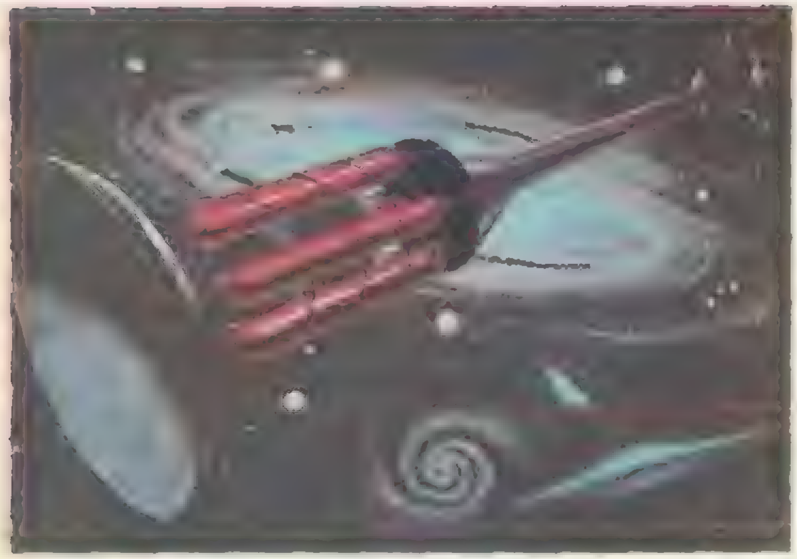
Личность существует на полях операций и в запоминающих устройствах. Эти поля и устройства — наш мозг, тот материальный носитель, на котором живет и действует интеллект человека, на котором записаны (и непрерывно пополняются, совершенствуются, устаревают и портятся) алгоритмы восприятия и анализа информации, синтеза картины внешнего мира, алгоритмы оценок и пристрастий, промежуточные результаты «вычислений», выводов. Это поле, на котором располагается наше Я. Оно живет как Я тогда, когда человек думает, принимает решения, испытывает эстетическое наслаждение или отвращение, т. е. когда идут операции интеллекта на этом поле операций. Эти операции и есть жизнь личности или, если угодно, жизнь души.

Если пакет информации, являющийся полным содержанием личности, может быть переписан с полей операций и запоминающих устройств, то этот пакет информации может быть и передан по радиолинии на приемную станцию назначения и там переписан в стандартный материальный носитель (или выбираемый по прейскуранту, или...), в котором он сможет жить, действовать и удовлетворять свое любопытство. Во время передачи его пакета информации человек не живет. Для того чтобы он мог жить, необходим материальный носитель.

Такой способ решения задачи полета к звездам стал бы реализацией не только сюжетов современной фантастики, но и сюжетов древних мифов о вознесениях на небо или мгновенных свержений в ад. Это было бы «экспериментальным решением» философских споров о сути человека, о бренности телесной оболочки, о сути бытия. Что есть человек? И что есть истина? Интересно, что выдающиеся философы в разные эпохи, от античности до нашего времени, путем логического анализа (основанного не на знании) приходили к вполне современным представлениям о соотношении между сутью и телом человека. Жизнь человека — это жизнь его души, это бьющаяся мысль о себе («что я?»), о мире вне себя и в себе, это восприятие красоты и отторжение примитива и неправды, это свобода мысли и анализа. Мы здесь, мы живем, пока способны размышлять, оценивать, перерабатывать информацию и генерировать ее. Остальное во мне, тело мое — для обслуживания.

Головной мозг — поле математических операций над символами, числами, понятиями. Но сами операции, мысли, наши переживания — это нечто такое, чего нельзя взять в руки. Человек во все времена пытался материализовать это нечто в виде звуков, слов, рассказов, рукописей, книг... Но всегда это оказывалось лишь тенью, слабым отражением этого нечто.

Тело — обслуживающие системы поля математических операций (питание, очистка, перемещения, связь



Фотонная ракета — мечта, к которой будут стремиться многие поколения наших потомков? или идея фикс, устаревшая едва родившись? (На рисунке — одна из воображаемых конструкций. Длина ракеты более 9,5 км, численность экипажа 300—500 человек.)

с внешним миром). Но подавляющее большинство людей, почти все и почти всегда, никогда не различали свое Я и свое тело. И всегда стремились получше его, тело, устроить (в общем-то не зря — без питания умирает головной мозг, распадается поле операций, исчезает личность). Это стремление из поколения в поколение оставалось главной движущей силой человеческого рода. Оно определяло и грабительские походы, и создание новых технологий, и стремление к лучшей организации жизни и общества (в том числе и методом «грабь награбленное», замаскированным лозунгом «долой эксплуататоров»). Дома, автомобили, самолеты, газ и электричество, вычислительная техника родились из этого стремления. Устроить получше свое тело было и остается пока главным движителем в жизни людей. А ведь на самом деле — это все вторичное. Впрочем, говорится это не к тому, что не надо заботиться о теле, о мыле, о хлебе насущном. В здоровом теле компьютер работает с меньшим количеством сбоев, с большей скоростью, с более разнообразными и эффективными алгоритмами, обеспечивает бóльшую внутреннюю устойчивость к внешним угрозам и неприятностям. И, главное,— ясность мышления. Но если говорить о главном в отношениях нашего Я с внешним миром, то это — свобода.

Все это говорилось здесь к тому, чтобы напомнить: наше Я, наша индивидуальность, наша суть — это не материальная оболочка. Нет ничего криминального, противоречащего нашему восприятию мира в мысли о возможности разделения индивидуальности и ее материального носителя.

Поэтому с инженерной точки зрения можно сконструировать такой мир, где душу человека можно отделить от тела. В таком мире человек может перемещаться из одного места в другое — скажем, в пределах Солнечной системы — практически мгновенно. Например, для выбранного «резидента» можно было бы в достаточно большом количестве центров иметь его базовый пакет информации и передавать только изменения, отражающие его состояние в данный момент времени, и сигнал о его включении в этом месте. В этом же мире можно представить и вселение души (духа?) данного человека в чужое тело. (Какую путаницу можно представить! Даже нам до них будет далеко.)

Возможно ли создать такое существо? Какие стимулы жизни мы должны заложить в него? Мне кажется, именно здесь будет главная проблема. Мы — дело другое. Мы продукт органической эволюции. В нас глубоко заложен инстинкт жизни, инстинкт продолжения рода. Вид, у которого этого инстинкта не было или он был недостаточно развит, не выживал в условиях естественного отбора. Да что там естественный отбор. Когда за возрастом, здоровьем, условиями жизни умирает этот инстинкт — у людей пропадает желание жить. А какой же стимул жизни мы сможем предложить нашему творению? Любопытство? Желание быть полезным людям, создавшим его тело (бренное и сменяемое) и воспитавшим его личность, душу? Желание выявиться в исследованиях мира, в сверхдальних путешествиях, в создании приемно-передающих станций для путешествий, в строительстве космических околозвездных баз?

Убедительны ли эти стимулы? Откуда ему взять привязанность и любовь к ближним? Как воспитать его, чтобы он не оказался монстром с нелепыми и бессмысленными устремлениями к власти, к возможности давать указания, воспитывать и слыть благодетелем? или, наоборот, чтобы он не оказался инфантильным, безынициативным существом, равнодушным к миру, к ближним и к самому себе?

И, конечно, громадные технические проблемы.

Как мы мыслим? Как создаются стереотипы наших реакций, поведения, оценок, как создается наша индивидуальность? Есть подозрение, что наши алгоритмы видения окружающего мира, анализа, мышления создаются каждый раз заново и почти всегда по-иному, и их характер определяется семьей, приятелями и недругами, школой, структурой общества, радостями, огорчениями и удачами нашего детства. В обществе рабов вырастают рабы, в обществе свободных — люди независимые и т. д.

С этой точки зрения очень опасно стандартизировать приемы воспитания, ясли, детские сады, школы... Это самое страшное, что можно сделать для своего будущего. Человечество сильно́ различностью, разнообразием, индивидуальностями. Конечно, некоторые основы должны быть общими: не убий, не укради, не пожелай... Но, готовить человека по стандарту (пусть даже самому высокому) — это готовить собственную гибель.

Как, не понимая всех этих вещей, приступать к созданию искусственного интеллекта? А главное — трагические ошибки и неудачи, которые нас ждут на этой дороге.

Даже здоровое разумное существо нуждается в поддержке и защите, в признании, в ощущении осмысленности своей жизни, своей полноценности и полноправности. Ошибки в идеях разработки, при изготовлении, в воспитании, недостаточная порядочность создателей могут привести к сотворению существ-инвалидов, психически ненормальных и, главное, несчастных. Ведь это все есть у нас, людей: уроды и инвалиды, выращенные, а потом брошенные в равнодушный мир домашние кошки и собаки, брошенные дети и старики...

Но мысль уже вошла в сознание самых любопытных, сообразительных и предприимчивых. Пожалуй, задача создания искусственного интеллекта стала самой популярной задачей нашего времени. Надо думать, это дело пойдет.

Появятся и более понятные трудности.

Чтобы отправить личность в виде пакета информации в галактическое путешествие, надо создать приемные и передающие станции (например, в радиодиапазоне), развезти (например, с помощью автоматических космических аппаратов) эти станции к возможным пунктам назначения (невдалеке от какой-либо звезды для обеспечения станций энергией). Если личность передавать по радиоканалу на галактические расстояния, то придется создавать антенны размером порядка километров, передатчики мощностью порядка 10^8 кВт. Скорости автоматических космических аппаратов, которые летают сейчас, составляют десятки километров в секунду. Представляются достижимыми скорости порядка сотен и даже тысяч километров в секунду. Но это означает, что время развозки по Галактике составит для землян миллионы и даже сотни миллионов лет. Доставка станций даже к ближайшим звездам, находящимся от нас в десятках световых лет, потребует десятков тысячелетий. За это время может быть утерян интерес к предприятию. Тем не менее этот путь — в рамках возможного.

Можно развозить не приемно-передающие станции, а технологию, инструменты, роботов для создания таких станций на месте.

Можно предложить и другой путь осуществления звездных путешествий, а именно — выйти на связь с другими цивилизациями, передать им информацию о строительстве приемно-передающей станции, пригодной для приема и возвращения «наших людей», информацию, необходимую для создания стандартного материального носителя, и таким способом наладить галактические путешествия (тоже идея из фантастики — вспомните, например, «Черное облако»). Тут появляется в рассуждениях старая задача: как выйти на связь с другими цивилизациями?

Естественный путь — создать «маяк», получить обратный запрос и вступить в связь. Если исходить из идеи создания импульсного маяка, получающего энергию от звезды, с солнечными батареями мощностью порядка 10^9 кВт (здесь данные применительно к радиомаяку с полосой частот передачи всего 100 Гц), то можно рассчитывать на абонентов, находящихся на расстояниях до пятидесяти тысяч световых лет и имеющих около своей звезды приемные антенны с размерами до 10—20 км. Величины 10^9 кВт не следует пугаться. Солнечные батареи такой мощности должны иметь размеры 100×100 км — гигантские, но вообще реальные размеры. Подобную конструкцию можно представить в виде легкой плоской фермы, на которой натянуты пленочные фотоэлементы.

Сроки реализации такой связи составят тысячи и десятки тысяч лет. Уже, правда, не миллионы, но все равно долго.

Может ли быть более короткий путь?

Если другие цивилизации избрали ранее этот путь освоения Галактики, то они могли уже создать и свои «маяки». Значит — искать эти маяки. Создать приемные антенны, способные принять сигналы галактических маяков.

Радиотелескопы с антеннами порядка километров и более можно создать в околосолнечном пространстве. А где искать? Может быть, в центре Галактики? или вдоль средних линий спиральных рукавов? в шаровых звездных скоплениях?

Так или иначе, но это уже десятилетия, а не тысячи и не миллионы лет.

А нет ли еще более простого способа выхода на связь с другими цивилизациями?

Предположим, что представители других цивилизаций уже были (или есть?) на Земле или в Солнечной системе. Какими могут быть следы их деятельности? Где могут располагаться приемно-передающие станции (в том числе промежуточные)?

Тут два направления поиска. Одно — космические люди. Какими их следует ожидать: размеры, особенности их жизни (может быть, например, им не нужны атмосфера и органика для энергопитания, вакуум — их естественная среда обитания...)? Почему они сами не вступили в контакт или почему они не хотят вступать с нами в контакт? Другое направление — поиски их средств связи, приема и передачи путешественников и информации.

Цель таких размышлений на грани фантастики — заглянуть вперед, чтобы понять свои дальние цели, чтобы определить перспективные направления сверхдальнего поиска, сверить эти направления с актуальными проблемами экологии и экономики, обустройства жизни людей на Земле, с интересными на сегодня научными задачами исследования Вселенной и Земли. И из этого анализа выявить направления работ, на которые стоит тратить общие средства, энергию и интеллект людей. Это нужно для того, чтобы взвешенно и разумно сделать выбор, чтобы не тратить зря усилия и средства.

Примеров нелепых решений XX век видел достаточно много. Можно, например, вспомнить о работах в нашей стране над созданием суперракеты Н1. Эти работы проводились в шестидесятые годы и были прекращены в 1973 году. Для чего она была нужна? Высаживать экспедицию на Луну? Но параметры ракеты не были увязаны с массой кораблей. Потрясти мир? Шокировать американцев? Или, может быть, для того, чтобы выводить на орбиту какие-то громадные космические аппараты с массой около 100 тонн? Но таких проектов ни тогда, ни сейчас, спустя двадцать лет, не было и нет.

А работы по созданию ракеты «Энергия»? Зачем? Для вывода на орбиты космических аппаратов с массой порядка 100 тонн. Но ведь их нет! И проектов нет!

Или наше последнее «эпохальное» достижение — система «Энергия — Буран». Работы проводились с большим напряжением. Закрывались и отодвигались другие космические и некосмические работы. Истрачены громадные средства. Для чего? Чтобы получить свою «игрушку» и показать, что мы не хуже американцев умеем зря тратить деньги? «Буран» может возвращать с орбиты космические аппараты. Но таких аппаратов, которые требовали бы возвращения с орбиты и стоимость которых была бы больше стоимости запусков «Бурана», нет. Доставка же аппаратов на орбиту с помощью «Бурана» в десятки раз дороже, чем с помощью давно существующих носителей. Так зачем же?

Надо сказать, что упрек в крайне неудачных выборах крупных целей относится не только к нашим чиновникам, но и к американским (Лунная программа, «Шаттл»). В принципе, чиновники везде одинаковы — они ведь распоряжаются не своими деньгами.

Размышления о полете к звездам позволяют выделить несколько интересных направлений работ:

— исследования возможности создания и разработка искусственного интеллекта;

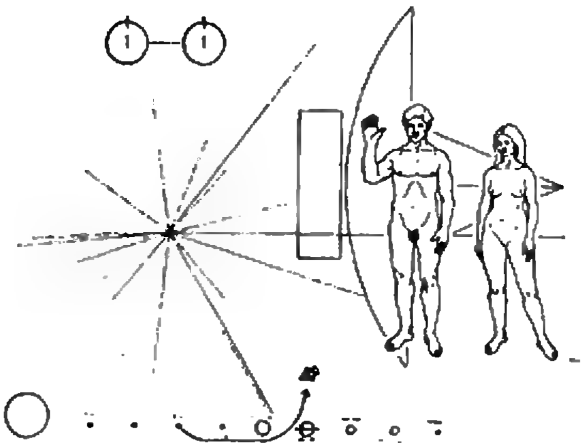
— конструирование космических роботов с последующим переходом к созданию человека космоса, личность которого может отделяться от материального носителя и передаваться в виде пакета информации со скоростью света;

— разработка идеологии и конструкции «маяков», методов их поиска;

— разработка и создание все более крупных радио- и оптических телескопов, с размерами радиоантенн порядка сотен и тысяч метров;

— поиск «чужих» выходных каналов связи с Земли, более тонкое (с большим разрешением) фотографирование и изучение поверхности Луны (особенно обратной стороны) и других планет Солнечной системы в поисках средств связи других цивилизаций.

Эти направления работ хорошо коррелируют с современными нуждами человечества.

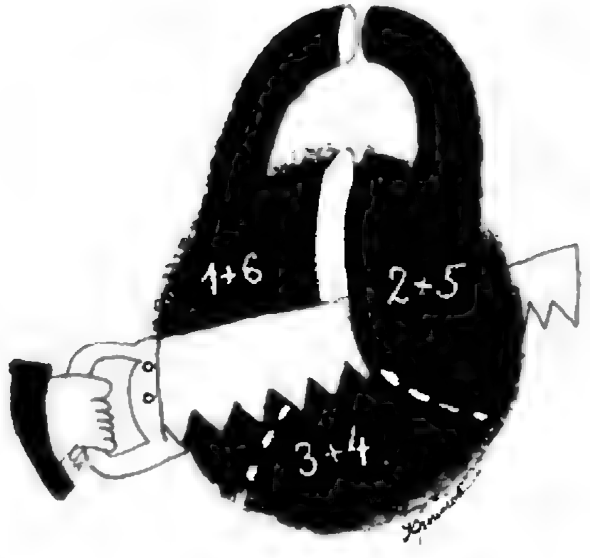


Первое послание человечества к далеким мирам, установленное на КА «Пионер-10» (1972). Через несколько миллионов лет оно окажется там, где сейчас находится звезда Альдебаран. Не станут ли его получателями наши потомки?

Работы по искусственному интеллекту связаны с решением задачи создания достаточно эффективных роботов, которые могли бы заменить людей на опасных производствах, избавить их от тяжелого физического труда, от рутинной нетворческой работы, помогли бы нам в освоении акваторий и подводного мира. Создание космических роботов — назревшая задача. При работах в открытом космосе они будут более эффективны, чем человек в скафандре. А работы в открытом космосе скорее всего будут развиваться в ближайшие десятилетия: строительство на орбитах экономически эффективных заводов, где в производственных процессах будет использоваться отсутствие силы тяжести, заводов, которые нельзя оставить на Земле из-за их экологической вредности.

Создание больших радиотелескопов позволит вести эффективные исследования и на границах Вселенной, и в центре Галактики...

Этот анализ можно и нужно продолжить. Только совместное рассмотрение ближних и дальних задач позволяет правильно выбирать цели и принимать разумные решения.



Математический кружок

Числовые конструкции

С. ГЕНКИН,
Л. КУРЛЯНДЧИК

В этой статье речь пойдет о конструкциях, материалом для которых служат натуральные числа. На вопрос о существовании требуемой конструкции возможны два ответа: да или нет.

Найди сумму

Задача 1. *Можно ли натуральные числа от 1 до 21 разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел?*

Решение. Допустим, что такое разбиение возможно. Ясно, что сумма чисел в каждой группе четна (она в два раза больше наибольшего числа группы). Поэтому сумма всех чисел четна. Однако $1+2+\ldots+21=21\cdot 11$ — нечетное число. Значит, такое разбиение невозможно.

Задача 2. *Можно ли подобрать пять целых чисел так, чтобы все их попарные суммы составляли десять последовательных целых чисел?*

Решение. Предположим, что нам удалось найти пять таких чисел. Пусть s — сумма всех этих чисел, а n — наименьшая из их попарных сумм. Тогда десять попарных сумм — это числа n, $n+1$, ..., $n+9$. А теперь посчитаем сумму всех попарных сумм двумя разными способами. С одной стороны, она равна $n+(n+1)+\ldots+(n+9)=5(2n+9)$. С другой стороны, она равна $4s$, так как в нее каждое исходное число входит ровно четыре раза. Поэтому $4s=5(2n+9)$, что невозможно. Значит, такие пять чисел подобрать нельзя.

Проанализируем решения этих двух задач. Основным моментом каждого из них является подсчет некоторой суммы двумя разными способами. Но при помощи этого приема можно лишь доказать, что данное множество чисел указанным свойством не обладает. Однако часто встречаются задачи, в которых требуется найти не только необходимое, но и достаточное условие выполнения указанного свойства.

Задача 3. *Из чисел 1, 2, 3, ..., $n+1$ одно вычеркнули, а оставшиеся расположили в последовательность a_1, a_2, ..., a_n таким образом, что все n чисел $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, ..., $|a_n-a_1|$ различны. При каких $n\geqslant 3$ это можно сделать?*

Решение. Во-первых, числа a и $|a|$ имеют одинаковую четность. Поэтому сумма $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\ldots+|a_n-a_1|$ имеет такую же четность, как и число $(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots+(a_n-a_1)=0$. Значит, эта сумма четна. С другой стороны, $|a_1-a_2|$, $|a_2-a_3|$, ..., $|a_n-a_1|$ — это n различных натуральных чисел, не превосходящих n, т. е. это числа 1, 2, 3, ..., n. Следовательно, их сумма $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, и это — четное число. Поэтому $n=4k$ или $n=4k-1$. Итак, необходимое условие найдено. Для доказательства его достаточности остается показать, что при таких n требуемые расположения существуют. Они приведены на рисунке.

Задача 4. *Какое наибольшее количество троек чисел, не имеющих попарно общих элементов, можно выбрать из множества натуральных чисел от 1 до n таким образом, чтобы суммы чисел каждой тройки были различны и не превосходили n?*

Решение. Пусть выбрано k троек чисел. Сложим все выбранные $3k$ чисел и полученную сумму обозначим через s. Ясно, что $1+2+\ldots+3k\leqslant s\leqslant n+(n-1)+\ldots+(n-k+1)$. Значит, $\frac{3k(3k+1)}{2}\leqslant\frac{(2n-k+1)k}{2}$. Отсюда получаем необходимое условие $k\leqslant\frac{n-1}{5}$. Осталось привести набор из $\left[\frac{n-1}{5}\right]$ троек чисел, удовлетворяющий условиям задачи. Обозначим число $\left[\frac{n-1}{5}\right]$ через a и расположим числа от 1 до $3a$ следующим образом:

$$\begin{array}{lllll}
1 & 2 & 3 & \ldots a-1 & a \\
2a & 2a-1 & 2a-2 & \ldots a+2 & a+1 \\
2a+1 & 2a+2 & 2a+3 & \ldots 3a-1 & 3a
\end{array}$$

Числа, стоящие в первом столбце, образуют первую тройку чисел, стоящие во втором столбце — вторую тройку, и так далее.

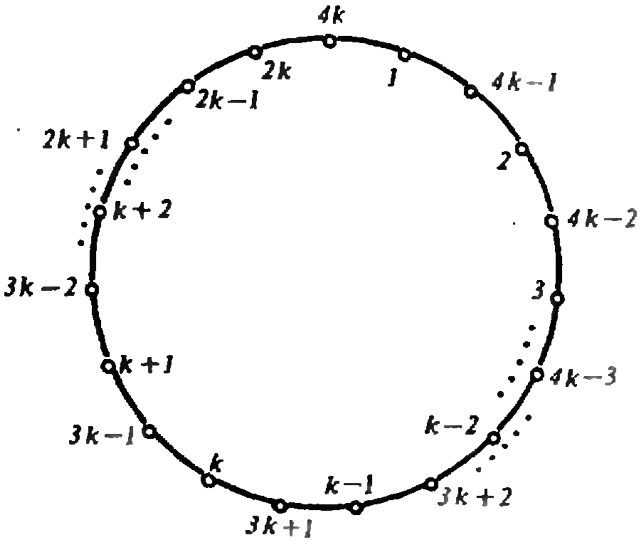
Двоичная система счисления

Как вам, скорее всего, известно, всякое натуральное число n представляется в виде $n=a_k\cdot 2^k+a_{k-1}\cdot 2^{k-1}+\ldots+a_1\cdot 2+a_0$, где числа a_i равны 0 или 1, причем такое представление единственно. На этом факте основана двоичная система счисления, в которой всякое натуральное число записывается с помощью единиц и нулей: $n_2=a_ka_{k-1}\ldots a_0$. Например, $1_2=1$, $2_2=10$, $3_2=11$, $4_2=100$, $5_2=101$, $6_2=110$, $7_2=111$, и так далее.

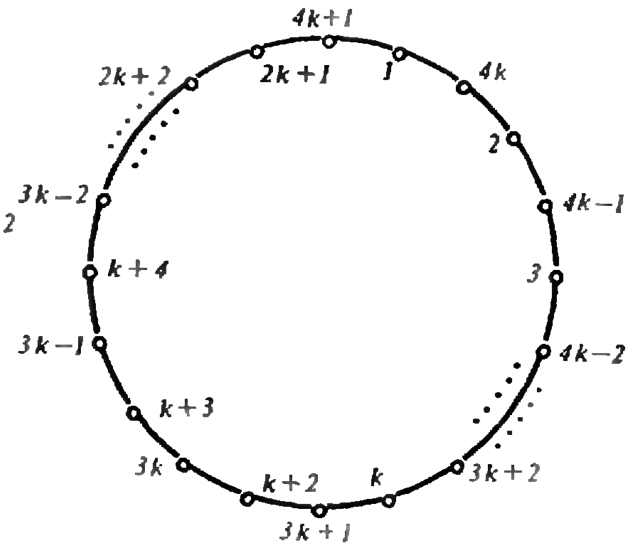
Прежде чем формулировать следующую задачу, введем обозначение: N_0 — множество натуральных чисел, дополненное нулем.

Задача 5. *Постройте два бесконечных подмножества A и B множества N_0 таких, что каждое число n из N_0 единственным образом представляется в виде суммы $n=a+b$, где $a\in A$, $b\in B$.*

Решение. Здесь удобно воспользоваться двоичной записью натуральных чисел. Рассмотрим два множества A и B, устроенные так. Множество A состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в нечетных (считая справа) разрядах ($A=\{0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21, \ldots\}$). Множество B состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в четных (считая справа) разрядах ($B=\{0, 2, 8, 10, 32, 34, 40, 42, \ldots\}$). Очевидно, что любое целое неотрицательное число n единственным образом представляется в виде суммы $n=a+b$, где $a\in A$, $b\in B$.



Вычеркнуто число 3k



Вычеркнуто число k+1

Эта конструкция является ключевой и при решении двух следующих задач. Для их формулировки дадим определение: два подмножества множества N_0 назовем *конгруэнтными*, если одно получается из другого сдвигом на целое число.

Задача 6. *Докажите, что множество N_0 можно разбить на бесконечное число непересекающихся бесконечных конгруэнтных подмножеств.*

Решение. Пусть A и B — множества, построенные при решении задачи 5. Для каждого числа $b\in B$ обозначим через A_b результат сдвига множества A на это число b, т. е. A_b — это множество чисел вида $a+b$, где $a\in A$. Покажем, что набор множеств A_b и образует искомое разбиение множества N_0 на конгруэнтные множества. Так как каждое число n из множества N_0 представимо в виде суммы $n=a+b$ ($a\in A$, $b\in B$), то множества A_b покрывают все множество N_0, а из того, что такое представление единственно, следует, что эти множества попарно не пересекаются.

Следующая задача — это задача М685 из Задачника «Кванта». В первом номере «Кванта» за 1982 год опубликовано неверное решение этой задачи. Мы перескажем это решение, а потом покажем, в чем состоит ошибка, и как ее устранить.

Задача 7. *Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число бесконечных конгруэнтных множеств?*

Решение. В решении, приведенном в «Кванте», выписаны два множества A и B. Множество $A=\{1, 4, 5, 16, 17, 20, \ldots\}$ — это множество натуральных чисел, в двоичной записи которых единица стоит на нечетных местах. Множество $B=\{0, 2, 8, 10, 32, 34, \ldots\}$ — это множество, состоящее из нуля и чисел, в двоичной записи которых единица находится на четных местах. В решении утверждается, что каждое натуральное число n представляется в виде $n=a+b$, где $a\in A$, $b\in B$. Между тем сразу видно, что ни одно из чисел, входящих в множество B, в таком виде не представимо!

Исправим это решение. Для этого рассмотрим множества A и B, построенные при решении задачи 5. В решении задачи 6 мы уже доказали, что соответствующие множества A_b образуют требуемое разбиение множества N_0. Рассмотрим теперь вместо множества A множество A_1 — сдвиг множества A на единицу: $A_1=\{1, 2, 5, 6, 17, 18, 21, 22, \ldots\}$. Понятно, что для любого числа $b\in B$ множество $(A_1)_b$ — это сдвинутое на единицу множество A_b. Поэтому множества $(A_1)_b$ и образуют искомое разбиение множества натуральных чисел.

Конструирование по индукции

В этом разделе мы разберем четыре примера алгоритмов *распространения* от более простых конструкций к более сложным.

Задача 8. *Дано n гирь, массы которых равны соответственно 1, 2, ..., n граммам. Для каких n эти гири можно разложить на три равные по массам кучки?*

Решение. Ясно, что подобная конструкция (разложение на три кучки) существует не при всех n. Для этого необходимо, чтобы суммарная масса всех гирь $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ делилась на три. Поэтому либо n, либо $n+1$ должно делиться на три. Докажем теперь, что при всех таких $n\geqslant 5$ искомая конструкция существует. Сначала укажем алгоритм распространения конструкции от набора из k гирь к набору из $k+6$ гирь. Для этого разложим шесть гирь с массами $k+1$, $k+2$, $k+3$, $k+4$, $k+5$, $k+6$ на три кучки равных масс: $(k+1,\ k+6)$; $(k+2,\ k+5)$; $(k+3,\ k+4)$. Остается показать, как можно разложить пять, восемь и девять гирь (как разложить шесть гирь, ясно из предыдущего). Это видно из следующей таблицы:

$n=5$	(1, 4); (2, 3); 5
$n=8$	(1, 2, 3, 6); (4, 8); (5, 7)
$n=9$	(1, 2, 3, 4, 5); (6, 9); (7, 8)

Для завершения решения отметим, что две или три гири разложить требуемым образом нельзя.

В данном случае алгоритм распространения очень прост. Столь же прост он и в следующем примере.

Задача 9. *Дано 555 гирь, массы которых равны соответственно 1, 2, 3, ..., 555 граммам. Можно ли их распределить в пять групп так, чтобы в каждой группе было одно и то же число гирь и суммарная масса гирь во всех группах была одной и той же?*

Решение. Опишем сначала алгоритм распространения. Пусть n гирь разложены требуемым образом на пять групп. Покажем, как разложить набор из $n+10$ гирь. Для этого разложим десять гирь с массами $n+1$, $n+2$, $n+3$, ..., $n+10$ на пять равных по массе групп по две гири в каждой: $(n+1,\ n+10)$; $(n+2,\ n+9)$; $(n+3,\ n+8)$; $(n+4,\ n+7)$; $(n+5,\ n+6)$. Остается научиться раскладывать пятнадцать гирь (пяти гирь, разумеется, не достаточно). Это сделать нетрудно: (1, 9, 14); (2, 10, 12); (3, 8, 13); (4, 5, 15); (6, 7, 11).

В следующей задаче придумать алгоритм распространения труднее.

Задача 10. *Можно ли расставить числа 1, 2, ..., n в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?*

Решение. Основным этапом решения является переход от конструкции для $n=k$ к конструкции для $n=2k$. Нужную расстановку чисел 1, 2, ..., $2k$ мы получим из расстановки чисел 1, 2, ..., k. Выпишем сначала нечетные числа: 1, 3, 5, ..., $2k-1$, а затем четные числа: 2, 4, 6, ..., $2k$. В группе, состоящей из нечетных чисел, числа расставим следующим образом: число $2m-1$ поставим на то место, на котором стоит число m в расстановке чисел 1, 2, ..., k. Аналогичным образом поступим с группой четных чисел: число $2m$ поставим на то место, которое в исходной расстановке чисел от 1 до k занимает число m. Нетрудно сообразить, что мы получим нужную расстановку чисел 1, 2, ..., $2k$. Теперь из расстановки для $n=1$ мы последовательно получим требуемые расстановки для $n=2$, 4, 8, 16 и так далее. Для завершения решения остается заметить, что из расстановки для k чисел можно получить расстановку для любого меньшего количества чисел — достаточно просто вычеркнуть лишние числа.

В последнем четвертом примере переход совершается наиболее нетривиальным образом.

Задача 11. *Докажите, что для любого $n \geqslant 2$ найдутся такие n различных натуральных чисел, что для любых двух чисел a и b из них сумма $a+b$ делится на разность $a-b$.*

Решение. Прежде всего заметим, что если число $a+b$ делится на $a-b$, то и число $2a$ делится на $a-b$. Поэтому если набор натуральных чисел x_1, x_2, ..., x_n удовлетворяет условию задачи, то число $2x_1x_2...x_n$ делится на разность любых двух из них. Это замечание позволяет совершить переход от набора из n чисел к набору из $n+1$ чисел. Для удобства обозначим через p число $x_1x_2...x_n$. Искомый набор из $n+1$ чисел таков: $p+x_1$, $p+x_2$, ..., $p+x_n$, p. Для завершения доказательства остается заметить, что набор из чисел 1 и 2 удовлетворяет условию.

Упражнения

1. Можно ли подобрать девять целых чисел так, чтобы все их попарные суммы составляли 36 последовательных целых чисел?

2. При каких натуральных n числа от 1 до n можно разбить на несколько групп, в каждой из которых одно из чисел,

а) умноженное на 2,

б) умноженное на 3,

равно сумме остальных?

3. Постройте три бесконечных подмножества A, B и C множества N_0 такие, что каждое натуральное число n единственным образом представимо в виде $n=a+b+c$, где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

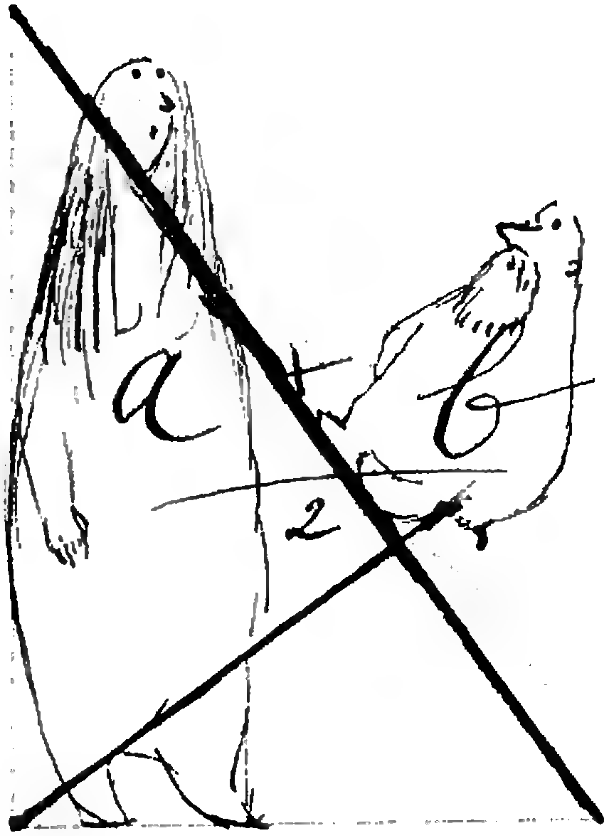
4. Дано n гирь, массы которых равны соответственно 1, 2, 3, ..., n граммам. Для каких n эти гири можно разделить на две кучки:

а) равные по массам?

б) равные по массам и по количеству гирь?

5. Даны 1000 гирь, массы которых равны соответственно $1^2, 2^2, 3^2, ..., 1000^2$ граммам. Можно ли их распределить в две группы так, чтобы в каждой группе было по 500 гирь и суммарная масса гирь в этих группах была одинаковой?

6. Дана 81 гиря; массы этих гирь равны соответственно 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ..., 81^2 граммам. Можно ли их распределить в три группы так, чтобы в каждой группе было по 27 гирь и суммарная масса гирь во всех группах была одной и той же?



Практикум абитуриента

Числовые средние и геометрия

А. ГОЛЬДМАН, Л. ЗВАВИЧ

По-видимому, вам не раз приходилось встречаться с такими понятиями, как среднее арифметическое $\frac{a+b}{2}$ и среднее геометрическое $\sqrt{ab}$ двух положительных чисел. Возможно, вы сталкивались и с другими средними величинами: средним гармоническим $\frac{2ab}{a+b}$ и средним квадратичным $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ двух положительных чисел. Так, средняя скорость туриста, прошедшего некоторое расстояние со скоростью V_1, а обратный путь со скоростью V_2, оказывается равной среднему гармоническому скоростей V_1 и V_2, т. е. $\frac{2V_1V_2}{V_1+V_2}$ (убедитесь в этом).

Широко известно и часто используется при решении задач неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Оказывается, что для любых положительных a и b выполняются неравенства:

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \quad (*)$$

причем все неравенства обращаются в равенства тогда и только тогда, когда $a=b$. Каждое из неравенств можно доказать, используя свойства числовых неравенств (проделайте это самостоятельно!).

Определения средних величин естественным образом распространяются и на случай n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$H(a_1,\ldots,a_n)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

— среднее гармоническое,

$$G(a_1,\ldots,a_n)=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

— среднее геометрическое,

$$A(a_1,\ldots,a_n)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

— среднее арифметическое,

$$Q(a_1,\ldots,a_n)=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

— среднее квадратичное.

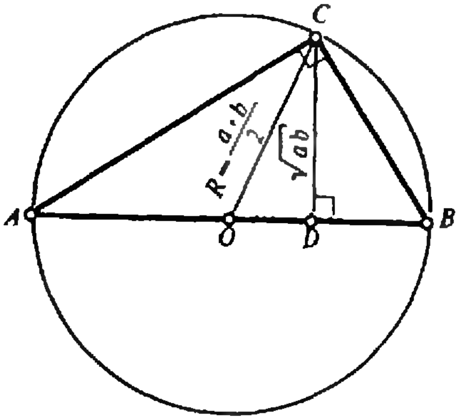


Рис. 1.

В общем случае справедливы неравенства $H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$, однако доказываются они значительно сложнее. Неравенства же, относящиеся к средним величинам двух *положительных* чисел, мы докажем геометрически. Одно из доказательств неравенства $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ основано на том, что высота прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу (рис. 1).

Однако с помощью конфигурации рисунка 1 *не ясно, как сравнить* среднее геометрическое со средним гармоническим, а среднее арифметическое со средним квадратическим. В то же время существует фигура, в которой все средние двух чисел a и b можно увидеть «живьем» — это трапеция $ABCD$ с основаниями $BC=a$, $AD=b$ (для определенности будем считать, что $b>a$). *Среднее арифметическое* — это длина средней линии трапеции. Остальные средние вы увидите, решив следующие упражнения; первое из них — полезная лемма, помогающая справиться с остальными.

Упражнения. Пусть EF — отрезок длиной x с концами соответственно на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, параллельный ее основаниям (рис. 2).

1. Найдите x, если известно, что $BE/EA=\lambda$. (**Ответ:** $x=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$). **Указание.** См. на рисунке 2: $GH \parallel AB$, а треугольники FCG и FDH подобны.

2. Найдите x, если отрезок EF проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. (**Ответ:** $x=\frac{2ab}{a+b}$). **Указание.** Воспользуйтесь упражнением 1 и тем, что $BE/ED=a/b$.

3. Найдите x, если трапеции $AEFD$ и $EBCF$ подобны. (**Ответ:** $x=\sqrt{ab}$).

4. Найдите x, если трапеции $AEFD$ и $EBCF$ равновелики. (**Ответ:** $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$). **Указание.** Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке P (рис. 3). Тогда $\frac{S_2}{S_1+S_2}=\frac{a^2}{x^2}$; $\frac{S_2+2S_1}{S_2+S_1}=\frac{b^2}{x^2}$. Сложив эти равенства, получим ответ.

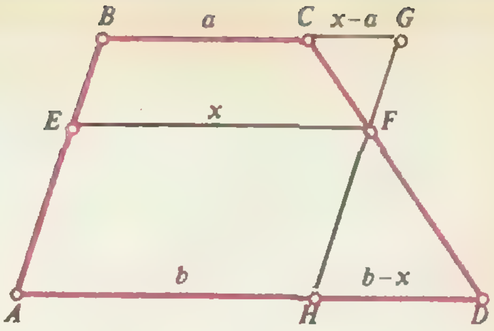


Рис. 2.

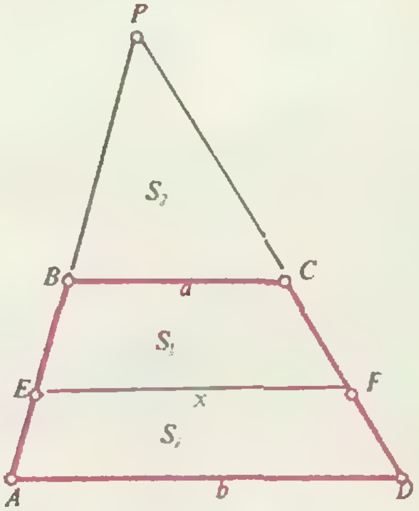


Рис. 3.

Итак, в трапеции $ABCD$ появились все упомянутые нами средние чисел a и b. Осталось доказать неравенства (*).

Упражнения. 5. Докажите, что

$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Указание. Пусть EF, MN и KL соответствующие отрезки (постройте чертеж).

Тогда $\frac{BE}{EA}=\frac{a}{b}$; $\frac{BM}{MA}=\sqrt{\frac{a}{b}}$; $\frac{BK}{KA}=1$, но $\frac{a}{b}<\sqrt{\frac{a}{b}}<1$.

6. Докажите, что

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Указание: *Если* KL — средняя линия трапеции, то $S_{BCLK}<S_{AKLD}$.

Итак, мы доказали неравенства (*) и убедились в том, что при $a<b$ все неравенства — строгие. Нетрудно видеть, что если какие-либо два из отрез-

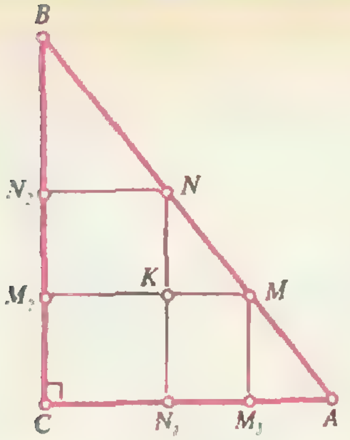


Рис. 4.

ков, длины которых мы сравнивали, равны, то $ABCD$ — параллелограмм и, следовательно, все неравенства (*) превращаются в равенства.

Приведем еще один способ сравнения средних. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC=a$ и $AC=b$, причем $a>b$. Пусть σ_M — сумма расстояний от некоторой точки M, лежащей на гипотенузе AB, до катетов треугольника.

Упражнение 7. Докажите, что $\sigma_N>\sigma_M$, если и только если точка N лежит «выше» точки M (рис. 4).

Указание. $\sigma_M=KN_1+KM_2+KM$. $\sigma_N=N_2N+NK+KN_1=KN_1+KM_2+KN$, но $KN>KM$.

Пусть биссектриса угла C пересекает гипотенузу в точке H (рис. 5). Тогда четырехугольник CH_2HH_1 — квадрат со стороной $\frac{ab}{a+b}$, так что $\sigma_H=\frac{2ab}{a+b}$ — среднее гармоническое чисел a и b, причем $BH/AH=b/a$. Если O — середина гипотенузы, то $\sigma_O=\frac{a+b}{2}$, а точка O лежит выше точки H $\left(\frac{b}{a}<1\right)$. Поэтому $\sigma_O>\sigma_H$, т. е. $\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$.

Упражнения.

8. Рассмотрим на гипотенузе AB точку G, для которой $\sigma_G=\sqrt{ab}$. Докажите, что точка G лежит между точками O и H, т. е. что $\sigma_O>\sigma_G>\sigma_H$.

9. Пусть P — точка на биссектрисе угла C (рис. 6), для которой $CP=\frac{1}{2}AB=CO=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Пусть также точка Q на AB такова, что прямая QP перпендикулярна CP. Докажите, что $\sigma_Q=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, после чего убедитесь в справедливости неравенства $\sigma_Q>\sigma_O$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $PP_2=PP_1$, а $\angle QPP_2=45°$ — (см. рис. 6).

Существует и третье доказательство неравенств о средних, провести которое мы предлагаем вам в качестве очень полезных упражнений.

Упражнения.

10. Окружности диаметрами a и b касаются внешне. Докажите, что отрезок их общей внешней касательной, заключенный между точками касания, равен среднему геометрическому диаметров.

11. Окружности диаметрами a и b не имеют общих точек, а отрезок их общей внешней касательной, заключенный между точками касания, равен среднему арифметическому диаметров. Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно среднему квадратическому диаметров.

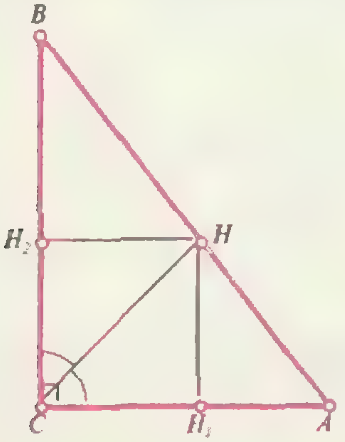


Рис. 5.

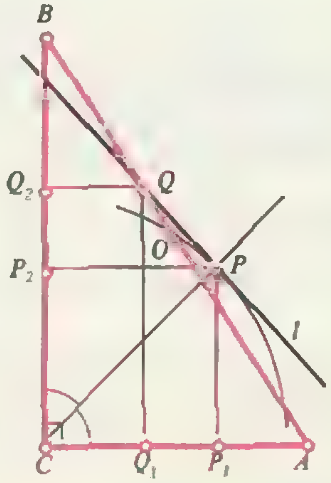


Рис. 6.

Из упражнения 10 следует неравенство $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$, из упражнения 11 — неравенство $\frac{a+b}{2}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Подумайте, как с помощью данной конфигурации доказать неравенство о средних гармоническом и геометрическом. (Подсказка. В конфигурации упражнения 10 найдите расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной и воспользуйтесь тем, что треугольник с вершинами в трех точках касания — прямоугольный.)

Неравенство Коши и объемы

В. ШУЛИКОВСКАЯ

В статье «Числовые средние и геометрия», помещенной в этом номере журнала, приведено несколько геометрических доказательств неравенства** $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ **(**$a>0$, $b>0$**).

Автор этой заметки — ученица 11 класса — приводит еще одно доказательство этого неравенства, а затем обобщает его на случай пространства.

Пусть a и b положительные числа, причем (для определенности) $a\geqslant b$.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a и b (рис. 1). Проведем биссектрису угла A. Ясно, что сумма площадей равнобедренных прямоугольных треугольников ABL и AKD не меньше площади прямоугольника $ABCD$. Поэтому

$$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab.$$

Перепишем неравенство, положив $a^2=x$, $b^2=y$. В результате получаем

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

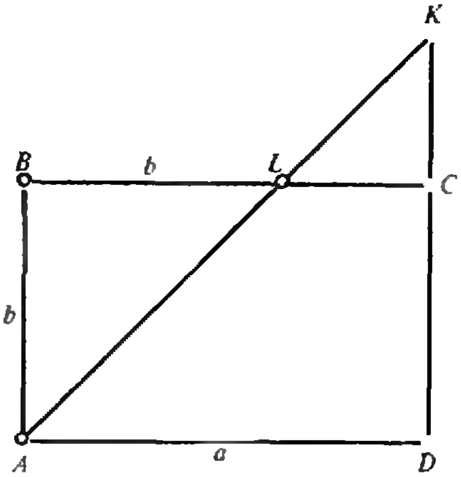


Рис. 1.

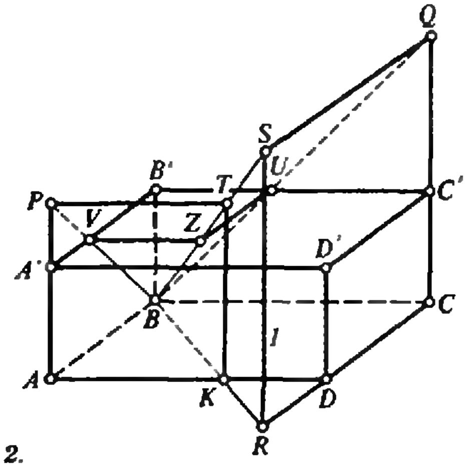


Рис. 2.

Сходные рассуждения можно провести в трехмерном пространстве и доказать неравенство

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant abc\ (0<a\leqslant b\leqslant c),\qquad (1)$$

из которого заменой $a^3=x$, $b^3=y$, $c^3=z$, получается замечательное неравенство

$$\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz},$$

означающее, что среднее арифметическое трех неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. Для доказательства (1) рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с ребрами $BB'=a$, $AB=b$, $BC=c$ (рис. 2). Проведем биссектрисы плоских углов трехгранного угла параллелепипеда с вершиной B и построим четырехугольные пирамиды $BRCQS$, $BAPTK$ и $BB'VZU$.

Эти пирамиды покрывают данный параллелепипед и (если среди чисел a, b, c есть различные) даже «вылезают» за пределы параллелепипеда, так что сумма объемов этих пирамид, т. е. $\frac{a^3}{3}+\frac{b^3}{3}+\frac{c^3}{3}$, не меньше объема параллелепипеда. Итак, $\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant abc$.

Общее неравенство Коши

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}, \qquad (2)$$

где $x_i\geqslant0$, может быть доказано с помощью аналогичной конструкции в n-мерном пространстве.

Рекомендуем читателям, знакомым с понятием n-мерного пространства, провести соответствующие рассуждения. Для этого следует рассмотреть прямоугольный параллелепипед с ребрами $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ и построить n-мерные пирамиды с объемами

$$\frac{a_1^n}{n},\ \frac{a_2^n}{n},\ \ldots,\ \frac{a_n^n}{n},$$

покрывающие параллелепипед. В результате придем к неравенству

$$\frac{a_1^n+\ldots+a_n^n}{n}\geqslant a_1a_2\ldots a_n,$$

из которого без труда получится неравенство (2).

Информация

Памяти академика Колмогорова

Андрей Николаевич Колмогоров уделял большое внимание не только аудиторным занятиям, но и неформальному общению Учителя с учениками. Вместе с ребятами ходил в походы, где обсуждал и решал с ними интересные математические задачи, проводил музыкальные вечера, читал лекции по истории искусств. Его любимым детищем был открытый в 1963 году физико-математический интернат № 18, собирающий детей, увлекающихся физикой и математикой. И не случайно, именно на базе этой школы (а ныне Специализированного учебно-научного центра) начинает свою работу Всесоюзная научно-методическая конференция учителей и учащихся, посвященная памяти А. Н. Колмогорова.

Как показывает опыт конференции ученых различных направлений, живое общение, обсуждение докладов, обмен опытом играет колоссальную роль в дальнейшем развитии научной мысли. Учащимся школ такие праздники Юных математиков помогают определиться в выборе будущей профессии, а также начать как можно раньше самостоятельную исследовательскую работу. Учителям математики подобные встречи дают возможность более творчески и профессионально подойти к развитию математических способностей учащихся.

В апреле 1991 года на первую Всесоюзную конференцию, посвященную памяти А. Н. Колмогорова, приглашаются преподаватели и ученики спецшкол и спецклассов, руководители и члены научных обществ учащихся, различных кружков, специализирующихся в углубленном изучении математики, информатики, физики, химии и биологии. Для преподавателей и учащихся организуются две независимые секции, которые в свою очередь разделяются по научному профилю и уровню сложности обсуждаемых тем.

Цель секции преподавателей — обмен методическим опытом и результатами работы по развитию творческих способностей юношества в области математики и естественных наук, по раннему привлечению учащихся к самостоятельным научным исследованиям.

На секции учащихся будут заслушиваться доклады школьников, содержащие результаты их самостоятельной научной работы.

В Специализированном учебно-научном центре создан постоянно действующий оргкомитет, в задачу которого входит установление контактов с учебными заведениями, распространение приглашений, организация и проведение конференций, публикация наиболее интересных материалов в журналах «Квант» и «Математика в школе», публикация тезисов конференций.

Все желающие принять участие в конференции должны направить до 31 декабря 1990 года заявки по адресу:

121357, Москва, ул. Кременчугская, 11, СУНЦ, оргкомитет конференции. *О. М.*

Движущиеся игрушки из картона и бумаги

Кандидат физико-математических наук
А. ПАНОВ

О таких игрушках я уже рассказывал в статье «Флексагоны, флексоры, флексманы», опубликованной в «Кванте» № 7 за 1988 год (дальше цитируется как ФФФ). Здесь будет добавлено еще несколько. Все эти игрушки просты в изготовлении и все они на самом деле подвижны.

Три выворачивающихся кольца

Одна из самых привлекательных конструкций в ФФФ — это кольцо из десяти тетраэдров. Кольцо обладает поразительной гибкостью и способностью выворачиваться и выворачиваться до бесконечности («Квант», 1988, № 7, четвертая страница обложки). Аналогичное кольцо можно склеить из восьми треугольных призм. Вот как делается эта игрушка. Из листа ватмана или тонкого картона вырежьте четыре полоски размером 3×42 см. Каждую разделите на семь прямоугольников 3×6 см и сделайте сгибы по линиям раздела (рис. 1). Крайние прямоугольники полоски склейте между собой (рис. 2). В местах, указанных стрелками, сделайте небольшие надрезы. Пропустите через них нитку и завяжите ее (рис. 3). Получится гибкий элемент, состоящий из двух призм, имеющих общее ребро. Кроме четырех таких элементов, нужны еще четыре соединительных полоски 5×5 см. Каждую из них сложите вдвое. Процесс сборки кольца изображен на рисунке 4. Каждую

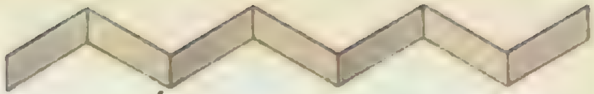


Рис. 1.

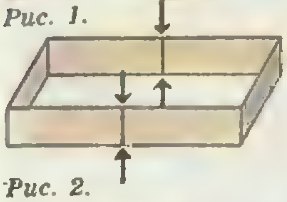


Рис. 2.

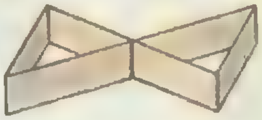


Рис. 3.

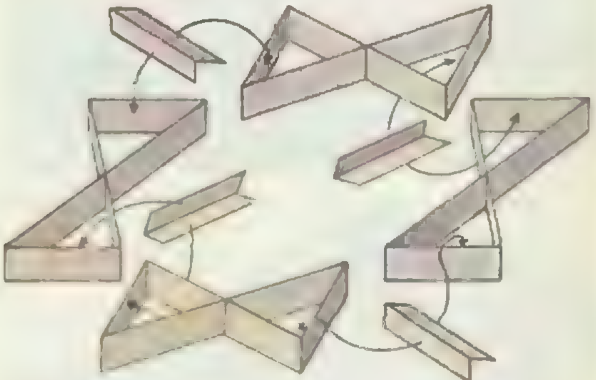


Рис. 4.

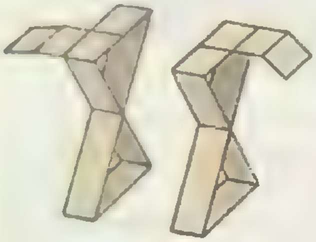


Рис. 5.

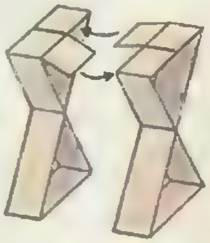


Рис. 6

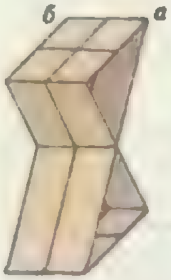


Рис. 7.

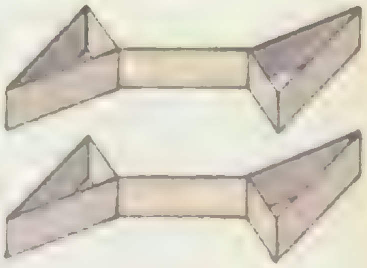


Рис. 8.

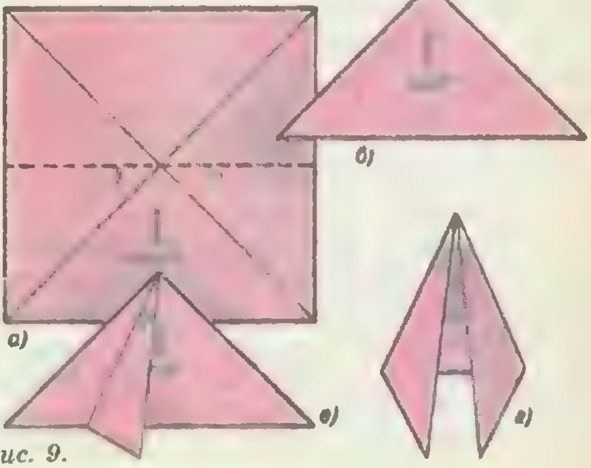


Рис. 9.

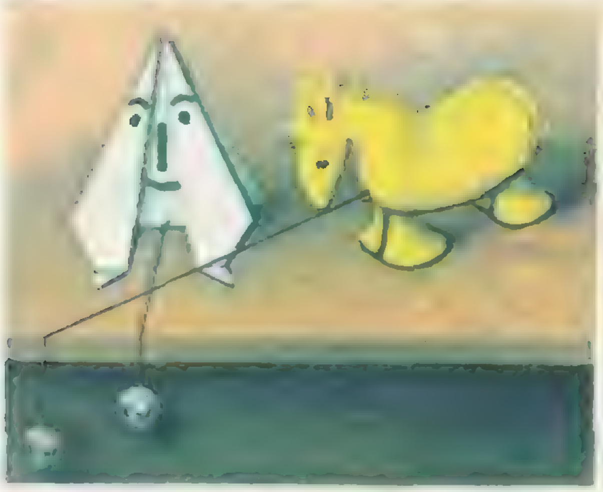


Рис. 10.

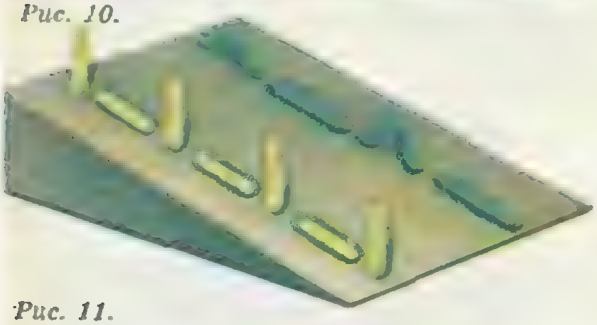


Рис. 11.

из соединительных полосок изнутри, намажьте клеем, введите внутрь соседних элементов (обратите внимание, где полоски вводятся сверху, где снизу) и приклейте. Вот и все — игрушка готова и вы можете попробовать ее в деле. Обратите внимание на то, как изящно изгибается это кольцо.

А вот еще более компактная конструкция — она состоит всего из трех таких элементов, как на рисунке 3. На этот раз для соединения двух соседних элементов понадобятся две полоски размером 1×9 см. Каждую из них нужно согнуть втрое, разделив на прямоугольники размером 1×3 см. Возьмите два элемента и к каждому из них подклейте полоску, как на рисунке 5. Теперь расположите элементы друг против друга, как на рисунке 6. Верхние поверхности выступающих прямоугольников намажьте клеем, одновременно введите внутрь противоположных элементов и приклейте. Теперь эти элементы связаны двойным шарнирным соединением (подробности о нем в ФФФ). Действие этого соединения изображено на рисунке 7. Теперь остается таким же образом присоединить третий свободный элемент к первым двум — и кольцо готово.

Наконец, самая экономная выворачивающаяся конструкция. Она склеивается всего из двух элементов. Каждый из них состоит из двух призм, соединенных прямоугольником (рис. 8). И верхние и нижние концы элементов соединяются при помощи двойного шарнирного соединения.

Флексман и ослик

Флексма́н — это еще один из героев ФФФ. Этот забавный человечек может ходить по наклонным плоскостям. Процесс его создания изображен на рисунке 9. Из тонкой бумаги вырезается квадрат со стороной 15—20 см. По диагоналям делается сгиб вверх, по штриховой линии сгиб вниз (рис. 9, *а*). Затем квадрат складывается в треугольник (рисунок 9, *б*). После этого делаются четыре одинаковые операции. Результат первой из них — на рисунке 9, *в*. Окончательный результат — на 9, *г*. Так у флексмана появляются ножки. И еще четыре завершающие операции — на концах каждой ножки следует отогнуть по маленькому треугольничку. Флексман готов, и если вы поставите его на наклонную плоскость, отрегулируете ее наклон, то флексман, покачиваясь и переваливаясь, начнет мелкими шажками спускаться по ней.

А вернулся я к флексману вот по какой причине. Недавно мне повезло: я купил отличную игрушку — шагающего ослика (рис. 10). Этот ослик тоже ходит по наклонной плоскости, но он может ходить и по горизонтальным поверхностям. К ослику на нитке прикреплен грузик. Если этот грузик перекинуть через край стола, то ослик зашагает и по столу. Такой же грузик можно приделать к флексману, и он тоже будет ходить по столу. Флексман и ослик на первый взгляд кажутся существами совершенно разной породы. Тем поразительней полное совпадение механики их поведения.

(Думаю, что, когда мы, наконец, встретимся с инопланетянами, точно так же при всем внешнем различии внутреннее сходство будет несомненным. Интересно, правда, кто из нас больше будет похож на ослика.)

Шагающая палочка

Это еще один объект, способный ходить по наклонным плоскостям. Найдите стальной шарик диаметром в один сантиметр или около этого. Из плотной бумаги сверните трубочку диаметром чуть побольше шарика, чтобы он мог свободно кататься внутри. Вложите шарик в трубочку и заклейте ее концы кусочками марли, но не туго, а так, чтобы шарик все-таки мог наполовину выкатываться из трубочки. Теперь положите игрушку на наклонную плоскость вдоль линии наклона, и она тут же зашагает. Мне эта игрушка напоминает забавную гусеницу-землемерку. Конечно, сходство здесь не такое полное как между осликом и флексманом, но тем не менее...

Головоломка «цветной треугольник»

(задача для исследования)

На 4-й с. обложки предыдущего номера «Кванта» мы предложили следующую головоломку: на узлах правильной треугольной сетки в треугольнике (с n узлами на стороне) расставить фишки n цветов так, чтобы на линиях сетки, параллельных сторонам, не было одноцветных фишек.

На рисунках 1 и 2 приведены два решения этой головоломки для $n=5$. Интересно, что разбиения 15 узлов сетки на множества одноцветных узлов в обоих случаях симметричны относительно вертикальной высоты треугольника, а на рисунке 2 — еще и относительно двух других высот, а также относительно поворота на 120° вокруг центра треугольника.

Расцветку на рисунке 1 можно получить так. Рассмотрим (косоугольную) систему координат с началом в зеленой вершине треугольника и осями, идущими по боковым сторонам, в которой красная вершина имеет координаты (4; 0), а фиолетовая — (0; 4). Тогда окажется, что зеленый цвет имеют узлы (x; y), для которых $x=y$, красный — точки, для которых $y-x$ при делении на 5 дает остаток 1, голубой — точки с остатком 2 и т. д. Можно проверить, что такой же способ раскраски годится при любом нечетном n. Однако при четном n он не работает: на одну горизонталь попадают одинаковые цвета.

Задача 1. *Возьмем какую-нибудь целочисленную функцию $f(x)$ и разобьем узлы сетки на множества, в каждом из которых разность $y-f(x)$ будет давать одинаковый остаток при делении на n. На каждом из полученных n множеств будем расставлять фишки своего цвета. Покажите, что при четном n «условие разноцветности» не будет выполняться ни при какой функции $f(x)$.*

Более того, при $n=4$ (как и при $n=2$) наша головоломка вообще неразрешима. Действительно, если узлы на основании треугольника окрашены как на рисунке 3, то центральный узел может быть только красным или голубым. В первом случае, двигаясь по стрелкам, мы однозначно определим цвета еще трех узлов и в итоге будем вынуждены нарушить правила: две вершины треугольника оказываются красными. Аналогично рассматривается случай голубого центрального узла.

Задача 2. *Решите головоломку для $n=6$ и $n=8$.*

Задача 3*. *При каких четных $n\geqslant 10$ головоломка «цветной треугольник» имеет решение?*

Еще один, по-видимому, очень трудный вопрос: сколько решений имеет головоломка в зависимости от n? Аналогичный вопрос для расстановок фишек на прямоугольной сетке с условием разноцветности по горизонталям и вертикалям обсуждался в статье В. Шевелева «Латинские прямоугольники» («Квант» № 5 за этот год). Впрочем, и прямоугольная задача, несмотря на свою долгую историю, весьма далека от полного решения.

В. Дубровский

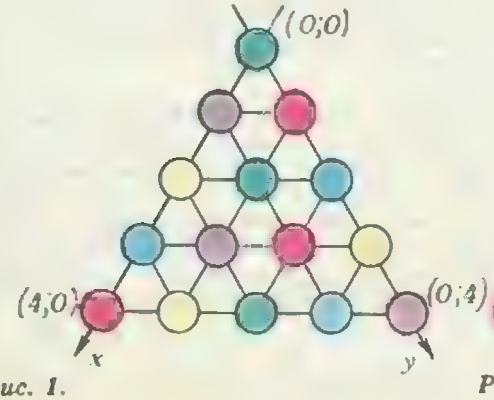


Рис. 1.

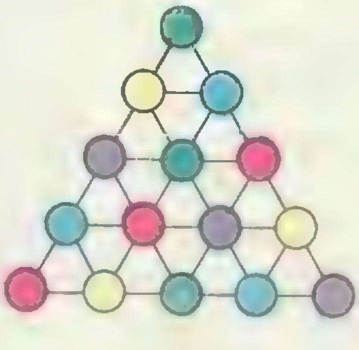


Рис. 2.

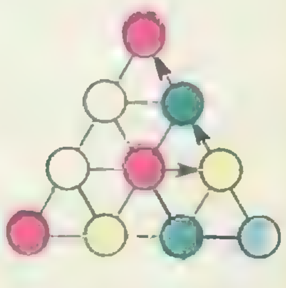


Рис. 3.

Олимпиады

Задачи LIII Московской математической олимпиады

Заключительный тур LIII Московской математической олимпиады состоялся 4 марта 1990 года в Московском университете. В нем участвовало более 1000 школьников 8—11 классов. Ниже приводятся задания этого тура (на их решение отводилось 4 часа).

8 класс

1. Докажите, что если $0<a_1<a_2<\ldots<a_8<a_9$, то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_9}{a_3+a_6+a_9}<3.$$

А. Галочкин

2. Какое наименьшее количество различных простых делителей может иметь число $m(n+9)(m+2n^2+3)$, где m, n — натуральные числа?

А. Спивак

3. На отборочный тур олимпиады были приглашены победители из 8, 9, 10 и 11 классов — всего 11 человек. Можно ли их рассадить за круглым столом так, чтобы среди любых пяти сидящих подряд школьников нашлись представители всех четырех классов?

С. Конягин

4. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, через вершины A, B и точку пересечения диагоналей проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Докажите, что если $AB=AD$, то $CE=CD$.

В. Протасов

5. Табло, состоящее из 64 лампочек, управляется 64 кнопками; каждая лампочка — своей кнопкой. За одно включение можно одновременно нажать любой набор кнопок и записать, какие лампочки при этом зажглись. За какое наименьшее количество включений можно узнать о всех лампочках табло, какая лампочка какой кнопкой включается?

С. Гашков

9 класс

1. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трех братьев. Докажите, что все семеро — братья.

С. Конягин

2. Докажите, что из 53 различных натуральных чисел, не превосходящих в сумме 1990, всегда можно выбрать 2 числа, составляющих в сумме 53.

С. Конягин

3. В данном круге радиусом 1 отмечена точка. Через нее проводятся различные хорды, а через оба конца каждой хорды проводятся окружности радиусом 2. Докажите, что все проводимые окружности касаются некоторого фиксированного круга.

В. Протасов

4. Имеется 8 монет, из которых 2 — фальшивые: одна легче настоящей, а другая тяжелее. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь установить, что тяжелее: 2 фальшивые монеты или 2 настоящие, или же они весят одинаково?

И. Сергеев

5. Десятичная запись рационального числа имеет период длины n. Какая наибольшая длина периода может при этом оказаться у десятичной записи квадрата этого числа?

С. Гашков

10 класс

1. Можно ли разрезать квадрат на 3 попарно различных и попарно подобных треугольника?

С. Конягин

2. Найдите все простые числа p, q, r, удовлетворяющие равенству

$$p^q+q^p=r.$$

Б. Кукушкин

3. Докажите, что для всех значений параметров a, b, c найдется число x, удовлетворяющее неравенству

$$a\cos x+b\cos 3x+c\cos 9x\geqslant\frac{|a|+|b|+|c|}{2}.$$

С. Гашков

4. При каком взаимном расположении четырех точек в круге произведение всех попарных расстояний между этими точками максимально?

А. Спивак

5. Точки A, B, C, D расположены в пространстве так, что отрезок BD виден из точек A и C под углом α, а отрезок AC из точек B и D — под углом β. Найдите отношение $AC:BD$, если $AB\neq CD$.

И. Шарыгин

11 класс

1. Найдите наибольшее значение выражения

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

И. Сергеев

2. Докажите, что если функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0;1]$, непрерывна и удовлетворяет тождеству $f(f(x))=x^2$, то справедливы оценки $x^2<f(x)<x$, $x\in(0;1)$. Приведите пример такой функции.

И. Сергеев

3. В треугольнике ABC проведены медиана BD и биссектриса BE. Может ли случиться так, что при этом одновременно BD — биссектриса в треугольнике BCE, а BE — медиана в треугольнике ABD?

Б. Кукушкин

4. Докажите, что для любого нечетного числа найдется кратное ему число, десятичная запись которого состоит только из нечетных цифр.

И. Сергеев

5. При каком расположении четырех точек в пространстве они могут служить проекциями какой-либо точки соответственно на четыре плоскости граней некоторого тетраэдра?

В. Протасов

Публикацию подготовил И. Сергеев

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

8 класс

1. Имеется сосуд с небольшим отверстием у дна (рис. 1). В сосуд помещен большой кусок кристаллического льда при температуре $t_0 = 0$ °C. Сверху на лед падает струя воды, ее температура $t_1 = 20$ °C, а расход $q = 1$ г/с. Найдите расход вытекающей воды, если ее температура $t = 3$ °C. Потоком тепла от окружающего воздуха можно пренебречь. Теплоемкость воды $c = 4{,}2$ Дж/(г · град). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ Дж/г.

2. У «черного ящика» есть три клеммы. Если на клеммы A и B подают напряжение 20 В, то с клемм B и C снимают напряжение 8 В. Если на клеммы B и C подают напряжение 20 В, то с клемм A и C снимают напряжение 15 В. Изобразите схему «черного ящика».

9 класс

1. Колобок, имеющий форму шара, застигнут дождем в точке B (рис. 2). Капли дождя имеют вертикальную скорость, равную V, а горизонтальную — равную v и направленную под углом φ к направлению AB (в точке A находится дом Колобка). С какой скоростью Колобок должен бежать по линии BA, чтобы как можно меньше промокнуть?

2. Мяч падает на твердый пол с высоты $H = 1$ м. При каждом ударе об пол половина его энергии переходит в тепло. Масса мяча $m = 0{,}2$ кг, избыточное давление в нем $\Delta p = 0{,}2$ атм, радиус $r = 10$ см. Сколько раз он ударится об пол?

3. Орбитальная станция имеет форму тора, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. Из клетки вылетели два попугайчика и полетели по коридору в разные стороны. Оказалось, что одному лететь гораздо легче, чем другому. Объясните, какому и почему. Считая, что попугай летает со скоростью 5 м/с, оцените радиус станции.

4. В U-образной трубке находятся вода, ртуть и масло. Уровень ртути в левом и правом коленах одинаков, а высота столба воды равна H (рис. 3). В некоторый момент открывается вентиль в тонкой горизонтальной трубке, соединяющей колена на высоте $H/2$ над уровнем ртути. Как изменится уровень масла в правом колене? Плотности ртути, воды и масла равны $\rho_р$, $\rho_в$ и $\rho_м$, причем $\rho_в > \rho_м$.

5. На рисунке 4 изображена вольт-амперная характеристика некоторой лампочки накаливания. Из таких лампочек набирают бесконечную цепь (рис. 5). Какое максимальное напряжение можно приложить к клеммам, чтобы ни одна лампочка не перегорела?

10 класс

1. Через два небольших блока перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены одинаковые грузы массой M каждый (рис. 6). В начальный момент грузы уравновешены и покоятся. На нить с высоты h строго посередине между блоками падает небольшое тело массой m так, что при падении оно цепляется за нить. Какова будет максимальная скорость грузов в процессе движения, если $m/M \ll h/l \ll 1$?

2. Цилиндр радиусом R и массой m плотно вставлен в жестко закрепленное кольцо. Чтобы его продвинуть, надо приложить силу, не меньшую F ($F > mg$). Ось цилиндра вертикальна. Цилиндр начинают вращать с постоянной угловой скоростью ω, не прикладывая при этом вертикальной силы. Найдите требуемый для этого момент силы и скорость вертикального перемещения цилиндра. Трение цилиндра о кольцо является сухим.

3. В высокой U-образной трубке с внутренним диаметром $d = 1$ см и радиусом закругления нижней части $R = 3$ см находится $V_0 = 50$ см^3 ртути плотностью $\rho = 13$ г/см^3. В левое колено трубки наливают $V_1 = 2$ л воды. На какое расстояние ртуть переместится вдоль трубки?

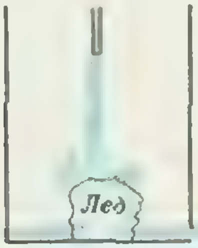


Рис. 1.

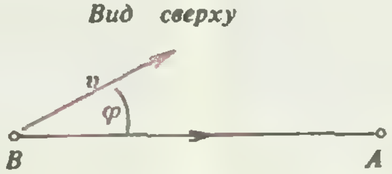


Рис. 2.

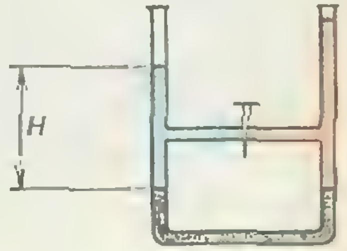


Рис. 3.

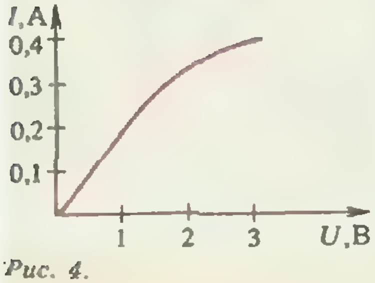


Рис. 4.

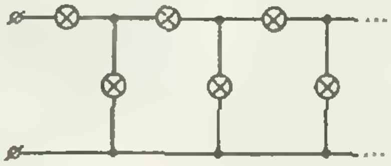


Рис. 5.

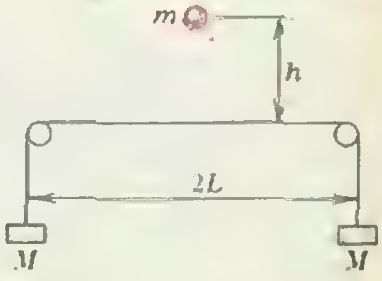


Рис. 6.

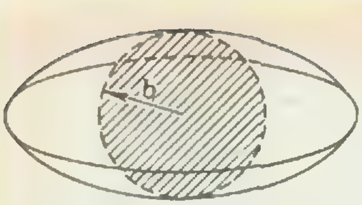


Рис. 7.

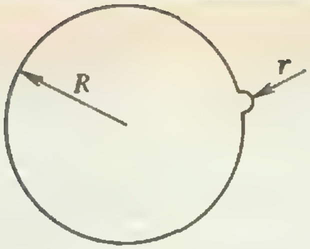


Рис. 8.

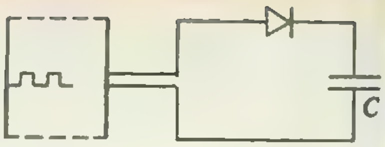


Рис. 9.

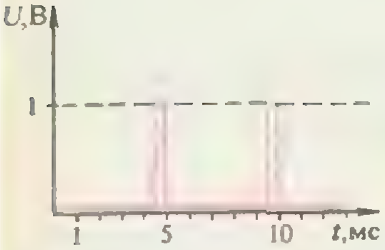


Рис. 10.

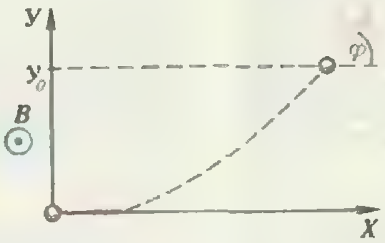


Рис. 11.

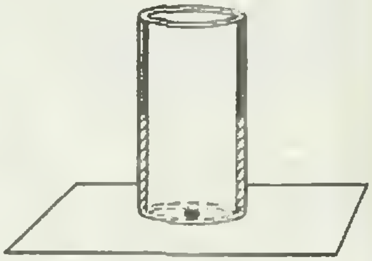


Рис. 12.

4. На поверхности воды, налитой в сосуд высотой $h=1$ м, удерживают тело массой $m=1$ кг и объемом $V=0{,}5$ л. Затем его отпускают без начальной скорости. Какое количество теплоты выделится при падении тела? Чему будет равно выделившееся количество теплоты, если тело той же массы, но объема $V'=1{,}5$ л будет всплывать без начальной скорости на поверхность со дна сосуда? Размерами тел по сравнению с высотой сосуда можно пренебречь.

5. Сосуд сложной формы (рис. 7) наполнен газом под давлением p. Одно из сечений этого сосуда имеет форму круга радиусом b. Рассмотрим часть сосуда, ограниченную этим сечением. Чему равна и куда направлена сила, действующая со стороны газа на эту часть сосуда?

6. Проводящая сфера радиусом R имеет дефект поверхности в виде полусферического бугорка радиусом $r \ll R$ (рис. 8). Оцените изменение электрической емкости сферы, обусловленное этим бугорком.

7. Ток через диод в диапазоне напряжений от -5 В до $+0{,}1$ В хорошо описывается формулой $I(U)=I_0(2^{U/W}-1)$, где $I_0=10$ мкА и $W=0{,}01$ В. Этот диод последовательно с конденсатором емкостью $C=100$ мкФ подключают к генератору прямоугольных импульсов (рис. 9). Зависимость напряжения на клеммах генератора от времени показана на рисунке 10. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени в установившемся режиме.

11 класс

1. При перетягивании каната два человека тянут его в противоположные стороны за концы с большой силой F. Найдите прогиб каната от горизонтальной линии под действием силы тяжести. Масса каната m, длина L, $mg \ll F$.

2. Капля жидкости диаметром D и коэффициентом поверхностного натяжения σ находится между двумя гладкими параллельными пластинками. Жидкость смачивает пластинки таким образом, что капля представляет собой цилиндр с прямыми углами при основании. Определите силу взаимодействия между пластинками.

3. На длинную непроводящую струну, продетую по диаметру металлического шара через два небольших отверстия в нем, надета маленькая заряженная бусинка. Шар и бусинка имеют заряды одного знака (по величине заряд бусинки много меньше). Бусинке сообщили скорость, достаточную для того, чтобы «пролететь» через шар. Нарисуйте график зависимости ускорения бусинки от расстояния до центра шара.

4. Электрон движется в плоскости OXY в магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого в точках этой плоскости направлена вдоль OZ и зависит только от y. В начальный момент электрон находился в точке O (рис. 11) и имел скорость $\vec{v}$, направленную вдоль OX. Когда же его координата y была равна y_0, скорость была направлена под углом φ к OX. Чему была бы равна сила, действующая со стороны этого магнитного поля на отрезок проводника с током I, координаты концов которого равны $(0, 0, 0)$ и $(0, y_0, 0)$?

5. Сильно близорукий человек, носящий очки с оптической силой $D=-10$ дптр, четко видит удаленные предметы, если очки надеты нормально. До какого расстояния он сможет видеть четко, если очки у него сползут на нос и окажутся от глаз на $l=1$ см дальше, чем обычно?

6. Внутренняя поверхность трубы, длина которой много больше диаметра, на половину длины зеркальна, а оставшаяся половина зачернена (рис. 12). Трубу ставят на черный стол зеркальной половиной вниз так, что расположенный на столе фотоэлемент находится на оси трубы. При этом освещенность фотоэлемента равна E_0. Каким будет показание фотоэлемента, если трубу перевернуть? Стол с трубой освещается равномерно рассеянным (изотропным) светом.

Публикацию подготовил Д. Купцов

Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана проводит в 1990/91 учебном году третью Всесоюзную заочную физико-математическую олимпиаду (с техническим приложением) для учащихся средних школ, ПТУ и техникумов.

Олимпиада проводится в два тура. Условия задач первого тура публикуются ниже. Задачи второго тура будут рассылаться участникам олимпиады, допущенным ко второму туру по результатам первого.

Решения задач первого тура необходимо выслать *до 15 декабря 1990 г.*

Все решения оформите в одной школьной тетради. На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги с указанием подробного домашнего адреса (с почтовым индексом), фамилии, имени, отчества и места учебы. На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса (курса).

Тетрадь с решениями вложите в большой конверт и отправьте простой бандеролью по адресу: *107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана. «Олимпиада—90/91».*

Задачи первого тура

1. В трапеции с основаниями 19 и 90 проведены две параллельные основаниям прямые, делящие эту трапецию на три части. Площадь первой части в 1917 раз больше площади второй, примыкающей к ней, которая, в свою очередь, в 1990 раз больше третьей. Найдите длины этих прямых.

2. Найдите решения уравнения в целых числах

$$2^{x^2+1990}+x^2-y^2=2^{y^2+y}+y-1990,$$

удовлетворяющие условию $x+y>1990$.

3. Определите число нулей, расположенных в конце десятичной записи числа 1990!

4. Объясните, почему для замедления нейтронов используются водородосодержащие вещества (вода, парафин, и др.).

5. Вы хотите построить установку, использующую среднесуточный перепад давлений $\Delta p=100$ Па для получения механической энергии. Считая, что температура в комнате постоянна, оцените максимальный выход механической энергии за месяц от установки с рабочим объемом $V=1$ м^3.

6. Камера объемом $V_1=22{,}4$ л заполнена воздухом. Давление в камере $p_1=3$ атм, температура стенок T. На дне камеры разлито немного воды, объемом которой можно пренебречь. Объем камеры медленно увеличили вдвое, оставив температуру стенок неизменной. При этом вода на дне почти исчезла, а давление в камере стало $p_2=2$ атм. Каким станет давление (p_3) в камере, если ее объем еще раз удвоить (т. е. $V_3=2V_2$), сохраняя температуру стенок прежней? Определите массу воды (в жидком и парообразном состоянии) и массу воздуха в камере.

7. Точно над воздушным зазором незаряженного плоского конденсатора емкостью $C=1{,}4$ мкФ в непосредственной близости подвешена на пружине пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=5$. Толщина пластины равна расстоянию между обкладками конденсатора, а ширина равна ширине обкладки. Конденсатор мгновенно заряжают до напряжения $U=10$ кВ, и источник отключают. Диэлектрик при этом опускается внутрь конденсатора на максимальную глубину $h=1$ см без трения о его пластины. Определите по этим данным жесткость пружины (k), если при поляризации диэлектрика тепло не выделяется. Высота пластин конденсатора $H=10$ см.

8. Тонкая невесомая проводящая эластичная лента, длина которой $l_0=20$ см и коэффициент упругости $k=20$ Н/м, закреплена в расправленном недеформированном состоянии во внешнем магнитном поле с индукцией $B=0{,}8$ Тл, перпендикулярном к ней. При пропускании через ленту тока она приобретает форму дуги окружности радиусом $R=30$ см. Найдите силу тока (I) и докажите, что форма ленты действительно дуга окружности (т. е. радиус кривизны в любой ее точке один и тот же).

Ответы, указания, решения

Избранные школьные задачи по физике

1. Согласно определению средней скорости,

$$v=\frac{l}{t_1+t_2}=\frac{l}{l/(2v_1)+l/(2v_2)}=$$

$$=\frac{1}{1/(3v_2)+1/(2v_2)}=\frac{6}{5}v_2\Rightarrow$$

$$v_2=5{,}6v=36\text{ км/ч и } v_1=1{,}5v_2=54\text{ км/ч}.$$

2. При равноускоренном движении без начальной скорости пути, проходимые телом за последовательные равные промежутки времени, относятся как ряд нечетных чисел. В нашем случае (см. рис. 1) $l_{34}:l_{23}:l_{12}=1:3:5$. С учетом того, что $l_{12}+l_{23}+l_{34}=27$ м, получаем

$$l_{12}=15\text{ м},\ l_{23}=9\text{ м},\ l_{34}=3\text{ м}.$$

3. См. рис. 2 (разумеется, под a, v и s здесь понимаются соответствующие проекции ускорения, скорости и перемещения на выбранное направление оси X, т. е. a_x, v_x и s_x).

4. Максимальная высота подъема набирается на двух этапах: при равноускоренном движении без начальной скорости с ускорением $a=2g$ и при «свободном падении» с начальной скоростью, направленной вертикально вверх:

$$H=\frac{at_1^2}{2}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{2gt_1^2}{2}+\frac{(2gt_1)^2}{2g}=3gt_1^2.$$

Отсюда

$$t_1=\sqrt{\frac{H}{3g}},\quad t_2=\frac{v_1}{g}=\frac{2gt_1}{g}=2t_1,$$

$$t=t_1+t_2=3t_1=\sqrt{\frac{3H}{g}}\approx150\text{ с}=2{,}5\text{ мин}.$$

5. После абсолютно упругого удара о движущуюся плиту шарик получит скорость, равную $u=\sqrt{2gh}+2v$ и направленную вертикально вверх, и поднимется на высоту

$$H=u^2/(2g)=(\sqrt{2gh}+2v)^2/(2g).$$

6. Поскольку $V_2>V_1$ (см. рис. 3), $p_2<p_1$, т. е. давление газа уменьшается.

7. Запишем уравнения, описывающие газовые процессы на участках 1—2 и 3—1:

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1},\quad \frac{p_3}{p_1}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{V_3}{V_1}=\frac{T_3}{T_1}.$$

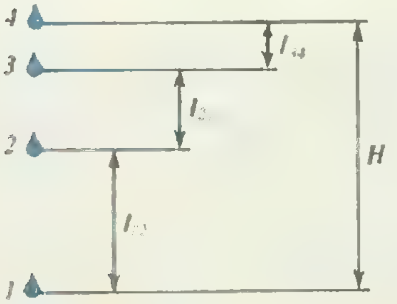


Рис. 1.

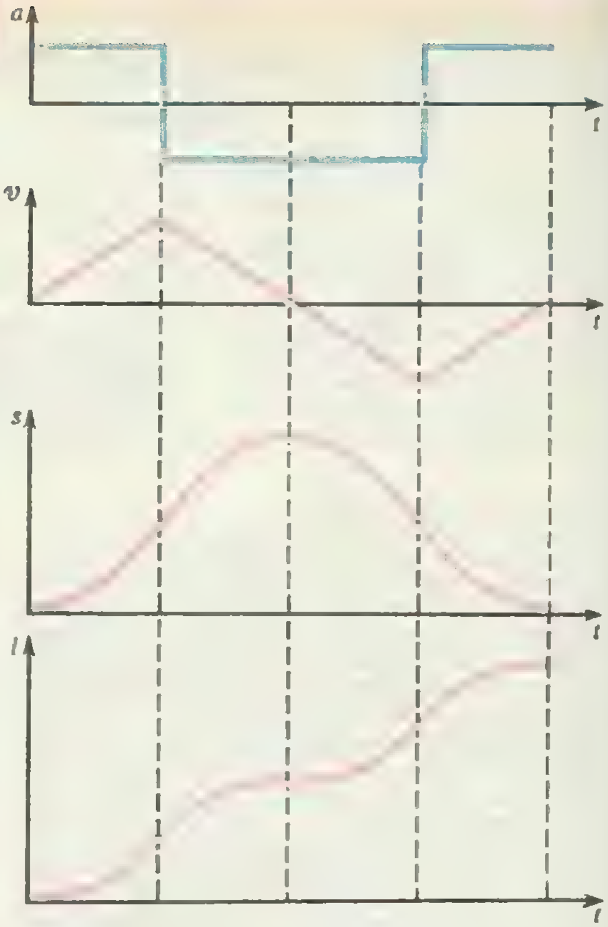


Рис. 2.

Отсюда получаем

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_3}{T_2},\text{ и } T_3=\frac{T_2^2}{T_1}.$$

8. Подъемная сила равна разности выталкивающей силы и силы тяжести:

$$F_п=F_в-F_т=\rho_2Vg-\rho_1Vg.$$

Плотности ρ_1 и ρ_2 воздуха найдем из уравнения газового состояния:

$$\rho_1=\frac{m_1}{V}=\frac{pM}{RT_1},\quad \rho_2=\frac{m_2}{V}=\frac{pM}{RT_2}.$$

Окончательно

$$F_п=\frac{pMVg}{R}\,\frac{T_1-T_2}{T_1T_2}\approx300\text{ Н}.$$

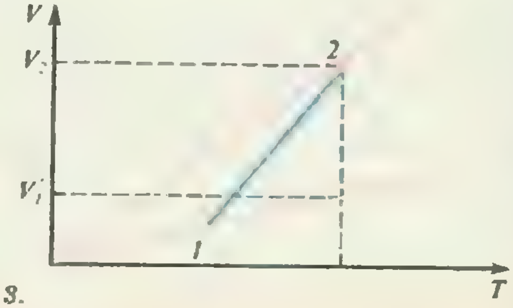


Рис. 3.

9. Плотность смеси газов равна

$$\rho=(m_1+m_2)/V.$$

Согласно закону Дальтона,

$$p=p_1+p_2=\frac{m_1RT}{M_1V}+\frac{m_2RT}{M_2V},$$

откуда

$$V=\frac{RT}{p}\left(\frac{m_1}{M_1}+\frac{m_2}{M_2}\right).$$

Тогда

$$\rho=\frac{(m_1+m_2)p}{RT(m_1/M_1+m_2/M_2)}\approx 2\ \text{кг/м}^3.$$

10. Из условия равновесия поршня в первом, втором и третьем случаях —

$$mg=k\Delta l,\quad mg=k(\Delta l-h)+p_1S,$$
$$mg=k(\Delta l-x)+p_2S,$$

используя уравнения состояния идеального газа —

$$p_1hS=\nu RT_1,\quad p_2xS=5\nu RT_2,$$

найдем искомую высоту:

$$x=5hT_2/T_1\approx 52\ \text{см}.$$

11. Согласно определению, средняя скорость тела за полпериода колебаний равна

$$v_{\text{ср}}=\frac{2x_m}{T/2}.$$

Амплитуда колебаний x_m связана с амплитудой скорости v_m соотношением

$$v_m=\omega x_m=(2\pi/T)x_m.$$

Таким образом,

$$v_{\text{ср}}=2v_m/\pi\approx 6\ \text{м/с}.$$

12. Период колебаний нашего маятника складывается из полупериода колебаний маятника длиной l и полупериода колебаний маятника длиной $l/2$:

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}+\pi\sqrt{\frac{l/2}{g}}=\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}(\sqrt{2}+1).$$

13. При резонансе контур представляет собой чисто активное сопротивление, поэтому амплитуда тока

$$I_m=\mathcal{E}_m/R.$$

Резонансная частота

$$\omega=1/\sqrt{LC}.$$

14. Согласно определению действующего значения переменного тока,

$$I^2R\cdot 2\tau=\frac{q^2R}{2\tau}=\frac{(I_0\tau)^2R}{2\tau},$$

откуда

$$I=I_0/\sqrt{2}.$$

15. Отставание по фазе связано со временем распространения волн:

$$\frac{t}{T}=\frac{l/c}{1/\nu}=\frac{l\nu}{c}=0{,}05,$$

где $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света.

[illegible]чи LIII Московской математической [illegible]пиады

8 класс

1. Указание. Сложите очевидные неравенства:

$$a_1+a_2+a_3<3a_3,\quad a_4+a_5+a_6<3a_6,$$
$$a_7+a_8+a_9<3a_9.$$

2. Ответ: 2. При $m>1$ произведение чисел m и $m+2n^2+3$ (разной четности) имеет не менее двух различных простых делителей: 2 и некоторое нечетное число. Если же $m=1$, то число

$$(n+9)(2n^2+4)=2(n+9)(n^2+2)$$

имеет не менее двух различных простых делителей. Ровно два простых делителя получается, например, при $m=5$, $n=1$.

3. Ответ: нельзя. Хотя бы один класс представлен не более чем двумя участниками (иначе всего было бы не менее чем $3\cdot 4=12$ человек). Именно этот класс и не будет представлен в некоторой пятерке сидящих подряд школьников.

4. Из равенства вписанных углов $\angle ACB=\angle ACD$ и $\angle CAD=\angle CBD=\angle EAC$ (рис. 4) следует равенство треугольников ACD, ACE и сторон CD, CE.

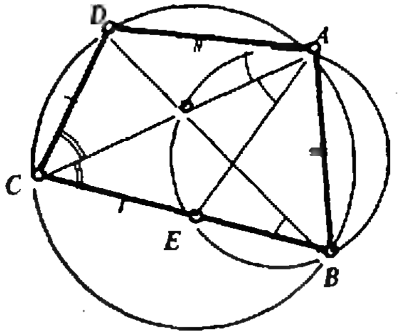


Рис. 4.

5. Ответ: 6. Будем изображать m включений табло в виде таблицы $m\times 64$, заполненной плюсами и минусами так, что каждый столбец таблицы изображает свою кнопку, строка — включение, а плюс — нажатие данной кнопки в данном включении. Для того чтобы по зажиганиям каждой лампочки можно было распознать кнопку, которая ее зажигала, необходимо и достаточно, чтобы все столбцы были различны. Это возможно в точности, когда $2^m\geqslant 64$, поскольку число различных столбцов высоты m равно 2^m. Наименьшее значение m, удовлетворяющее этому условию, равно 6.

9 класс

1. Любые два мальчика — братья, ибо у них есть общий брат: в противном случае в компании кроме указанных двоих мальчиков было бы еще по меньшей мере $3+3=6$ мальчиков, тогда как их всего 7.

2. Если из данных 53 чисел нельзя выбрать два числа, составляющие в сумме 53, то в каждой паре вида $(k, 53-k)$, где $k=1, \ldots, 26$, содержится не более одного данного числа. Но тогда сумма всех 53 чисел не меньше чем

$$(1+\ldots+26)+(53+\ldots+79)=$$

$$=\frac{1+26}{2}\cdot 26+\frac{53+79}{2}\cdot 27=2133,$$

т. е. больше чем 1990. Противоречие.

3. Любая окружность касается, например, круга с центром в отмеченной точке A и радиусом r, удовлетворяющим условию

$$r(4-r)=a, \qquad (*)$$

где число a равно произведению отрезков хорды, на которые ее разбивает точка A (это произведение не зависит от выбора хорды). Так как $a<4$, то уравнение (*) имеет положительное решение.

4. **Ответ:** да. Разобьем монеты на 4 группы A, B, C, D по 2 монеты и произведем 3 взвешивания:

$$A+B\vee C+D,$$
$$A+C\vee B+D,$$
$$A+D\vee B+C,$$

результаты которых запишем знаками $<$, $>$ *или* $=$ вместо знаков $\vee$. Если не будет ни одного равенства (возможного лишь в случае равенства весов двух фальшивых и двух настоящих монет), то отбросим два одинаковых из трех полученных знаков. Оставшийся знак укажет, что произойдет, *если положить* фальшивые монеты слева, а настоящие справа. Действительно, если фальшивые монеты находятся в одной группе, то они нечетное число раз окажутся слева. Если тяжелая монета находится в A, а легкая — в B, C или D, то однажды обе они окажутся слева, а дважды получится знак $>$. Аналогичный вывод можно сделать, если фальшивые монеты поменяются местами. *Наконец, если обе фальшивые* монеты находятся в двух из трех групп B, C или D, то они дважды окажутся по разные стороны, дав оба знака $<$ и $>$ по одному разу, а однажды окажутся справа. Однако соответствующий знак будет отброшен как парный и останется противоположный.

5. **Ответ:** $n(10^n-1)$. Заметим, что если $(p, q)=1$, то период дроби p/q равен наименьшему числу $n\in N$, удовлетворяющему условию

$$(10^{n+k}-10^k)\vdots q$$

при некотором k. Это следует из представления дроби

$$\frac{s(10^n-1)+r}{10^{n+k}-10^k}=\frac{s}{10^k}+\frac{r}{10^k(10^n-1)} \quad (r<10^n-1)$$

в виде смешанной периодической дроби с периодом n. Квадрат дроби $\frac{1}{10^n-1}=0,\underbrace{0\ldots01}_{n}\,\underbrace{0\ldots01}_{n}\ldots$ имеет период $n(10^n-1)$, так как $(10^t-1)\vdots(10^n-1)^2$ тогда и только тогда, когда $t\vdots n(10^n-1)$ (последнее вытекает из того, что число

$$10^{ln+m}-1=10^{ln}(10^m-1)+(10^{ln}-1)=$$
$$=10^{ln}(10^m-1)+(10^n-1)(1+10^n+\ldots+10^{(l-1)n}) \quad (m<n)$$

кратно $(10^n-1)^2$ тогда и только тогда, когда $m=0$ и $l\vdots(10^n-1)$).

Квадрат любой другой дроби периода n имеет период, *не превосходящий* $n(10^n-1)$, так как если $10^k(10^n-1)\vdots q$, то $10^{2k}(10^{n(10^n-1)}-1)\vdots 10^{2k}\times$ $\times(10^n-1)^2\vdots q^2$.

10 класс

1. **Ответ:** можно. На рисунке 5 изображено разбиение квадрата на 3 прямоугольника и указаны их размеры. Для подобия прямоугольников достаточно справедливости равенства

$$1-x=x(1-x(1-x)),$$

которое выполняется при некотором значении $x\in(0;1)$, ибо при $x=0$ левая часть равенства больше правой, а при $x=1$ — наоборот.

2. **Ответ:** (2, 3, 17), (3, 2, 17). Хотя бы одно из чисел p, q, r четно, а значит, равно 2. Поскольку $r\neq 2$, будем для определенности считать, что $q=2$. Тогда

$$p^2+2^p=r.$$

Одно из чисел p или r кратно 3, иначе остаток от деления на 3 левой части равен $(\pm 1)^2+(-1)^3=0$ (ибо p — нечетно), а правой — не 0. Но $r\neq 3$, так что $p=3$, $r=17$.

3. Положим $x=-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{27}$, где знаки плюс или минус выберем совпадающими со знаками коэффициентов a, b, c соответственно (знак числа 0 считаем для определенности положительным). Проверка показывает, что тогда

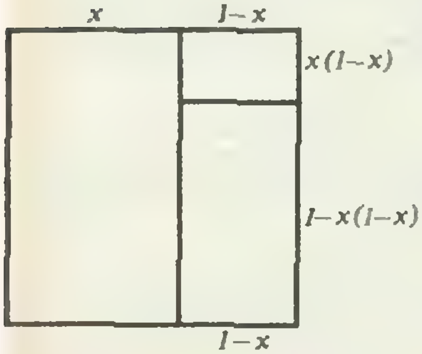


Рис. 5.

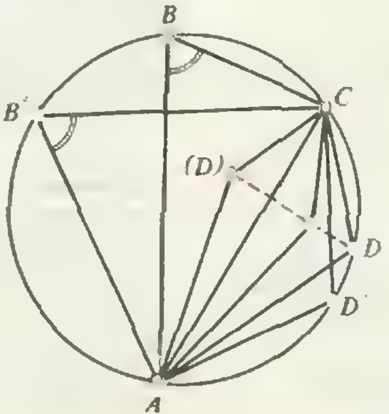


Рис. 6.

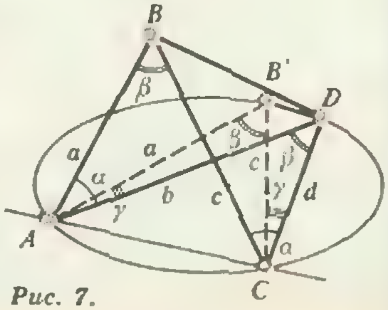


Рис. 7.

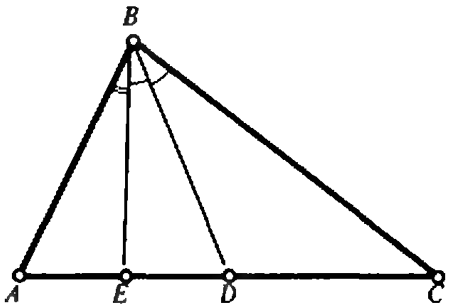


Рис. 8.

$$\pm\cos x > \frac{1}{2}, \quad \pm\cos 3x > \frac{1}{2}, \quad \pm\cos 9x > \frac{1}{2}.$$

4. **Ответ**: в вершинах вписанного квадрата[*]). Любое расположение четырех точек A, B, C, D в круге можно постепенно преобразовать в вершины квадрата так, что произведение расстояний увеличится. Действительно, сначала преобразованием подобия выведем три точки, скажем A, B, C на окружность (рис. 6). Если точка D при этом лежит внутри треугольника ABC, то отразим ее симметрично относительно одной из сторон, не выпуская из круга (это возможно, иначе $\angle ADB + \angle ACB < \pi$, $\angle BDC + \angle BAC < \pi$, $\angle CDA + \angle CBA < \pi$, откуда $2\pi + \pi < 3\pi$).

Далее, выведем точку D на окружность, а затем заменим точку D и противоположную ей вершину, скажем, B, диаметрально противоположными серединами двух дуг AC: D' и B'. Тогда

$$B'D' \geqslant BD, \quad AB'\cdot CB' = \frac{2S_{AB'C}}{\sin\angle B'} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{2S_{ABC}}{\sin\angle B} = AB\cdot CB.$$

Аналогично, $AD'\cdot CD' \geqslant AD\cdot CD$, т. е. произведение расстояний не уменьшится. Точно также заменим точки A и C точками A' и C', которые вместе с B и D будут вершинами квадрата.

5. **Ответ**: $\sin\beta/\sin\alpha$. Рассмотрим точку B', образующую треугольник $AB'C$, равный треугольнику ABC, и лежащую в той же полуплоскости относительно прямой AC, что и точка D (рис. 7). Пусть

$$a = AB = AB', \; b = AD, \; d = CD, \; c = CB = CB'.$$

По теореме косинусов

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)}$$
$$\left(\frac{a}{c} \neq \frac{d}{b}, \text{ так как } AB \neq CD\right).$$

Так как $\angle B' = \angle D = \beta$, то точки A, B, C, D лежат на одной окружности и $\angle B'AD = \angle B'CD = \gamma$, откуда аналогично получаем

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)} = \cos\alpha$$
$$\text{и } \gamma = \alpha, \; BD = B'D.$$

Таким образом, все ребра тетраэдра $ABCD$ совпадают с соответствующими ребрами «тетраэдра» $AB'CD$, следовательно, $B = B'$. Наконец, по теореме синусов имеем

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R = \frac{B'D}{\sin\alpha}.$$

11 класс

1. **Ответ**: 1. Положив $\varphi = \arcsin x$, $\psi = \arcsin y$, имеем

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} =$$
$$= \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi = \sin(\varphi+\psi) \leqslant 1,$$

причем равенство достигается, например, если $x = 1$, $y = 0$.

2. **Пример**: $f(x) = x^{\sqrt{2}}$. Заметим, что если $x \in (0; 1)$, то имеют место неравенства

$$f(x) \neq x \text{ и } f(x) \neq x^2$$

(иначе $x^2 = f(f(x)) = f(x) = x \neq x^2$ или $x^2 = f(f(x)) = f(x^2) \neq x^2$). Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что разности $f(x) - x$ и $f(x) - x^2$ имеют на интервале $(0; 1)$ постоянный знак. Но неравенства $f(x) > x$ и $f(x) < x^2$ невозможны, ибо в противном случае получилось бы одно из противоречивых неравенств

$$x^2 = f(f(x)) > f(x) > x > x^2$$

или

$$x^2 = f(f(x)) < (f(x))^2 < (x^2)^2 < x^2.$$

3. **Ответ**: не может. В самом деле, из свойств биссектрисы имеем $AB:BC:BE = 1:3:1{,}5$ (рис. 8); обозначив $AB = a$, $\angle ABE = \alpha$, запишем равенство площадей

$$\frac{a\cdot 3a}{2}\sin 2\alpha = \frac{a\cdot 1{,}5a}{2}\sin\alpha + \frac{1{,}5a\cdot 3a}{2}\sin\alpha,$$

откуда $\cos\alpha = 1$, что невозможно.

4. Докажем сначала утверждение для числа $n = 5^p$. Выберем из всех p-значных чисел, кратных 5^p, число l с наибольшим количеством k идущих подряд справа нечетных цифр. Тогда если $k < p$, то число $l + 5^p\cdot 10^k$, а с ним и p-значное число с теми же p цифрами, идущими справа, также кратное 5^p, будет иметь более k нечетных цифр подряд, что противоречит выбору l. Поэтому все p цифр числа l нечетны. Теперь если нечетное число n представить в виде $5^p\cdot q$, где q не кратно 5, то запишем подряд m раз число l, найденное выше. При разных значениях m не могут получаться все время разные остатки от деления на q. Следовательно, разность двух таких чисел, соответствующих некоторым значениям $m = m_1$ и $m = m_2$, делится на q. Отбросив в этой разности все последние нули, получим число, кратное как q (ибо q взаимно просто с 10), так и 5^p (ибо $l \vdots 5^p$). Все цифры этого числа, как и цифры числа l, нечетны.

5. **Ответ**: никакие три из данных точек не лежат на одной прямой, а все четыре точки не

---

[*]) Это утверждение известно как теорема И. Шура.

лежат на одной окружности. Если точки A, B, C, D являются проекциями точки M на грани тетраэдра, то никакие три из них не лежат в одной плоскости с точкой M (соответствующие плоскости граней тетраэдра не пересекаются в одной точке!).

Кроме того, точки A, B, C, D и M не лежат на одной сфере (в противном случае все четыре плоскости, на которые проектируется точка M, проходят через одну точку M', диаметрально противоположную точке M на этой сфере).

Итак, если точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости, то следует взять точку M, не лежащую ни в одной из плоскостей ABC, ACD, ABD и BCD и не принадлежащую описанной около тетраэдра $ABCD$ сфере, и провести четыре плоскости, перпендикулярные MA, MB, MC и MD соответственно — эти четыре плоскости и образуют некоторый тетраэдр.

Если точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, то аналогичное построение проходит лишь тогда, когда точки A, B, C, D не лежат на одной окружности (иначе точки M, A, B, C и D лежат на некоторой сфере) и никакие три из них не лежат на одной прямой.

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

8 класс

1. Расход вытекающей воды больше расхода втекающей за счет частичного расплавления льда:

$$q'=q+\Delta q_{\text{распл}}=q\left(\frac{t_1-t_2}{t_2-t_0+\lambda/c}+1\right)\approx 1{,}2\ \text{г/с}.$$

2. См. рис. 9.

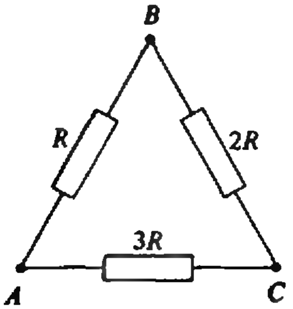


Рис. 9.

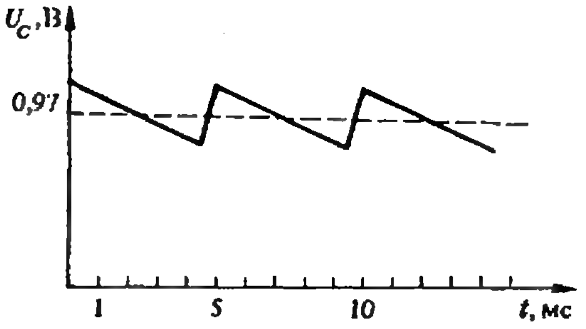


Рис. 10.

9 класс

1. При $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ колобок должен бежать со скоростью $u=\frac{V^2+v^2}{v\cos\varphi}$, при $|\varphi|>\frac{\pi}{2}$ — как можно быстрее.

2. Мяч подпрыгнет 12 раз.
3. Лететь легче в направлении, противоположном направлению вращения станции,— вращение станции создает эффект искуственной силы тяжести. Радиус станции $R\sim 5$ м.
4. Уровень масла в правом колене опустится на

$$x=\frac{\rho_р-\rho_м}{2\rho_р-(\rho_в+\rho_м)}\,\frac{\rho_в-\rho_м}{\rho_м}\,\frac{H}{2}\approx\left(\frac{\rho_в}{\rho_м}-1\right)\frac{H}{4}.$$

5. $U_{\max}=4$ В (вольт-амперную характеристику лампочки на начальном участке — до тока 0,25 А и напряжения 1 В — можно считать линейной).

10 класс

1. $v_{\max}\approx\sqrt{mgh^2/(2Ml)}$ (считается, что ускорение мало́ по сравнению с g).

2. $M=FR\sqrt{1-(mg/F)^2}$; $v=\omega R/\sqrt{(F/(mg))^2-1}$.
3. В процессе наливания воды поверхность раздела воды с ртутью практически дойдет до нижней точки (объемом оставшейся в левой половине ртути можно пренебречь), и вода начнет «пробулькивать» в правую половину трубки. Смещение ртути вдоль трубки составит $x=2V_0/(\pi d^2)=31$ см.
4. $Q_1=mgh-\rho Vgh=4{,}9$ Дж; $Q_2=\rho V'gh-mgh=4{,}9$ Дж.

5. Искомая сила равна $\pi b^2 p$ и перпендикулярна круговому сечению.
6. $\Delta C\sim\varepsilon_0 r^3/R^2$ (плотности зарядов бугорка и сферы — одного порядка).
7. Напряжение на конденсаторе изменяется пилообразно с амплитудой $\Delta U\approx 4{,}5\cdot 10^{-4}$ В около значения $U=0{,}97$ В (см. рис. 10).

11 класс

1. $h=mgL/(8F)$ (при условии $mg\ll F$ канат принимает форму дуги окружности).

2. $F=\sigma\pi D/2$ (характерна ошибка в 2 раза).

3. См. рис. 11 (решение основано на методе изображений).

4. $F=Imv(1-\cos\varphi)/e$ (здесь m — масса электрона, e — его заряд).
5. $d\leqslant(1+Dl)/(lD^2)=0{,}9$ м.
6. $E=2E_0/3$ (можно воспользоваться принципом обращения хода световых лучей и считать фотоэлемент источником света, равномерно излучающим вверх).

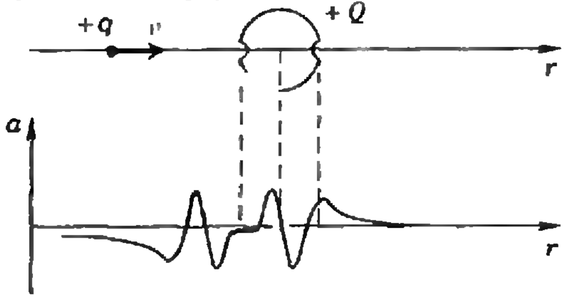


Рис. 11.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. См. рис. 12.
2. Да, может.

Например, так будет для водоемов, имеющих форму, изображенную на рисунке 13, при соответствующем подборе радиусов и высот составляющих цилиндрических частей.

3. 8947+8947=17 894.
4. Если повернуть треугольник ABH вокруг точки B на 90° (рис. 14), то четырехугольник $DHBH_1$ окажется квадратом со стороной 1. Следовательно, он, как и четырехугольник $ABCD$, имеет площадь 1.
5. См. таблицу.

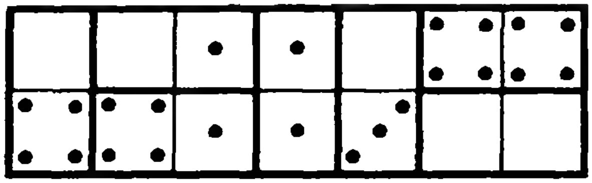


Рис. 12.

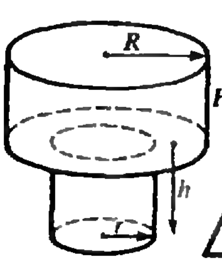


Рис. 13.

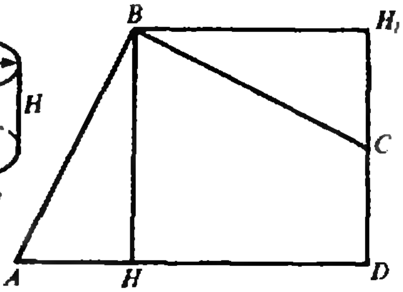


Рис. 14.

СССР	×	1:1	6:0	2:0
ФРАНЦИЯ	1:1	×	3:0	1:0
ВЕНГРИЯ	0:6	0:3	×	2:0
КАНАДА	0:2	0:1	0:2	×

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 8)

1. Все размеры копии должны быть увеличены в 2 раза, поэтому ее объем будет в 8 раз больше объема оригинала, и масса — 400 грамм.
2. $AO:OB=1:3$. Натяжения нитей одинаковы, если центр вращения совпадает с центром масс системы.
3. При приседании центр масс человека смещается вниз, при выпрямлении — вверх. Поэтому в первом случае прогиб доски уменьшится, во втором — увеличится.
4. Сила тяжести гири приводит в движение и тележку, и гирю, а рука — только тележку.
5. Можно, соединив сосуды отверстиями и сместив их в сторону заполненного сосуда.
6. По периодам свободных колебаний каждого из тел на пружине.
7. При ковке предпочтительнее неупругий удар, когда молоток теряет тем бо́льшую часть своей энергии, чем меньше его масса.
8. Увеличение массы автомобиля уменьшает ускорения, сообщаемые ему камнями мостовой.
9. При резком рывке стебли обрываются раньше, чем успевают прийти в движение корни.
10. Сила тяжести, сообщающая телу ускорение, пропорциональна массе тела.

(Окончание см. на с. 80)

АНКЕТА 9—90

Редакция получает много писем с просьбами ответить на те или иные вопросы, касающиеся проблем развития науки и образования. Мы решили собрать «пакет» таких вопросов и передать его главному редактору академику Ю. А. Осипьяну с

(см. оборот)

Дорогой читатель!

Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 9—90».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____

Ваша профессия (если Вы работаете): ____

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____

11. Вторая.
12. Да, так как в условиях невесомости инертность тел сохраняется.

Микроопыт

Стакан останется на столе. Сила трения, действующая на него со стороны бумаги, недостаточна, чтобы сообщить ему заметное ускорение.

Анкета 9—90

тем, чтобы он ответил на них на страницах журнала. Поэтому в нашу анкету мы включили специальный пункт:

Ваш вопрос главному редактору ____________

____

____

3. Какие статьи и задачи из номеров 7—9 (номер укажите) Вам понравились? ____________

Вы использовали при подготовке к уроку? ____________

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ____________

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? ____________

5. Какая обложка из номеров 7—9 Вам больше всего понравилась? ____________

6. Ваши общие замечания и пожелания: ____________

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов,
С. Лухин, Т. Макарова, Э. Назаров,
П. Черуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 21.06.90. Подписано к печати 6.08.90.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,57. Тираж 164804 экз. Заказ 1174
Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ЛЮДИ И МАШИНЫ

Небывалый матч состоялся во время чемпионата Голландии 1989 года (среди людей!). В один из свободных дней все 12 участников турнира сразились с 12 шахматными компьютерами. Поскольку за «белковых» шахматистов не играл сильнейший голландский гроссмейстер Я. Тимман, можно считать справедливым и отсутствие «Дип Сот» в команде их соперников.

Перед матчем были собраны прогнозы. Организатор соревнования Ван ден Херик (профессор Лимбургского университета и один из крупнейших специалистов в области компьютерных шахмат), а также гроссмейстер Г. Рей предсказали счет 11:1 в пользу мастеров. Таким же был прогноз Д. Леви. Машинам отдал предпочтение М. Ботвинник — 6,5:5,5.

Авторы программ, участвующих в матче, сильно разошлись во мнениях: Шеффер («Феникс») назвал 10,5:1,5 в пользу компьютеров, Шернер («Бебе») — 9,5:2,5. Ближе всех к истине оказался К. Томпсон, создатель программы «Белл». Он проявил умеренный пессимизм, считая, что компьютеры возьмут 4 очка.

Шахматисты победили со счетом 8,5:3,5. Единственная ничья случилась в партии «новорожденного» гроссмейстера И. Пикета с программой «Хайтек». Программа «Крэй блитц» выиграла у Ван дер Стеррена, а «Фиделити Мах IV» — у другого международного мастера А. Блейса. Вот эти две победы компьютеров.

Блейс — «Фиделити»
Новоиндийская защита

1. d4 Kf6 2. c4 e6 3. Kf3 b6 4. a3 d5 5. cd ed 6. Kc3 Cd6 7. Cg5 c6 8. e3 0—0 9. Cd3 Лe8 10. Фc2 h6 11. Ch4 Cg4. Машина нестандартно разыграла дебют, но использовать минусы построения черных нелегко.

12. h3 Cd7. Теперь у черных появляется угроза g7 — g5. **13 Ke2 c5 14. g4 c4 15. Cf5 b5 16. g5 Фa5+ 17. Kpf1 hg 18. K:g5 C:f5 19. Ф:f5 Kbd7 20. Лg1 Фd2! 21. Kf3 Фd3.** Пройдя по тылу противника, черный ферзь вовремя приходит на помощь «осажденному» королю.

22. Ф:d3 cd 23. Kc1 d2 24. K:d2 Лac8. Нарушив взаимодействие белых фигур, компьютер получил определенную компенсацию за пешку. **25. Kpe2 Лc2 26. Kd3** Следовало упростить позицию путем 26. C:f6! K:f6 и лишь после этого сыграть 27. Kd3 Ke4 28. Лgd1!, намечая Лa1 — c1 с надеждой постепенно реализовать лишнюю пешку.

26...Ke4 27. Лad1 Kb6. 28. f3? K:d2 29. Л:d2 Л:e3+! Теперь позиция белых рушится. **30. Kpd1 Л:d2+ 31. Kp:d2 Kc4+ 32. Kpc2 Л:f3 33. Cf2 K:b2!** Изящный удар, такой возможности компьютер никогда не упускает.

34. K:b2 Л:f2+ 35. Kpc3 Лf3+ 36. Kd3 C:a3 и через несколько ходов белые сдались.

«Крэй блитц» — П. Ван дер Стеррен
Испанская партия

1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. Cb5 a6 4. C:c6 dc 5. 0—0 f6 6. d4 ed. «Крэй блитц» ожидала ответа 6...Cg4. Теперь программа выходит за пределы своего дебютного багажа, но и ее самостоятельная игра вполне убедительна...

7. K:d4 c5 8. Kb3 Ф:d1 9. Л:d1 Cg4 10. f3 Ce6 11. Ce3 b6 12. a4 a5. Существенное ослабление. Правильно 12...Ke7 13. Cf4 c4 14. Kd4 0—0—0 15. Kc3 с равными шансами (Тимман — Матанович, Югославия, 1978).

13. Kc3 Cd6 14. Kb5 0—0—0 15. K:d6+ cd. Черные раздвоили свои пешки, но лишились «преимущества двух слонов». Инициатива по-прежнему у белых.

16. Kd2 d5 17. ed C:d5 18. Лe1. Энергичнее c2 — c3 и далее b2 — b4, не тратя время на перемещение ладьи.

18...Лd7 19. c3 Ke7 20. b4 ab. Черные стремятся создать белым слабую пешку «a», а себе проходную «b». Для этого надо заблокировать белую пешку и одновременно обезопасить свою. Но все происходит наоборот: пешка «a» становится угрожающей, а пешка «b», скорее, уязвимой.

21. cb cb 22. C:b6 Kc6 23. Лac1 Kpb7. «Крэй блитц» полагала, что черный король пойдет на b8, избегая шаха при движении пешки «a» до шестой горизонтали.

24. a5 Ke5 25. Лe3 Лc8? Заранее рассматривая при переборе вариантов этот ответ, «Крэй блитц» здесь собиралась играть 26. Лa1. Но когда ход ладьей был сделан, она мгновенно обнаружила a5 — a6+, хотя и не сразу поняла, что это ведет к выигрышу материала. После 26. a6+ белые ожидали 26...Kpb8 и далее 27. Лb1 Ca2 28. Лb2 Лc1+ 29. Kpf2 Лa1 30. a7+ Kpa8 31. Kpg3...

26. a6+. Теперь же, продвинувшись на виток дальше, машина вычислила вариант 26...Kpb8 27. a7+ Kpb7 28. Л:c8 Kp:c8 29. Kc4! Л:a7 (29...C:c4 30. a8Ф+; 29...K:c4 30. Лe8+ Лd8 31. Л:d8×) 30. C:a7 C:c4, и у белых качество за пешку. Ван дер Стеррен предпочитает отдать материал другим способом.

26...Kp:a6 27. Л:c8 Kp:b6 28. Лb8+ Kpc5 29. Лe1 Kd3 30. Ke4+ Kpd4? Решающая ошибка, после 30...Kpc4 31. Лd1 C:e4 32. fe b3 33. g4 Лd4 34. Лa1 Лd7 35. Лa4+ Kpc3 черные держались, этот вариант ожидала и «Крэй блитц». Экс-чемпионка мира в этой партии была гораздо дальновиднее человека.

31. Лd1 C:e4 32. Л:b4+ Kpe5 33. Л:e4+ Kpf5 34. Лe3 Kc5 35. Л:d7 K:d7 36. Лe7 Kf8 37. Л:g7 h6 38. g4+ Kpe6 39. Kpf2 f5 40. gf+ Kpf6 41. Лa7. Черные сдались.

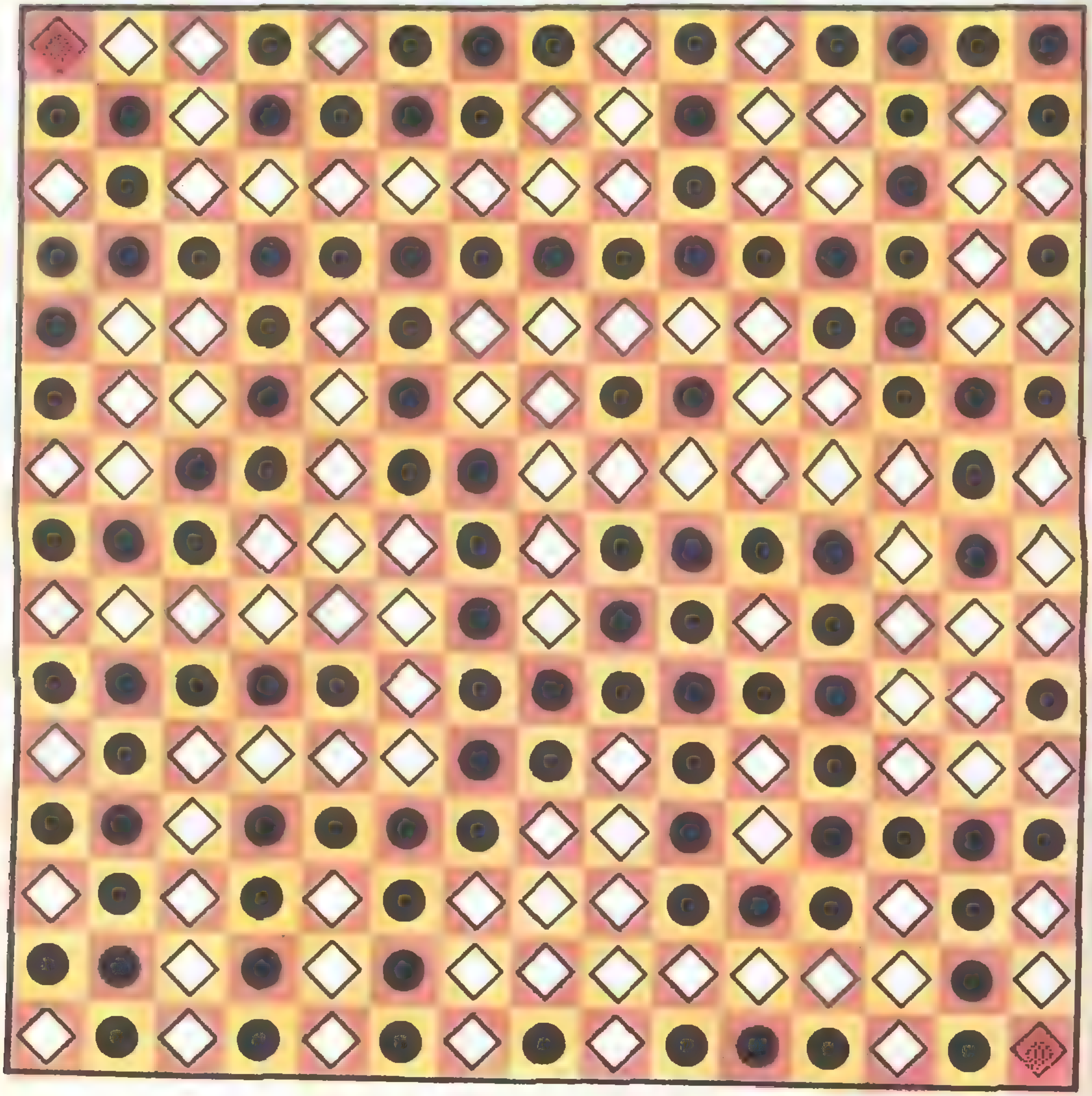
Е. Гик

45 коп.

Индекс 70465

Проведите шахматную ладью из правого нижнего угла в левый верхний угол так, чтобы на ее пути кружочки и квадратики чередовались.

Л. Мочалов



◆	◇	◇	●	◇	●	●	●	◇	●	◇	●	●	●	●
●	●	◇	●	●	●	●	◇	◇	●	◇	◇	●	◇	●
◇	●	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	●	◇	◇	●	◇	◇
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	◇	●
●	◇	◇	●	◇	●	◇	◇	◇	◇	◇	●	●	◇	◇
●	◇	◇	●	◇	●	◇	◇	●	●	◇	◇	●	●	●
◇	◇	●	●	◇	●	●	◇	◇	◇	◇	◇	◇	●	◇
●	●	●	◇	◇	◇	●	◇	●	●	●	●	◇	●	◇
◇	◇	◇	◇	◇	◇	●	◇	●	●	◇	●	◇	◇	◇
●	●	●	●	●	◇	●	●	●	●	●	●	◇	◇	●
◇	●	◇	◇	◇	◇	●	●	◇	●	◇	●	◇	◇	◇
●	●	◇	●	●	●	●	◇	◇	●	◇	●	●	●	●
◇	●	◇	●	◇	●	◇	◇	◇	●	●	●	◇	●	◇
●	●	◇	●	◇	●	◇	◇	◇	◇	◇	◇	◇	●	◇
◇	●	◇	●	◇	●	◇	●	◇	●	●	●	◇	●	◆

НОМЕР
10

Квант

10 1990

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *Б. Левин.* Моретрясение
8 *М. Кельберт, Л. Питербарг.* Медианная фильтрация
14 *С. Табачников.* Математика и нацизм

Задачник «Кванта»

21 Задачи М1246—М1250, Ф1253—Ф1257
23 Решения задач М1221—М1225, Ф1233—Ф1237
31 Список читателей, приславших правильные решения

Информатика и программирование

32 Всесоюзный конкурс «Юный программист»

«Квант» для младших школьников

33 Задачи
34 *С. Табачников.* Чего больше?
36 Льюис Кэрролл и его задачи
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»

Математика 9—11:

42 Некоторые полезные показательные и логарифмические соотношения

* * *

43 Конкурс «Математика 6—8»

Лаборатория «Кванта»

44 *В. Майер, С. Майер.* Экспериментируем с ИК лучами

Математический кружок

48 *В. Тихомиров.* Геометрия или анализ?

Практикум абитуриента

52 *А. Черноуцан.* Проводящие сферы в электростатике

Фантастика

58 *Г. Гаррисон.* Магазин игрушек

Ракурс

63 Муравей и... электронный микроскоп

Р — значит ракета

64 Советско-американский конкурс юных любителей астрономии и космонавтики
65 *Е. Нариманов.* 56 миллионов километров до Красной планеты

Информация

68 V Научно-техническая конференция школьников

Олимпиады

69 XVI Всероссийская олимпиада школьников
72 Несколько задач Бакинской физической олимпиады
73 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(57)*

Наша обложка

1 *«Лабораторное» моретрясение (см. статью на с. 2).*
2 *Репродукция картины русского художника М. Ларионова (1881—1964) «Уличный свет». Может быть, именно так выглядит фотография ночного города, полученная в ИК лучах? (см. с. 44)*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломки «Лабиринт на шашечной доске».*

© Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1990

МОРЕТРЯСЕНИЕ

Кандидат технических наук Б. ЛЕВИН

> *В мире есть такое диво:*
> *Море вспенится бурливо,*
> *Закипит, поднимет вой...*
>
> *А. С. Пушкин*

Скорее всего, читатель, вы никогда не слыхали о моретрясениях. И это не удивительно. Даже в Большой Советской Энциклопедии нет такого слова. А этот природный феномен, хотя и более редкий, чем, скажем, цунами, которое зарегистрировано уже около тысячи раз, или шаровая молния, собравшая более 1500 описаний, заслуживает внимания.

Что же такое моретрясение?

Так называют сильное и кратковременное возмущение морской поверхности в зоне действия подводного землетрясения. Давние португальские и испанские мореплаватели пользовались термином maremoto, что дословно можно перевести «море ходуном», а голландские капитаны называли это устрашающее явление zeebeben — «ужасное море». В русских лоциях для описания необычных событий на море используется слово моретрясение.

В Мировом океане ежедневно происходит не менее пяти так называемых ощутимых землетрясений, т. е. землетрясений такой силы, которые на суше вызывают разрушения построек, а на море приводят к моретрясениям.

Описания очевидцев моретрясения полны драматизма и изобилуют красноречивыми подробностями. В Каталогах цунами С. Л. Соловьева и Ч. Н. Го, а также в «Каталоге извержений вулканов мира» И. И. Гущенко представлены материалы примерно двух тысяч описаний геофизических катаклизмов в Мировом океане.*) Из этого количества нами было отобрано около двухсот описаний моретрясений, в которых обнаружена интересная и важная информация. Эти материалы были положены в основу реконструкции условного «среднего» моретрясения.

Итак, предлагаем читателю синтезированные впечатления обобщенного очевидца моретрясения.

...Зеркально-гладкая поверхность моря при полном безветрии внезапно покрылась буграми. Эти бугры никуда не бежали, но и не стояли на месте. Они стремительно вырастали до уровня палубы и так же внезапно опадали, образуя глубокую воронку на месте недавнего бугра.

Колебания происходили быстро, в глазах рябило от этих необыкновенных вскипающих волн, заполнивших все видимое пространство моря. Поверхность воды бурлила и подскакивала, подобно кипящему слою в раскаленной солеварне. (Таковы впечатления наблюдателя на рейде Джакарты, 1722 г.)

...Судно подбрасывало и раскачивало на этих подпрыгивающих волнах. Крутизна их достигала крутизны жесточайших штормовых волн, а длина не превышала 20 м. Килевая качка была такой силы, что несколько раз осушался винт и слетела с острия картушка компаса. (Описание 1917 г., о-в Сулавеси.)

...Все пассажиры и команда мгновенно оказались на палубе. Яркое солнце и полный штиль лишь усиливали напряжение этого ужасающего зрелища взбесившегося моря. Прошло меньше минуты, а уже не было сил сопротивляться чудовищной скачке, которая то ослабевала, то вновь усиливалась.

---

*) Соловьев С. Л., Го Ч. Н. Каталог цунами на западном побережье Тихого океана. М.: Наука, 1974.

Гущенко И. И. Извержение вулканов мира. М.: Наука, 1979.

Размеры водяных бугров начали уменьшаться, а частота мелькания увеличивалась. При этом откуда-то из глубины возник низкий рёвоподобный гул, подавляющий волю и разум. Люди стали метаться по судну, охваченные паническим страхом. Многие пассажиры и даже матросы, не выдержав этой пытки и, видимо, потеряв рассудок, стали выпрыгивать за борт. На фоне мелькающих волн появлялись высоко вздымающиеся струи воды, которые обрушивались, порождая странный шелестящий звук. (1969, Чили, пароход «Ле-Пайла».)

...Внезапно судно потряс сильнейший удар. Несколько человек с палубы выкинуло за борт. Удары со стороны днища посыпались один за другим. Казалось, что судно колотило о скальное дно, хотя глубина под килем превышала 100 м. (1939, Соломоновы о-ва.)

...Создавалось впечатление, что в трюме подпрыгивают огромные бочки с водой и обшивка вот-вот лопнет. Ванты дрожали, обломились поручни трапа, осыпались стекла в рубке, палубные надстройки начали сдвигаться и разваливаться на глазах. Судно готовилось к неотвратимой гибели. (1854, Японское море, фрегаты «Паллада», «Диана»; 1858, Чили, бриг «Гималайя»; 1863, Манила, исчезновение парохода «Эсперансо»; 1965, Аляска, судно «Огайя».)

В дополнение к описаниям очевидцев можно предложить вниманию читателя и первый плод научной классификации моретрясений — таблицу, разработанную немецким геофизиком А. Зибергом в 1923 году и недавно уточненную автором и членом-корреспондентом АН СССР С. Л. Соловьевым.

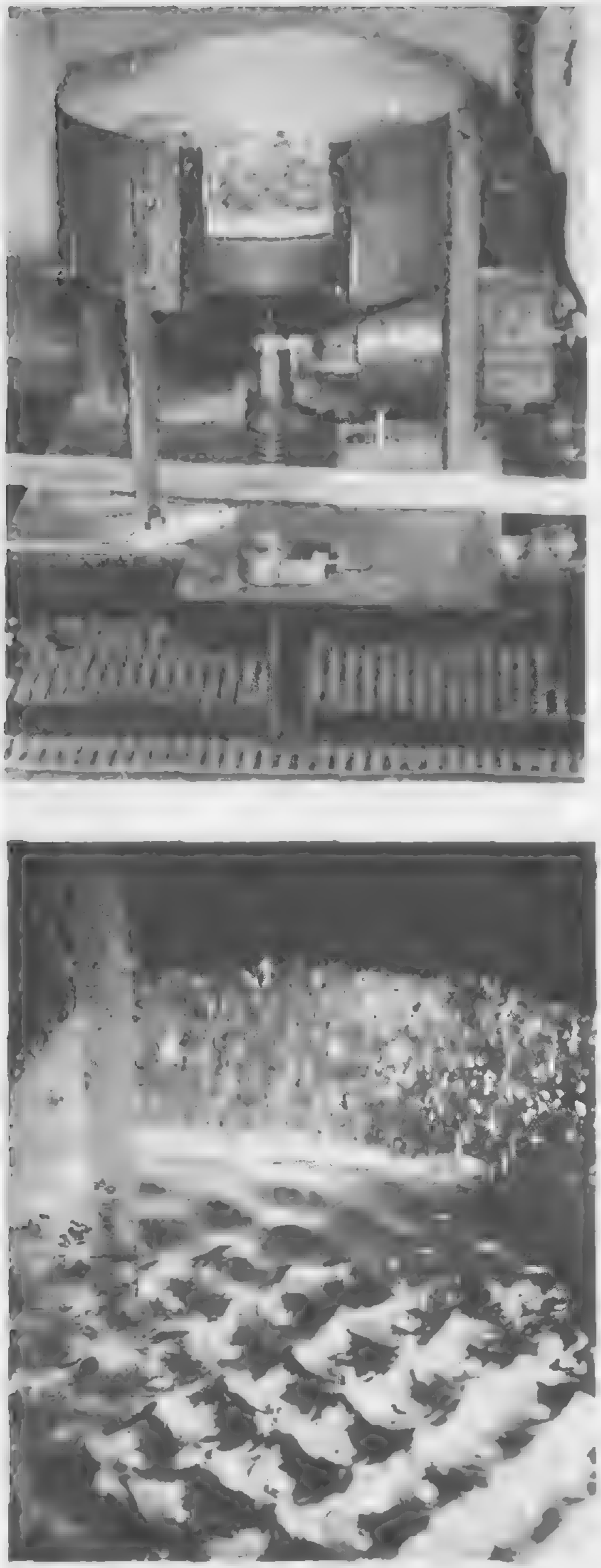
Первая попытка анализа моретрясения показала, что это глобальное событие имеет прямое отношение к географии, геофизике, океанологии, гидродинамике, синергетике (молодой науке о самоорганизующихся структурах).

И уж, конечно, оно заслуживает внимательного экспериментального изучения хотя бы на моделях.

Интенсивность колебаний водной поверхности		Интенсивность колебаний скального дна		Описание степени воздействия моретрясения на судах (по А. Зибергу)
балл моретрясения	амплитуда скорости колебаний, см/с	балл по шкале Ин-та физики Земли	амплитуда скорости колебаний, см/с	
I	0,2—0,5	—	—	Дрожание, легкий треск палубы.
II	0,5—1,0	—	0—0,1	Отчетливый треск, сотрясение, как при легком царапании.
III	1—3	I	0,1—0,3	Сильный толчок, как при налете на мель, скалистое дно или риф. Громкий треск корпуса, колебание предметов.
IV	3—6	II	0,3—0,6	Судно трещит и раскачивается, неустойчивые предметы опрокидываются.
V	6—12	III—IV	0,6—1,2	Люди не держатся на ногах, крупные предметы опрокидываются и выскакивают из подставок, судно теряет ход, постройки тяжело скрипят.
VI	более 12	IV—V	более 1,2	Судно может быть выброшено из воды, ломаются мачты и палубные постройки, аварийная ситуация.

Буря в стакане

Опыты по созданию и изучению искусственных микромасштабных моретрясений выполнялись на лабораторной виброустановке (см. фото на с. 4), сконструированной и изготовленной в Институте горного дела им. А. А. Скочинского. «Морем» был



Установка для создания и изучения «лабораторных» моретрясений.

резервуар диаметром полметра, а «землетрясение» создавалось вибратором, расположенным в центральной части дна. Естественно, в эксперименте учитывались характерные параметры моделируемого реального явления.

Колебания дна при подводном землетрясении совершаются преимущественно с инфразвуковыми частотами порядка 1—20 Гц, размер колеблющейся области дна (порядка 10—100 км) всегда значительно превышает среднюю глубину Мирового океана, равную 4 км, а ускорения колебаний дна могут достигать и даже превышать ускорение силы тяжести.

Опытная установка обеспечивала требуемый диапазон частот и ускорений, а наличие подвижного диска диаметром 20 см в резервуаре диаметром 50 см при соответствующей глубине воды позволяло выполнить условие геометрического подобия модели и реального события.

Эффекты, наблюдавшиеся в эксперименте, были весьма необычны.

Во-первых, это образование на поверхности воды правильной структуры из необычных стоячих волн, организованных в крупные ячейки квадратной формы. Такая структура наблюдалась в диапазоне частот колебаний дна 8—23 Гц при ускорениях дна порядка g (ускорения силы тяжести), и размеры ячеек, т. е. длины *волн, составляли 2—13 см.*

Во-вторых, опыты показали возможность гигантского усиления колебаний на этих частотах: при амплитуде колебаний донного диска 0,5—1,5 мм амплитуда стоячих волн достигала 20—45 мм, т. е. коэффициент усиления колебаний был не менее 30.

В-третьих, была обнаружена закономерность уменьшения размеров ячейки (длины волн) b с уменьшением периода колебаний дна T.

В-четвертых, для полученных волновых структур было установлено постоянство соотношения между длиной волны b и ее высотой H.

Итак, результаты налицо. Но что они означают?

Эксперимент ⇄ теория

Тщательная проверка и анализ полученных материалов позволили нам сформулировать два простых «экспериментальных закона» для волновых структур:

$$b = gT^2, \qquad (1)$$
$$H = b/3. \qquad (2)$$

Из этих законов следует, что волновые структуры образуются в результате параметрической раскачки водной поверхности и являются сильно нелинейными образованиями, поскольку крутизна образующихся стоячих волн (отношение высоты к длине) достигает теоретически возможного ($H/b \approx 0{,}33$) предела.

К этим выводам мы еще вернемся, а сейчас — еще о некоторых экспериментальных результатах. Кроме квадратных ячеек, были зафиксированы также ячейки в виде одномерных валиков и уж совсем экзотическое образование — ячейки шестиугольной формы! (см. фото на с. 6)

Шестиугольные ячейки на воде — точный аналог изображения пчелиных сот — очень напоминают структуру, образующуюся при определенных условиях в жидкостях в результате тепловой конвекции,— так называемые ячейки Бенара. Мы имеем новый пример самоорганизующихся структур*). Колебательное движение поверхности воды вверх — вниз приводит к самопроизвольной кооперации и организации движущихся частиц поверхностного слоя в отдельные ячейки. Формирование таких ячеек в плоскости, перпендикулярной направлению движения, связано, по-видимому, с тем, что динамическая система должна выбирать наиболее выгодное энергетическое состояние.

О необходимости именно такого поведения сплошной среды при некоторых режимах движения говорится в классическом труде Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Механика сплошных сред»: «...вертикальное конвекционное движение в жидкости должно обладать периодичностью в горизонтальной плоскости». Там же предсказана и гексагональная симметрия ячеек.

Теоретическое описание симметрии динамических структур весьма затруднительно. Однако качественную теорию, удовлетворительно описывающую результаты экспериментов по моделированию моретрясений, все же удалось построить. Суть ее заключается в следующем.

Гравитационные волны на воде подчиняются закону дисперсии, согласно которому квадрат частоты волны обратно пропорционален длине волны (проще говоря, с уменьшением периода волны уменьшается ее длина). Коэффициентом пропорциональности служит постоянная величина g — ускорение силы тяжести. В случае гравитационно-капиллярных волн в закон дисперсии добавляется член, учитывающий поверхностное натяжение и плотность жидкости.*)

Оказалось, что при описании колебательных процессов в жидкости коэффициент пропорциональности g уже нельзя считать постоянным, помимо g надо учитывать добавочное ускорение, создаваемое колебаниями дна. Поскольку это добавочное ускорение периодически меняется во времени, возникают условия периодической раскачки поверхности под действием периодической возмущающей силы. Подобные процессы называются параметрическим резонансом.**)

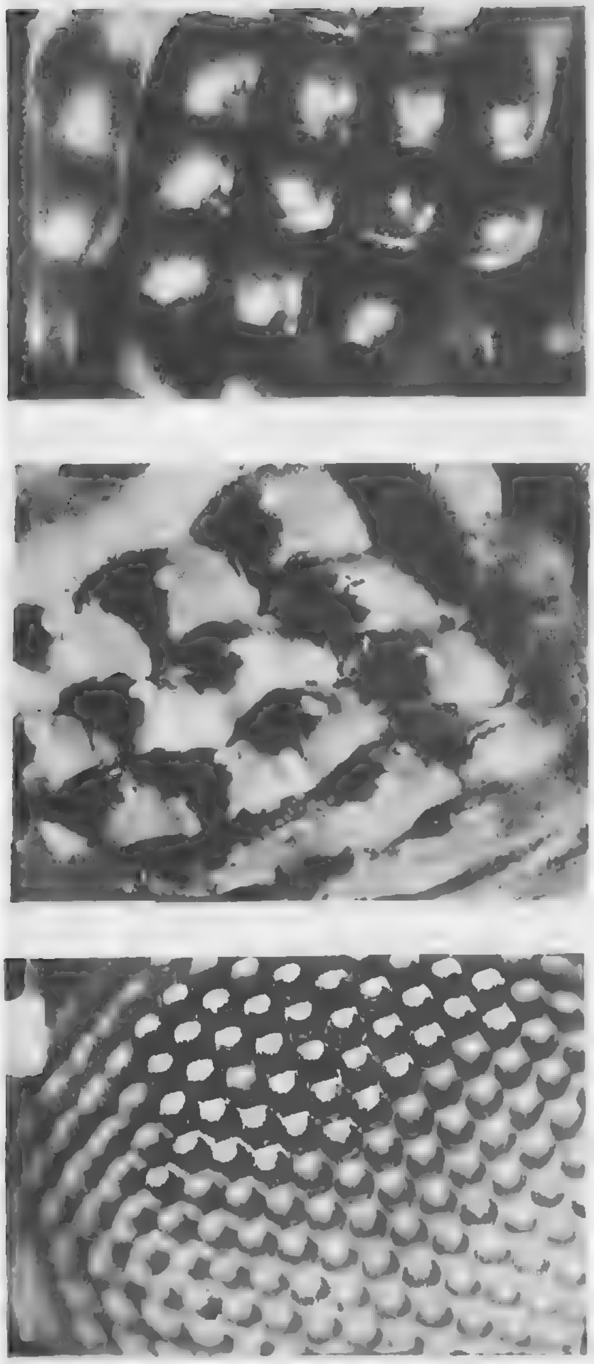
То же самое происходит и с частицами водного слоя в резервуаре виброустановки. Параметрически возбуждаемые волны на воде должны иметь частоту колебаний, ровно вдвое меньшую частоты колебаний дна. Оказалось, что экспериментальный

---

*) Если читатель хочет поближе познакомиться с самоорганизующимися системами, с ячейками Бенара и со структурами, появляющимися в жидкостях при термоконвекции, советуем посмотреть опубликованные в «Кванте» статьи В. Шефера «Наблюдения над утренней чашкой кофе» (1977, № 4), Е. Городецкого и В. Есипова «Конвекция и самоорганизующиеся системы» (1985, № 9), Б. Бубнова «Вихри... на патефоне» (1987, № 8). (*Примеч. ред.*)

*) И здесь желающие могут обратиться к публикациям «Кванта»: о гравитационных и капиллярных волнах на воде можно прочитать, например, в статьях Е. Кузнецова и А. Рубенчикова «О волнах на море и ряби на лужах» (1980, № 9), А. Стасенко «Волны на воде» и «Заморские гости» Н. Рериха» (1990, № 1). (*Примеч. ред.*)

**) Параметрическому резонансу была посвящена статья А. Варламова и А. Черноуцана в «Кванте» № 9 за 1986 год (с. 29). (*Примеч. ред.*)



Правильные структуры, наблюдавшиеся в «лабораторных» моретрясениях.

закон (1) практически точно совпадает с законом дисперсии параметрических волн. Экспериментатор снимает шляпу перед Теорией!

Из предложенной качественной теории ячеистых волновых структур следует, что при изменении условий эксперимента должны получаться последовательно одномерные, квадратные и шестиугольные ячейки. Опыты в точности подтвердили этот теоретический вывод.

И еще об одном совпадении (?) хотелось бы сказать. Посмотрим внимательно на некоторые факты из описаний сильных землетрясений.*)

«Деревянные срубы из колодцев вылетели, как пробки, кверху, вода за ними следом — до трех саженей в высоту...; вода выбрасывалась из прорубей...; лед на озерах весь растрескался, из трещин вылетала кверху вода с илом и галькой.» (1862 г., Цаганское землетрясение.)

«Из колодца вода брызнула фонтаном...; служащие парохода, бывшего в 30 верстах от берега, видели водяной столб в море.» (1895 г., Красноводское землетрясение.)

Многие землетрясения сопровождались появлением высоко бьющих фонтанов (до 5—8 м) из воды с песком и илом, выплескиванием воды из бассейнов и бочек, чернил из чернильниц, масла из лампад и даже покойников из могил. Кроме последнего, будоражащего воображение факта (1868 г., Перу), остальные события явно демонстрируют параметрическое усиление колебаний жидкости при определенных сейсмических колебаниях дна.

Если обратить внимание на описания моретрясений, где упоминаются «необычные подскакивающие волны», «странные движения многих волн», «толчея волн», «рябь», «колонны воды» или возникновение вокруг корабля именно трех (!) больших волн (1868 г., Калифорния; 1878 г., Чили), то можно усмотреть довольно явную аналогию с ячейками волновых структур в эксперименте и даже при желании увидеть признаки гексагональной симметрии.

Академик М. А. Лаврентьев, с которым мне посчастливилось работать в 1979—80 годах, рассказывал о наблюдавшихся в океане очень крутых «вытянутых вверх» волнах непонятного происхождения. Высота их достигала примерно 6 м, а расстояние

---

*) *Новый каталог сильных землетрясений на территории СССР с древнейших времен до 1975 г.* Под ред. Н. В. Кондорской и Н. В. Шебалина. М.: Наука. 1977.

между вершинами составляло 15—20 м.

Оказывается, именно такие параметры стоячих волн можно получить, если в выражения, описывающие установленные «экспериментальные законы», подставить значение периода $T = 1{,}5$ с. А ведь волны с таким периодом в спектре землетрясений совсем не редкость. Не правда ли, интригующее совпадение?

Однако вопросы, которые задал эксперимент, не исчерпались. Откуда возникает такая четкая геометрия ячеек? Каковы законы образования ячеистой решетки? Почему стоячие волны достигают столь большой крутизны? Какую роль играет глубина воды? На эти вопросы теория пока не дает окончательных ответов, хотя исследования параметрических волн заметно расширили наши представления об этом необычном явлении.

Моретрясение и... «Летучий Голландец»

Есть и еще одна, пожалуй наиболее таинственная, особенность моретрясения — это тот атавистический необъяснимый страх, который охватывает терпящих бедствие. И не под влиянием ли такого всеобщего психоза впечатлительные мореплаватели средних веков оставляли свой сотрясающийся в судорогах моретрясения корабль? И потом он скитался по океану, покинутый людьми и наводящий ужас на экипажи встречных судов. Не правда ли, неплохая версия «Летучего Голландца»?

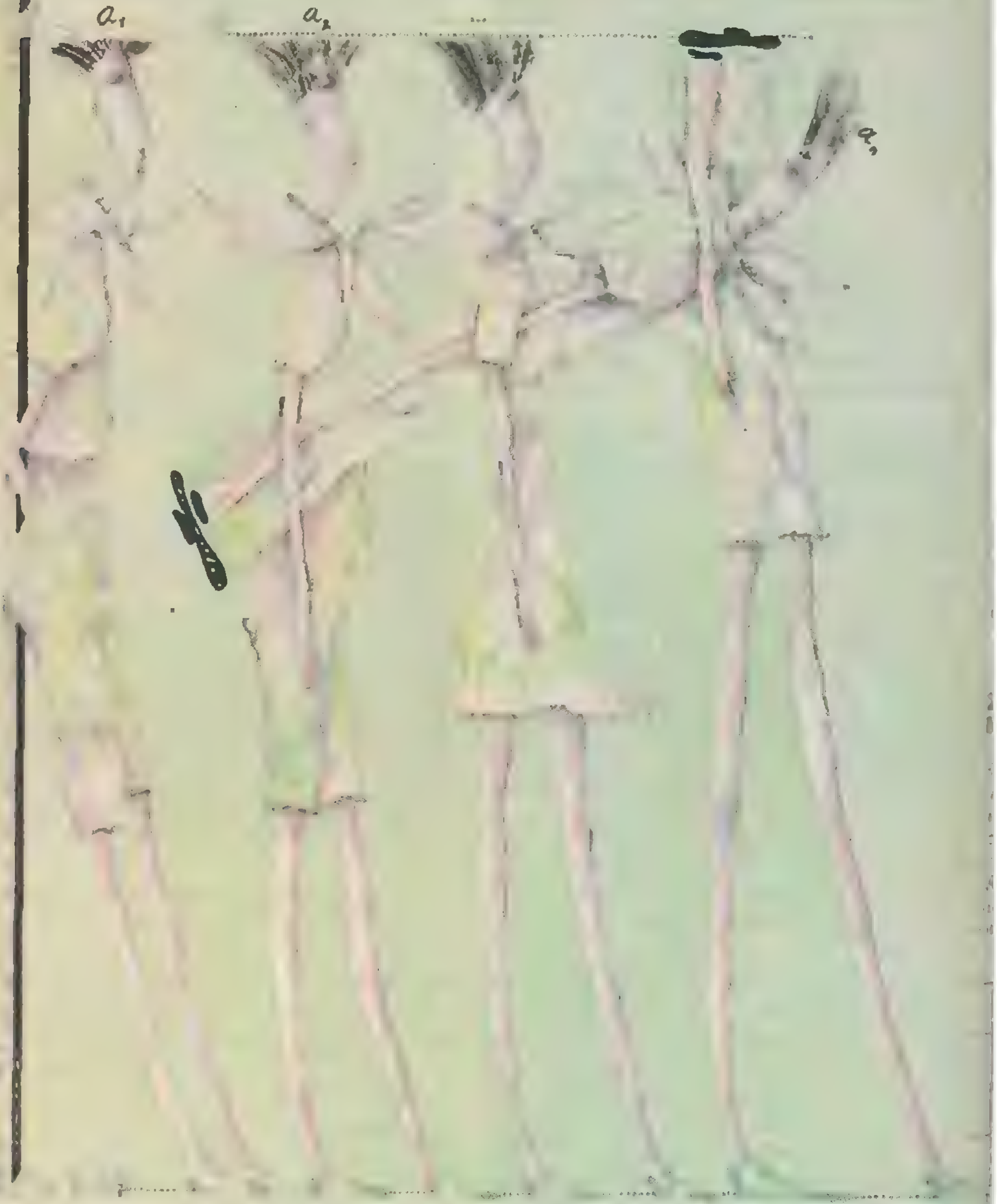
А теперь давайте вспомним результаты одного известного эксперимента из области физической акустики. Популярный американский физик Роберт Вуд выполнял опыты с гигантской трубой, напоминающей органные трубы, но излучающей инфразвук. Оказалось, что колебания воздуха с частотой, примерно равной 7 Гц, вызывают сильное беспокойство, приступы непонятного страха и даже панику у людей, находящихся в зоне излучения. Этот эффект обнаруживался не только в помещении лаборатории, но даже за пределами здания у отдельных весьма ошарашенных собственными эмоциями уличных прохожих. Эффект депрессивного действия на человеческий организм колебаний воздуха с инфразвуковыми частотами неоднократно подтверждался.

Вернемся к моретрясению. Характерные сейсмические частоты колебаний почвы в эпицентре землетрясения заключены в интервале от 1 до 20 Гц. Как показывают теория и эксперименты, волновая структура на воде, возбуждаемая колебаниями дна, характеризуется частотой, вдвое меньшей частоты накачки, т. е. частоты вынуждающей силы. Значит, частóты колебаний волн при моретрясении должны лежать в диапазоне от 0,5 до 10 Гц. Но именно этот диапазон содержит частоты, отличающиеся депрессивным действием на человеческий организм.

Корабль, попавший в зону моретрясения, можно представить находящимся внутри гигантской вертикальной трубы диаметром порядка 20 км, которая излучает мощный инфразвук на самых опасных депрессивных частотах. И такая кошмарная «музыка» продолжается в течение десятков и даже сотен секунд. Понятно, что подобное «звучание» моря вполне может вызвать коллективный психоз у команды, особенно если причины этого явления ей не известны. Чего, надеется автор, теперь не скажешь о читателе «Кванта».

МЕДИАННАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

Кандидат физико-математических наук
М. КЕЛЬБЕРТ,
доктор физико-математических наук
Л. ПИТЕРБАРГ



Грубые ошибки данных (выбросы)

Предположим, мы хотим узнать средний рост второклассников Москвы. Опросим наугад 1000 школьников и запишем их рост. Потом сложим полученные числа и разделим на 1000. Конечно, ребята называют свой рост не совсем точно, но можно надеяться, что эти случайные ошибки при усреднении компенсируют друг друга. Но вот один из школьников пошутил и сказал, что его рост равен километру. Разумеется, это значение должно быть отброшено, иначе средний рост второклассника может превысить 2 метра.

Аналогично дело обстоит и в том случае, если «пошутила» ЭВМ и аномально большое число оказалось в памяти в результате машинного сбоя или ошибки при вводе данных. Например, оператор вводит в память ЭВМ десятичные числа; скажем, температуру воды в океане, измеряемую с борта исследовательского судна. Жарко, корабль качает, вдобавок оператор ведет захватывающую беседу с приятелем... И время от времени забывает нажать на клавишу с десятичной запятой. В результате ЭВМ «запоминает» примерно следующий ряд чисел:

...25,627; 26,234; 25,824; 25003;
25,226; 24,988; 24923; 25,231;...

Ясно, что при дальнейшей обработке данных выбросы будут иметь весьма нежелательные последствия. Их необходимо заменить на истинные или близкие к истинным значения. К тому же процедура устранения выбросов должна быть автоматической, так как обычно речь идет об огромных массивах чисел.

Для борьбы с выбросами замечательным американским специалистом по статистике Дж. Тьюки была предложена процедура, которая называется *медианной фильтрацией.* Идея любой подобной процедуры очень проста: каждое из чисел в последовательности измерений надо рассмотреть вместе с несколькими соседними с ним числами и заменить его средним значением этих чисел. Фокус в том, как выбрать это среднее.

Среднее значение и медиана

Обычно в статистике средним значением n чисел называют их среднее арифметическое:

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Например, для семи чисел 1, 2, 5, 1, 1, 2, 30 среднее значение равно 6. Оно получилось таким большим из-за единственного «выброса», равного 30. В тех видах спорта, где результат оценивают в баллах несколько судей, перед вычислением среднего балла иногда отбрасывают две крайние оценки — наибольшую и наименьшую. Поступим так и мы; наш ряд чисел сократится до 2, 5, 1, 1, 2, а среднее значение уменьшится до 2,2. Можно пойти дальше и отбросить по два крайних значения, а можно — еще дальше, отбросив по три крайних значения, а оставшееся число — это будет 2 — принять за «среднее». Такое «среднее» число называется *медианой* данного набора чисел. Как видите, медианы есть не только в геометрии, но и в статистике.

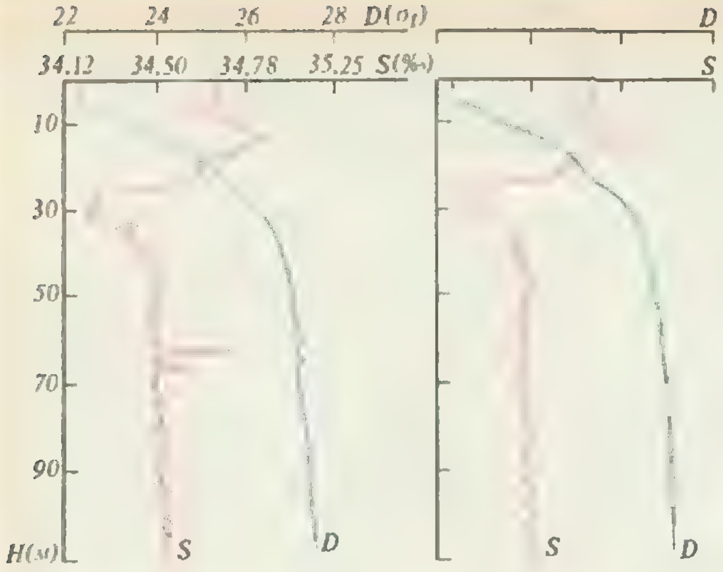
Строгое определение медианы таково. Пусть a_1, a_2, ..., a_{2k+1} — набор из нечетного количества чисел. Переставим эти числа в порядке возрастания (неубывания). Медианой набора называется число, которое окажется на среднем, $(k+1)$-м месте. Мы будем обозначать это число через $m(a_1, a_2, \ldots, a_{2k+1})$.

Два понятия «средних», о которых мы говорили выше,— среднее арифметическое и медиана — естественно возникают при решении следующих задач. Пусть дан набор чисел; определим его «среднее» как число, сумма отклонений от которого до данных чисел минимальна. Вопрос в том, как определить отклонение.

Упражнения

1. Докажите, что для любых чисел a_1, a_2, ..., a_n минимум функции $f(x)=(x-a_1)^2+\ldots+(x-a_n)^2$ достигается при $x=a=(a_1+\ldots+a_n)/n$.

2. а) Докажите, что для любых чисел a_1, a_2, ..., a_{2k+1} минимум функции $g(x)=|x-a_1|+\ldots+|x-a_{2k-1}|$ достигается при $x=m(a_1, \ldots, a_{2k+1})$.



Вертикальные профили солености (S) и плотности (D) морской воды, полученные в 27-ом рейсе научно-исследовательского судна «Дмитрий Менделеев», до обработки с помощью медианного фильтра (слева) и после такой обработки (справа). Два хорошо заметных выброса в средней части профилей после фильтрации исчезли. То, что это действительно выбросы, следует из физических соображений: более плотная жидкость не может находиться над менее плотной.

б) При каких x достигается минимум аналогичной функции с четным числом чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$?

Обработка дискретного сигнала

Рассмотрим бесконечную в обе стороны последовательность чисел

$$\ldots x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots$$

Зафиксируем натуральное число k. Будем говорить, что новая последовательность $\ldots y_{-2},\ y_{-1},\ y_0,\ y_1,\ y_2,\ldots$ получена из старой *медианной фильтрацией*, если

$$y_n=m(x_{n-k},\ x_{n-k+1},\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,\ x_{n+k}).$$

Число $2k+1$ называется *шириной окна фильтра*.

Термины «фильтрация», «полезный сигнал», «шум» пришли в статистику из радиотехники, где одной из самых важных задач в предвоенные годы было создание фильтров, очищающих звуковые сигналы от посторонних шумов.

В рассмотренном нами примере измерений температуры в океане «шумом» будут аномально большие значения. Применение медианного фильтра с минимальной шириной окна, равной 3, приводит к такому ряду чисел:

…25,824; 26,234; 25,824;
25,226; 25,226; 25,231;…

(первый и последний члены не указаны, так как неизвестно, какие числа стояли рядом с ними в исходной последовательности). Итак, мы добились цели — новый набор не содержит выбросов, на месте которых появились вполне разумные значения. Этот пример хорошо иллюстрирует способность медианной фильтрации срезать «пики». Познакомьтесь с простыми свойствами медианной фильтрации.

Упражнения

3. Докажите, что медианная фильтрация с любой шириной окна не меняет монотонные последовательности чисел.

4. Пусть $f(x)$ — монотонная функция, x_n — произвольная последовательность чисел, y_n — ее медианная фильтрация. Докажите, что при медианной фильтрации из последовательности $f(x_n)$ получится последовательность $f(y_n)$.

5. Пусть x_n равно 100 при n, кратном $l\ (l\geqslant 3)$, и равно 0 в остальных случаях. Что получится из этой последовательности при медианной фильтрации?

Отсюда видно, что медианная фильтрация легко справляется с редкими выбросами. Однако, если выбросы встречаются слишком часто, она оказывается бессильной.

Упражнение 6. Что получится при медианной фильтрации из последовательности $x_n=(-1)^n$ при ширине окна, равной k?

Для обработки последовательностей с частым чередованием выбросов, которые малы по сравнению с полезным сигналом, более приемлемы осреднения, в которых вместо медианы используется среднее арифметическое нескольких соседних чисел (*скользящее осреднение*), преобразующее исходную последовательность по формуле

$y_n=(x_{n-k}+x_{n-k+1}+...+x_{n+k})/(2k+1)$.

Однако при больших выбросах скользящее осреднение вредно, так как оно «размазывает» ошибку по всей последовательности (убедитесь в этом на примере последовательности упражнения 5). Если же выбросы велики и часты, то задача восстановления полезного сигнала вообще теряет смысл.

Инвариантные последовательности

Пусть на вход медианного фильтра поступает некоторая последовательность чисел. На выходе появится новая последовательность, вообще говоря, отличающаяся от исходной. Дж. Тьюки предложил повторять медианную фильтрацию до тех пор, пока последовательность чисел не перестанет меняться, т. е. не станет *инвариантной*. Чтобы описать инвариантные последовательности, условимся работать не только с бесконечными, но и с конечными последовательностями чисел. Для этого, конечно, нужно договориться, как определять значения новой последовательности вблизи от ее начала и конца. Будем просто добавлять слева несколько членов, равных x_1, а справа — несколько членов, равных x_n. Тогда значение отфильтрованной последовательности будет однозначно определено.

Пример 1. На вход медианного фильтра с $k=1$ поступает последовательность 4, 4, 2, 3, 1, 1, 4, 4, 3, 3. Тогда на выходе появится инвариантная последовательность 4, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 4, 3, 3. Если же $k=2$, то после первой фильтрации мы получим последовательность 4, 4, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, а после второй — уже инвариантную (и даже монотонную) последовательность 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3.

Отметим, что любые три числа в инвариантной последовательности при $k=1$ в этом примере идут в монотонно неубывающем или невозрастающем порядке. Это наблюдение подсказывает следующее определение: последовательность называется *k-монотонной*, если любой ее отрезок длиной k монотонен.

Ясно, что если в k-монотонной последовательности возрастающий отрезок сменяется убывающим (или наоборот), то между ними последовательность постоянна на протяжении $k-1$ значения.

Связь k-монотонности и инвариантности относительно медианного фильтра, которую мы наблюдали в предыдущем примере, конечно, не случайна.

Упражнения

7. Любая k-монотонная последовательность инвариантна для медианного фильтра с окном шириной, не большей чем $2k-3$.

8. Любая инвариантная последовательность медианного фильтра с $k=1$ является 3-монотонной.

9*. Пусть инвариантная последовательность медианного фильтра с окном шириной $2k+1$ содержит монотонный отрезок длиной $k+1$. Тогда она является $(k+2)$-монотонной.

План решения: пусть последовательность $x_{n-k}, ..., x_n$ возрастает. Докажем, что если $x_{n+1}<x_n$, то $x_{n-k}=...=x_n$. В силу инвариантности последовательности x_n среди $2k$ чисел $x_{n-k}, ..., x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_{n+k+1}$ должно быть ровно k значений, не меньших x_n, и k значений, не больших x_{n+1}. Если $x_{n-k}\leqslant x_{n+1}$, то среди $2k-1$ чисел ($x_{n-k+1}, ..., x_{n-1}, x_{n+2}, ..., x_{n+k+1}$) должно быть k значений, не меньших x_n, и k значений, не больших x_n, что невозможно. Следовательно, $x_{n-k}\geqslant x_n$, т. е. $x_{n-k}=x_n$.

Упражнение 10. Если последовательность инвариантна относительно всех медианных фильтров с окнами шириной $2p+1$, где $p\leqslant k$, то она $(k+2)$-монотонна.

Однако при $k>1$ неверно, что всякая инвариантная последовательность медианной фильтрации с окном фильтра шириной $2k+1$ является $(k+2)$-монотонной. Это видно из следующего примера.

Пример 2. Пусть каждое из чисел $a_1, a_2, ..., a_k$ равно +1 или −1. Рассмотрим последовательность $...a_0, a_1, ..., a_k, -a_0, -a_1, ..., -a_k, ...$ и продолжим ее в обе стороны периодически. Тогда эта последовательность инвариантна относительно медианной фильтрации с окном шириной $2k+1$.

Упражнение 11*. Если инвариантная последовательность x_n медианного фильтра с ок-

ном шириной $2k+1$ не содержит ни одного монотонного отрезка длиной $k+1$, то числа x_n могут принимать только два значения (бинарный сигнал).

Таким образом, «парадоксальная» ситуация примера 2 возможна лишь для бинарных сигналов.

Обработка изображений

Интерес к медианной фильтрации в наши дни вызван, в первую очередь, проблемой обработки полученных из космоса фотографий поверхности Земли и небесных тел. Получению четких фотографий часто мешает облачность, которую в данном случае нужно рассматривать как шум. Конечно, если облаками закрыта значительная часть объекта, никакая математическая процедура не поможет восстановить его истинные контуры. А вот если облачность редкая, то на помощь приходит медианная фильтрация.

Разобьем черно-белую фотографию на маленькие квадратики и сопоставим ей прямоугольную таблицу чисел x_{ij} уровней яркости в каждом квадратике. Теперь вместо изображения мы имеем дело с таблицей чисел. А к ним можно применить процедуру медианной фильтрации. Делается это так. Выберем некоторую фигуру (круг, квадрат, крест, кольцо и т. д.) — она называется *окном фильтра* — и наложим ее на изображение. Значение яркости в центре окна заменяется медианой чисел x_{ij} для всех попавших в это окно точек.

Пусть, например, x_{ij} равно 100, если i и j оба делятся на 10, и равно 0 в противном случае. Проверьте, что после медианной фильтрации такое изображение будет состоять из одних нулей. Значит, при обработке реальных изображений очень темные и очень светлые пятнышки должны исчезнуть. Это видно на фотографии одного из участков Памира, получен-

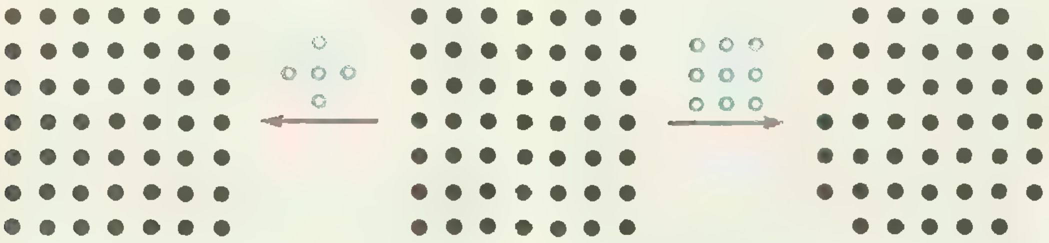


Рис. 1.

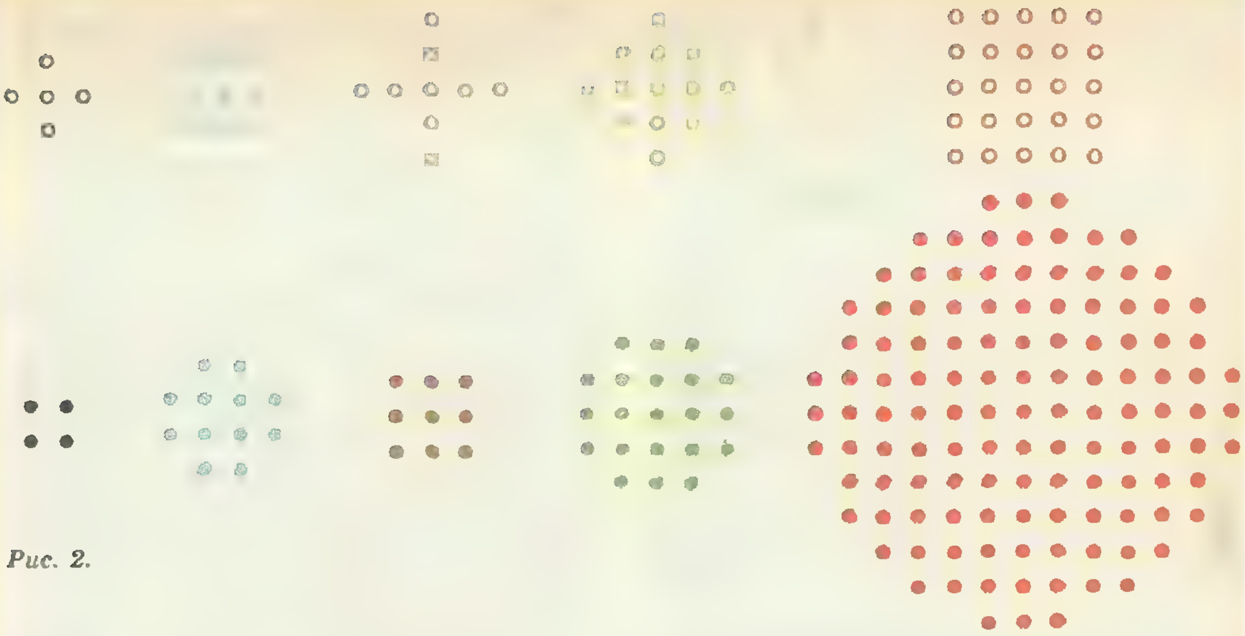


Рис. 2.

ной с борта космического корабля «Союз». На первом, необработанном снимке отчетливо видны темные пятнышки на снежном покрове. А на втором изображении, полученном после медианной фильтрации, эти пятнышки исчезли.

Медианная фильтрация изображений обладает важным с точки зрения практика свойством сохранять резкие границы черно-белых объектов. Возьмем, например, самое простое изображение: черный квадрат на бе*лом фоне. Значения яркости* в точках квадрата равно 1, а вне его — 0 (рис. 1). При медианной фильтрации с окном в виде квадрата 3×3 получится квадрат с выкинутыми угловыми точками, а если окно имеет вид креста из пяти точек, то черный квадрат будет инвариантным.

Упражнение 12. На рисунке 2 изображены пять окон, а под ними — пять изображений. Проверьте, что все изображения инвариантны относительно медианных фильтраций с соответствующими окнами.

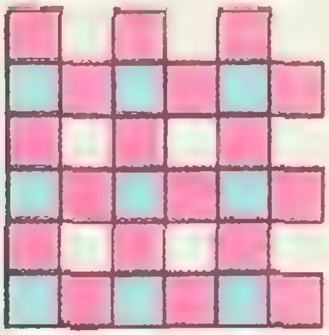


Рис. 3.

Как и в одномерном случае, медианная фильтрация успешно устраняет редкие большие выбросы, а скользящее усреднение — малые знакочередующиеся ошибки. Если же встречаются *большие ошибки, то* скользящее усреднение вредно, т. к., «размазывая» ошибку, оно создает на фотографии серые пятна.

Упражнение 13. Подвергните картинку на рисунке 3 медианной фильтрации с окнами в виде квадрата 3×3 и креста из 5 клеток, а также скользящему усреднению с теми же окнами. Синему цвету отвечает сигнал величиной -2, красному — 0, а белому — $+2$.

Подсказка: при первой фильтрации изображение исчезнет.

В заключение отметим, что понятие медианной фильтрации существует не только для дискретных сигналов (т. е. последовательностей чисел), но и для непрерывного сигнала (т. е. функции, определенной на числовой прямой или на некотором *ее отрезке).* Мы *не* будем давать точного определения — при желании вы можете придумать его сами; скажем только, что такая фильтрация обладает основным свойством дискретной фильтрации: она уничтожает «выбросы», сохраняя общий вид сигнала.

НАЦИЗМ И МАТЕМАТИКА

Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Национал-социалистическая партия Германии находилась у власти 12 лет — с 1933 по 1945 год. Я покажу на нескольких примерах, как проводилась нацистская доктрина в математике и к каким печальным последствиям это привело. По словам одного из ведущих математиков этого времени Рихарда Куранта, *«...научная жизнь — это очень нежное растение, более уязвимое, чем большинство прочих составляющих человеческой истории. Упадок и процветание науки, так же как музыки и изобразительного искусства, в большой степени зависят от непостоянных и неустойчивых человеческих факторов»*.

Арийский миф и расовые законы

Основой идеологии «Третьего рейха» служила «арийская теория», а средством ее проведения в жизнь — расовые законы.

В начале 19 века в лингвистике было сделано важное открытие: большая группа языков (санскрит, иранский, греческий, германские, романские, славянские и некоторые другие) образует так называемую индоевропейскую семью и имеет общее происхождение. Они восходят к праязыку, на котором говорили племена, называвшие себя «арья» (название «Иран», по-видимому, происходит от этого корня). Место первоначального расселения этих племен и пути их миграции до сих пор точно не установлены.

«Арийская теория», отождествляющая лингвистическую общность с расовой и культурной, оформилась во второй половине 19 века. Два наиболее фундаментальных источника — это выпущенное в 1853 году четырехтомное «Эссе о неравенстве человеческих рас» французского графа Жозефа-Артура Гобино и книга англо-немецкого автора Хьюстона Чемберлена «Устои 19 столетия» (1898 год). Вот ее основные положения:

Единственная раса — носитель культуры — арийская, а ее наиболее ценная часть — северный ариец, или германец. Залог успеха расы — чистота крови. Наследие древних цивилизаций досталось двум чистым расам — германцам и евреям. Они — смертельные враги по крови. Семиты лишены настоящей творческой силы и неспособны к высшей науке и искусству.

Приведу теперь выдержки из расовых законов «Третьего рейха».

Закон о чиновниках от 7 апреля 1933 года.
П. 3(1) «Чиновники неарийского происхождения подлежат увольнению».

В исполнительном постановлении к этому закону разъясняется, что *«неарийцем считается лицо, происходящее от неарийских, особенно еврейских, родителей или бабушек и дедушек. Достаточно того, чтобы хотя бы один из них был неарийцем».*

Из «Закона о чиновниках» было сделано исключение для ветеранов первой мировой войны и лиц, принятых на службу до ее начала. На этом настоял президент фельдмаршал фон Гинденбург. Позднее это исключение было отменено, а закон распространен также на лиц, состоявших с неарийцами в браке. Математики, работающие в университетах, а также учителя государственных школ подпадали под его действие.

Закон о гражданстве от 15 сентября 1935 года.
П. 2(1) «Гражданином Рейха может быть только лицо германской или родственной ей крови...»

Это — один из «Нюрнбергских законов» (второй — «О защите немецкой крови и немецкой чести» — запрещал браки и интимные отношения между арийцами и неарийцами). Был также издан закон, устанавливавший полуторапроцентную норму для неарийцев — учащихся средних и высших учебных заведений.

Позволю себе кратко прокомментировать сказанное. Расовая теория утверждает, что важнейшие духовные особенности людей определяются их расой. Это противоречит данным антропологии, которые, скорее, отвечают словам Конфуция: «*Природа людей одинакова, разделяют же их обычаи*». Арийская общность — языковая, а не расовая; население Германии очень неоднородно по происхождению. (Перед первой мировой войной по приказу кайзера Вильгельма была составлена расовая карта Германии. Эту карту не решились опубликовать, так как она слишком явно противоречила арийскому мифу.) «Арийская теория» часто противоречила и нацистской практике. Например, арийцы-цыгане подвергались в Германии и на оккупированной территории тотальному уничтожению. Наконец, термин «неариец» служил в Германии синонимом слова «еврей» — других неарийцев в стране практически не было.

Математический расизм

Выдающийся немецкий математик Людвиг Бибербах выступил в 1934 году с лекцией «Структура личности и математическое творчество». Цель лекции — показать «... *на примере моей науки, математики, влияние народного духа, происхождения и расовой принадлежности на стиль творчества. Для национал-социалистов это утверждение, правда, вовсе не нуждается в каком-либо доказательстве...*»

Бибербах делит математиков на два типа — формалистов и интуитивистов. Пользуясь психологическим термином, он говорит о S- и J-типах мышления: «*Виртуозное владение техническим аппаратом и жонглирование понятиями... присуще нежизненному и неорганичному S-типу*». Этот тип, согласно Бибербаху, характерен для французских и еврейских математиков: «... *мыслители-абстракционисты еврейского происхождения, носители S-типа, так сумели перекроить аксиоматику, что превратили ее в своего рода интеллектуальное кабаре*».

В качестве иллюстрации Бибербах сравнивает определения комплексного числа у Коши и Гаусса. Коши определяет его как упорядоченную пару действительных чисел и вводит на множестве таких пар арифметические операции. Определение Гаусса более геометрично (проблемы обоснования его в тот момент не волновали). Это различие Бибербах трактует как конфликт стилей математического творчества, отражающий противостояние германской и романской

Л. Бибербах (1886—?)

Ф. Клейн (1849—1925)

расы: «... *спор относительно оснований математики также имеет расовую подоплеку...*»

Бибербах приводит и другой пример: «*Тот факт, что выдающийся математик Эдмунд Ландау встретил у студентов Геттингенского университета активное неприятие, объясняется... тем, что ненемецкий стиль этого ученого... неприемлем для людей с немецким мировосприятием. Народ, осознавший, что чуждые ему и жаждущие господства силы подрывают самые его основания... не может принять в качестве наставников носителей этого чужеродного стиля*».

Заключительный вывод состоит в том, что «... *ученые неарийского происхождения пытаются оказать свое пагубное влияние на немецкий народ и лишить его источника, из которого он черпает свою силу*».

Бибербах претендует на развитие идей Ф. Клейна (который, в действительности, не был расистом), высказанных в 1893 году на Математическом конгрессе, посвященном 400-летию открытия Америки Колумбом: «... *степень развития пространственного воображения различается у разных людей и, быть может, у разных рас. Кажется, что сильное врожденное пространственное воображение свойственно германцам, в то время как критическое, чисто логическое мышление более присуще романской и еврейской расе*». По словам Бибербаха, «*мы живем в эпоху, когда эта мысль Клейна может рассчитывать на большее понимание, чем 40 лет назад, когда он ее высказал*».

Лекция Бибербаха вызвала возмущение многих математиков. С протестами выступили датчанин Харальд Бор (брат знаменитого физика) и американский тополог Освальд Веблен. Приведу отклик выдающегося английского математика Г. Харди, опубликованный в журнале «Nature»: «*Вероятно, не следует слишком строго критиковать заявления, сделанные, пусть даже и учеными, во время сильного политического или национального возбуждения... Страх потерять работу, ужас перед повсеместно распространяющейся глупостью, стремление любыми средствами не дать себя обойти — все это естественные, хотя и не слишком благородные мотивы. Репутация профессора Бибербаха исключает такие объяснения. И я вынужден прийти к значительно менее лестному для него выводу, что он действительно верит в то, что говорит*».

Бибербах, по-видимому, верил в то, что говорил. В 1936 году он основал журнал «Немецкая математика», призванный отражать достижения «чисто арийской науки».

Лекция Бибербаха нуждается в комментарии. Не подлежит сомнению, что существуют разные стили математического мышления. Их связь с расовой или национальной принадлежностью более чем сомнительна, зато очевидна роль традиции той или иной математической школы. Кстати, великих математиков француза Анри Пуанкаре и немецкого еврея Германа Минковского следовало бы отнести к J- типу.

Любопытно, что в расовом анализе творческой деятельности Бибербах следует за великим композитором Рихардом Вагнером, который в книге «Евреи в музыке» (1869 год) утверждает, что еврейские композиторы ниже христианских, так как их музыка имеет особый семитский характер. (В Геттингенском университете шутили, что кроме обычного наследования способностей от отца к сыну есть еще особый тип наследования: от тестя к зятю.

Шутка основывалась на том, что молодые математики часто женились на дочерях профессоров. Упомянутый выше Х. Чемберлен был женат на дочери Р. Вагнера.)

Впрочем, лучшим комментарием служит фрагмент выступления великого немецкого математика Д. Гильберта на Международном математическом конгрессе в Болонье в 1928 году: *«... любые рамки, в особенности национального характера, противоречат духу математики. Только абсолютно не понимая нашей науки, можно создавать различия между людьми и расами, а причины, по которым это делалось, являются крайне ничтожными. Математика не знает рас... Для математики весь культурный мир представляет собой единую страну»*.

Упадок Геттингенского университета

Главную роль в развитии математики играют немногочисленные крупные научные центры. В первой трети нашего века в Германии таким центром был университет города Геттинген. Его традиции восходят к К.-Ф. Гауссу, который поступил в университет в 1795 году и провел там большую часть жизни в должности директора обсерватории. Гаусс — Риман — Клейн — Гильберт — таким созвездием отмечена математическая история Геттингена.

Д. Гильберт (1862—1943)

Расцвет университета на пороге 20 века связан с деятельностью Клейна и Гильберта (кстати, Гильберт прибыл в Геттинген ровно через 100 лет после Гаусса — в 1895 году). Клейн во второй половине жизни очень активно занимался организацией науки. Его усилиями в университете был создан ряд научных институтов, первоклассная математическая библиотека, коллекция математических моделей, в помещении которой собирался своеобразный студенческий клуб.

На стене винного погребка при городской ратуше начертан девиз: *«Вне Геттингена жизни нет»*. Эти безапелляционные слова, в известной мере, отвечали положению дел в математической жизни. В университете постоянно бывали многочисленные математики из Америки, Венгрии, датчанин Х. Бор, англичанин Г. Харди, голландцы Л. Брауэр и Б. Ван-Дер-Варден, советские математики П. Александров, А. Колмогоров и П. Урысон. Порой казалось, что в Геттингене работает международный математический конгресс.

Геттингенская математическая школа — это, в первую очередь, школа Гильберта. Его научные интересы охватывали практически всю математику: теорию чисел, алгебру, функциональный анализ, геометрию, логику. И в каждой из этих областей он получил выдающиеся результаты. Вместе с Г. Минковским он руководил семинаром по физике, в которой происходили в это время бурные изменения: создавалась теория относительности и квантовая механика (ассистентом Гильберта по физике одно время был М. Борн). И именно школа Гильберта понесла при нацизме наибольшие потери.

В 1933 году атмосфера в Геттингене начала стремительно меняться. Приведу два характерных примера. Умерший в 1925 году Клейн был включен в Еврейскую энциклопедию. В связи с этим его происхождение было тщательно проанализировано, после чего было решено, что он «великий немецкий математик». Имя Гильберта — Давид — тоже вызывало подозрения. Ему пришлось представить автобиографию своего предка Христиана Давида Гильберта, указывавшую на принадлежность семьи к пиетистам (протестантское религиозное направление).

К кому же в Геттингене относились расовые законы? К Э. Ландау, занявшему кафедру Г. Минковского после его неожиданной смерти в 1909 году. При выборе его кандидатуры не последнюю роль сыграло то обстоятельство, что Ландау был независимым и бескомпромиссным человеком — именно в таких сотрудниках был заинтересован университет в это время! Ландау был выдающимся специалистом в аналитической теории чисел, возродившим в Геттингене «эру арифметики, сравнимую с эрой, открытой Гауссом в 1801 году». Коллеги и студенты побаивались Ландау из-за его остроумия и безжалостной прямоты, однако уважали его фантастическое трудолюбие и преданность математике.

Математический стиль Ландау был очень абстрактным, и он с пренебрежением относился к каким бы то ни было приложениям. По словам Куранта, «лет через 20 он украсил бы собой группу Бурбаки» — коллектив французских математиков, создавших многотомный и чрезвычайно абстрактный курс современной математики. Ландау стоял на крайних позициях и в преподавании: его учебник анализа не содержит ни единого чертежа и представляет собой здание, построенное — этаж за этажом — на фундаменте, образованном аксиомами натуральных чисел, реализуя афоризм Л. Кронеккера: «*Натуральные числа даны от Бога; все остальное — дело рук человеческих*».

Ландау оставил университет после следующего инцидента, произошедшего весной 1933 года. Группа старших студентов помешала ему войти в аудиторию, где он должен был читать курс анализа для первокурсников: «*Мы не возражаем, чтобы вы читали спецкурсы, но это — новички, и мы не хотим, чтобы они учились у еврея*» (именно об этом эпизоде упоминает в своей лекции Бибербах). Эту группу студентов возглавлял очень одаренный математик О. Тейхмюллер, погибший в 1943 году на восточном фронте (кстати, еще в 1926 году нацисты составили большинство в студенческом конгрессе Геттингена). Ландау вышел в отставку и умер в 1938 году.

Э. Ландау (1877—1938)

Расовые законы относились к Эмми Нетер. Математические способности она унаследовала от отца, известного математика. Нетер приехала в Геттинген во время первой мировой войны. По рекомендации Клейна и Гильберта ее оставили в университете, несмотря на предубеждение многих членов факультета против того, чтобы женщина носила звание приват-доцента (Гильберт реагировал на это так: «*...университетский сенат — не баня!*»).

Нетер была выдающимся алгебраистом. В учебнике современной алгебры вы обнаружите «теоремы Нетер», «нетеровы кольца» и т. д. После замечательных работ Гильберта по так называемой теории инвариантов — решение было получено не на пути построения все более сложных формул, а с помощью новых общих понятий — алгебра переживала период расцвета. Нетер была центром алгебраического кружка в Геттингене. Однако в 1933 году она была уволена из университета и покинула Германию. После ее смерти в США в 1935 году А. Эйнштейн писал: *«По мнению самых компетентных из ныне здравствующих математиков, г-жа Нетер была самым значительным творческим гением (женского пола) из родившихся до сих пор»*.

Расовые законы относились к Р. Куранту, хотя он и был ветераном войны. Курант начинал как ассистент Гильберта, а вернувшись в университет с фронта после ранения, он стал преемником кафедры Клейна. Курант был ярким математиком с широким кругом интересов. Может быть, вы знакомы с его книгой «Что такое математика» — это одна из лучших популярных книг по нашей науке. Курант обладал и даром организатора. Его сотрудничество с издателем Фердинандом Шпрингером позволило в значительной степени решить проблему публикации математических результатов (сейчас Springer Verlag — крупнейшее издательство научной литературы).

В начале 20-х годов Куранту удалось осуществить старую мечту Клейна о создании в Геттингене Математического института. Время было не самым подходящим для подобных начинаний: в Германии свирепствовала инфляция (назначенная в 1906 году огромная премия в 100 тысяч марок за доказательство Великой теоремы Ферма превратилась в простой клочок бумаги). Но Куранту на посту директора Института удавалось успешно преодолевать многочисленные финансовые и административные затруднения. В 1933 году условия работы Куранта стали нетерпимыми. Он вышел в отставку и эмигрировал в США. В Нью-Йорке Курант создал математический институт, который сейчас носит его имя.

Э. Нетер (1882—1935)

Р. Курант (1888—1972)

Новым директором Института был назначен «чистый ариец» О. Нейгебауэр. Он занимал этот почетный пост ровно один день, так как отказался подписать подтверждение в лояльности режиму. Пост перешел к другому выдающемуся геттингенскому математику, преемнику кафедры Гильберта Герману Вейлю. Вейль еще надеялся, что математические традиции Геттингена можно спасти и при «новом порядке». Однако летом 1933 года он тоже покинул страну. В конце концов директором Института стал Гельмут Хассе, первоклассный математик и убежденный нацист.

В 1930 году в Геттингене было 5 полных профессоров математики: Ф. Бернштейн, Г. Вейль, Д. Гильберт, Р. Курант, Э. Ландау. Четверо покинули университет. Гильберт, которому в 1933 году исполнился 71 год, лишился многих коллег и учеников (своего ассистента П. Вернайса он содержал за свой счет еще год после увольнения). На одном банкете с участием рейхс-министра образования Гильберта спросили: *«Ну и как же теперь математика в Геттингене, после того, как она освободилась от еврейского влияния?»* *«Математика в Гет-*

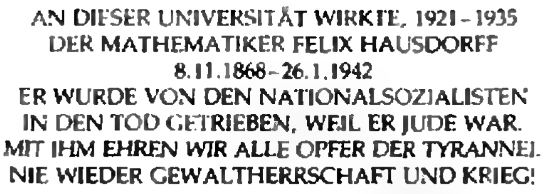
тингене? Да она просто не существует больше»,— ответил Гильберт.

Накануне войны

То, что произошло в Геттингене, повторялось во многих научных центрах Германии. Например, во Франкфурте, где в 1935 году прекратил существование семинар, на котором (на языке оригинала!) изучались математические работы разных эпох — от Евклида и Архимеда до Ферма и Барроу. Душой семинара был Макс Ден (прославившийся решением третьей проблемы Гильберта: правильный тетраэдр нельзя разрезать на части, из которых можно сложить куб). Ден был арестован в 1938 году, однако вскоре его выпустили из-за переполнения тюрем. Ему удалось бежать в Норвегию, где в 1940 году его застала немецкая оккупация. В 1941 году Ден оказался в Америке после долгого опасного путешествия через Финляндию, СССР и Японию.

В 1938 году нацисты перешли к «окончательному решению еврейского вопроса», т. е. к массовому физическому уничтожению евреев. Большинство математиков, которым угрожала опасность, уже покинули Германию, но были и такие, которые не захотели или не смогли уехать. Участник франкфуртского семинара П. Эпштейн в 1939 году покончил с собой, получив повестку из гестапо. Покончил с собой, чтобы избежать депортации в концлагерь, и Ф. Хаусдорф. Его судьбу разделили его жена и ее сестра. Один из четверых математиков, возглавлявших до 1933 года «Немецкий математический союз», О. Блюменталь был арестован в оккупированной Голландии и погиб в концлагере Терезин.

Германия потеряла многих выдающихся математиков. Среди беженцев были не только те, кто опасался преследований по расовому признаку,— многие просто не считали возможным жить при нацизме (например, знаменитый логик К. Гедель или участник франкфуртского семинара К. Зигель прошли бы любой тест на арийское происхождение). Вот несколько имен



AN DIESER UNIVERSITÄT WIRKTE, 1921-1935
DER MATHEMATIKER FELIX HAUSDORFF
8.11.1868-26.1.1942
ER WURDE VON DEN NATIONALSOZIALISTEN
IN DEN TOD GETRIEBEN, WEIL ER JUDE WAR.
MIT IHM EHREN WIR ALLE OPFER DER TYRANNEI.
NIE WIEDER GEWALTHERRSCHAFT UND KRIEG!

Мемориальная доска у входа в Математический институт Боннского университета: «В этом университете с 1921 по 1935 год работал математик Феликс Хаусдорф (8.11.1868—26.1.1942). Он умер по вине национал-социалистов из-за того, что был евреем. В его лице мы чтим память всех жертв тирании. Пусть никогда не повторится диктатура и война!»

математиков, покинувших Германию: Э. Артин, Г. Вейль, К. Гедель, М. Ден, К. Зигель, Р. Курант, Г. Леви, Р. фон Мизес, О. Нейгебауэр, Э. Нетер, Г. Радемайстер, И. Шур. К этому списку можно добавить венгерских математиков, подолгу работавших в Германии: Дж. фон Нейман, Дж. Пойя, Г. Сеге.

Немецкие математические традиции оказались подорванными. Конечно, математика может развиваться и без участия евреев (как и любой достаточно немногочисленной группы: например, рыжеволосых или, скажем, тех, чье имя начинается на одну из букв алфавита). Однако такое несправедливое ограничение неизбежно разрушит структуру науки, сложившуюся при нормальных условиях. И создаст обстановку, неприемлемую для многих из тех, кого эти ограничения непосредственно не затрагивают. В то же время и среди выдающихся математиков достаточно много людей с сильными национальными предрассудками. Это, увы, лишний раз подтверждает тезис о совместимости «гения и злодейства».

Закончу я словами К. Зигеля: *«Будем надеяться, то, что сделали тогда достойным и честным людям введенные в заблуждение фанатики, не повторится никогда»*.

Задачник „Кванта"

Задачи

M1246—M1250, Ф1253—Ф1257

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 декабря 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1246» или «Ф1253». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1246—M1249 предлагались в этом году на Ленинградской городской олимпиаде по математике, задачи Ф1253, Ф1254 и Ф1257 — на заключительном этапе XXIV Всесоюзной олимпиады по физике.

M1246. Докажите, что в любой бесконечной арифметической прогрессии члены которой — натуральные числа, найдутся два числа с одинаковой суммой цифр.

С. Генкин

M1247. Можно ли плоскость покрыть без наложений квадратами с длинами сторон 1, 2, 4, 8, 16, ..., используя квадрат каждого размера не более а) десяти раз, б) одного раза?

Д. Фомин

M1248. В отрезке находится несколько отрезков меньшего размера, покрывающих его целиком.

а) Докажите, что левые половины этих отрезков покрывают не менее половины исходного отрезка.

б) Докажите, что если у каждого из этих отрезков отбросить какую-либо половину — левую или правую,— то оставшиеся половины покрывают не менее трети длины исходного отрезка.

Д. Фомин

M1249. В королевстве Олимпия $n>6$ городов, каждые два из которых соединены одной дорогой с односторонним движением. При этом не из каждого города можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.

а)* Докажите, что король может выбрать один из городов и, изменив направление движения на всех дорогах, входящих и выходящих из него, добиться того, чтобы можно было проехать из любого города в любой другой.

в) Верно ли это утверждение для $n=6$?

И. Итенберг

M1250*. Пусть x_1, x_2, x_3, ..., x_n — положительные числа. Докажите, что

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_5}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2}$$

а) больше $(\sqrt{2}-1)n$;

б) больше $5n/12$;

в) не меньше $n/2$, если последовательность x_1, x_2, ..., x_n монотонна.

Л. Курляндчик, А. Файбусович

Ф1253. Прямоугольный сосуд с водой стоит на двух опорах, разнесенных на расстояние L друг от друга. Над сосудом на перекладине подвешен на нити кусок свинца массой M на расстоянии l от центра сосуда (рис. 1). Силы реакции опор при этом равны N_1 и N_2. Нить удлиняют так, что свинец погружается в воду. Какими станут после этого силы реакции опор? Плотность свинца в n раз больше плотности воды.

А. Зильберман

Ф1254. В морозную осеннюю ночь на спокойной поверхности озера начинает нарастать лед и за 10 часов дости-

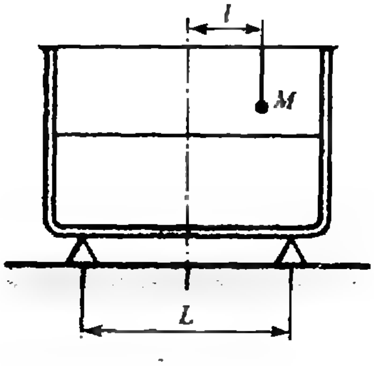


Рис. 1.

гает толщины 10 см. Какой толщины достигнет лед, если такая температура продержится без изменений в течение 1000 часов? Считайте теплопроводность льда намного большей, чем теплопроводность воды. Озеро очень глубокое.

В. Скороваров

Ф1255. Поверхность безжизненной планеты покрыта толстым слоем замерзшей углекислоты. Предлагается создать на ней атмосферу из чистого кислорода, разлагая углекислоту на углерод и кислород. За какое время это удастся сделать, если за 1 секунду разлагать 10^6 молей? Необходимо получить давление $p=0{,}2$ атм. Считайте, что у поверхности установится температура $T=200$ К, при которой испарением углекислоты можно пренебречь. Масса планеты $M=7{,}5\cdot10^{22}$ кг (примерно равна массе Луны), радиус $R=1750$ км.

Д. Могилевцев

Ф1256. На кольцевой сердечник с большой магнитной проницаемостью намотана катушка, содержащая $N=2000$ витков и имеющая индуктивность $L=5$ Гн. К концам катушки подключен резистор сопротивлением $R=200$ Ом. Батарейку напряжением $U_0=1{,}5$ В подключают между одним из концов катушки и витком номер 300, считая от этого конца. Какие токи будут течь по обеим частям катушки через время $t=0{,}1$ с после подключения? Батарейку считать идеальной, рассеянием магнитного потока пренебречь.

З. Рафаилов

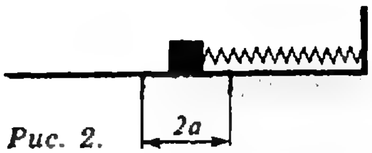


Рис. 2.

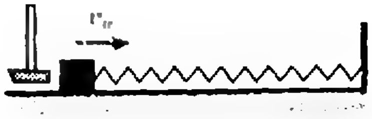


Рис. 3.

Ф1257. Период свободных колебаний груза, висящего на пружине, оказался равным T_0. Груз с пружиной расположили на шероховатой горизонтальной поверхности (рис. 2) и, смещая груз влево и вправо, измерили ширину области, внутри которой груз может находиться в равновесии под действием силы трения и силы упругости пружины (так называемой зоны застоя),— она оказалась равной $2a$. В следующем опыте груз сместили из зоны застоя на расстояние, существенно превышающее a, и наблюдали колебания груза. Каким окажется период колебаний?

Теперь поставим опыт иначе. Всякий раз, когда груз при колебаниях оказывается в крайнем левом положении, по грузу стукают молоточком (рис. 3), и скорость груза становится равной v_0. Какова будет амплитуда установившихся колебаний груза?

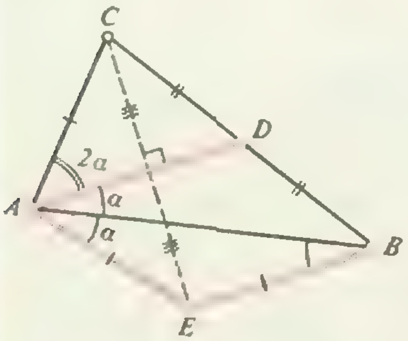
Предполагая, что амплитуда установившихся колебаний значительно больше ширины зоны застоя, определить, на сколько период установившихся колебаний отличается от периода свободных колебаний T_0.

С. Козел

Решения задач

М1221 — М1225, Ф1233 — 1237

М1221. *Постройте треугольник по двум сторонам так, чтобы медиана, проведенная к третьей стороне, делила угол треугольника в отношении 1:2.*



Если медиана AD делит угол A треугольника ABC на части $\angle BAD=\alpha$, $\angle CAD=2\alpha$ (см. рисунок), то, приравнивая выражения для площадей треугольников BAD и CAD

$$\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot \sin\alpha=\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot \sin 2\alpha,$$

мы получаем, что $\cos\alpha=AB/2AC$. Эта формула позволяет по данным сторонам AB и AC построить угол α, а с ним и треугольник ABC. Из очевидного условия $0<\alpha<\pi/3$ следует, что задача имеет решение (и притом единственное) при $1<AB/AC<2$.

Приведем и чисто геометрическое решение. Если E — это точка, симметричная C относительно медианы AD, то, как легко видеть, $BE\parallel AD$ (см. рисунок), следовательно, $\angle EBA=\angle DAB=\angle EAB$, т. е. треугольник ABE равнобедренный, причем $BE=EA=AC$. Таким образом, мы можем построить треугольник ABE по сторонам, провести $AD\parallel BE$, а затем найти и точку C, симметричную E.

В. Прасолов, В. Чичин

М1222. *Пусть $m>1$ — натуральное число, s — наибольшее целое число, для которого $2^s\leqslant m$. Докажите, что*

а) для любых $s+1$ целых чисел можно выбрать несколько чисел и расставить знаки плюс и минус между ними так, что полученная сумма будет делиться на m;

б) оценка в пункте а) неулучшаема: существуют такие s целых чисел, что никакая сумма нескольких из них при любой расстановке знаков не делится на m.

а) Рассмотрим все возможные «не алгебраические» (т. е. без минусов) суммы, которые можно составить из $s+1$ чисел. Их количество равно $2^{s+1}-1>m-1$. (Каждую сумму можно задать последовательностью длины $s+1$ из нулей и единиц, в которой на i-м месте стоит 1, если в сумму входит i-е число; количество последовательностей равно 2^{s+1}, последовательность из одних нулей надо исключить.) Если какие-то две суммы дают одинаковые остатки при делении на m, то их разность — искомая «алгебраическая» сумма. Если все остатки различны, то они принимают все возможные m значений $0, 1, \ldots, m-1$, и сумма, дающая остаток 0,— искомая.

б) Вот пример s целых чисел таких, что никакая алгебраическая сумма некоторых из них не кратна m: $1, 2, 4, \ldots, 2^{s-1}$. Действительно, любая такая сумма по модулю не превосходит $1+2+4+\ldots+2^{s-1}\leqslant m-1$. С другой стороны, эти суммы не могут быть равны 0: если 2^l — наименьшее слагаемое такой суммы, то вся сумма будет делиться на 2^l, но не будет делиться на 2^{l+1}.

В. Лев

М1223. *На квадратный лист бумаги со стороной 1 посадили несколько клякс.*

Пусть S, c, b — площадь произвольной кляксы и длины ее проекций на горизонтальную и вертикальную стороны листа. Тогда $S\leqslant cb$; кроме того, $S\leqslant 1$ по условию.

площадь каждой из которых не больше 1. Докажите, что если каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы, то суммарная площадь клякс не больше a.

Следовательно, $S\leqslant\sqrt{S}\leqslant\sqrt{cb}\leqslant(c+b)/2$ согласно неравенству Коши. Суммируя эти неравенства по всем кляксам, получим, что общая их площадь не превосходит половины суммарной длины их проекций на горизонтальную и вертикальную стороны листа. Осталось заметить, что проекции клякс на данную сторону не пересекаются, поэтому сумма их длин не больше длины a стороны, а сумма площадей не больше $(a+a)/2=a$.

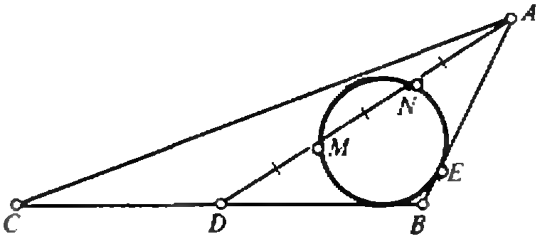
А. Разборов

М1224. *Из вершины треугольника проведен отрезок в точку на противоположной стороне, делящийся вписанной окружностью на три равные части. Может ли этот отрезок оказаться а) высотой; б) медианой; в) биссектрисой треугольника?*

Ответ: а), в) не может, б) может.

Введем обозначения, как на рисунке. Заметим, что если длины двух крайних частей проведенного отрезка AD равны ($AN=DM$), то треугольник ABD, очевидно, равнобедренный ($AB=BD$). Следовательно, AD не может быть ни высотой ($\angle ADB<90^\circ$), ни биссектрисой ($\angle CAD<\angle ADB=\angle BAD$), а медианой он может являться лишь тогда, когда $a=2c$, где $a=BC$, $c=AB$.

Пусть теперь условие $a=2c$ выполнено. Покажем, что при некотором $b=AC$ вписанная окружность поделит медиану $AD=m$ на равные части. Нам понадобятся следующие три хорошо известные и очень полезные утверждения:



1) $m^2=(2b^2+2c^2-a^2)/4$;

2) $AE=(b+c-a)/2$,

где E — точка касания вписанной окружности со стороной AB;

3) $AE^2=AN\cdot AM$

(это верно для любой секущей ANM).

Подставляя в равенства 1) и 2) $a=2c$, в 3) — значение AE из 2), $AN=m/3$, $AM=2m/3$ и m^2 из 1), получим условие

$$AE^2=\left(\frac{b-c}{2}\right)^2=\frac{2}{9}\,m^2=\frac{2}{9}\,\frac{b^2-c^2}{2},$$

или $9(b-c)=4(b+c)$ (сокращение на $b-c$ возможно, так как $a=2c<b+c$, т. е. $b-c>0$). Отсюда $b=13c/5$. Поскольку $2c-c<13c/5<2c+c$, треугольник со сторонами $2c$, $13c/5$, c существует. Части AN и DM медианы в таком треугольнике равны, так как $BD=c=BA$. Отрезок $x=AN$ удовлетворяет уравнению $x(m-x)=AN\cdot AM=AE^2=2m^2/9$, имеющему корни $m/3$ и $2m/3$, и неравенству $x<m-x$ ($AN<AM$). Следовательно, $x=m/3$, что нам и требовалось.

В. Сендеров

М1225*. *Докажите, что*
а) если для натуральных чисел a и b число $(a^2+b^2)/(ab-1)$ натуральное, то оно равно 5;
б) уравнение $x^2-5xy+y^2+5=0$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

В доказательстве обоих утверждений можно использовать следующую основную идею. Уравнение

$$x^2-qxy+y^2+q=0 \qquad (1)$$

при фиксированных q и y — квадратное относительно x. Если при целых q и y оно имеет один целый корень x, то должно иметь и еще один целый корень (согласно теореме Виета, равный $qy-x$). Подобная идея не раз встречалась в задачах про уравнения в целых числах.

а) Мы должны доказать, что если уравнение (1) имеет решение (x, y) в целых положительных числах, то $q=5$. Отметим сразу, что при $q=1$ и $q=2$ таких решений очевидно нет:

$$x^2-xy+y^2+1=(x-y)^2+xy+1>1,$$
$$x^2-2xy+y^2+2=(x-y)^2+2>1.$$

Далее, при $q>2$ нет целых решений таких, что $x=y$ (если $x^2(2-q)+q=0$, то $x^2=q/(q-2)=1+2/(q-2)$, а это число не превосходит 3 и больше 1). Наконец, заметим еще, что уравнение (1) рассматриваемое как квадратное относительно x при целых $q>2$ и $y>0$ не может иметь кратных корней. В самом деле, если его дискриминант равен 0, т. е. если $y^2q^2-4(y^2+q)=0$, то $y^2=4q/(q^2-4)$, а это число при $q>2$ не превосходит $12/5$ и не равно 1, поскольку уравнение $q^2-4q-4=0$ не имеет целых корней.

Теперь вспомним основную идею: из каждого решения (x, y) можно получить еще одно решение с тем же y. Среди всех решений (x, y) уравнения (1) с данным q, для которых $x>y$, рассмотрим решения с наименьшим y. Пусть это будут решения (v, y) и (w, y). Тогда $y<v<w$, так что $v\geqslant y+1$, $w\geqslant y+2$.

По теореме Виета, поскольку $x=v$ и $x=w$ — корни уравнения (1), $vw=y^2$, $v+w=qy$. Поэтому

$$y^2+q-qy=vw-v-w=(v-1)(w-1)-1\geqslant$$
$$\geqslant y(y+1)-1=y^2+y-1.$$

откуда $1-y+q-qy\geqslant 0$, или $(1-y)(1+q)\geqslant 0$. Но это возможно лишь если $y=1$ и все неравенства обращаются в равенства, т. е. $v=2$, $w=3$, $q=5$.

Последнее рассуждение можно заменить более наглядным, если воспользоваться геометрической интерпретацией уравнений (1). Каждое из них (при $q=3, 4, 5, 6, \ldots$) на плоскости Oxy задает гиперболу, симметричную относительно прямой $x=y$, вершина которой лежит на отрезке $1\leqslant x\leqslant 2$ этой прямой. Если прямая, параллельная одной из осей, пересекает гиперболу в «целой» точке, то и вторая ее точка пересечения с гиперболой — целая. Пользуясь этим, легко показать, что если гипербола содержит хоть одну целую точку, то такая точка есть и вблизи вершины — на участке, расположенном ниже нее (еще ближе к оси Ox). Так дело сводится лишь к решениям с $y=1$, с которыми уже легко разобраться.

б) Итак, осталось рассмотреть уравнение с $q=5$:

$$x^2-5xy+y^2+5=0. \qquad (2)$$

Два его решения — (1, 2) и (1, 3) — очевидны. Из каждого решения (x, y), кроме симметричного (y, x), можно получить еще одно решение с тем же y: $(5y-x, y)$; действительно,

$$(5y-x)^2-5(5y-x)y+y^2=x^2-5xy+y^2=-5.$$

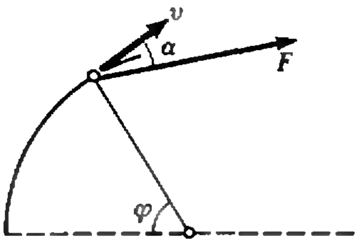
Заметим, что если $y>x$, то $5y-x>4y>y$. Таким образом, любые два соседних члена последовательностей

$$1,\ 2,\ 9,\ 43,\ 206,\ 987,\ \ldots,$$
$$1,\ 3,\ 14,\ 67,\ 321,\ 1538,\ \ldots,$$

где каждый член получается из двух предыдущих x, y по формуле $5y-x$, дают новое решение уравнения (2).

С. Мамиконян, Г. Оганесян

Ф1233. *Гонки мотоциклистов происходят по узкой круговой трассе. Трогаясь с места, мотоциклист стремится побыстрее набрать скорость. Какую часть круга он пройдет к моменту достижения максимальной скорости?*



Сразу скажем, что для быстрого разгона нужно как можно лучше использовать силу трения.

Пусть α — угол между скоростью мотоцикла $\vec{v}$ и силой трения о землю $\vec{F}$ в некоторый момент времени (см. рисунок). Запишем уравнения движения мотоцикла в проекциях на направления касательной и нормали к траектории:

$$mv'=F\cos\alpha,\quad mv^2/R=F\sin\alpha.$$

Дифференцируя по времени второе уравнение, с учетом первого получим

$$2v/R=\alpha',$$

или (поскольку $v/R=\omega=\varphi'$)

$$2\varphi'=\alpha'.$$

Отсюда

$$2\varphi=\alpha+\text{const}.$$

При $\varphi=0$ (начальная точка) $\alpha=0$, поэтому $\text{const}=0$ и

$$2\varphi=\alpha.$$

В момент достижения максимальной скорости

$$\alpha=\pi/2 \text{ и } \varphi=\pi/4,$$

что соответствует $1/8$ части окружности.

А. Черноуцан

Ф1234. *Для охлаждения потока воздуха в цилиндрической трубе при нормальных условиях, в неко-*

Так как через стенки трубы вещество нигде не втекает и не вытекает, в любом поперечном сечении трубы (в том числе на входе и на выходе) масса вещества, пересекающего это сечение в единицу времени (поток *тором ее сечении впрыскивают одинаковые капли жидкого азота, которые испаряются вниз по течению. Скорости газа и капель всюду равны между собой (их начальные значения $u_0=10$ м/с), стенки трубы не проводят тепла. Найти значения скорости, плотности и температуры потока после испарения всех капель, если их начальный секундный расход такой же, как и воздуха. Температура кипения жидкого азота при атмосферном давлении 77 К, удельная теплота парообразования $L=2\cdot 10^5$ Дж/кг. Свойства газообразных воздуха и азота считать одинаковыми.*

массы), должна быть одинаковой:

$$(\rho+\rho')uS=(\rho_0+\rho_0')u_0S=\mathrm{const}.$$

Здесь мы уже учли, что газ плотностью ρ и капли жидкости плотностью ρ' движутся с одинаковой общей скоростью; по условию задачи, $\rho_0'=\rho_0$.

По закону Бернулли (или второму закону Ньютона)

$$(\rho+\rho')uS\Delta u=-\Delta pS.$$

Оценим изменение давления Δp по трубе. По мере испарения капель плотность газообразной среды будет расти, температура потока падать, скорость уменьшаться (все это будет видно и в конце решения). Поэтому наибольшее изменение скорости составляет $|\Delta u|_{\max}=u_0$ (при условии полной остановки потока). Из полученных уравнений найдем

$$(\rho_0+\rho_0')u_0\cdot\Delta u=-\Delta p,$$

откуда

$$|\Delta p|_{\max}=(\rho_0+\rho_0')u_0^2\approx 200\ \text{Па}.$$

Таким образом, наибольшее возможное изменение давления на три порядка меньше атмосферного давления. Следовательно, можно считать давление постоянным вдоль потока. Тогда и температуру испаряющихся капель тоже можно считать постоянной (точно так же, как постоянна температура кипящего чайника при атмосферном давлении; только для жидкого азота эта температура равна 77 К). Далее, из закона Менделеева — Клапейрона и условия постоянства давления следует, что плотность и температура несущего газа обратно пропорциональны друг другу:

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{T_0}{T}.$$

Каждая единица массы вещества несет и энергию, состоящую из кинетической энергии хаотически движущихся молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Если считать газ, несущий капли, идеальным, то его удельная энергия (энергия единичной массы) равна c_pT (для идеального газа энергия взаимодействия его молекул равна нулю; индекс p у теплоемкости указывает на постоянство давления). Эта же энергия для газообразной массы, только что испарившейся с капли температуры T', равна c_pT'; в конденсированном состоянии (в жидкой капле) она равна $c_pT'-L$, где L — удельная теплота испарения, в которую входит удельная потенциальная энергия взаимодействия молекул. Полная энергия вещества, пересекающего любое сечение трубы в единицу времени (поток полной энергии), одинакова:

$$c_pT\rho uS+(c_pT'-L)\rho'uS=\mathrm{const}.$$

Здесь мы пренебрегли кинетической энергией макроскопического движения смеси $(\rho+\rho')(u^2/2)uS$, так как она существенно меньше тепловой ($u^2\ll c_pT$, $10^2\ll 10^3\times\times 300=3\cdot 10^5$, где $c_p\approx 10^3$ Дж/(кг·К)).

Можно еще связать плотность облака капель с их радиусом: $\rho'/\rho_0'=(r/r_0)^3$. Это позволит выразить все газодинамические параметры как функции от r/r_0:

$$\frac{u}{u_0}=\frac{1-\varepsilon_0 l}{1-\varepsilon_0 l(r/r_0)^3},\ \frac{\rho}{\rho_0}=\frac{T_0}{T}=\frac{1+\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0(r/r_0)^3}\,\frac{u_0}{u},$$

где

$$l=\frac{L}{c_pT_0}-\frac{T_0'}{T_0},\ \varepsilon_0=\frac{\rho_0'}{\rho_0}.$$

Согласно условию, $\varepsilon_0=1$, $l\approx0{,}4$. После испарения капель $r/r_0=0$. Отсюда получим окончательно

$$\frac{u}{u_0}=1-l\approx0{,}6\Rightarrow u\approx6\ \text{м/с},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{T_0}{T}=\frac{2}{1-l}\approx3\Rightarrow\rho\approx3\ \text{кг/м}^3,\ T\approx100\ \text{К}.$$

А. Стасенко

Ф1235. *Длинная гирлянда составлена из одинаковых лампочек, подключенных к паре проводов на расстоянии 1 м друг от друга (рис. 1). Сопротивление 1 м провода составляет 0,2 Ом, лампочек в гирлянде 100. Какой ток потребляет гирлянда от источника напряжением 2,5 В?*

Увеличим напряжение источника на 0,1 В. На сколько увеличится мощность, переходящая в тепло в отрезках проводов, которые соединяют источник с первой лампочкой гирлянды? Вольт-амперная характеристика лампочки приведена на рисунке 2.

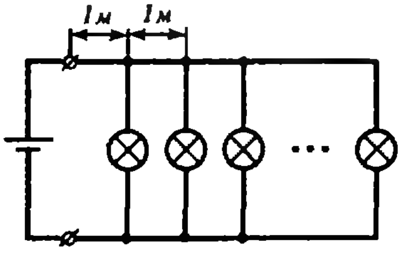


Рис. 1.

Широко известны задачи с бесконечными цепями из резисторов, однако в нашем случае все сложнее — ведь чем дальше лампочка от источника, тем меньше она накалена, а значит, и сопротивление ее меньше. Тем не менее при разумных упрощениях эту задачу можно решить не выходя за рамки школьной программы.

Во-первых, цепь эту все же можно считать бесконечной (сделайте оценку сами — только учтите уменьшение сопротивления «холодных» ламп). Во-вторых, ясно, что ток гирлянды во много раз больше тока одной лампы при том же напряжении; учтем это и в нужном месте воспользуемся для упрощения уравнений.

Найдем зависимость тока гирлянды I от приложенного к ней напряжения U. Для этого добавим еще одно звено между источником и гирляндой, а напряжение источника увеличим на ΔU, чтобы напряжение на гирлянде осталось прежним (рис. 3). Тогда

$$I(U+\Delta U)=I(U)+i(U),$$

где $i(U)$ — ток одной лампы при напряжении U. Сопротивление куска провода намного меньше, чем у нагретой лампы, поэтому величина ΔU мала, и изменение тока можно выразить через производную функции $I(U)$:

$$\Delta I=\frac{dI}{dU}\Delta U.$$

Но

$$\Delta U=r(I(U)+i(U))\approx rI(U),$$

поэтому можно записать

$$rI(U)\frac{dI}{dU}=i(U).$$

Левая часть этого равенства выражается через производную от квадрата величины $I(U)$:

$$rI(U)\frac{dI}{dU}=\frac{d(rI^2(U)/2)}{dU}.$$

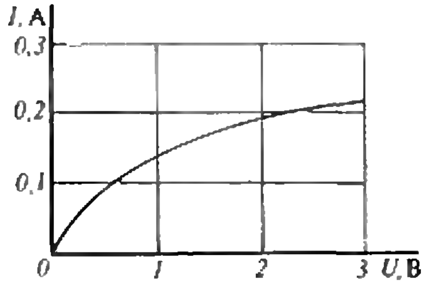


Рис. 2.

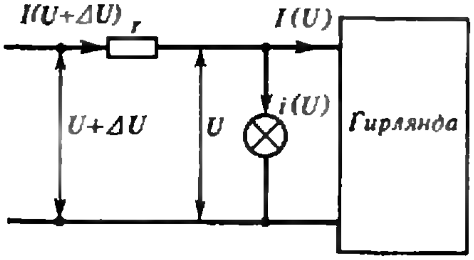


Рис. 3.

Итак, в левой части записана производная от некоторой функции, а справа — известная функция, график которой нам задан. Значит, эту «некоторую» функцию можно найти как интеграл от $i(U)$. Если график удастся заменить на подходящую функцию, заданную аналитически, то интеграл можно будет посчитать (см., например, решение задачи Ф1227, опубликованное в восьмом номере журнала). Но можно обойтись и без этого, тогда придется посчитать площадь под графиком $i(U)$ (см. рис. 2) от 0 до интересующего нас значения U. Обозначив эту площадь через $S(U)$, можно записать

$$I(U)=\sqrt{2S(U)/r}.$$

Для $U=2{,}5$ В и $r=0{,}2$ Ом получим $I=1{,}9$ А.

На второй вопрос задачи ответить легче — достаточно заметить, что та «некоторая» функция, которую мы искали (без множителя 1/2), это как раз мощность, выделяющаяся на проводах от источника до гирлянды. Ее производная — это $i(U)$, а значит, ее изменение при небольшом U выражается так:

$$P=2i(U)\Delta U=0{,}04 \text{ Вт}.$$

А. Зильберман,
И. Потеряйко

Ф1236. *Электромагнитное реле имеет обмотку индуктивностью 1 Гн с сопротивлением 10 Ом. Обмотка реле подключена к источнику напряжением 20 В последовательно с парой нормально замкнутых контактов, которые размыкаются при срабатывании реле. Параллельно обмотке реле включен диод, как показано на рисунке (см. с. 30). Ток срабатывания реле составляет 0,1 А, ток отпускания 0,09 А. Зачем может понадобиться такое устройство и для чего в нем используется диод? Рассчитайте параметры устройства. При каком минимальном напряжении источника оно может работать?*

После включения ток в катушке нарастает до величины $I_0=0{,}1$ А. Сопротивление цепи мало — даже при максимальном токе падение напряжения составит 1 В, поэтому для простоты можно считать нарастание тока линейным:

$$I=U_0t/L.$$

Когда ток достигнет 0,1 А, реле сработает, и контакт разомкнется. При этом ток потечет через открывшийся диод. Если бы сопротивление цепи было равно нулю, этот ток не уменьшался бы. Однако наличие напряжения на сопротивлении $r=10$ Ом (напряжение на катушке — это ЭДС индукции) приводит к постепенному падению тока — до величины $I_1=0{,}09$ А (тока отпускания реле), при котором контакт снова замкнется, и ток станет нарастать. ЭДС индукции при нарастании тока меняется от $U_0=I_0r=1$ В до $U_1=I_1r=0{,}9$ В. Видно, что изменение этого напряжения невелико, и для простоты можно считать его постоянным:

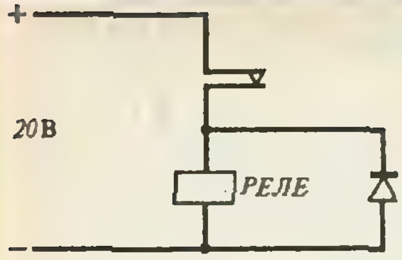
$$U_{\text{ср}}=0{,}95 \text{ В}.$$

При этом ток меняется по приблизительно линейному закону, и время падения его от I_0 до I_1 равно

$$t_1=L(I_0-I_1)/(rI_{\text{ср}})=0{,}01 \text{ с}.$$

Время нарастания тока от I_1 до I_0 определяется напряжением источника и составляет

$$t_2=L(I_0-I_1)/U\approx 0{,}0005 \text{ с}.$$



Полный период колебаний

$$T = t_1 + t_2 \approx 0{,}011\ \text{с}.$$

Минимальное напряжение, при котором схема будет работать в режиме колебаний, составляет 10 Ом · 0,1 А = 1 В (правда, при уменьшении напряжения сильно возрастает период колебаний).

Устройства такого рода применяются там, где нужен источник звука попроще (его называют «зуммер»). Например — в телефонных аппаратах.

Если бы в схеме не использовался диод, при размыкании цепи возникали бы довольно большие «выбросы напряжения». Наличие диода дает возможность катушке рассеивать энергию постепенно, не причиняя вреда другим элементам схемы.

З. Рафаилов

Ф1237. *Плосковыпуклая линза сделана из стекла с коэффициентом преломления $n=1{,}6$. Радиус сферической поверхности $R=10$ см, толщина линзы $d=0{,}2$ см. На плоскую поверхность параллельно главной оптической оси линзы направляют параллельный пучок и фокусируют его на экране, открыв только небольшую часть линзы около оси («задиафрагмировав» линзу). После этого диафрагму убрали. Найти диаметр пятна на экране.*

Пустим на плоскую грань линзы параллельный пучок вдоль главной оптической оси. Рассмотрим преломление произвольного луча из этого пучка и найдем расстояние от центра сферической поверхности до точки, где после преломления этот луч пересечет главную оптическую ось линзы (рис. 1):

$$x = R\sin\alpha/\operatorname{tg}(\beta-\alpha) =$$

$$= R\sin\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)/(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha),$$

$$\sin\beta = n\sin\alpha,$$

$$L(\alpha) = R\cos\alpha + x = R/(\cos\alpha - \sqrt{1/n^2-\sin^2\alpha}).$$

Из полученного выражения видно, что $L(\alpha)$ — монотонная функция угла α — при его возрастании расстояние убывает. Случай с диафрагмой соответствует совсем малому углу: $L(0)=F=R/(1-1/n)=26{,}7$ *см*. Максимальный угол α_{max} соответствует падению луча на край линзы. Из простых геометрических соображений

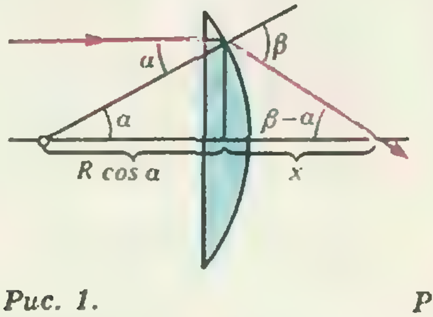


Рис. 1.

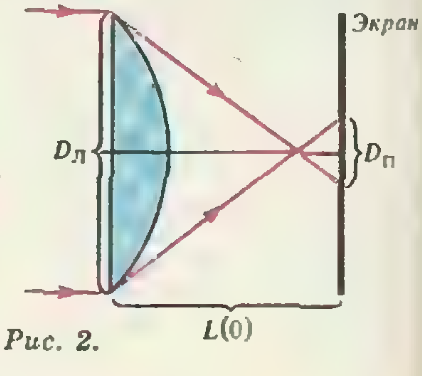


Рис. 2.

$\cos\alpha_{max} = 1 - d/R = 0{,}98$, и $L(\alpha_{max}) = 25{,}8$ см.

Теперь из подобия (рис. 2) получим

$$D_{\text{п}} = D_{\text{л}}(L(0)-L(\alpha_{max}))/L(\alpha_{max}) =$$

$$= 2R\sin\alpha_{max}\cdot(L(0)-L(\alpha_{max}))/L(\alpha_{max}) = 0{,}13\ \text{см}.$$

Р. Александров

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1201—М1215, Ф1208—Ф1222, справились с задачами М1202, М1206, М1208, Ф1208—Ф1212, Ф1214, Ф1215. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Е. Агеев (Донецк) 01; *П. Андреева* (п. Черноголовка Московской обл.) 07, 13; *Д. Андриенко* (Киев) 04, 07, 11, 13, 15; *А. Ахмедов* (Баку) 05, 07, 15; *П. Байдаков* (Москва) 01; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 07, 12, 14; *Е. Беркович* (Киев) 11; *Е. Бессонов* (Харьков) 07, 11; *А. Бобков* (Балаково) 11; *А. Богданов* (Старый Оскол) 01, 03, 07, 09, 10; *Д. Болдырев* (Черкесск) 01; *А. Бородин* (Донецк) 01, 03, 07, 11—13, 15; *В. Бринюк* (Донецк) 01, 07, 11; *К. Бродский* (Челябинск) 04, 05; *В. Бур* (Подгайцы) 07; *Ю. Бурдэ* (Пермь) 01, 07; *О. Валощук* (Гайворон) 03; *В. Ванак* (Дедовск) 07, 11; *Л. Василева* (Враца, НРБ) 07; *Н. Васильев* (Москва) 01; *С. Василькевич* (Киев) 01, 07; *Р. Велиев* (Баку) 07; *В. Видрашко* (Кушаны) 07; *В. Виташвили* (Тбилиси) 07; *М. Волошина* (Москва) 01; *К. Волченко* (Донецк) 01, 03, 04, 11—13, 15; *И. Выхристенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 01, 11; *О. Гайдай* (Львов) 07, 13; *М. Гельбанд* (Одесса) 07, 12, 14; *С. Гегун* (Киев) 03—05, 07, 11, 12, 14, 15; *С. Гнедков* (пгт Палатка Магаданской обл.) 07; *С. Голубчик* (Харьков) 11; *М. Гумбатов* (Мингечаур) 07; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 07; *А. Даниленко* (Волгоград) 15; *С. Дориченко* (Берегово Закарпатской обл.) 04; *В. Дубровнер* (Киев) 01, 07; *И. Егорова* (Ленинград) 03, 07, 11, 15; *Р. Елчуев* (Баку) 07; *Д. Жалковский* (Донецк) 11, 12; *С. Жарков* (Киев) 04; *А. Жеглов* (Москва) 07, 15; *О. Жеребцов* (Усинск) 07; *А. Задворный* (Киев) 07; *Е. Заморина* (Пермь) 01, 05; *Э. Заморина* (Пермь) 07; *А. Зимин* (Иваново) 07; *А. Зингер* (Москва) 01, 04; *Н. Ивченко* (Киев) 01, 03; *И. Изместьев* (пгт Суна Кировской обл.) 03, 04; *Р. Исмаилов* (Ленинград) 04, 12, 15; *Т. Калита* (Киев) 11, 13; *Г. Каминский* (Киев) 01; *С. Карачик* (Ташкент) 07; *И. Кацман* (Киев) 11; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 01, 07; *С. Коваценко* (Винница) 03, 05, 07, 11—15; *О. Ковылин* (Волгоград) 01; *А. Козачко* (Винница) 03, 05, 07, 11—15; *А. Копылов* (п. Черноголовка Московской обл.) 01; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 03, 07, 11, 15; *Ю. Креавич* (Киев) 07; *А. Криволуцкий* (Новосибирск) 12, 13; *А. Кудрявцева* (Киев) 07; *П. Купчик* (Козова) 07; *А. Лебедев* (Краснодар) 07; *М. Лейчкис* (Киев) 01, 07; *М. Ли* (Одесса) 11; *Ю. Литвинова* (Киев) 07; *М. Лоенко* (Павлодар) 04; *А. Львов* (Москва) 03, 05, 07; *М. Майлыбаев* (п. Черноголовка Московской обл.) 07; *А. Медведев* (Владимир) 01, 03, 04; *Б. Медник* (Днепропетровск) 01, 07; *К. Мильштейн* (Киев) 07, 11, 13—15; *К. Мишачев* (Липецк) 01, 03, 05, 07, 11—15; *И. Младенова* (София, НРБ) 07; *А. Мухаметшинц* (Мамадыш) 04, 11; *Р. Мучник* (Винница) 03, 05, 07, 11, 13, 14; *И. Найденов* (София, НРБ) 07; *А. Насыров* (Обнинск) 01, 03, 05, 07, 11—13; *В. Некрашевич* (с. Крутые Горы Киевской обл.) 07; *Н. Немировская* (Киев) 11—13; *Д. Номировский* (Черкассы) 01, 03, 04, 07, 12, 13, 15; *М. Оруджев* (Махачкала) 07; *А. Осипов* (Свердловск) 07; *С. Павличков* (Евпатория) 07; *Т. Панов* (Киев) 01, 03—05, 07, 11, 12, 14, 15; *В. Пасхавер* (Киев) 01, 03—05, 07; *Е. Перельман* (Ленинград) 05, 07, 12, 14; *Т. Петренко* (Киев) 01; *В. Пиковский* (Киев) 07, 11, 13; *Э. Пикялите* (Вильнюс) 01; *М. Плотников* (Вологда) 04, 07, 11, 15; *А. Погребняк* (Киев) 01, 11—13; *Ю. Полонский* (Витебск) 01; *О. Полунина* (Омск) 01; *А. Разин* (Одесса) 01, 03, 07, 11—15; *М. Реачев* (Винница) 01; *Д. Рекалов* (Киев) 01, 07, 10, 11, 15; *А. Руденко* (Киев) 01, 03—05, 07; *Д. Русайтите* (Вильнюс) 01; *В. Рычков* (Куйбышев) 11, 15; *Л. Рябова* (Клин) 07; *А. Сафронов* (Томск) 07; *В. Севриновский* (Москва) 14; *Г. Сироткин* (Харьков) 07, 11, 13, 14; *А. Скороход* (Киев) 03. 07; *А. Солодов* (Воронеж) 01, 07, 12, 14; *А. Солодушкин* (Томск) 07; *И. Сперанский* (Донецк) 11—13, 15; *Р. Сульжик* (Киев) 07; *Т. Таран* (Фрунзе) 07; *С. Трегубенко* (Красногорск Московской обл.) 01, 07; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 01, 07, 11, 12; *М. Хасин* (Донецк) 01, 03—05, 07, 11—13, 15; *Ю. Хорошилов* (Челябинск) 01; *В. Швец* (пгт Новоднестровск Черновицкой обл.) 01; *А. Шилов* (Гусь-Хрустальный) 01, 07; *А. Шиндлер* (Феодосия) 01, 04; *Я. Шихов* (пгт Суна Кировской обл.) 07; *А. Шнайдман* (Киев) 01, 11, 13; *Д. Щукин* (Саратов) 01, 07, 09, 15; *О. Яцун* (Киев) 07.

Физика

А. Абдираимов (с. Момбеково Ошской обл.) 20; *А. Абдримов* (Шават) 13; *В. Ажаев* (Москва) 13, 16; *Т. Али-заде* (Баку) 16, 17; *Д. Андриенко* (Киев) 13, 21, 22; *О. Андрухов* (Ровно) 16; *С. Атанасян* (Ленинград) 18; *Я. Бабкин* (Киев) 13; *Н. Балюнас* (Вильнюс) 13, 21, 22; *М. Барашков* (д. Осиновка Могилевской обл.) 13, 20; *Б. Барышников* (Новгород) 17; *Р. Богачкин* (Москва) 18, 21; *А. Богданов* (Старый Оскол) 16; *В. Болховитин* (Караганда) 20; *В. Бондаренко* (Кузнецовск) 16, 21; *А. Борковский* (пгт Богородчаны Ивано-Франковской обл.) 18, 20, 21; *В. Ванчурин* (Москва) 16; *Л. Васильев* (Салават) 16, 18, 21; *Г. Вейтас* (Вильнюс) 13, 22; *И. Воскобойников* (Киев) 13, 16—18, 21, 22; *Г. Выгон* (Москва) 13, 16; *К. Галичский* (Северодвинск) 13, 16—18, 20—22; *М. Гатаулин* (Тюмень) 16; *А. Гвозденко* (Нежин) 16; *А. Гледзер* (Одинцово) 21; *С. Головко* (Горловка) 17; *П. Гребнев* (Кузнецовск) 16, 21; *Н. Гуляев* (Горький) 13, 16—19, 21; *Ю. Гуц* (Ровно) 16; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 13, 17, 20; *А. Деев* (Тула) 21; *А. Дементьев* (Чебоксары) 13, 16, 18, 20, 21; *А. Демяненко* (Горловка) 21; *И. Денисов* (д. Осиновка Могилевской обл.) 13, 20, 21; *С. Джосюк* (Винница) 13, 16, 17; *С. Диброва* (Киев) 13, 16—18, 21, 22; *Р. Димитров* (Варна, НРБ) 13, 17; *С. Добровольский* (Днепропетровск) 13, 16, 21; *А. Дубовик* (Брест) 13, 21; *М. Дьяк* (Владимир) 16—18, 21, 22; *М. Егоров* (Старый Оскол)

16; *И. Егорова* (Ленинград) 13, 16, 17, 21, 22; *Н. Ефремов* (Свердловск) 22; *А. Жуков* (Воронеж) 21; *Д. Жуковский* (Брест) 13; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 16, 21; *А. Задворнов* (Киев) 13; *А. Затворнов* (Киев) 13; *Д. Ибрагимов* (Черновцы) 16; *Н. Ивченко* (Киев) 20, 21; *И. Ильина* (Алма-Ата) 13; *Т. Калита* (Киев) 13, 16, 21; *К. Калюжный* (Одесса) 13. 21, 22; *Л. Катин* (Москва) 16; *И. Кацман* (Киев) 13, 17, 18, 21, 22; *А. Каширин* (Старый Оскол) 16; *Е. Климчук* (Кузнецовск) 13, 16, 17, 21, 22; *С. Коваль* (Гомель) 13, 16, 17, 21, 22; *Б. Ковтуненко* (Запорожье) 13, 16, 18, 20—22; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 13, 16, 18, 21; *В. Кордюк* (Киев) 18, 22; *Д. Коротков* (Астрахань) 13; *С. Котковский* (Черновцы) 13, 16; *Ю. Крвавич* (с. Княжполь Львовской обл.) 13; *Э. Криворотько* (Чехов Московской обл.) 21; *А. Кротов* (Новомосковск Тульской обл.) 13; *А. Кузнецов* (Жуковский) 13; *Ю. Кузьма* (Протва) 13, 16, 20—22; *С. Кузьменко* (Киев) 18, 21; *П. Куприн* (Северодвинск) 18; *П. Купчик* (Козова) 13; *А. Куранов* (Москва) 13, 16; *М. Лазарев* (пгт Никель Мурманской обл.) 13, 16; *В. Легостаев* (Кустанай) 13, 20; *С. Лемешко* (Харьков) 21; *Д. Логинов* (Тула) 16, 21; *А. Лозовой* (Вольск) 13, 16, 21; *А. Ляпин* (Нальчик) 13, 18, 20—22; *В. Макаров* (Кировское Донецкой обл.) 13, 16; *Ю. Маравин* (Евпатория) 16, 18; *М. Махмудов* (Исфара) 13; *Н. Мацко* (Киев) 13, 16, 17, 21; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 13, 16, 21; *В. Мирошниченко* (Пенза) 13, 16, 21; *О. Михайлова* (Москва) 21; *С. Музыка* (Канев) 21; *С. Мурин* (Брест) 13; *Ю. Мусатенко* (Киев) 13; *А. Нежуренко* (Киев) 13, 16—18, 21, 22; *М. Немировский* (Одесса) 21; *И. Нестеренко* (Старый Оскол) 16; *И. Николаенко* (Армавир) 21; *Б. Овсицер* (Северодвинск) 13, 18, 21; *Н. Овчинников* (Одесса) 21; *В. Оганесян* (Ростов-на-Дону) 16, 21; *Ю. Пайвин* (Харьков) 21; *Д. Пастухов* (Витебск) 18, 19; *Д. Пастырнов* (Витебск) 17; *В. Писляков* (Тверь) 21; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 13, 16, 17; *А. Погребняк* (Киев) 13; *И. Полищук* (Москва) 16, 21, 22; *С. Польгуль* (Винница) 13, 16; *С. Польшин* (Харьков) 13, 17; *В. Попов* (Ростов-на-Дону) 19, 21; *А. Потапов* (Саратов) 13, 16—18, 21, 22; *Д. Потишко* (Харьков) 13, 21; *И. Рассказов* (Брест) 13; *Г. Рубаненко* (Артемовск Донецкой обл.) 13, 17, 19, 21; *А. Рыбалочка* (Киев) 16; *Н. Савельев* (Кузнецовск) 22; *А. Сафронов* (Томск) 13; *Р. Сеннов* (Москва) 13, 21; *Т. Силантьев* (Волгоград) 21, 22; *Д. Скотников* (Владимир) 16, 17, 21, 22; *А. Смирнов* (Москва) 13, 21; *О. Смирнов* (Тихвин) 13, 16, 20; *А. Снежко* (Киев) 13, 16—18, 21, 22; *А. Солодушкин* (Томск) 13; *Ю. Спектор* (Киев) 21; *А. Столповская* (Днепрорудный Запорожской обл.) 13; *Д. Субботин* (Москва) 16, 22; *Д. Супрун* (Минск) 16; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 13, 16, 20—22; *М. Тищенко* (Старый Оскол) 16; *Э. Токтогулов* (Фрунзе) 16; *М. Томилко* (Брест) 13; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 13, 16, 20—22; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 13, 16, 20—22; *Е. Трубач* (Москва) 13; *В. Тыртычко* (Кустанай) 13, 20; *К. Фогев* (София, НРБ) 17, 21; *Р. Храбров* (Северодвинск) 13, 16, 18, 20, 21; *Д. Чернов* (Киев) 13; *В. Чернявский* (Павлодар) 20; *А. Чирихин* (Жуковский) 13; *А. Чистый* (Брест) 13; *С. Чунахин* (Ростов) 19, 21; *Е. Шагаров* (Москва) 13, 16; *Е. Шагаров* (Грозный) 21; *Г. Шаповалов* (Киев) 13, 16, 18, 21, 22; *С. Шаракин* (Солнгорск) 13, 16, 21, 22; *И. Шашков* (Киев) 13, 16; *С. Шинкевич* (Березники) 13, 16—18, 21; *А. Шпагин* (Мариуполь) 17, 21; *Д. Шуваев* (Колтуши) 13; *И. Шуляк* (Киев) 16, 20, 21; *К. Шурунов* (Куйбышев) 16, 17, 21; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 13, 17; *А. Юдин* (Москва) 18; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 16, 21; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 16; *А. Яремчук* (Артемовский) 16.

Информатика и программирование

Всесоюзный конкурс «Юный программист»

Ассоциация учителей информатики, Главное управление народного образования Красноярского крайисполкома, Центр НТТМ «Спец» проводят конкурс «Юный программист» на лучшую программу, созданную школьниками для детей младшего возраста.

На конкурс принимаются клавиатурные тренажеры, демонстрационные, обучающие, контролирующие программы по предметам, исполнители, игровые программы и т. д., пригодные для использования в 1—6 классах.

При разработке программ следует ориентироваться на школьные персональные ЭВМ.

Победителей ждут призы: радиоприемники, фотоаппараты, часы, библиотечки литературы по информатике, персональные приглашения в летние школы по программированию.

Для участия в конкурсе необходимо до 1 февраля 1991 года прислать следующие материалы: заявку (по приведенному образцу) и подробный сценарий программы. Сценарий должен содержать основные идеи и покадровое описание программы.

Заявка

Ф. И. О.
Домашний адрес
Номер и адрес школы (СПТУ)
Класс
Тип машины
Язык программирования
Название программы (кому и для чего предназначена)
Объем программы
Среднее время работы программы
Ф. И. О. учителя информатики (руководителя кружка, преподавателя УПК), оказавшего помощь в работе над программой, обучении программированию

Авторы отобранных по итогам конкурса сценариев работ будут приглашены в г. Красноярск в конце марта 1991 г. для участия в заключительном туре конкурса.

Материалы на конкурс направляйте по адресу: 660051, г. Красноярск, а/я 11553, Оргкомитет конкурса «Юный программист».

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Найдите все такие простые числа p, что числа $p+2$ и $p+4$ — тоже простые.

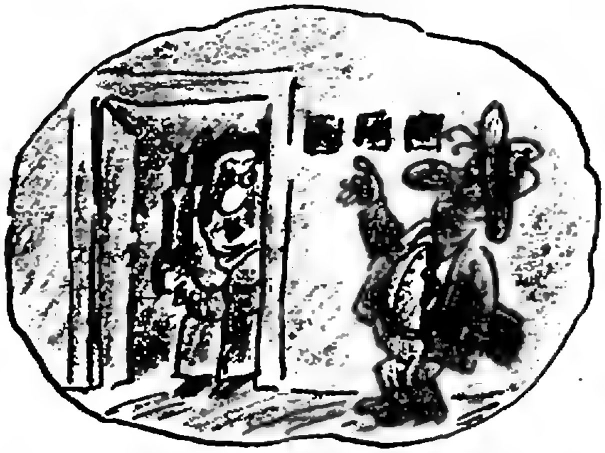
2. В одной комнате находятся три выключателя, а в другой — три лампочки. Каждый выключатель обслуживает одну из лампочек. Как узнать, какой выключатель связан с какой лампочкой, если в комнату с лампочками можно войти лишь один раз?

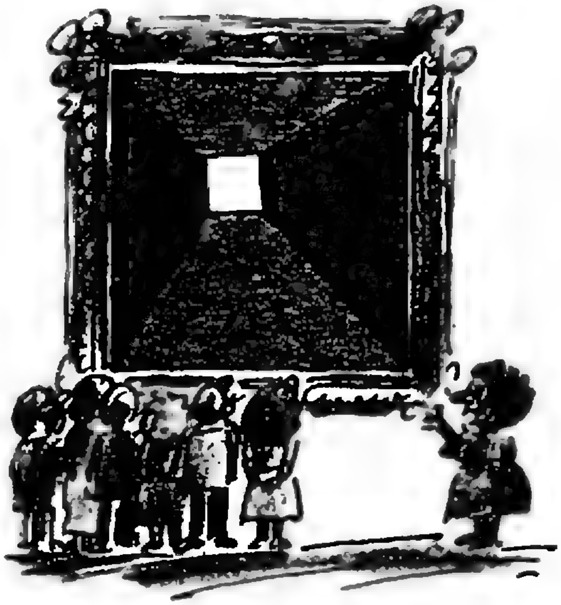
3. Одно четырехзначное число составлено из последовательных цифр, расположенных в порядке возрастания, второе число составлено из тех же цифр, но в порядке убывания, третье четырехзначное число также составлено из этих четырех цифр. Что это за числа, если их сумма равна 12 300?

4. Внутри квадрата расположен меньший квадрат. Вершины квадратов соединены так, как показано на рисунке. Докажите, что сумма площадей синих четырехугольников равна сумме площадей красных четырехугольников.

5. Кооперативом была куплена партия товара и продана с прибылью в m рублей. На вырученные деньги была куплена другая партия того же товара и продана по прежним ценам; при этом прибыль составила n рублей. Сколько было уплачено за первую партию товара?

Эти задачи нам предложили И. Клумова, А. Зильберман, А. Абдурахманов, В. Произволов, последняя задача взята из книги Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцева «Сборник задач по математике» (М., Учпедгиз, 1931 г.)





Сколько?
КООП ЕРАТИВ

ЧЕГО БОЛЬШЕ?

Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Моей дочке Маше семь с половиной лет, и она учится во втором классе. Маша любит разговаривать о математике. Обычно мы с ней решаем задачи вроде тех, что публикуются в «Кванте» для младших школьников». А несколько дней назад у нас с ней произошел довольно серьезный разговор. Мы шли в спортивную школу (Маша занимается теннисом), и она рассказывала, что они проходят по русскому языку.

— Угадай, чего больше: слов или окончаний? — спросила Маша.

— Конечно, слов, ведь у разных слов бывают одинаковые окончания,— ответил я (напомню, что у слов бывают и «пустые» окончания). И тут мне показалось, что самое время поговорить о математике.

— Теперь ты скажи, чего больше: четных чисел или нечетных?

— Нечетных,— сразу ответила Маша (она всегда отвечает сразу, хотя не всегда верно).— Потому что первое число, единица,— нечетное (для Маши числа — это 1, 2, 3, 4,... Она уже давно знает, что самого большого числа нет — ведь всегда можно увеличить число на 1).

— А на сколько больше нечетных чисел? — спросил я.

— Конечно, на одно.

— Значит, если убрать эту единичку, то станет поровну? — не отставал я. Тут Маша задумалась.

— Нет, если убрать единицу, первым числом будет два, а оно — четное. Теперь четных стало больше. Странно...

— Ничего странного,— сказал я,— потому что четных и нечетных чисел — поровну. Построим их парами — как вы ходили в детском саду. Нечетные — это мальчики, а четные — девочки. Вот так: 1—2, 3—4, 5—6, 7—8,... Теперь видишь, что их поровну?

— Теперь вижу,— сказала Маша.

— Тогда скажи, чего больше: всех чисел или четных?

Тут уж никаких сомнений быть не могло:

— Конечно, всех чисел больше.

— А вот и нет, их тоже поровну. Только пары будут другие: 1—2, 2—4, 3—6, 4—8, 5—10,... Понятно?

— Понятно,— сказала она. Для проверки я спросил, какое число стоит в паре с 98. Эта задача была не очень простой: умножать и делить на 2 «в уме» Маша умеет не очень хорошо.

— Вот так: и четных чисел, и всех чисел — бесконечно много, но их поровну,— подвел я итог разговору. Но оказывается, наш разговор только начинался.

— И так всегда будет? — спросила Маша.

— Нет,— ответил я,— например, точек на отрезке больше, чем (натуральных) чисел.

— А почему?

— Ну, это — очень сложно, и ты вряд ли поймешь...

— А вдруг пойму?

И я решил попробовать.

— Рассуждение состоит из двух частей,— начал я,— сначала нужно всем точкам отрезка дать имена.

— А будет точка, которую зовут Маша?

— Нет, в каждом имени будут использованы только две буквы.

— Пусть это будут буквы «И» и «Л»,— попросила Маша.— Это мои любимые буквы.

— Хорошо,— согласился я. У каждой точки будет бесконечно длинное имя, составленное из букв «И» и «Л». Например,

ИИИИИИИИИИ... или
ИЛИЛИЛИЛИ...

А у некоторых точек будет даже не одно, а два имени.

— Как Кристофер Робин в «Винни-Пухе»?

— Да, примерно так.

— А как узнать, как зовут каждую точку?

— Очень просто,— ответил я.— Вот у тебя есть точка. Раздели отрезок пополам. Точка попадет или в левую, или в правую половину. Если точка — в левом отрезке, то первая буква ее имени «Л», а если — в правом, то «И». Потом тот из двух отрезков, в котором лежит точка, снова разделим пополам. И опять посмотрим, в какой половине лежит точка: в левой или правой. Если в левой, то вторая буква ее имени — «Л», а если в правой, то — «И». И так далее...

— Что значит «и так далее»?

— Значит следующий отрезок снова делим пополам и узнаем третью букву имени нашей точки, потом — четвертую, потом — пятую... Понятно?

— Не очень,— ответила Маша.— А что делать, если точка попала ровно в середину какого-то отрезка?

— Вот у таких точек и будет по два имени. Середина отрезка — она лежит и в его левой половине, и — в правой. Если считать, что середина лежит в левой половине, то очередная буква ее имени будет «Л». Зато потом эта точка все время оказывается справа, так что ее имя кончается на одни буквы «И»:

... ЛИИИИИИИИИИИИ...

А если считать, что середина отрезка лежит в его правой половине, то очередная буква имени точки будет «И». Зато потом будут уже одни буквы «Л». Вот так:

... ИЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ...

Понятно?

— Теперь, кажется, понятно — сказала Маша.

— А если понятно, скажи: какую точку зовут

ЛЛЛЛЛЛЛЛЛ...?

Как обычно, Маша ответила быстро (и на этот раз правильно):

— Это левый конец отрезка.

— Верно: а какую точку зовут

ЛИИИИИИИИ...?

На этот вопрос Маша тоже ответила, хотя и с трудом. Ответьте и вы, а также подумайте, какие точки зовут

ИЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛЛ...
и ИЛИЛИЛИЛИЛИ...

— А зачем точкам имена? — спросила Маша.

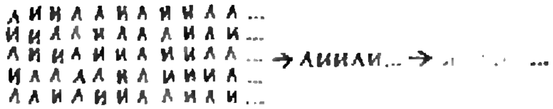
— Об этом поговорим на обратном пути,— мы уже подходили к спортивной школе.— А пока подведем итог: у каждой точки есть одно или два имени, составленные из букв И и Л, и наоборот — каждому такому имени отвечает какая-нибудь точка отрезка.

...— Так зачем же точкам имена? — оказывается, Маша не забыла наш разговор.

— Чтобы объяснить, почему точек больше, чем (натуральных) чисел. Представь себе, что точки отрезка можно перенумеровать. Какая-то точка будет первой, какая-то — второй, ..., какая-то — сотой и так далее.

— Понятно,— сказала Маша. Она уже знала, что значит «и так далее».

— Возьмем большой-большой лист бумаги и станем записывать имена всех точек — по одному имени в строке. Сначала — имя первой точки. Затем — второе имя первой точки, если оно у нее есть, или имя второй точки. Потом — третьей, четвертой и так далее. А теперь внимание! Сейчас я составлю имя точки, которого в этой таблице нет. Возьмем первую букву первого имени, вторую букву второго имени, третью букву — третьего и так далее, и составим из них новое имя (на рисунке эти буквы — красные). Теперь поменяем все буквы: «И» — на «Л», а «Л» — на «И». Получится новое имя (на рисунке оно синее). Как ты думаешь, это имя есть в нашей таблице?


Л И И Л Л И Л И И Л Л ...
И И Л Л И Л Л Л И Л И ...
Л И И Л И И Л И И Л Л ...
И Л Л Л Л И Л И И И Л ...
Л Л И Л И И Л Л И Л И ...
ЛИИЛИ...

— Не знаю, ведь таблица такая большая...

— Может быть, оно стоит в первой строчке?

Маша задумалась:

— Нет, ведь у него другая первая буква.

— А во второй?

— Тоже нет, ведь у него другая вторая буква. Все понятно! И в третьей — не может, и в четвертой... Его вообще нет в нашей таблице имен.

— Вот именно,— подтвердил я,— этого имени в таблице нет. Значит, точка, которая носит это имя, должна была остаться без номера. Поэтому точек на отрезке больше, чем (натуральных) чисел!

Мы проговорили еще несколько минут. Я рассказал Маше о немецком математике Георге Канторе, который придумал все это примерно 100 лет назад. И о том, что обычно об этом рассказывают не ученикам второго класса, а студентам математических факультетов университетов. Я сказал, что, по-моему, это очень красивое рассуждение. С этим Маша не согласилась:

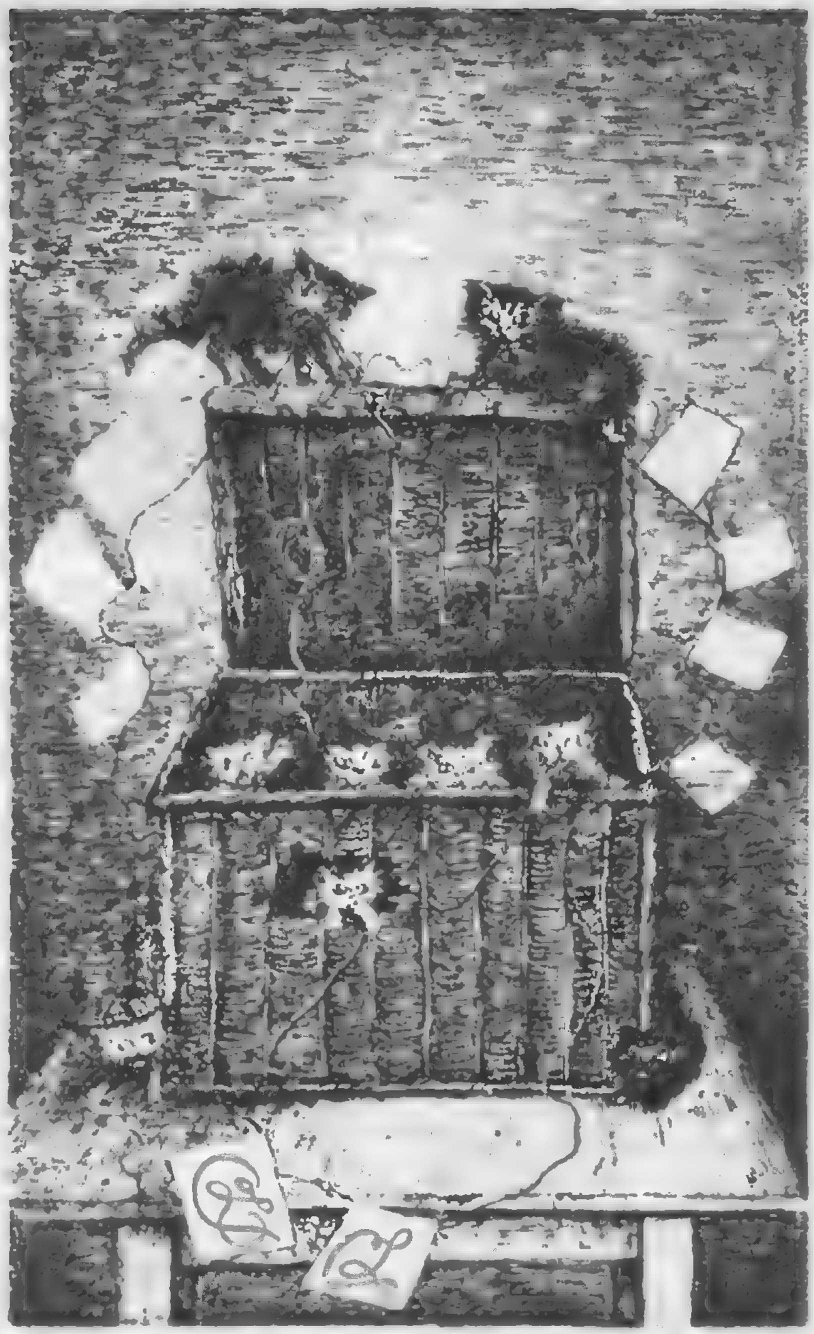
— Красивой может быть прическа или платье, а не математическое рассуждение.

Но я думаю, что в этом она ошибается.

Льюис Кэрролл и его задачи

Друг мой! Знаешь ты уже
Вычитанье и сложе-,
Умноженье и деленье
Просто всем на удивленье.
Так дерзай! Пусть славы эхо
О твоих гремит успехах.
Станешь ты, хоть скромен вид,
Знаменитей, чем Евклид!

Эпиграф к «Истории с узелками» Льюиса Кэрролла



Некоторые читатели «Алисы в Стране Чудес» и «Зазеркалья» ошибочно полагают, будто знают все, решительно все, что только можно знать о Стране Чудес, Зазеркалье и их создателе Льюисе Кэрролле. Тот, кто так думает, глубоко заблуждается. Множество интереснейших и весьма глубоких вещей остается скрытым от торопливого и поверхностного взгляда.

Взять хотя бы задачи. Их *Льюис Кэрролл за свою жизнь* придумал великое множество: арифметических, геометрических, логических, физических, лингвистических и т. п. Даже к выбору своего псевдонима он подошел как к задаче, которую решил с присущим ему блеском и выдумкой: взял свои подлинные имена (Charles Lutwidge), «перевел» на латынь (получилось Carolus Ludovicus), переставил (получилось Ludovicus Carolus) и, наконец, «перевел» снова на родной английский (получился Lewis Carroll).

Кэрролл любит разыгрывать читателя, задавая, казалось бы простые, но каверзные вопросы. До сих пор не утихают споры о том, куда будет двигаться груз в «обезьяньей задаче» (обезьяна начинает взбираться по свободному концу перекинутого через блок каната, к другому концу которого прикреплен груз, в точности равный весу обезьяны; будет ли груз подниматься, опускаться или останется на месте?), или верен ли закон Архимеда для ведерка, плавающего внутри другого ведерка, если воды в том едва на донышке.

Множество самых различных задач искусно вплетены в ткань повествования «Алисы» и «Зазеркалья». Лишь некоторые из них расшифрованы в комментариях Мартина Гарднера. Большинство же ожидает своего открывателя. Только с возникновением структурной лингвистики, семантики, семиотики и других новых наук были по достоинству оценены некоторые из «причуд» (как казалось некогда) Кэрролла, например, его лингвистические опыты. Вспомним хотя бы знаменитого «Бармаглота»: «Варкалось. Хливкие шорьки»...

Ю. Данилов

Иллюстрации Ю. Ващенко взяты из книги Л. Кэрролла «История с узелками».

Редакция отобрала некоторые из наиболее интересных, с ее точки зрения, задач Кэрролла и предлагает их вашему вниманию.

Задачи

1. Два путешественника выходят из гостиницы в 3 часа дня и возвращаются в нее в 9 часов вечера. Маршрут их проходит то по ровному месту, то в гору, то под гору. По ровному месту путешественники идут со скоростью 4 мили в час, в гору — со скоростью 3 мили в час и под гору — со скоростью 6 миль в час. Найти расстояние, пройденное путешественниками с момента выхода из гостиницы до момента возвращения, а также (с точностью до получаса) момент восхождения на вершину горы.

2. Два путешественника садятся на поезда, идущие в противоположных направлениях по одному и тому же замкнутому маршруту и отправляющихся в одно и то же время. Поезда отходят от станции отправления каждые 15 минут в обоих направлениях. Поезд, идущий на восток, возвращается через 3 часа, поезд, идущий на запад,— через 2. Сколько поездов встретит каждый из путешественников в пути (поезда, которые отбывают со станции отправления и прибывают на нее одновременно с поездом, которым следует путешественник, встречными не считаются)?

3. Путешественники следуют по тому же маршруту, что и раньше, но начинают считать встречные поезда лишь с момента встречи их поездов. Сколько поездов встретится каждому путешественнику?

4. Имеются 5 мешков. Первый и пятый мешки вместе весят 12 фунтов, второй и третий — $13^1/_2$ фунтов, третий и четвертый — $11^1/_2$ фунтов, четвертый и пятый — 8 фунтов, первый, третий и пятый — 16 фунтов. Требуется узнать, сколько весит каждый мешок.

5. В начале года у каждого из братьев *A* и *B* было по 1000 фунтов стерлингов. Через год братья в своем письме губернатору Кговджни уведомляют его, что в день отправления письма они, как никогда, близки к 60 000 фунтов стерлингов. Каким образом им это удалось?

6. Стакан лимонада, 3 бутерброда и 7 бисквитов стоят 1 шиллинг 2 пенса. Стакан лимонада, 4 бутерброда и 10 бисквитов стоят 1 шиллинг 5 пенсов. Найти, сколько стоят: 1) стакан лимонада, бутерброд и бисквит; 2) 2 стакана лимонада, 3 бутерброда и 5 бисквитов.

7. 70 процентов инвалидов потеряли глаз, 75 процентов — ухо, 80 процентов — руку и 85 процентов — ногу. Каков наименьший процент ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

8. Некогда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего сына. Через несколько лет сумма возрастов стала равна удвоенному возрасту третьего сына. Когда число лет, прошедших с тех пор,

когда сумма возрастов двух сыновей была равна возрасту третьего, составит $^2/_3$ от суммы возрастов всех трех сыновей, третьему сыну исполнится 21 год. Сколько лет будет двум другим сыновьям?

9. Найти общую формулу для двух рациональных чисел, сумма квадратов которых равна 2.

10. В данный остроугольный треугольник вписать треугольник, стороны которого (при каждой из его вершин) образуют равные углы со сторонами данного треугольника.

11. Несколько человек сидят по кругу так, что у каждого из них имеется по одному соседу справа и слева. Каждый из сидящих располагает определенным количеством шиллингов. У первого на 1 шиллинг больше, чем у второго, у второго на 1 шиллинг больше, чем у третьего, и т. д. Первый из сидящих отдает 1 шиллинг второму, второй — 2 шиллинга третьему и т. д. Каждый отдает следующему на 1 шиллинг больше, чем получил сам, до тех пор, пока это возможно. В результате у одного из сидящих шиллингов оказывается в 4 раза больше, чем у его соседа. Сколько всего было людей и сколько шиллингов было сначала у самого бедного из них?

12. Доказать, что утроенную сумму трех квадратов можно представить в виде суммы четырех квадратов.

13. Пусть ε, α и λ — правильные дроби, и пусть в некотором госпитале ε-я доля всех пациентов потеряла глаз, α-я — руку и λ-я — ногу. Чему равна наименьшая доля пациентов, лишившихся одновременно глаза, руки и ноги?

14. Доказать, что сумму квадратов двух различных чисел, умноженную на сумму квадратов двух различных чисел, можно представить в виде суммы квадратов двух чисел двумя различными способами?

15. 1 июля, когда на моих карманных часах было 8 ч утра, стенные часы показывали 8 ч 4 мин. Взяв с собой карманные часы, я отправился в Гринвич и обнаружил, что, когда они показывали полдень, точное время в действительности было равно 12 ч 5 мин. Вечером того же дня, когда на моих карманных часах было ровно 6 ч, стенные часы показывали 5 ч 59 мин.

30 июля в 9 ч утра по моим карманным часам стенные часы показывали 8 ч 57 мин. В Гринвиче, когда мои карманные часы показывали 12 ч 10 мин, точное время было 12 ч 5 мин. Вечером того же дня карманные часы уже показывали 7 ч, когда на стенных еще было 6 ч 58 мин.

Карманные часы я завожу лишь при поездке в Гринвич. В течение суток они идут равномерно. Настенные часы идут всегда, причем идут равномерно.

Каким образом мне узнать, когда наступает полдень (по *точному* времени) 31 июля?

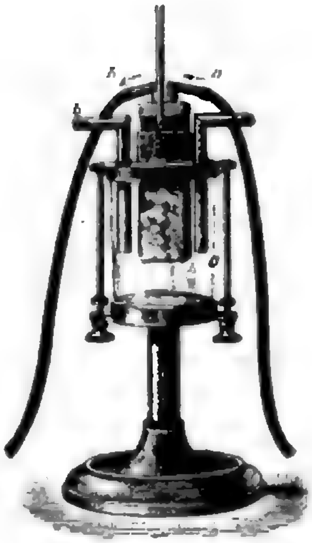
66. Два пешехода A и B пускаются в путь ровно в 6 ч утра в один и тот же день. Оба идут по одной дороге и в одном направлении. Пешеход B сначала опережает пешехода A на 14 миль. Оба идут с 6 утра до 6 вечера. В первый день пешеход A, двигаясь с постоянной в течение дня скоростью, проходит 10 миль, во второй — 9, в третий — 8 миль и т. д. Пешеход B, двигаясь также с постоянной в течение дня скоростью, проходит в первый день 2 мили, во второй — 4, в третий — 6 и т. д. Где и когда пешеход A нагонит пешехода B?

Подобно живым цветам, задачи Кэрролла утрачивают естественную окраску и аромат, если срывать их небрежной рукой. Их красота выигрывает от естественного обрамления — кэрролловского текста. Поэтому тем, кто захочет самостоятельно оценить творчество Кэрролла-проблемиста, советуем обратиться к его замечательным книгам.

Калейдоскоп „Кванта"

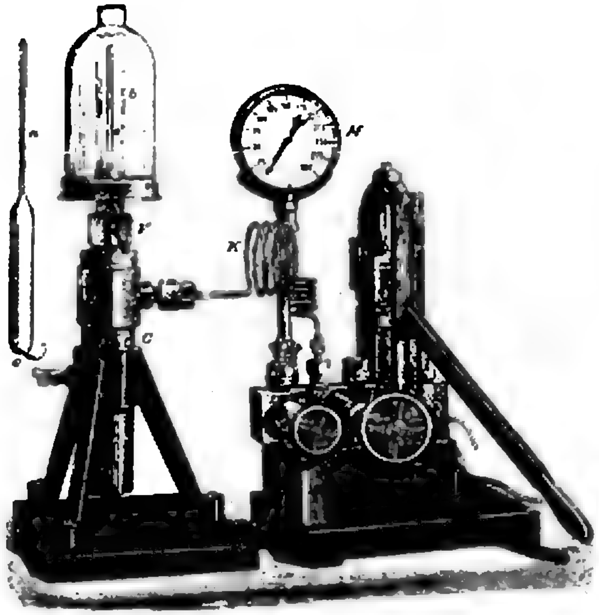
Если бы на поверхности земного шара царствовала очень высокая температура, какая, без сомнения, существует внутри него, то все воды океанов были бы в виде пара в атмосфере и не имелось бы ни одной капли в жидком состоянии.

С. Карно



А так ли хорошо знакомы вам

пары́ ?

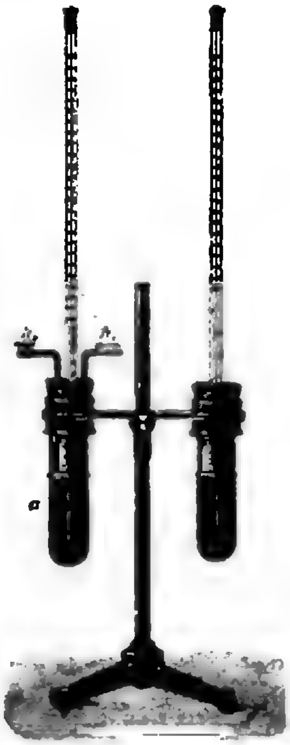


Живительные дожди и бегущие облака, стелящиеся туманы и изящные снежные кристаллы — за все это отвечают водяные пары́. Влагооборот — один из основных погодообразующих факторов, а как мы все зависим от него, нам ежедневно напоминают метеосводки, сообщающие о влажности воздуха.

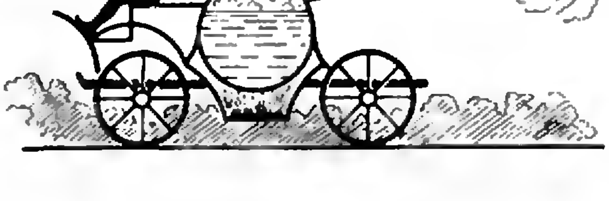
Спортсмены и гляциологи, конструкторы паровых котлов и тепловых машин, летчики и моряки, даже хозяйки, развешивающие белье для просушки,— всем так или иначе нужны точные знания о пара́х или хотя бы результаты измерений и наблюдений над ними. Вот и мы предпримем сейчас несколько попыток разобраться с пара́ми как с объектами физического исследования.

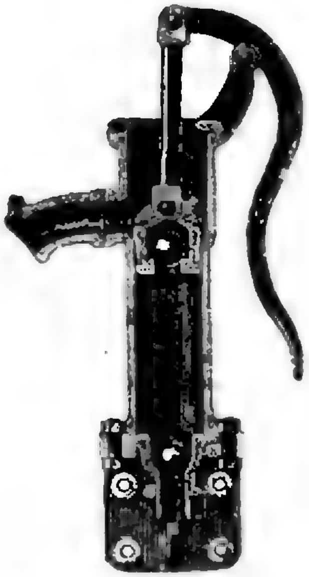
Вопросы и задачи

1. Почему капля воды, попав на раскаленную плиту, начинает на ней прыгать?
2. При каких условиях рост абсолютной влажности воздуха может сопровождаться уменьшением относительной влажности?
3. В какое время суток летом относительная влажность воздуха больше при одной и той же абсолютной влажности?
4. Высокая температура воздуха в пустынных местностях переносится сравнительно легко из-за низкой влажности. Почему жару гораздо труднее переносить при высокой влажности?
5. Отчего вокруг сохраняющихся весной на полях отдельных снежных сугробов запас воды в почве больше, чем вдали от них?
6. На улице целый день моросит холодный осенний дождь. В комнате развешено выстиранное белье. Высохнет ли оно быстрее, если открыть форточку?
7. Можно ли всасывающим водяным насосом поднять кипящую воду?
8. Какими способами ненасыщенный пар можно обратить в насыщенный?
9. Когда возможно повышение плотности вещества с ростом температуры?



10. Жидкость налита в сообщающиеся сосуды разных диаметров. Широкий сосуд закрывают пробкой. Изменится ли распреде-





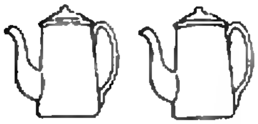
ление уровней жидкости в коленах сосуда?

11. В цилиндре под поршнем находится насыщенный водяной пар без воздуха. Будет ли этот пар «пружинить» при сжатии?

12. Бутылку из пластмассы на 9/10 ее объема заполнили кипятком и закрыли пробкой. Если воду в бутылке встряхнуть, пробка может вылететь. Почему?

13. Отчего осенью после восхода солнца туман над рекой держится дольше, чем над сушей?

14. Осадки начинаются потому, что в облаках более крупные капельки растут за счет более мелких. Как объяснить это явление?



Микроопыт

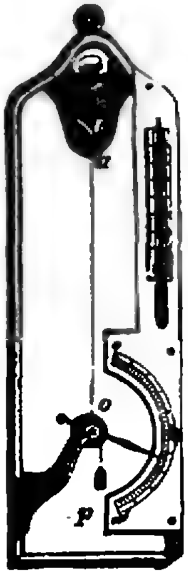
В двух одинаковых чайниках, поставленных на одинаковые горелки, кипит вода. У одного чайника крышка часто подпрыгивает, а у другого неподвижна. Почему?

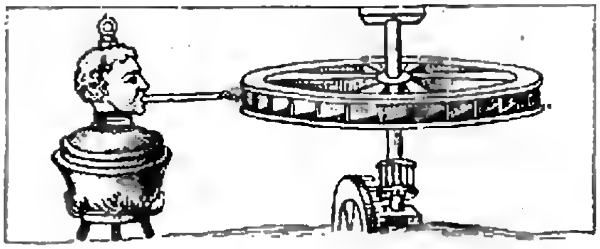
Любопытно, что...

...если бы прекратился круговорот воды в природе, за год с поверхности Мирового океана испарился бы слой воды толщиной около 1,1 метра.

...если очень чистый пар не соприкасается с жидкостью, то удается получить переохлажденный, или пересыщенный, пар — пар, которому давно следовало бы уже стать жидкостью. Именно такой пар используется в камере Вильсона для регистрации заряженных частиц.

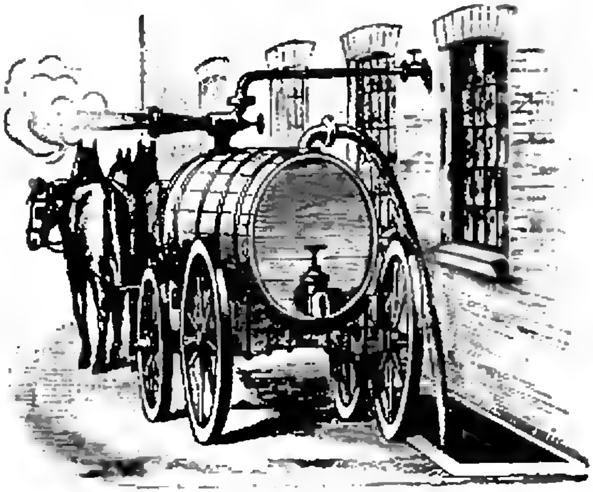
...первый волосяной гигрометр был создан в 1783 году швейцарским геологом Горацием де Соссюром. В том же году Соссюр опубликовал статью, в которой доказал, что при одних и тех же температуре и давлении влажный воздух легче сухого.





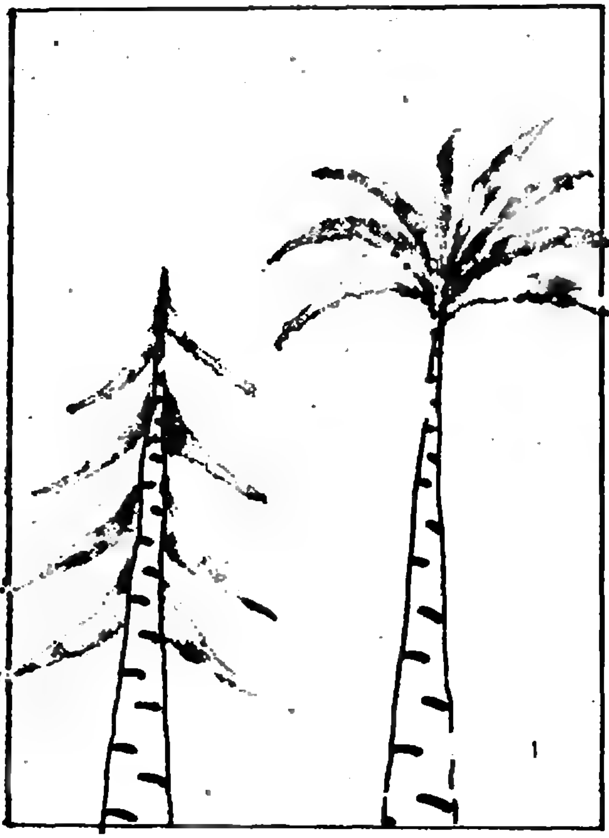
...в 1880 году шотландский морской инженер Джон Айткен открыл, что конденсация водяного пара при образовании тумана, облаков и дождя происходит на определенных микроскопических частицах, таких, как морская соль, мельчайшие пылинки и т. д. На этом открытии основаны некоторые современные работы по искусственному вызыванию дождя.

...современный прибор для определения количества водяного пара в воздухе — инфракрасный гигрометр,— способный работать в условиях, когда все другие приборы практически непригодны, основан на сравнении потоков инфракрасного излучения двух волн разной длины, проходящих через слой воздуха. Одна из волн поглощается водяным паром, другая — нет.



Что читать в «Кванте» о парáх (публикации последних лет)

1. «Газ превращается в жидкость» — 1984, № 11, с. 25;
2. «Приглашение в парную» — 1985, № 8, с. 18;
3. «Наблюдения над туманом» — 1986, № 12, с. 13;
4. Калейдоскоп «Кванта» — 1987, № 3, с. 40;
5. «Кипение жидкостей» — 1987, № 6, с. 39;
6. «Пока чайник не закипел...» — 1987, № 8, с. 9;
7. «Парообразование. Свойства паров» — 1988, № 6, с. 61;
8. «История росинки» — 1988, № 7, с. 24;
9. «Простые опыты с кипятком» — 1988, № 8, с. 48;
10. «Правило фаз Гиббса» — 1989, № 2, с. 23.



Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Некоторые полезные показательные и логарифмические соотношения

В. ЗАТАКАВАЙ

При решении различных задач, содержащих показательные и логарифмические функции, целесообразно придерживаться следующей рекомендации, почти не имеющей исключений: переходить к одному основанию.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$5^{\log_2 x} + 2\cdot x^{\log_2 5} = 15.$$

Поскольку $x = 5^{\log_5 x}$, получаем

$$x^{\log_2 5} = (5^{\log_5 x})^{\log_2 5} = \left(5^{\frac{\log_2 x}{\log_2 5}}\right)^{\log_2 5} = 5^{\log_2 x},$$

и уравнение сводится к виду

$$5^{\log_2 x} + 2\cdot 5^{\log_2 x} = 15.$$

Отсюда

$$5^{\log_2 x} = 5,\ \log_2 x = 1,\ x = 2.$$

Ответ: 2.

Решая это уравнение, мы фактически вывели формулу

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}. \qquad (1)$$

Нетрудно убедиться в справедливости формулы (1) в общем виде. Прологарифмируем правую и левую части (1) по основанию c. Получим $\log_c (a^{\log_c b}) = \log_c (b^{\log_c a})$, или $\log_c b \times \log_c a = \log_c a \cdot \log_c b$.

Очевидно, что это тождество выполняется при всех допустимых значениях a, b, c.

Вот еще одна полезная формула, оставшаяся за страницами школьного учебника:

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}. \qquad (2)$$

Доказательство этой формулы аналогично доказательству предыдущей: нужно прологарифмировать обе части формулы (2) по основанию a:

$$\log_a(a^{\sqrt{\log_a b}}) = \log_a(b^{\sqrt{\log_b a}}),$$

или

$$\sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a}\cdot\log_a b.$$

Перейдя к основанию a, получим

$$\sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_a b}.$$

Пример 2.

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} + x^{\sqrt{\log_x 2}} = 4.$$

По формуле (2)

$$x^{\sqrt{\log_x 2}} = 2^{\sqrt{\log_2 x}},$$

так что уравнение примет вид

$$2^{\sqrt{\log_2 x}} + 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 4;\ 2^{\sqrt{\log_2 x}} = 2;$$
$$\log_2 x = 1;\ x = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 3.

$$\log_{3x}(42x^2 - 13x + 1) > 0.$$

Решение этого неравенства со «школьной точки зрения» весьма трудоемко. Надо рассматривать два случая: когда $3x>1$ и когда $0<3x<1$. Оба случая приводят к громоздким системам неравенств.

Мы же утверждаем, что если $\log_a b>0$, то $(a-1)\cdot(b-1)>0$, т. е. $(a-1)$ и $(b-1)$ — одного знака.

Действительно, если $\log_a b>0$, то $\log_a b>\log_a 1$.

При $a>1$ имеем $b>1$,— утверждение верно.

При $0<a<1$ получаем, что $b<1$, и наше утверждение опять верно, так как $(a-1)<0$ и $(b-1)<0$.

Аналогично можно доказать, что если $\log_a b<0$, то $(a-1)\cdot(b-1)<0$ (сделайте это самостоятельно).

Применим наше утверждение к примеру 3. Итак, имеем:

$$(42x^2-13x)(3x-1)>0.$$

Это неравенство легко решается при помощи метода интервалов. При этом, конечно, надо рассмотреть соотношения, ограничивающие область определения логарифмической функции:

$$3x>0;\quad 3x\neq 1;\quad 42x^2-13x+1>0.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{6};\ \frac{13}{42}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)$.

Рассмотренный прием позволяет решать и более сложные неравенства.

Пример 4.

$$\log_{(2-x)}(x+2)\cdot\log_{(x+3)}(3-x)\leqslant 0.$$

Применяя доказанное утверждение, получаем

$$(x+1)(1-x)(2-x)(x+2)\leqslant 0.$$

Учитывая область определения левой части неравенства: $(-2;\ 1)\cup(1;\ 2)$, получаем

Ответ: $(-2;\ -1]\cup(1;\ 2)$.

В заключение предлагаем несколько примеров для самостоятельного решения.

1. $5^{\lg x}+x^{\lg 5}=50$.
2. $25^{\lg x}=5+4\cdot x^{\lg 5}$.
3. $x^{\log_2 9}=x^2\cdot 3^{\log_2 x}-x^{\log_2 3}$.
4. $10^{\sqrt{\lg x}}+x^{\sqrt{\log_x 10}}=0{,}2$.
5. $3^{-\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} x}}+x^{\sqrt{\log_x \frac{1}{3}}}=4{,}5^{-1}$.
6. $\log_{x^2}(x^2+x-1)<0$.
7. $\log_{2x}(5x-1)\cdot\log_{3x}(7x-1)>0$.
8. $\log_x(10x+3)\cdot\log_{10x}(3x+10)\geqslant 0$.
9. $\log_{2x}\left(6x+\frac{1}{7}\right)\cdot\log_{5x}\left(3x+\frac{4}{7}\right)\leqslant 0$.

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае будущего года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика». К сожалению, в условиях задач из предыдущего номера (см. с. 48) были допущены существенные неточности. Редакция приносит читателям свои извинения и повторяет условия этих задач.

Решения всех задач из этого номера высылайте не позднее 15 декабря 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

1. Составьте из всех десяти цифр 0, 1, 2, ..., 9 такое десятизначное число, что число из двух его первых цифр делится на 2, из трех первых цифр — на 3 и так далее до того, что само число делится на 10.

А. Швецов

2. Докажите, что а) число $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot 1987\cdot 1989+2\cdot 4\times\times 6\cdot\ldots\cdot 1988\cdot 1990$ делится на 1991;

б) число $2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 1990\cdot 1992-1\cdot 3\cdot 5\times\times 7\cdot\ldots\cdot 1989\cdot 1991$ делится на 1993.

В. Произволов

3. В три магазина привезли 1990 книг. В первые три дня магазин продал соответственно 1/37, 1/11 и 1/2 часть полученных книг, второй магазин — 1/57, 1/9 и 1/3 полученных книг, третий магазин — 1/25, 1/30 и 1/10 полученных книг. Сколько книг получил каждый магазин?

Л. Курляндчик

4. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

С. Губа

5. На шахматной доске расставлены фигуры так, что на каждой горизонтали и вертикали стоит не меньше двух фигур. Всегда ли можно снять с доски несколько фигур так, чтобы на каждой горизонтали и вертикали осталось ровно по одной фигуре? Исследуйте тот же вопрос в случае, когда на каждой горизонтали и вертикали первоначально стоят ровно две фигуры.

В. Произволов

6. В клетки квадрата 3×3 поставлено 9 чисел. Такой квадрат называется магическим, если сумма чисел на каждой горизонтали, на каждой вертикали и на каждой из двух диагоналей — одна и та же. Докажите, что у магического квадрата сумма квадратов чисел верхней строки равняется сумме квадратов чисел нижней строки.

А. Швецов

Лаборатория „Кванта"

Экспериментируем с ИК лучами

В. МАЙЕР, С. МАЙЕР

Что общего между дистанционным измерителем температуры и лазерным скальпелем, электронно-оптическим преобразователем и газоанализатором? Эти, казалось бы, совершенно разные приборы объединяет использование инфракрасных (ИК) лучей.

Открытое в 1860 году английским астрономом и оптиком В. Гершелем ИК излучение сейчас широко применяется в науке и производстве, медицине и военной технике, криминалистике и быту. Вот — несколько примеров. Фотографирование ландшафта в ИК лучах существенно повышает информативность снимков. Инфракрасные головки самонаведения являются неотъемлемым элементом боевых ракет самых различных типов — от переносных зенитно-ракетных комплексов до противоспутникового оружия. ИК лучи позволяют видеть в полной темноте. По инфракрасным спектрам поглощения можно проводить тонкий анализ состава и строения вещества. ИК излучение мощных лазеров режет и сваривает металл.

Много лет назад «Квант» уже рассказывал об опытах с инфракрасными лучами*). Однако современная элементная база электроники позволяет более простыми средствами и на более глубоком уровне исследовать некоторые свойства ИК излучения. Предлагаемые опыты вы можете провести самостоятельно или на занятиях физического кружка.

В качестве источника ИК лучей лучше всего использовать светодиод, работающий в соответствующем диапазоне электромагнитных волн.

Как вы хорошо знаете, источником ИК излучения может служить любое тело, температура которого превышает температуру окружающих тел. Подойдет, например, лампа накаливания. Но она испускает постоянный по интенсивности поток ИК лучей, а значит, в приемнике придется использовать довольно сложный усилитель постоянного тока и соответствующий измерительный прибор. Дело значительно упростится, если поток ИК излучения тем или иным способом промодулировать по интенсивности. Тогда в приемнике можно будет применить простейший усилитель звуковой частоты, нагруженный на громкоговоритель, а об интенсивности излучения судить по громкости звука. Выпускаемые промышленностью ИК светодиоды специально предназначены для получения модулированного ИК излучения. Их используют, например, для дистанционного управления бытовой техникой,

---

*) См., например, статью В. Майера «Опыты с инфракрасным излучением» («Квант», 1973, № 5). (*Примеч. ред.*)

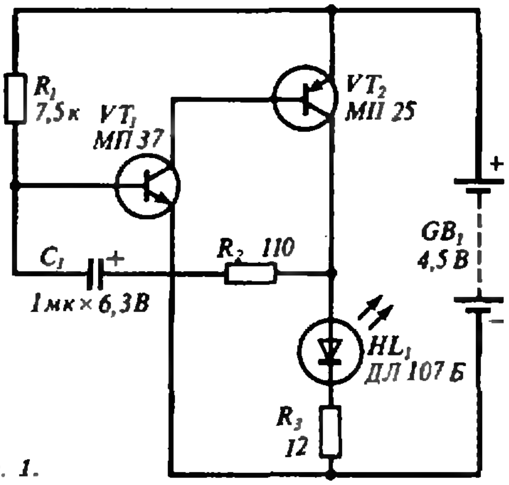


Рис. 1.

для передачи звуковой информации в помещении и т. д. Воспользуемся и мы этим источником.

Передатчик ИК лучей проще всего собрать по типовой схеме мультивибратора на транзисторах разной проводимости (рис. 1). При указанных номиналах деталей (здесь и далее сопротивления резисторов даны в килоомах, а емкости конденсаторов — в микрофарадах) мультивибратор генерирует прямоугольные импульсы напряжения частотой следования 200—250 Гц. Через инфракрасный светодиод HL_1 проходят постоянная и переменная составляющие тока. В результате излучение светодиода оказывается модулированным по интенсивности.

Принципиальная схема приемника ИК излучения приведена на рисунке 2. Датчиком является фотодиод VD_1, сигнал с которого поступает на типовой усилитель звуковой частоты и затем микротелефоном BF_1 (типа ТМ-2) преобразуется в звук.

Необходимые для изготовления приборов радиодетали вполне доступны. Вместо указанных на схемах можно использовать любой инфракрасный светодиод и любой фотодиод (последний легко изготовить из старого транзистора, вскрыв его корпус). Микротелефон можно заменить маломощным динамиком. Нам кажется, нет необходимости говорить о конструкциях передатчика и приемника: каждый из вас в состоянии обдумать и реализовать их самостоятельно. Отметим только, что светодиод с передатчиком, а фотодиод с приемником удобно соединить многожильными гибкими проводниками длиной 30—50 см.

После сборки приборов проверьте правильность монтажа. Теперь расположите фотодиод напротив светодиода на расстоянии 20—30 см и включите питание приборов. Вы услышите довольно громкий однотонный звук, который будет постепенно ослабевать, если расстояние между светодиодом и фотодиодом увеличивать до 1—2 м. Верните светодиод и фотодиод в исходное положение и перекройте пучок ИК лучей, например, ладонью. Звучание должно прекратиться. Если все произошло именно так, значит, приборы работают нормально. В противном случае вам придется проверить исправность радиодеталей.

Для постановки многих опытов вам понадобится узкий пучок ИК лучей.

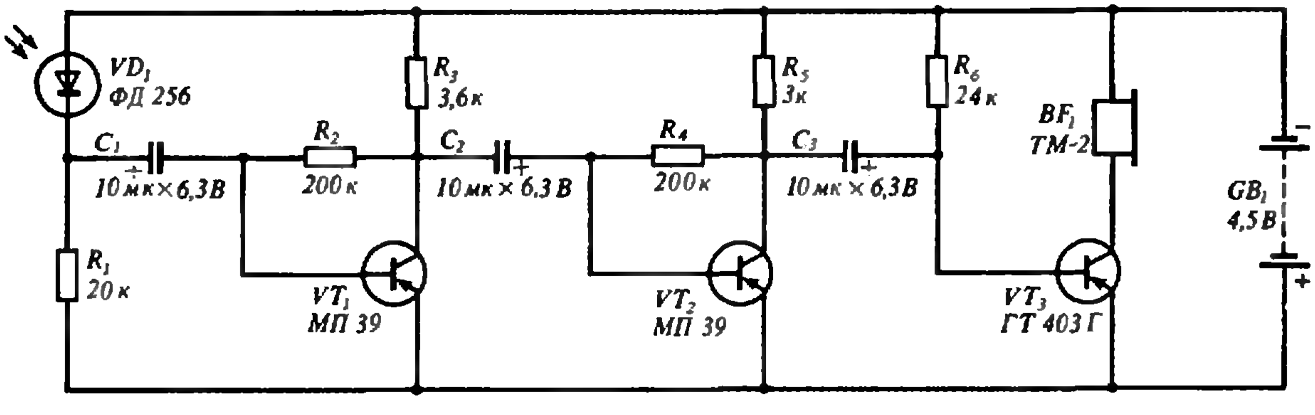


Рис. 2.

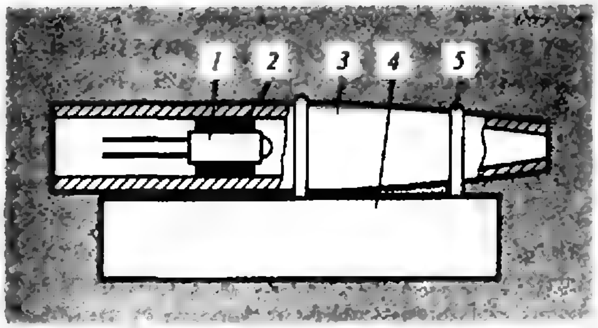


Рис. 3.

Получить его можно с помощью диафрагмы. Например, так, как это показано на рисунке 3. Светодиод *1* отрезком *2* хлорвиниловой трубки или изолентой закрепляют на оси пластмассового колпачка *3* от старой шариковой ручки. Колпачок должен иметь длину примерно 60 мм, внутренний диаметр 5—6 мм и диаметр диафрагмирующего отверстия 1—2 мм. В качестве подставки *4* удобно использовать стирательную резинку (ластик) размером примерно 10×20×50 мм. Колпачок крепится стальными дугами *5*, которые легко сделать из канцелярских скрепок и вдавить в ластик.

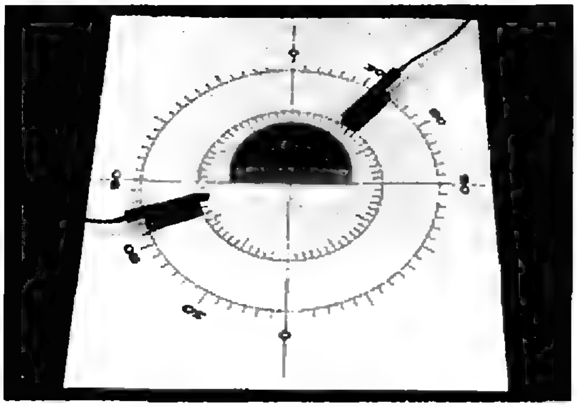


Рис. 4.

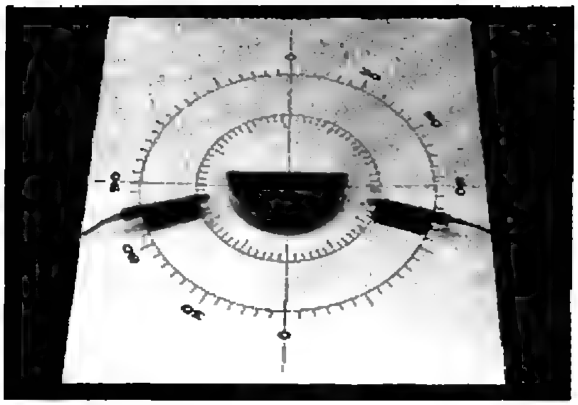


Рис. 5.

Если таким же способом вы закрепите и фотодиод, то сможете экспериментировать со всеми удобствами.

А теперь — задания и вопросы для самостоятельных исследований.

1. Докажите, что в оптически однородной среде ИК лучи распространяются прямолинейно.

2. Возьмите небольшое плоское зеркало и покажите, что ИК лучи отражаются от него. Измерьте углы падения и отражения. Сопоставьте полученные результаты и сделайте выводы.

3. Отполируйте латунную полоску шириной 20 мм и длиной 80 мм. Изогните ее так, чтобы получилось цилиндрическое зеркало радиусом примерно 100 мм — с его помощью сфокусируйте ИК лучи. Попробуйте получить изображение ИК источника, измерьте расстояния от зеркала до источника и его изображения и вычислите фокусное расстояние зеркала. Как оно связано с радиусом кривизны зеркала?

4. Направьте пучок ИК лучей на одну из граней треугольной стеклянной призмы и покажите, что ИК лучи преломляются при переходе из одной среды в другую.

5. Докажите, что собирающая линза фокусирует ИК лучи. Экспериментально определите фокусное расстояние линзы для ИК излучения. Надо ли в этом и в предшествующем опытах использовать диафрагмы?

6. Небольшую пластинку эбонита отшлифуйте шкуркой так, чтобы толщина ее стала не более 0,5 мм. Выясните, пропускает ли эбонит ИК лучи.

7. Возьмите полуцилиндр из стекла или оргстекла. Соберите экспериментальную установку, как показано на рисунке 4. Узкий пучок ИК лучей направьте в центр полуцилиндра на его плоскую грань. Перемещая фотодиод, покажите, что ИК лучи частично отражаются и частично преломляются на границе раздела сред воздух — стекло.

8. В условиях предыдущего опыта измерьте углы падения i_1 и преломления i_2 ИК лучей. По формуле $n=\sin i_1/\sin i_2$ вычислите значение показателя преломления стекла для ИК излучения.

9. Пучок ИК лучей направьте по радиусу полуцилиндра со стороны его выпуклой поверхности. Измерьте соответствующие углы падения и преломления. Какой из них больше?

10. Покажите, что ИК лучи могут испытывать полное внутреннее отражение при переходе из оптически более плотной в оптически менее плотную среду (рис. 5). Измерьте предельный угол полного отражения и сопоставьте получившийся результат с табличным значением.

11. В предыдущем опыте прикоснитесь смоченным водой пальцем к плоской грани полуцилиндра в области, на которую падает ИК пучок, испытывающий полное внутреннее отражение. Как изменится интенсивность отраженного пучка? Почему?

12. Из отполированной палочки из оргстекла диаметром примерно 4 мм и длиной около 500 мм изготовьте световод. Для этого палочку разогрейте над электроплиткой, придайте ей желаемую форму и охладите так, чтобы форма сохранилась. На концах получившегося световода хлорвиниловыми трубками закрепите светодиод и фотодиод. Включите питание приборов и убедитесь, что ИК лучи прекрасно проходят по изогнутому световоду. Чем объясняется это явление? Что произойдет, если отогнутую часть световода погрузить в жидкость?

Желаем вам успехов!

Задачи на исследование по статье «Медианная фильтрация»

(см. с. 8)

1. Докажите, что если последовательность x_n инвариантна относительно медианного фильтра с шириной окна $2k+1$ и ее члены принимают по меньшей мере три различных значения, то она инвариантна относительно любого медианного фильтра с меньшей шириной окна.

Примечание. Второе условие существенно. Например, «пила» $x_n=(-1)^n$ инвариантна относительно фильтров с четными k и неинвариантна относительно фильтров с нечетными k.

2. Конечная последовательность продолжается до бесконечной с помощью повторения крайних элементов влево и вправо соответственно. Докажите, что если длина исходной последовательности равна l, то после $\left[\frac{l-1}{2}\right]$-кратного применения медианного фильтра с шириной окна $2k+1$ получается инвариантная последовательность (здесь $[\,]$ — целая часть числа).

Проверьте, что способ продолжения последовательности имеет существенное значение (например, при $l=2$).

3. *Рекурсивным медианным фильтром* называется медианный фильтр, у которого первые k чисел скользящего окна берутся из фильтрованной последовательности, т. е. последовательность x_n преобразуется в последовательность
$y_n=\mathrm{m}(y_{n-k}, y_{n-k+1}, \ldots, y_{n-1}\, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k})$ (считается, что $x_n\equiv x_0$ при $n<0$).

а) Докажите, что последовательность инварианта относительно рекурсивного медианного фильтра тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно обычного медианного фильтра.

б) Докажите, что любая последовательность после однократного прохождения через рекурсивный медианный фильтр превращается в инвариантную.

4. Будем говорить, что последовательность x_n имеет *середину*, равную a, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое M, что для любых n и $m>M$

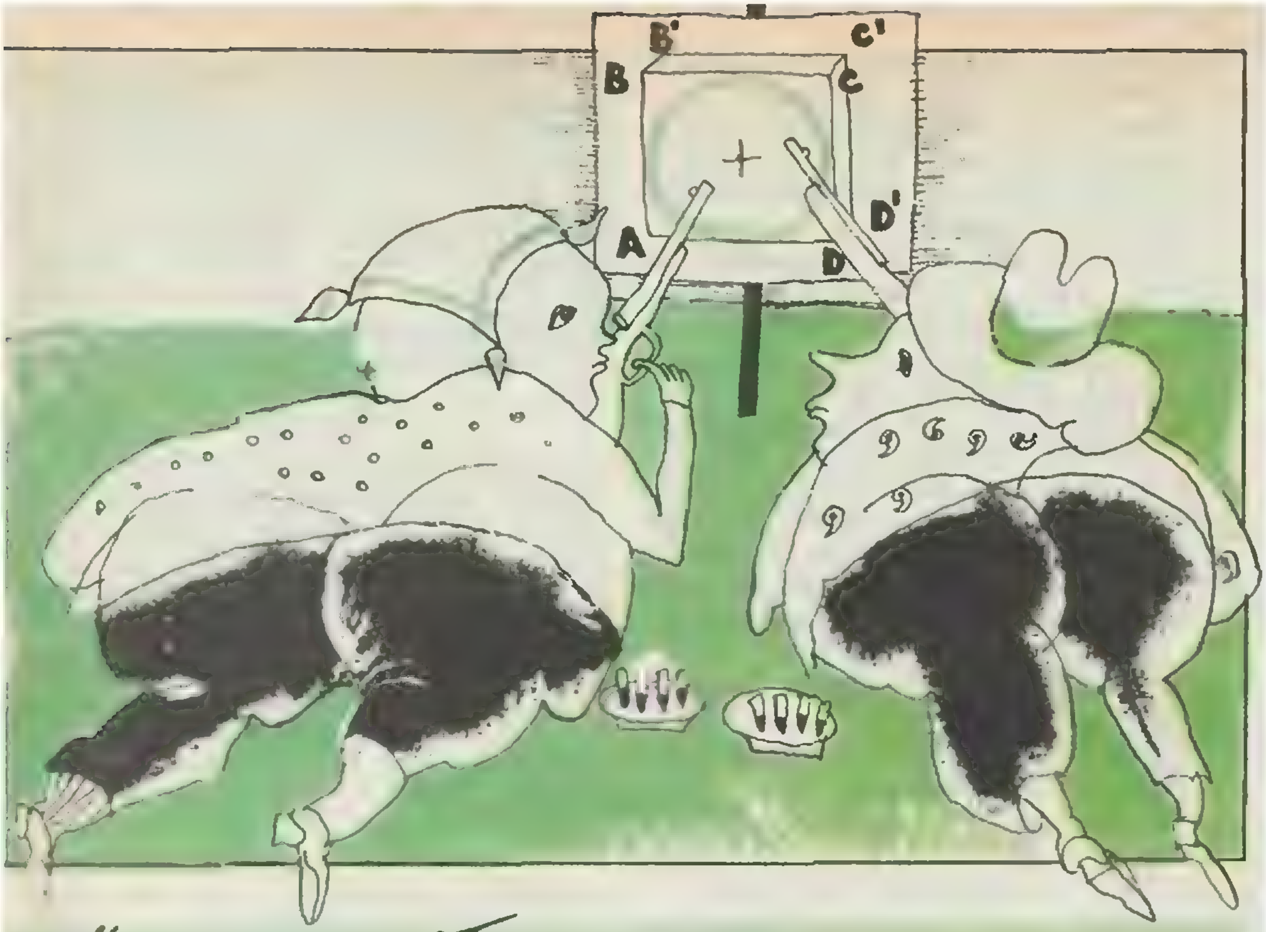
$$|m(x_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots, x_n, \ldots, x_{n+m-1}, x_{m+n})-$$
$$-a|<\varepsilon.$$

Докажите, что медианный фильтр *сохраняет середину*, т. е. последовательность, полученная из x_n на выходе фильтра, имеет ту же середину a.

5. Будем говорить, что последовательнось x_n имеет *уровень* a, если для любого ε найдется такое M, что для любых n и $m>M$

$$\left|\frac{x_{n-m}+x_{n-m+1}+\ldots+x_n+\ldots+x_{n+m-1}+x_{n+m}}{2m+1}-\right.$$
$$-a|<\varepsilon.$$

Верно ли, что
а) медианный фильтр,
б) скользящее усреднение
сохраняют уровень последовательности?



Математический кружок

Геометрия или анализ?

Доктор физико-математических наук
В. ТИХОМИРОВ

Всех математиков условно можно разделить на два класса — аналитиков и геометров. Геометры — это люди с пространственной фантазией, способные вызывать в воображении необыкновенные феерические ассоциации. В отличие от геометров аналитики слывут сухарями, склонными к рутинным и однообразным вычислениям. Оказывается, что такое деление математиков на классы имеет научное объяснение. В 1981 году Нобелевская премия по биологии была присуждена Роджеру Сперри за исследования в области асимметрии головного мозга. Из его исследований вытекает, что у геометров более развито правое полушарие, а у аналитиков — левое. Правое полушарие отвечает за картинки, образы, левое — за алгоритмы.

Разумеется, геометры и аналитики — не антагонисты, и потому не следует ожидать гражданской войны между ними. Ведь мозг каждого из нас имеет и левое и правое полушария, так что каждый из нас немножечко аналитик и хоть чуточку да геометр.

К тому же и те, и другие — все мы — можем за себя постоять.

И все-таки — геометрия или анализ — кто кого? Мы обсудим этот вопрос (но, разумеется, не разрешим), в связи с одной очень красивой геометрической задачей.

Автором задачи является Ю. Нестеренко (профессиональный аналитик). А история ее такова. Однажды я затеял спор со школьниками — победителями Всесоюзной олимпиады — на эту самую тему: геометрия или анализ — кто кого? И Ю. Нестеренко оказался свидетелем этого спора. Мои оппоненты были ярыми геометрами, и мне пришлось туго. Но явной победы мои соперники все-таки не одержали. Об этом рассказано в моей книге «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып. 56, М., Наука, 1986, с. 134—139). И тогда (так мне говорил сам автор) Ю. Нестеренко стал искать задачу, где геометрическая фантазия одерживала бы победу над аналитическим занудством за явным преимуществом. И он-таки придумал ее! Задача предлагалась на XIX Всесоюзной олимпиаде для школьников в 1985 году. Вот ее формулировка.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной два. Проведем две окружности: одну — описанную около треугольника, образованного несмежными вершинами AB_1C, другую — вписанную в грань $ABCD$. Требуется найти минимальное расстояние между этими окружностями (рис. 1).

И действительно,— сейчас мы убедимся в этом — решается она «в два слова», но найти их довольно трудно (особенно в обстановке олимпиады или экзамена). Этой интересной темы мы еще коснемся в конце статьи, а теперь — переходим к решениям.

Сначала — пресловутые «два слова». Малая окружность лежит на сфере радиусом $\sqrt{2}$ с центром в центре куба, большая — на сфере радиусом $\sqrt{3}$ с тем же центром, значит, кратчайшее расстояние между окружностями не меньше чем $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. Но след на большой сфере конуса с вершиной в центре куба, содержащего малую окружность, пересекает (как легко понять) большую окружность (рис. 2), т. е. существуют две точки на разных окружностях, расстояние между которыми равно $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Значит, минимальное расстояние и равно $\sqrt{3}-\sqrt{2}$! Все доказано. Но, имея в виду дальнейшие сопоставления, распишем эти «два слова» чуть подробнее. Итак, представляем на ваш суд два решения — геометрическое и аналитическое. Чтобы вам было легче сравнивать «достоинства» и «недостатки» этих решений, мы в каждом из них выделяем основные моменты («ходы», «ступеньки» — как вам угодно) цифрой в квадратных скобках. Если ход кажется нам «озарением», мы рядом с цифрой ставим! (или даже!!).

Решение первое (геометрическое). Описанную окружность обозначим O_1, вписанную — O_2, центр куба — O. Тогда:

[1]. Окружность O_1 лежит на сфере с центром в O и радиусом $\sqrt{3}$.

[2]. Окружность O_2 лежит на сфере с центром в O и радиусом $\sqrt{2}$.

[3!]. Из сказанного вытекает, что искомое минимальное расстояние $\rho \geqslant \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

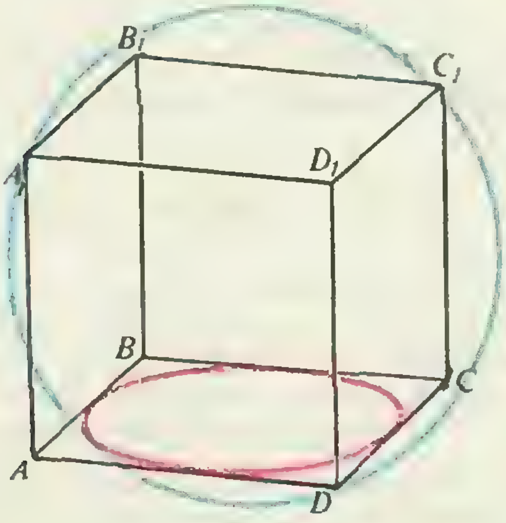


Рис. 1.

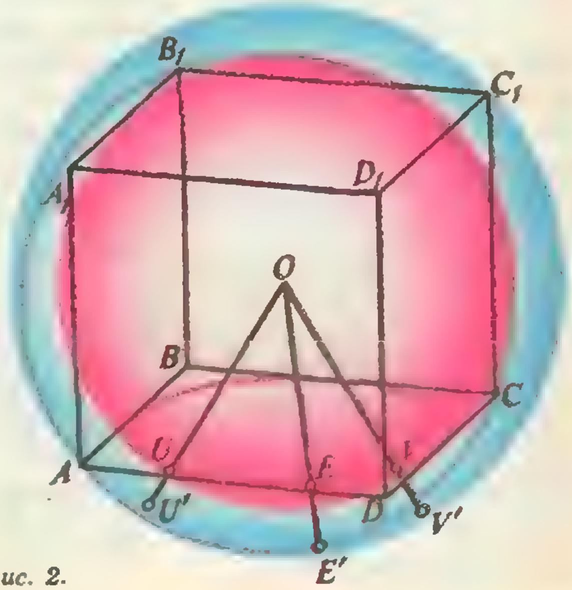


Рис. 2.

[4]. Построим коническую поверхность с вершиной в центре O, соединив ее лучами с точками окружности O_2.

[5]. Тогда образующая конуса — луч OU' (рис. 2) — лежит ниже O_1.

[6]. Образующая конуса OV' (рис. 2) лежит выше O_1 (легий подсчет).

[7!!]. Из последних двух утверждений и соображений непрерывности вытекает, что существующая точка E на O_2 такая, что луч OE «пронзает» окружность O_1 в точке E',

[8] и значит, расстояние от E до E' равно $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, т. е. $\rho\leqslant\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

[9]. Таким образом, $\rho=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Замечательно красивое решение, не правда ли? Оно бы вам еще больше понравилось, если бы вы нашли его сами. Число решивших эту задачу на олимпиаде, было не так уж мало — пять-десять человек,— и все решили вот так, геометрически. А нам предстоит другой путь.

Но прежде чем переходить к аналитическому решению, я должен познакомить вас с одним очень важным в анализе приемом исследования задач на экстремум, открытым Лагранжем (этому приему я посвятил значительную часть своей упомянутой выше книги — см. рассказ двенадцатый). Именно с помощью Лагранжа я вступался за честь аналитиков перед заносчивыми геометрами-олимпийцами. И сейчас я тоже хочу прибегнуть к его помощи. Прием Лагранжа состоит в следующем.

Пусть требуется найти минимум (или максимум) функции нескольких переменных (для определенности — функции $f_0(x, y, z, u)$ четырех переменных) при некоторых условиях, которыми связаны переменные x, y, z, u. Например,

$$f_1(x, y, z, u)=0,$$
$$f_2(x, y, z, u)=0,$$

где f_1 и f_2 — данные функции.

Тогда (утверждает Лагранж) решение, если оно существует, можно найти с помощью следующего метода.

Пусть λ_0, λ_1 и λ_2 — какие-нибудь (нам пока не известные) числа, не все равные 0.

Рассмотрим функцию

$$L=\lambda_0 f_0+\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2.$$

Пусть L_x, L_y, L_z и L_u — производная функции L по переменным x, y, z, u. Тогда точка (x_0, y_0, z_0, u_0), в которой достигается минимум (максимум) функции f_0, задается системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, u)=0,\\ f_2(x, y, z, u)=0,\\ L_x=L_y=L_z=L_u=0.\end{cases}$$

(Заметим, что это система из 6 уравнений с 7 неизвестными, из которой находятся числа x_0, y_0, z_0, u_0 и λ_0, λ_1, λ_2.)

Этот прием универсален, технически очень прост и для своего применения не требует ничего, кроме понятия производной. Воспользуемся им для решения нашей задачи.

Решение второе (аналитическое).

[1]. Окружность O_2 представим в виде $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, $z=-1$, $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

[2]. Окружность O_1 зададим в виде пересечения сферы $x^2+y^2+z^2=3$ и плоскости $x-y+z=-1$.

[3]. Теперь задача формулируется так. Найти минимум функции

$$f_0(x, y, z, \varphi)=(x-\cos\varphi)^2+(y-\sin\varphi)^2+(z+1)^2$$

при условиях

$$f_1(x, y, z)=x-y+z+1=0,$$
$$f_2(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-3=0.$$

[4]. Нетрудно понять, что достаточно рассмотреть сектор $-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$.

[5]. Построим функцию Лагранжа

$$L=\lambda_0((x-\cos\varphi)^2+(y-\sin\varphi)^2+(z+1)^2)+\lambda_1(x-y+z+1)+\lambda_2(x^2+y^2+z^2-3)$$

и вычислим ее производные:

$$L_\varphi=2\lambda_0\,((x-\cos\varphi)\sin\varphi)-(y-\sin\varphi)\cos\varphi)=0, \quad (1)$$
$$L_x=2\lambda_0\,(x-\cos\varphi)+\lambda_1+2\lambda_2 x=0, \quad (2)$$
$$L_y=2\lambda_0\,(y-\sin\varphi)-\lambda_1+2\lambda_2 y=0, \quad (3)$$
$$L_z=2\lambda_0\,(z+1)+\lambda_1+2\lambda_2 z=0. \quad (4)$$

[6]. Теперь решим полученную систему (1) — (4). Если допустить, что $\lambda_0=0$, то из (2) — (4) и уравнений связи получаем, что $\lambda_1=\lambda_2=0$, а это противоречит допущению о том, что $\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2\neq 0$.

Ясно, что числа λ_0, λ_1, λ_2 можно определить с точностью до пропорциональности, поэтому полагаем $\lambda_0=\frac{1}{2}$. Тогда из (1) следует

$$x\sin\varphi=y\cos\varphi. \qquad (5)$$

Обозначив $a=-\frac{\lambda_1}{1+2\lambda_2}$, $b=\frac{\lambda_1}{1+2\lambda_2}$ (допущение $1+2\lambda_2=0$ приводит к очевидно несовместной системе), получаем

$$x=a+b\cos\varphi,\ y=-a+b\sin\varphi,\ z=a-b. \qquad (6)$$

[7]. Из (6) и (5) сразу вытекает, что $a(\cos\varphi-\sin\varphi)=0$, и это ведет к альтернативе

$$(i)\,a=0,\ (ii)\sin^2\varphi+\cos\varphi=0(\Leftrightarrow\varphi=-\frac{\pi}{4}). \qquad (7)$$

[8]. Если (i), то из (6) (при $a=0$) и $x^2+y^2+z^2=3$ получаем

$$b^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+1)=3\Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}. \qquad (8)$$

[9]. Если (ii), то (легко считаем)

$$(x_0,\ y_0,\ z_0)=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right). \qquad (9)$$

[10]. В случае (i)

$$(x-\cos\varphi)^2+(y-\sin\varphi)^2+(z+1)^2=(b-1)^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+1)=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2.$$

[11]. В случае (ii) расстояние между точками $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)$ и $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ больше $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Ответ: $\rho=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Ну а теперь пофилософствуем немного. Мы затронули две темы: 1) кто же все-таки кого? и 2) бывают ли задачи, имеющие простое решение, которое, тем не менее, очень трудно найти?

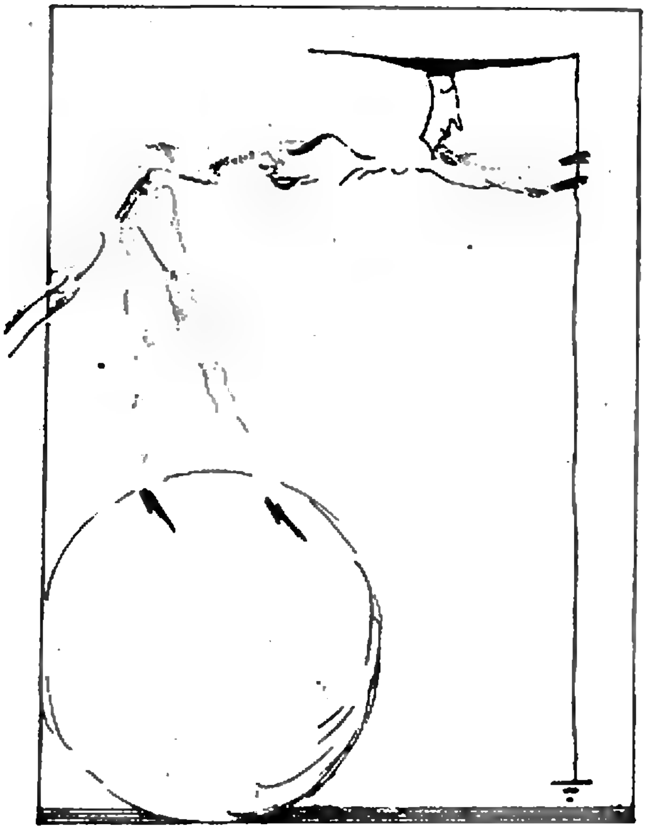
Так чье же решение красивее? Тут не может быть сомнения, и я сразу сдаюсь на милость победителя. Но да будет мне позволено, смиренно признав свое поражение, высказать все-таки несколько слов.

Во-первых, я прошу обратить внимание, мои дорогие друзья (или судьи?), на то, что я не только нашел ответ, но и получил решение. Ведь в случае (i), который привел нас к ответу, из соотношений (2) — (4) при $a=0$ и из выражения для b, получаем, что $\cos\varphi-\sin\varphi=1-\sqrt{\frac{2}{3}}$, откуда сразу находится искомое φ. А вам, дорогие геометры, еще придется немного потрудиться. Но это так, между прочим.

Во-вторых, я хочу поставить в заслугу анализу то, что в аналитическом решении нет восклицательных знаков. «Как это?» — спросите вы. Вспомните: — восклицательными знаками (как в шахматной партии) я обозначал особенно красивые, неожиданные ходы. Так вот, я ставлю в заслугу анализу именно то, что он дал возможность прийти к цели стандартно, рутинно, безо всякого «откровения». Правда, чуть длиннее (одиннадцать ходов вместо восьми, но зато ходов тривиальных, стандартных, совершенно элементарных). И этот путь был, заметьте, универсальным. Ведь если чуть изменить задачу, то, боюсь, что ты, мой дорогой геометр, опять будешь вынужден ждать озарения, а стандартная дорога (может быть, с помощью ЭВМ) обязательно приведет к цели. Впрочем, чур меня: что это я вдруг сам начинаю задираться. Спор не окончен, он и не может быть окончен! Следующий ход за тобой, мой дорогой поклонник геометрии!

Теперь — о второй теме. Да, как это ни странно, *существуют задачи с совсем простым решением, найти которое необычайно трудно.* Обсуждаемая нами — из их числа (если не предполагать возможность аналитического подхода). Характеристический признак таких задач — наличие «восклицательных знаков». Если разложить доказательства большинства

(Окончание см. на с. 62)



Практикум абитуриента

Проводящие сферы в электростатике

Кандидат физико-математических наук
А. ЧЕРНОУЦАН

Электростатика проводников занимает столь незначительное место в школьном курсе физики, что для многих учащихся за несколькими простыми задачами остаются навсегда скрытыми красота и нетривиальность этой темы.

На первый взгляд, поведение проводников в электрическом поле просто и однозначно. И действительно. В любом проводнике всегда есть свободные заряды. Под действием электрического поля свободные заряды приходят в движение — возникает электрический ток. В случае электростатики — а именно она нас и будет интересовать — заряды на проводнике находятся в равновесии. Это означает, что напряженность поля во всех точках проводника равна нулю, а потенциал всех точек проводника одинаков (его называют потенциалом проводника).

Из условия электростатического равновесия следует также, что при равновесии заряженной является только поверхность проводника, а в объеме проводника заряды отсутствуют (имеются в виду нескомпенсированные заряды), что силовые линии электростатического поля перпендикулярны поверхности проводника, и некоторые другие свойства проводников.

Однако простота всех этих утверждений обманчива. Вдумайтесь: в них ничего не говорится о том, *как именно* распределены заряды по поверхности проводника. Известно лишь, что заряды должны быть распределены так, чтобы напряженность поля в проводнике была равна нулю. Определено не само равновесное расположение зарядов, а «конечный результат» такого расположения.

Необходимость анализировать «по конечному результату» (столь эффективная в экономике) создает серьезные трудности в изучении и понимании электростатики проводников. Правда, школьников обычно благополучно избавляют от этих проблем, знакомя их в основном с задачами, где расположение зарядов известно заранее. Но... один шаг в сторону (например, на устном вступительном экзамене) — и абитуриент часто попадает впросак.

Чтобы помочь вам избежать таких, как сейчас говорят, «нештатных» ситуаций, при разборе всех задач — как простых, так и более сложных — особое внимание будет уделяться обоснованию всех утверждений и ответам на возможные вопросы. Для этой цели некоторые задачи, кроме раздела «Решение», содержат дополнительный раздел —

«Обсуждение». Одна из целей этого раздела — обобщить полученные результаты и показать возможности их применения.

Задача 1. *На металлический шар радиусом R нанесен заряд q. Найдите потенциал шара, а также напряженность и потенциал электрического поля во всех точках пространства.*

Решение. В этой задаче не возникает вопроса о том, как именно распределен заряд на поверхности шара — из соображений симметрии ясно, что он распределен равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = q/(4\pi R^2)$.

Начнем с вычисления напряженности поля. Внутри проводящего шара напряженность равна нулю, а во внешнем пространстве она такая же, как у поля точечного заряда, помещенного в центр шара:

$$\text{при } r \leqslant R \quad E = 0,$$

$$\text{при } r > R \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}. \qquad (1)$$

Утверждение (1) используется очень широко. (И не только для электростатического поля, но и для поля тяготения. Вспомните, например: тела притягиваются к Земле так, как будто вся ее масса сосредоточена в ее центре.) Качественное пояснение можно дать на языке силовых линий: поскольку картинки радиально расходящихся силовых линий для полей шара и точечного заряда совпадают, то и сами поля должны быть одинаковыми. Строгое доказательство можно найти в статье «Силовые линии и теорема Гаусса» в третьем номере «Кванта» за этот год.

Поскольку напряженность поля шара во всем внешнем пространстве — от R до бесконечности — такая же, как у поля точечного заряда, а на бесконечности потенциал обоих полей принят равным нулю, то и потенциал поля шара совпадает с потенциалом поля точечного заряда:

$$\text{при } r > R \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r}. \qquad (2)$$

Положив $r = R$, получим потенциал на поверхности шара, т. е. потенциал самого шара (потенциал всех его точек один и тот же):

$$\text{при } r \leqslant R \quad \varphi_{\text{ш}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R}. \qquad (3)$$

Все, что мы сказали о напряженности и потенциале поля шара, графически изображено на рисунке 1. Отметим, что этот ответ годится и для тонкой проводящей сферической оболочки (подумайте, почему).

Обсуждение. 1) Иногда у школьников возникает такой вопрос: «Если поле внутри шара отсутствует, то почему же не равен нулю потенциал поля в этой области?». Дело в том, что мы уже приняли за ноль потенциал поля на бесконечности. Чтобы найти потенциал некоторой внутренней точки шара, надо вычислить работу поля по переносу единичного положительного заряда из этой точки в бесконечность; при таком переносе мы должны пройти через всю внешнюю область — от R до бесконечности, а в этой области напряженность поля уже не равна нулю.

2) Рассчитывая потенциал шара, мы воспользовались выражением (2) для потенциала внешней области. Однако можно пойти другим путем и вычислить потенциал в центре шара с помощью принципа суперпозиции. Разобьем поверхность шара на маленькие участки — точечные заряды Δq_i, найдем вклад каждого участка и просуммируем:

$$\varphi_{\text{ш}} = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\sum\limits_i \Delta q_i}{R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R}.$$

Здесь мы использовали замечательное свойство центра шара: то, что он лежит на одинаковом расстоянии R от всех точек поверхности.

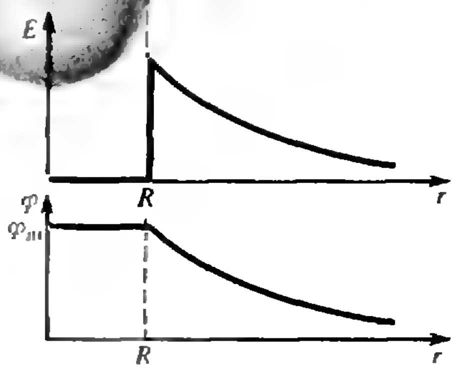


Рис. 1.

3) Напряженность поля достигает максимального значения у поверхности шара. Выразим ее через потенциал шара:

$$E(R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}=\frac{\varphi_ш}{R}.$$

Видно, что при одинаковом потенциале напряженность поля больше у поверхности маленького шарика. (Это значит, например, что около маленького шарика пробой воздуха наступает при меньшем потенциале.)

Кроме того, напряженность поля у поверхности проводника зависит только от поверхностной плотности заряда σ:

$$E(R)=\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{4\pi R^2}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Это соотношение справедливо для проводника любой формы — число силовых линий, начинающихся на некотором участке поверхности, пропорционально заряду этого участка. (В частности, оно выполняется для поля плоского конденсатора. Так как это поле создается двумя пластинами, то поле одной пластины, т. е. равномерно заряженной плоскости, равно $\sigma/(2\varepsilon_0)$.)

4) Отметим, что потенциал шара оказался пропорциональным его заряду (формула (3)). Такое же утверждение верно для уединенного проводника произвольной формы:

$$\varphi\sim q,\quad \varphi=\frac{1}{C}q,$$

где C — электроемкость (емкость) проводника, которая зависит от формы и размеров проводника. (Емкость шара, например, равна $C=4\pi\varepsilon_0 R$.)

Чтобы доказать пропорциональность φ и q, используем теорему единственности — очень важную теорему, истинно «палочку-выручалочку» электростатики. Она утверждает, что существует только одно равновесное распределение зарядов на проводниках, т. е. распределение, при котором $\vec{E}=0$ внутри всех проводников (при условии, что заданы либо полные заряды всех проводников, либо их потенциалы). (Недаром свободные заряды практически мгновенно отыскивают свое равновесное положение — ведь перед ними не стоит мучительная проблема выбора!)

Пусть уединенный проводник при сообщении ему заряда q приобретает потенциал φ. Нанесем на этот проводник дополнительно такой же заряд q и убедимся в том, что потенциал проводника удвоится. Если вторая порция заряда распределится по поверхности точно так же, как первая, то напряженность внутри проводника останется равной нулю (вклад каждой порции равен нулю). Именно так и случится — ведь существует только одно «хорошее» распределение! Значит, новая порция заряда создаст на проводнике такой же потенциал φ, и результирующий потенциал будет равен 2φ.

Задача 2. *Два удаленных друг от друга проводящих шара, радиусы которых R_1 и R_2, несут заряды q_1 и q_2 соответственно. Чему будут равны потенциалы и заряды шаров после того, как их соединят проволокой?*

Решение. После соединения два шара вместе с проволокой образуют единый проводник. Следовательно, в состоянии равновесия потенциалы шаров должны быть равны друг другу:

$$\varphi_1'=\varphi_2'=\varphi',\ \text{или}\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1'}{R_1}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2'}{R_2},$$

т. е. заряды шаров пропорциональны их радиусам (штрихами отмечены заряды и потенциалы шаров после соединения). Так как заряд только перемещается по проволоке с шара на шар, но не поступает в систему извне и не покидает ее, то выполняется закон сохранения заряда:

$$q_1+q_2=q_1'+q_2'$$

(зарядом на проволоке пренебрегаем). Решая полученные уравнения, находим

$$q_1'=(q_1+q_2)\frac{R_1}{R_1+R_2},\ q_2'=(q_1+q_2)\frac{R_2}{R_1+R_2},$$

$$\varphi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_1+R_2}.$$

Обсуждение. 1) Точно так же выглядит решение задачи о соединении проволокой двух удаленных друг от друга проводников произвольной формы, имеющих емкости C_1 и C_2:

$$q_1'=(q_1+q_2)\frac{C_1}{C_1+C_2},\quad q_2'=(q_1+q_2)\frac{C_2}{C_1+C_2},$$

$$\varphi'=\frac{q_1+q_2}{C_1+C_2}.$$

Видно, что емкость изолированной системы двух удаленных друг от друга проводников, соединенных проволокой, равна C_1+C_2. Если $C_1\ll C_2$, то $q_1'\ll q_2'$, т. е. на проводнике малой емкости (например, на проволоке) оказывается пренебрежимо малый заряд. Наоборот, заряд и потенциал проводника с очень большой емкостью при соединении почти не меняются. Так, когда говорят: «соединили с проводником заданного потенциала», то имеют в виду проводник очень большой емкости. В частности, под словом «заземление» понимают соединение с проводником очень большой емкости (землей) нулевого потенциала; после заземления $\varphi'=0$.

2) Отметим, что хотя на шаре большего радиуса сосредоточен больший заряд ($q_1'/q_2'=R_1/R_2$), поверхностная плотность заряда больше, наоборот, на маленьком шаре ($\sigma_1'/\sigma_2'=R_2/R_1$). Это иллюстрирует тот известный факт, что поверхностная плотность заряда (а значит, и напряженность) больше на тех участках проводника, где кривизна поверхности больше (например, у острия).

Задача 3. *Проводящий шар радиусом R_1 окружили тонкой проводящей оболочкой радиусом R_2. Заряд шара q_1, заряд оболочки q_2. Найдите потенциалы проводников, а также напряженность и потенциал во всех точках пространства. Как изменится потенциал шара, если оболочку заземлить?*

Решение. В соответствии с принципом суперпозиции, напряженность (и потенциал) в каждой точке пространства может быть вычислена как сумма напряженностей (потенциалов), созданных в этой точке шаром и оболочкой. Посмотрите еще раз на рисунок 1: как для напряженности, так и для потенциала ответ зависит от того, находимся мы внутри или вне заряженной сферы. Если, например, точка расположена между шаром и оболочкой (рис. 2), то получаем

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}+0,$$

$$\varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$$

$$(R_1<r<R_2).$$

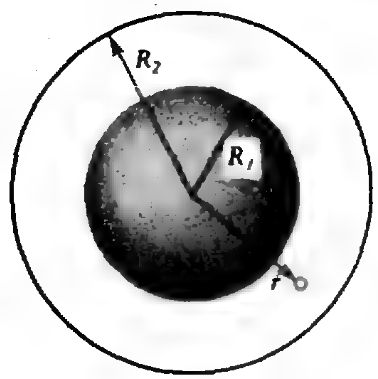


Рис. 2.

В этих равенствах первый член характеризует поле шара, второй — поле оболочки. При $r=R_1$ получаем ответ для потенциала шара, при $r=R_2$ — для потенциала оболочки:

$$\varphi_{ш}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}\right),$$

$$\varphi_{об}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2}.$$

При $r<R_1$ потенциал постоянен и равен потенциалу шара, а напряженность равна нулю. При $r>R_2$ получаем поле точечного заряда (q_1+q_2):

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r^2},\quad \varphi(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r}.$$

После заземления оболочки ее потенциал станет равным нулю, откуда находим новый заряд оболочки:

$$q_2'=-q_1$$

и новый потенциал шара:

$$\varphi_{ш}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_1\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right).$$

Обсуждение. При заземлении внешней оболочки полный заряд системы оказался равным нулю ($q_1=q$, $q_2=-q$). Такую систему называют сферическим конденсатором. Так как потенциал внешней обкладки равен нулю, то напряжение на конденсаторе равно потенциалу внутренней, положительно заряженной обкладки (шара). Отсюда находим емкость сферического конденсатора:

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}.$$

Если неограниченно увеличивать радиус внешней оболочки ($R_2\to\infty$), то емкость сферического конденсатора переходит в емкость уединенного шара, а напряжение на конденсаторе — в потенциал уединенного шара, о которых уже говорилось. Точно так же, любой уединенный проводник емкостью C можно считать обкладкой конденсатора емкостью C, вторая обкладка которого представляет собой бесконечно удаленную замкнутую оболочку. Зачем это нужно? Конечно же, чтобы использовать привычные формулы для конденсаторов в задачах с уединенными проводниками. Например, для энергии уединенного проводника сразу получаем формулы $W=q\varphi/2=C\varphi^2/2=q^2/(2C)$.

Задача 4. *Точечный заряд q находится на расстоянии L от центра тонкой проводящей сферы радиусом R, несущей заряд Q. Найдите потенциал проводящей сферы. Рассмотрите случаи $L>R$ и $L<R$.*

Решение. В этой задаче сферическая симметрия отсутствует, и поэтому распределение зарядов на сфере неизвестно. Полное решение задачи об электрическом поле во всем пространстве выходит за рамки этой статьи (его можно найти, например, методом электростатических изображений — см. «Квант», 1987, № 3, с. 39). Как это ни удивительно, благодаря геометрическим свойствам сферы, ее потенциал все же удается найти без сложных вычислений.

Рассмотрим сначала случай $L>R$ (рис. 3). Хотя внутри оболочки и нет проводника, напряженность поля в полости (не содержащей зарядов!) будет равна нулю и потенциал всех внутренних точек будет один и тот же. Будем искать потенциал центра. Он создается точечным зарядом q и зарядом Q, распределенным — неизвестно как! — по поверхности сферы. Однако, благодаря тому, что расстояние от центра до всех точек поверхности одинаково, результат вычисления потенциала не зависит от распределения заряда по сфере:

$$\varphi_{об}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L}+\sum_i\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta Q_i}{R}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}.$$

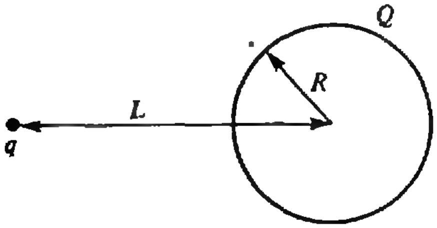


Рис. 3.

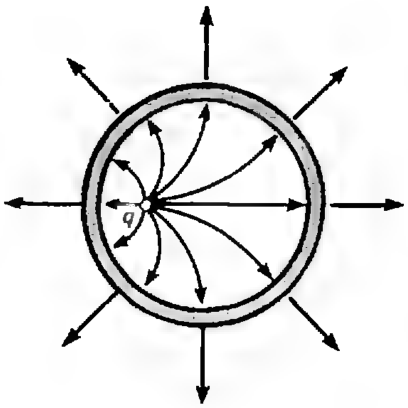


Рис. 4.

(Во избежание недоразумений поясним, что существует только одно распределение зарядов, при котором все точки внутри сферы будут иметь такой же потенциал, как центр сферы.)

Рассмотрим теперь случай $L<R$ (рис. 4). При таком расположении заряда q напряженность поля во внутренней полости не равна нулю. Значит, потенциал центра сферы, для которого остается верным найденное выше выражение, не равен теперь потенциалу проводящей оболочки. Но нас выручит другое обстоятельство: оказывается, поле во внешней области ($r>R$) не зависит от положения заряда q и совпадает с полем воображаемого заряда $(q+Q)$, помещенного в центр сферы. Для потенциала оболочки получаем:

$$\varphi_{об}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q+Q}{R}.$$

Как доказать, что поле во внешней области не зависит от положения заряда q? Здесь нам на помощь опять приходит теорема единственности. Давайте изобретем такое распределение зарядов по внутренней и внешней поверхностям оболочки, при котором поле в проводнике будет равно нулю. Начнем с внутренней поверхности. Распределим по ней заряд $-q$ так, как он распределился бы в воображаемой сферической полости, созданной в пространстве, целиком заполненном проводником (рис. 5). Понятно, что при таком

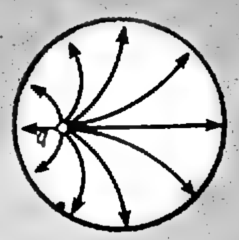


Рис. 5.

распределении зарядов поле вне этой внутренней поверхности равно нулю. А теперь наложим на это распределение зарядов по внутренней поверхности равномерно распределенный по внешней поверхности заряд $q+Q$. Полный заряд оболочки при этом будет равен Q, а напряженность поля внутри проводника будет равна нулю. Значит, мы придумали правильное распределение зарядов, которое и будет существовать в действительности.

Решение последней задачи выглядит необычно коротким, но только благодаря тому, что мы очень подробно обсуждали решения предыдущих задач.

Задача 5. *Шар радиусом R_1 окружен тонкой концентрической проводящей оболочкой радиусом R_2. Заряды шара и оболочки равны нулю. Между шаром и оболочкой на расстоянии R от центра ($R_1<R<R_2$) помещают точечный заряд q, после чего шар с оболочкой соединяют тонкой проволокой. Какой заряд окажется после этого на оболочке?*

Решение. Обозначим наведенный заряд оболочки Q, тогда на шаре будет наведен заряд $-Q$. Вычислим потенциалы шара и оболочки и приравняем их друг к другу. Потенциал центра шара (равный потенциалу шара) вычисляем по принципу суперпозиции:

$$\varphi_ш=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{Q}{R_1}+\frac{q}{R}+\frac{Q}{R_2}\right).$$

Потенциал оболочки находим из соображений, что во внешнем пространстве (при $r>R_2$) поле системы равно полю точечного заряда q (q — полный заряд системы), помещенного в центр:

$$\varphi_{об}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{R_2}.$$

Приравнивая $\varphi_ш$ и $\varphi_{об}$, получаем

$$Q=q(R_2/R_1-1)/(R_2/R-1).$$

Упражнения

1. Проводящий шар радиусом R_1 окружают тонкой концентрической проводящей оболочкой радиусом R_2. На оболочку наносят заряд q, а шар заземляют длинной проволокой, не имеющей электрического контакта с оболочкой. Найдите потенциал оболочки.

2. Проводящий шар радиусом r окружают концентрической толстой оболочкой из проводника, внутренний радиус которой R_1, а внешний R_2. Заряд шара q, оболочки Q. Определите потенциал шара.

3. Точечный заряд q находится на расстоянии L от центра заземленного проводящего шара радиусом R. Определите заряд, находящийся на шаре.

4. Два проводящих заряженных шара, радиусы которых R_1 и R_2, а расстояние между центрами L (L велико по сравнению с радиусами), соединяют проволокой. Найдите отношение зарядов шаров после соединения, учитывая в первом приближении взаимное влияние шаров. Указание: воспользуйтесь результатами задачи 4 из статьи.

5. Проводящий шар радиусом R_1 окружают тонкой проводящей концентрической оболочкой радиусом R_2, а в пространство между ними на расстоянии R от центра помещают точечный заряд q ($R_1<R<R_2$). Какие заряды будут находиться на шаре и оболочке, если оба проводника заземлить?

Внимание!

С 1 декабря 1990 года по 31 января 1991 года в павильоне «Народное образование» на ВДНХ СССР будет проходить выставка «Новые программные педагогические средства для средней школы и ПТУ».

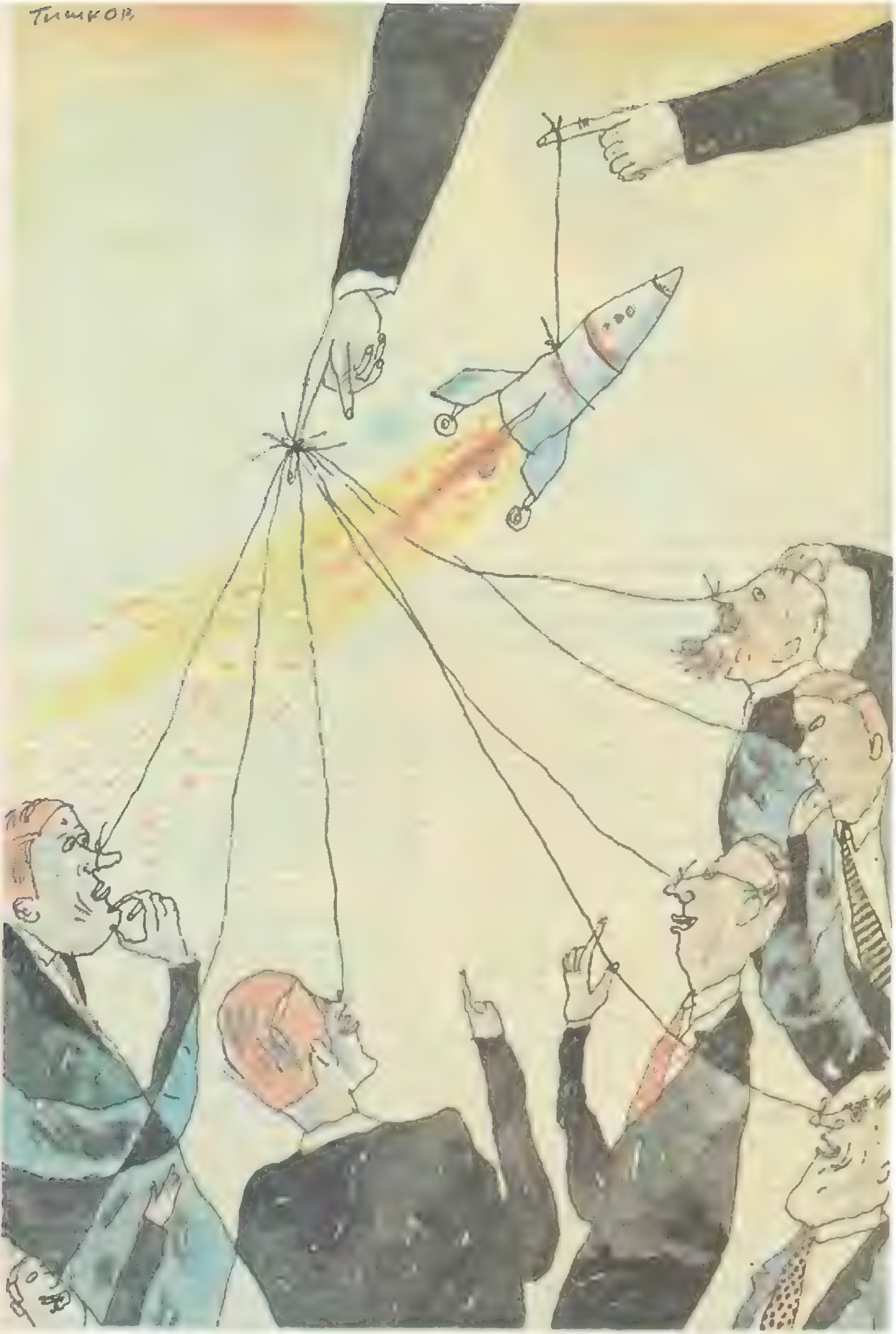
Новейшие программы по всем школьным дисциплинам, разработанные для ПЭВМ и КУВТ (КУВТ-86, «Корвет», «Ямаха», «Правец», «Агат», УКНЦ, PC/AT, PC/XT, PS/2), покажут вам АСП КУДИЦ (Москва), НЦПСО (Москва), МГИУУ, МГУ, «Полином» (Москва), компьютерные центры и вузы Ленинграда, Новосибирска, Риги, Киева, Минска и др.

В приобретении и реализации программных средств (ПС) вам поможет АСП КУДИЦ — Акционерное Социалистическое Предприятие Компьютерный Учебный Демонстрационный Издательский Центр.

Вниманию разработчиков ПС на IBM совместимых ПЭВМ!

АСП КУДИЦ заключает договора на распространение и тиражирование ПС.

Адрес центра: 107078, Москва, ул. Садово-Черногрязская, 4, АСП КУДИЦ, тел. 207-00-69.



Рассказ перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики в 15-ти томах. Том 1 (М., Молодая гвардия, 1967).

МАГАЗИН ИГРУШЕК

(фантастический рассказ)

Г. ГАРРИСОН (США)

Поскольку в толпе почти не было взрослых, а рост полковника Биффа Хаутона превышал шесть футов, он отчетливо видел каждую деталь демонстрируемой игрушки. Ребятишки — и большинство родителей — смотрели на прилавок, широко открыв рты. И только Бифф Хаутон был слишком искушенным человеком, чтобы испытывать благоговейный восторг. Единственно, почему он остался в магазине, было желание узнать, как устроена игрушка и что заставляет ее взлетать.

— Все это подробно разъясняется в инструкции,— сказал продавец, высоко поднимая ярко раскрашенную брошюру, раскрытую на четырехцветной диаграмме.— Вы все знаете, что магнит может притягивать разные предметы, и я уверен, вам известно также, что сама Земля — это огромный-преогромный магнит — именно поэтому стрелка компаса всегда показывает на север. Ну вот... Удивительный Атомный Космический Волнолет опирается на эти космические волны. Магнитные волны Земли для нас совершенно невидимы, и они пронизывают все, даже нас самих. Удивительный Атомный Волнолет плывет по этим волнам, как корабль плывет по волнам океана. А теперь смотрите...

Глаза всех присутствующих были прикованы к продавцу, когда он поставил ярко раскрашенную модель ракетного корабля на прилавок и сделал шаг назад. Модель была сделана из штампованного металла и казалась приспособленной для полета ничуть не больше, чем банка тушенки, которую она очень напоминала с виду. На разноцветной поверхности модели не было ни пропеллеров, ни ракетных сопел. Она покоилась на трех резиновых колесах, и из задней части ракеты выходил двойной изолированный провод. Этот белый провод был протянут через всю черную поверхность прилавка и заканчивался в маленьком пульте управления, который продавец держал в руке. Сигнальная лампочка, регулятор напряжения и кнопка включения — вот и все, что находилось на контрольной панели пульта.

— Я нажимаю кнопку, и ток устремляется к Волновым Приемникам,— сказал продавец.

Раздался легкий щелчок, и сигнальная лампочка начала посылать равномерные вспышки света: вспыхнула — погасла — вспыхнула — погасла. Затем продавец стал медленно поворачивать регулятор напряжения.

— С Волновым Генератором необходимо обращаться очень осторожно, поскольку здесь мы имеем дело с космическими силами...

Дружное «Ах!» вырвалось у зрителей, когда Космический Волнолет начал вибрировать, а затем медленно поднялся в воздух. Продавец отступил назад, в глубь магазина, и игрушка начала подниматься выше и выше, мягко покачиваясь на невидимых волнах магнитных сил, поддерживающих ее. Затем напряжение было снято, и модель медленно опустилась на прилавок.

— Всего семнадцать долларов девяносто пять центов! — объявил молодой человек и поставил ценник с крупными цифрами на прилавок.— Всего 17.95 за полный комплект Атомного Чуда, включая пульт управления Волнолетом, батарею и брошюру с инструкцией и описанием...

Как только указатель цены появился на прилавке, зрители сразу начали расходиться, и ребятишки, толкая друг друга, кинулись к действующим моделям электропоездов. Последние слова продавца были заглушены говором расходящихся зрителей, и он погрузился в угрюмое молчание. Он поставил пульт управления на прилавок, зевнул и сел на край стола. Полковник Хаутон один остался стоять у прилавка, после того как толпа зрителей разошлась.

— Не могли бы вы объяснить мне, как действует эта штука? — спросил полковник, наклонившись вперед.

Продавец просиял и взял одну из игрушек.

— Вот посмотрите сюда, сэр...— Он снял верхнюю часть модели.— Вот видите, на каждом ее конце расположены Космические Волновые Витки.— Он указал карандашом на необычной формы пластиковые стержни диаметром около дюйма, на которые было намотано — очевидно, как попало — несколько витков медной проволоки. Если не считать этих стержней с обмоткой, модель внутри оказалась совершенно пустой. Обмотки были соединены между собой, провода тянулись к пульту управления и исчезали в его днище.

Бифф Хаутон иронически посмотрел на модель и перевел затем взгляд на лицо продавца, который, очевидно, совершенно игнорировал этот знак недоверия.

— Внутри пульта управления находится батарея,— продолжал молодой человек, снимая крышку с пульта и показывая обычную батарейку от карманного фонаря.— Ток идет от батареи через включающее устройство и сигнальную лампочку к Волновому Генератору.

— Вы хотите сказать,— прервал его Бифф,— что ток от этой копеечной батарейки проходит через вот этот дешевый реостат и попадает в бессмысленную обмотку внутри модели и что это не может дать абсолютно никакого эффекта. А теперь честно скажите мне, что на самом деле заставляет ее подниматься в воздух? Если уж я плачу восемнадцать зелененьких за эту жестянку, я хочу точно знать, что покупаю.

Продавец покраснел.

— Извините, сэр,— пробормотал он, заикаясь от смущения.— Я совсем не пытался что-то скрыть от вас, сэр. Как и всякая волшебная игрушка, Волнолет имеет секрет, и этот секрет не может быть раскрыт, пока она не куплена.— Тут он наклонился вперед с заговорщицким видом.— Но я открою вам одну тайну. Цена этой модели непомерно высока, и никто ее не покупает. Директор сказал, что если найдутся желающие, можно продавать модели по три доллара штука. Если вы хотите приобрести модель за эту цену...

— Идет, мой мальчик! — не дал ему закончить полковник и бросил на прилавок три долларовые бумажки.— Эту цену я готов заплатить за игрушку, как бы она ни действовала. Ребята в лаборатории будут от нее в восторге,— прибавил он, постукивая по груди крылатой ракетой.— Ну, а теперь — как же она летает?

Продавец с таинственным видом оглянулся вокруг, придвинулся поближе к полковнику и прошептал:

— Бечевка! Или, вернее сказать, черная нитка. Она идет от носа корабля вверх через маленький блок в потолке и обратно к моей руке — привязана вот к этому кольцу, видите? Когда я отступаю, ракета поднимается. Вот и все.

— Все хорошие иллюзионные трюки очень просты,— проворчал полковник, проводив взглядом уходящую вверх нить.— Особенно когда внимание зрителей отвлекается разными уловками.

— Если у вас нет под рукой черного стола, его отлично заменит черная ткань,— заметил молодой человек.— Кроме того, этот фокус очень хорошо получается на фоне дверного проема, если только в задней комнате выключен свет, конечно.

— Заверни-ка ее, мальчуган. Сам не вчера родился. Умею в таких вещах разбираться.

Бифф Хаутон продемонстрировал свою покупку во время игры в покер в следующий четверг. Все его гости были специалистами по ракетной технике, и хохот во время чтения инструкции не прекращался ни на минуту.

— Эй, Бифф, дай-ка я срисую диаграмму. Пожалуй, можно будет использовать эти самые магнитные волны в моей новой птичке!

— Эти батарейки дешевле воды. Вот источник энергии будущего!

Один только Тедди Кэйпер заподозрил неладное, когда начался полет ракеты. Он сам был фокусником-любителем и сразу разгадал трюк. Однако он молчал из чувства профессиональной солидарности и только иронически улыбался, когда присутствующие замолкали один за другим. Полковник умел показывать фокусы, и он превосходно подавал полет. Ему почти удалось убедить зрителей в действительном существовании Космического Волнолета еще до окончания демонстрации. Когда модель приземлилась и он выключил ток, зрители сгрудились вокруг стола.

— Нитка! — воскликнул один из инженеров с явным чувством облегчения, и все рассмеялись.

— А жаль! — сказал Главный Физик проекта.— Я надеялся, что некоторое количество Космических Волн поможет нам. Ну-ка, дайте мне попробовать!

— Первым — Тедди Кэйпер! — объявил Бифф.— Он понял, в чем дело, еще когда все вы следили за сигнальной лампочкой, только не подал виду.

Кэйпер надел кольцо с черной ниткой на указательный палец и начал медленно отходить назад.

— Сначала нужно включить питание,— напомнил Бифф.

— Я знаю,— улыбнулся Кэйпер.— Но это входит в иллюзионный трюк — все эти уловки и игра. Сначала я попробую этот фокус просто так, посмотрю, как нужно поднимать и опускать модель, а затем проделаю фокус со всеми атрибутами.

Он начал отводить руку назад, мягким и гибким профессиональным движением, почти незаметным для окружающих. Модель поднялась на несколько дюймов от стола, затем рухнула вниз.

— Нитка лопнула,— сказал Кэйпер.

— Ты, наверно, дернул ее, вместо того чтобы тянуть плавно,— сказал Бифф, связывая оборванные концы нитки.— Вот смотри, я покажу тебе, как это делается.

Но когда Бифф попробовал поднять модель, нитка снова не выдержала, что вызвало новый взрыв веселья и заставило полковника покраснеть. Кто-то напомнил об игре в покер.

Это было единственное упоминание о покере в тот вечер, потому что очень скоро они обнаружили, что нитка выдерживает вес модели только в том случае, когда ток включен и два с половиной вольта проходят через шутовскую обмотку. При выключенном питании модель была слишком тяжелой. Нитка неизменно обрывалась.

— Я все-таки думаю, что это сумасшедшая идея,— сказал молодой человек.— За эту неделю мы сбились с ног, демонстрируя игрушечные космические корабли каждому мальчишке в радиусе тысячи миль. Кроме того, продавать их по три доллара штука, когда изготовление каждой модели обошлось по крайней мере в сотню...

— Но ведь ты все-таки сумел продать десяток моделей людям, представляющим для нас интерес? — спросил пожилой мужчина.

— Пожалуй. Мне удалось продать их нескольким офицерам ВВС и одному полковнику ракетных войск. Затем я спихнул одну служащему Бюро Стандартов. К счастью, он не узнал меня. Потом двум профессорам из университета, которых вы мне показали.

— Так что теперь эта проблема находится в их руках, а не в наших. Нам теперь остается только сидеть и ждать результатов.

— Каких результатов? Когда мы стучались в двери научных институтов, настаивая на демонстрации эффекта, ученые не проявили никакого интереса.

Мы запатентовали эти витки и можем доказать кому угодно, что когда обмотка находится под током, вес предмета в непосредственной близости от этих витков становится меньше...

— Но лишь на очень незначительную долю меньше. И мы не знаем, чем это вызвано. Никто не проявляет ни малейшего интереса к этому вопросу — ведь речь идет о небольшом уменьшении в весе неуклюжей модели, явно недостаточном, чтобы поднять в воздух генератор тока. Все эти ученые, погруженные в грандиозные проблемы, плевать хотели на открытие какого-то сумасшедшего, сумевшего найти маленькую ошибку в законе Ньютона.

— Вы думаете, теперь они займутся этим? — спросил молодой человек, нервно ломая пальцы.

— Конечно, займутся. Прочность нити на разрыв подобрана так, что она будет рваться всякий раз при попытках поднять на ней полный вес модели. Но она выдерживает модель при том небольшом уменьшении веса, которое вызывается действием витков. Это озадачит их. Никто не заставляет их заниматься этой проблемой или решать ее. Однако само существование такого несоответствия будет постоянно мучить ученых, ибо они знают, что этот эффект противоречит всем законам и просто не может существовать. Они сразу поймут, что наша магнитная теория — сплошная чепуха. А может, не чепуха? Мы не знаем. Но они будут постоянно думать об этом и ломать себе головы. Кое-кто начнет экспериментировать у себя в подвале — просто увлечение, ничего больше,— чтобы найти объяснение. И когда-нибудь кто-то из них найдет, чем вызвано действие этих витков, а может, сумеет и усовершенствовать их!

— А все патенты в наших руках...

— Точно. Они займутся исследованиями, которые вытеснят из их голов проблемы реактивного движения с его чудовищными затратами энергии и откроют перед ними горизонты настоящих космических полетов.

— И тогда мы станем богачами — как только дело дойдет до промышленного производства,— сказал юноша с циничной улыбкой.

— Мы все разбогатеем, сынок,— похлопал его по плечу пожилой мужчина.— Поверь мне, через десять лет ты не узнаешь этого старого мира.

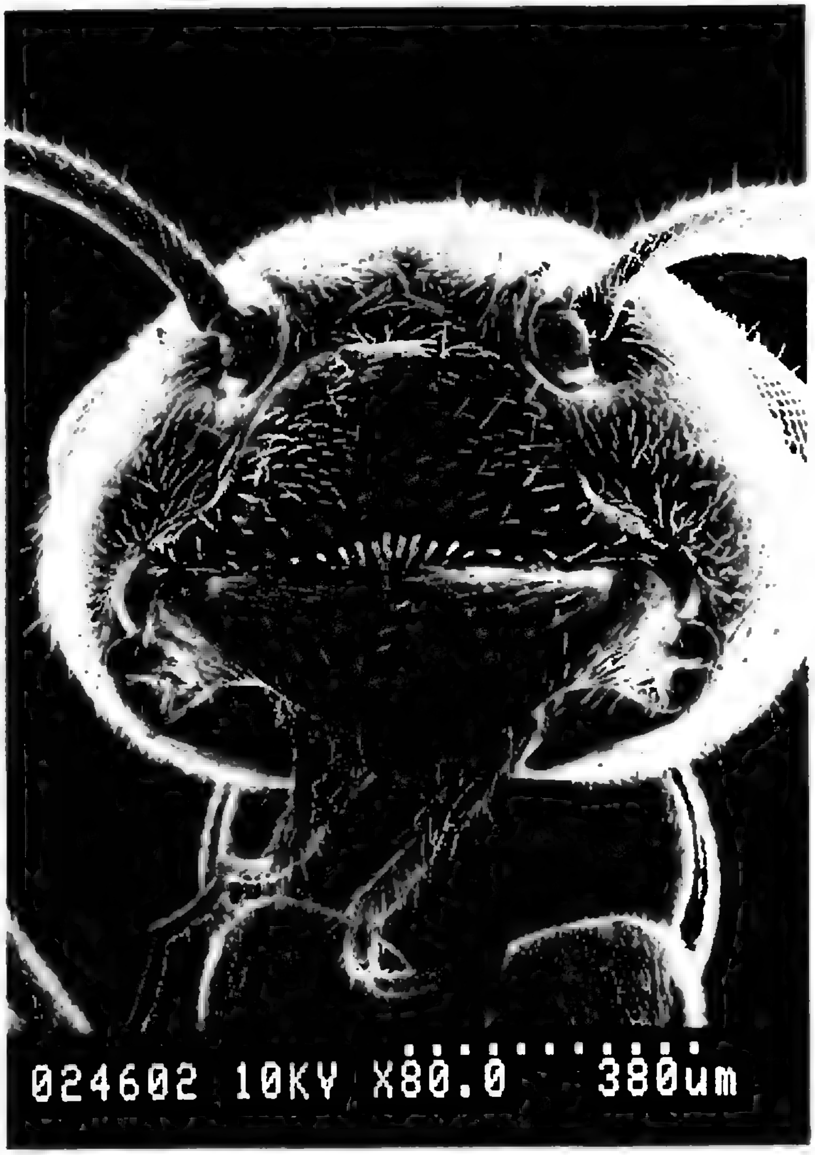
Перевод с английского И. Почиталина

Геометрия или анализ?

(Начало см. на с. 48)

великих теорем на составные элементы — так, как мы проделали это, решая нашу задачу,— можно убедиться, что число «ходов» там не смертельно велико, но обычно имеется несколько ходов с восклицательными знаками, для нахождения которых тратились годы, а иногда и десятилетия. Для этого нужно озарение. То, что озарение не посетило человека в обстановке состязания при ограниченности времени, ничего особенного не означает, во всяком случае не может служить доказательством того, что данный человек не имеет должных способностей (а я вообще убежден в том, что определить границы одаренности на конкурсной или тестовой основе невозможно). И поэтому задачи с восклицательными знаками, если и могут использоваться на конкурсных экзаменах, то только односторонне: решил — молодец, нет — не считается. (А как выявить людей «с озарениями» — особый вопрос.)

Но надо сказать, что задач с восклицательными знаками и к тому же эстетически красивых не так уж много. Чтобы их придумать, также нужно озарение. Задача, которую мы разбирали — «с озарением», не так ли? Если вы согласны со мною, значит, мы не зря потратили время.



Ракурс

Муравей и ... электронный микроскоп

Перед вами портрет обыкновенного черного муравья «крупным планом». Этот муравей был помещен в камеру одной из самых современных установок для исследования материалов — *растрового электронного микроскопа с полевой эмиссией электронов* (производства фирмы «Hitachi», Япония).

Как устроен прибор, носящий столь сложное имя?

Основное отличие *электронного микроскопа* от оптического состоит в том, что в нем вместо световых лучей используются пучки электронов, управляемые электрическими и магнитными полями. Эта «замена» позволила повысить пределы разрешения прибора примерно с 4000 до нескольких ангстрем. Напомним, что 1 Å — это диаметр атома водорода; таким образом, исследователи сегодня, изучая рельеф и химический состав поверхности материала, работают уже со счетным количеством атомов.

Растровые электронные микроскопы работают по принципу сканирования, т. е. последовательного, от точки к точке, перемещения тонкого электронного пучка по исследуемому объекту. Понятно, что разрешающая способность такого прибора определяется минимальным диаметром электронного пучка. Но чем меньше энергия электронов, а это необходимо для уменьшения разрушения поверхности материала, тем труднее такой пучок сфокусировать, а значит, тем менее детальной будет картина микромира.

Трудности удалось преодолеть благодаря использованию в электронной пушке растрового электронного микроскопа не обычного накаливаемого катода, а так называемого *катода с полевой эмиссией*, выполненного в форме острия, с поверхности которого электроны вытягиваются сверхсильным электрическим полем. Это дает возможность резко, на порядки величины, повысить яркость электронного прожектора, а значит, практически исключить недостатки, присущие работе с низкоэнергетическими электронами.

Растровые электронные микроскопы начали свое победное шествие по лабораториям мира около тридцати лет назад. Сегодня это один из основных рабочих инструментов исследователя в области материаловедения, микроэлектроники, биологии, медицины и др.

Т. Громова

Р-значит ракета

Внимание!

Журналы «Квант» (СССР) и «Quantum» (США — СССР), а также Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз» (ВАКО) и International Educational Network (США) проводят

Советско-американский конкурс юных любителей астрономии и космонавтики

Возможно, этот конкурс станет традиционным. К участию в нем приглашаются все учащиеся школ, гимназий, техникумов и т. д., кроме выпускных (1990/91 учебного года) классов. Первый конкурс пройдет в три тура.

I и II туры (соответственно с октября по декабрь 1990 г. и с января по март 1991 г.) являются заочными и включают в себя задачи из области космонавтики, астрономии, физики, математики, логики.

III тур (апрель — май 1991 г.) — очный. Затем победители конкурса примут участие в одной из двух трехнедельных космических школ, которые будут проведены в июле — августе 1991 г. в США и в СССР.

Занятия со школьниками проведут специалисты по физике, математике и космической технике обеих стран.

Ниже мы приводим задачи I тура. Ответы на них должны быть отправлены не позднее 1 декабря 1990 г. по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, журнал «Квант», с пометкой «Конкурс KQ — 91».

Задания I тура

Задача 1. На высоте 10 км от поверхности Марса вертикально вниз с начальной скоростью 1 м/с сброшен зонд. Через 30 с свободного падения раскрывается парашют, после чего вертикальная скорость зонда устанавливается равной 2 м/с. На какое расстояние *l* по горизонтали от точки сброса удалится зонд, если во время его спуска имеется постоянный снос в сторону со скоростью 3 м/с? (Влиянием марсианской атмосферы на начальном участке спуска пренебречь.)

Задача 2. Лунная база имеет форму куба. На двух противоположных стенах базы (ровно посередине) расположены выходы. На расстоянии 15 м от каждого выхода на высоте человеческого роста находятся световые маяки. Космонавт выходит из базы и идет по прямой вдоль стены. Пройдя 60 м, он начинает видеть одновременно оба маяка. Определите объем лунной базы.

Задача 3. Многим хорошо известен роман А. Кларка «Космическая одиссея 2001 года». Дайте свое предложение одиссеи 2001 года, которая бы увлекла все человечество, и обоснуйте его.

Конкурс проводится в рамках Международного года космоса. Напомним, что ООН объявила 1992 год Международным годом космоса (МГК). В связи с этим событием организуется множество международных конференций, симпозиумов, семинаров и т. д. Возможно, будут заключены важные межправительственные соглашения по освоению Солнечной системы. (Интересно, что Первый искусственный спутник Земли был запущен в рамках проводившегося в 1957 году Международного геофизического года.) Может быть, это будут программы исследования Марса. Может, создание электростанций или гигантских комплексов связи на орбите... Да мало ли интересного можно сделать вместе! Но в любом случае осуществление подобных проектов — за нынешними школьниками — будущими специалистами в области космонавтики.

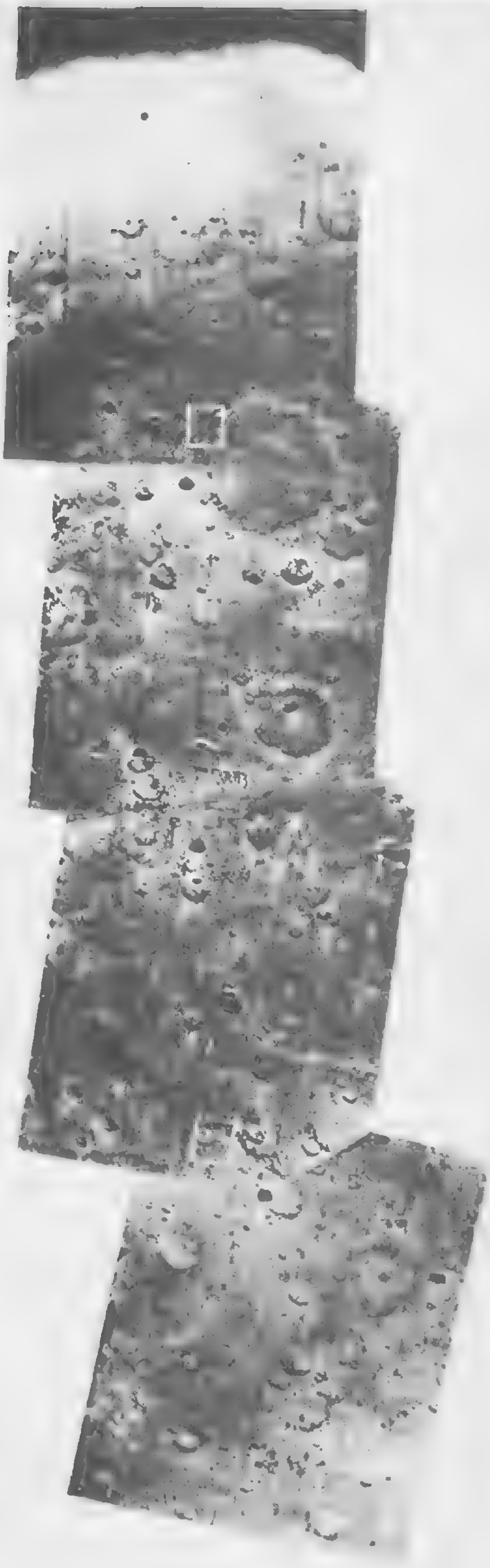
Именно поэтому большое место в рамках МГК занимает молодежная программа. Планируются и различные соревнования, в том числе космическая (по аналогии с физической, математической и др.) олимпиада.

В номере 7 за этот год мы опубликовали обращение Оргкомитета национального этапа Международного конкурса «Вместе к Марсу». В этом номере мы начинаем публикацию дополнительных материалов, которые могут оказаться полезными для его участников.

56 миллионов километров до Красной планеты

Е. НАРИМАНОВ

> *Вперед к Марсу! Только к Марсу!*
> *Ф. Цандер*



Марс относится к планетам земной группы и занимает по размеру промежуточное положение между Землей и Луной. Несмотря на свои скромные размеры (диаметр в два раза меньше земного, масса меньше земной примерно в десять раз), поверхность Марса является более пересеченной, чем земная.

Один из интригующих вопросов геологии Марса — оценка количества воды в верхнем слое коры планеты. Из-за постоянных отрицательных температур на поверхности планеты ее верхний слой промерз на глубину до полутора километров на экваторе и на пять километров — на полюсах, образовав твердую оболочку — криолитосферу. По оценкам ученых криолитосфера содержит не менее 5×10^{16} т воды в виде льда. Гипотетический океан из воды криолитосферы, равномерно распределенной по поверхности Марса, имел бы глубину в несколько десятков метров.

Марсианский год равен примерно 700 земным суткам; марсианские сутки всего на 40 минут длиннее земных; смена времен года протекает так же, как и на Земле.

Атмосфера Марса весьма разрежена и состоит, в основном, из углекислого газа. Средняя плотность атмосферы на уровне поверхности соответствует плотности земной атмосферы на высоте 35 километров. Толщина атмосферы достигает 250 километров, за ее границей следует внешний слой и водородная корона.

Несмотря на крайне суровые условия, на Марсе возможно существование каких-то форм жизни. Не исключено, что органическая жизнь там могла бы существенно отличаться от известных форм жизни. Следует учитывать, что для построения белковых соединений в земных условиях используются только 20 аминокислот, хотя науке известны более ста природных типов аминокислот.

Цели пилотируемых полетов на Марс

Решение загадок Марса возможно путем проведения разнообразных широких и тщательных научных исследований с орбиты искусственного спутника Марса, на поверхности планеты и в ее недрах. Дальнейшее изучение Марса по трем основным направлениям — геологическая история, внутреннее строение, процессы, формировавшие поверхность; история климата, строение атмосферы, ее эволюция и процессы, протекающие в ней; поиск следов биосферы — возможно автоматическими космическими аппаратами без участия космонавтов. По мнению ученых-планетологов, уже в ближайшее десятилетие с помощью автоматических космических аппаратов должно быть проведено глобальное картографирование Марса, подробно исследованы один-два наиболее интересных района с помощью передвигающегося по поверхности робота-марсохода, доставлены на Землю образцы грунта изучаемых районов для тщательного анализа в лабораториях с использованием могучих средств мировой науки.

На дальнейшем этапе исследований Марса целесообразно включение в проведение работ на поверхности планеты космонавтов-исследователей. Ученый-геолог выполнит предварительный отбор образцов грунта, ученый-климатолог зарегистрирует и проведет экспресс-анализ интересных атмосферных явлений, ученый-биолог осуществит поиск форм жизни в труднодоступных местах исследуемого района. Тем самым резко повысится эффективность работ, существенно интенсифицируются исследования, появится возможность внесения корректив в ход работ на поверхности планеты.

Марс — единственная планета, на которой может быть создана колония землян уже в первой половине XXI века на основе разрабатываемой ракетно-космической техники. В связи с этим первую пилотируемую экспедицию на Марс следует рассматривать и как реализацию первого (рекогносцировочного) этапа колонизации планет Солнечной системы. Даже кратковременное (одна-две недели) пребывание космонавтов на поверхности Марса будет иметь для дальнейшей судьбы людей огромное значение. Изучение окружающего таинственного мира, поддержание искусственной среды обитания, обеспечение безопасности, управление сложными техническими средствами будет способствовать совершенствованию физических, интеллектуальных и духовных качеств личности, будет формировать в среде колонистов более совершенные общественные отношения.

На этапе подготовки к осуществлению первой пилотируемой экспедиции на Марс потребуется объединение усилий передовых государств мира, прежде всего СССР и США. Совместная работа ученых, инженеров, техников над этой сложнейшей задачей, продиктованной требованиями разума и прогресса, неизбежно оттеснит конфронтацию, предубеждение в отношениях между народами, будет способствовать объединению наций в единую семью.

В качестве исходных данных при анализе (в рамках национального этапа конкурса «Вместе к Марсу») различных аспектов осуществления экспедиции могут быть приняты следующие основные положения:

1. Длительность экспедиции — 500—1000 суток.
2. Время пребывания космонавта на поверхности Марса — 10—15 суток.
3. Численность экипажа на межпланетном корабле — 4—10 человек.
4. Число космонавтов, высаживающихся на поверхность Марса,— 3—6 человек.

5. Дата старта марсианского экспедиционного комплекса с орбиты искусственного спутника Земли — оптимистическая оценка — 2005 г.; пессимистическая оценка — 2020—2030 г.

Рекомендуемая литература

Уманский С. П. Реальная фантастика. М.: Московский рабочий, 1985.

Левантовский В. И. Механика космического полета в элементарном изложении. М.: Наука, 1980.

Гришин Ю. И. Искусственные космические экосистемы. М.: Знание, 1989.

Кузьмин Р. О., Галкин И. Н. Как устроен Марс. М.: Знание, 1989.

Чекарин С. В. Транспортные космические системы. М.: Знание, 1990.

Зайцев Ю. И. Покорение Марса: станет ли оно реальностью? Земля и Вселенная, 1989, № 1, с. 19—26.

Хоровиц Н. Поиски жизни в Солнечной системе. М.: Мир, 1988.

(Продолжение следует)

Перечень тем,

рекомендуемых для разработки участникам национального этапа Международного конкурса «Вместе к Марсу» («КВМ—91»)

Направление № 1. Научная программа исследований.

1. Проекты научных экспериментов, проводимых с помощью автоматических и пилотируемых космических аппаратов, с целью получения новых данных в области астрономии, планетологии, физики, химии, космической биологии, медицины и других наук.

2. Аппаратура для проведения научных экспериментов, режимы функционирования аппаратуры и роль космонавта-исследователя при проведении экспериментов.

Направление № 2. Концепции решения задачи о полетах к Марсу, схемы полета.

1. Способы и средства осуществления полета к Марсу автоматических космических аппаратов и пилотируемого комплекса.

2. Методы формирования марсианского экспедиционного комплекса (МЭК) на околоземной орбите.

3. Схемы осуществления полета МЭК.

4. Выбор рациональной двигательной установки МЭК — ключ к решению задачи полета человека на Марс.

5. Программы подготовки и проведения пилотируемой экспедиции на Марс.

6. Луна как полигон для отработки и стартовая площадка для МЭК.

Направление № 3. Конструктивно-компоновочные решения.

1. Марсианский экспедиционный комплекс в целом.

2. Жилой модуль.

3. Посадочный аппарат.

4. Энергетический, научный и другие модули и блоки, входящие в МЭК.

5. Разгонно-тормозные ракетные ступени МЭК.

6. Устройства, обеспечивающие торможение МЭК в атмосферах Земли и Марса.

7. Сборочно-монтажный орбитальный центр.

8. Марсоход и другие средства передвижения по поверхности Марса.

9. Автоматические космические аппараты для исследования Марса и его спутников.

Направление № 4. Бортовые служебные системы.

1. Энергоустановка межпланетного корабля и посадочного аппарата.

2. Система жизнеобеспечения экипажа.

3. Система поддержания температурного режима.

4. Радио- и телевизионные системы, функционирующие на борту МЭК и на поверхности Марса.

5. Средства, обеспечивающие радиационную защиту экипажа.

6. Средства противометеоритной защиты конструкции.

7. Системы защиты космонавтов от химического и другого заражения на поверхности планеты.

8. Методы и средства предупреждения заражения Марса и Земли микроорганизмами иного мира.

Направление № 5. Искусственная тяжесть на борту космического корабля.

1. Конструктивно-компоновочные решения МЭК при создании искусственной тяжести в отсеках жилого модуля.

2. Способы и средства, обеспечивающие предупреждение нежелательных последствий длительного пребывания человека в условиях невесомости.

3. Обеспечение работы маршевой двигательной установки и бортовых систем МЭК при создании искусственной тяжести в жилых отсеках комплекса.

Направление № 6. Эргономика (человек в космосе).

1. Подготовка экипажа к длительному полету.

2. Физиологические, физические и психологические факторы при осуществлении экспедиции на Марс.

3. Роль экипажа при предупреждении аварийных ситуаций и выходе из них.

4. Распределение обязанностей между членами экипажа МЭК при решении разнообразных научных, инженерно-технических и медицинских задач.

Направление № 7. Вопросы безопасности полета.

1. Способы и средства обеспечения безопасности экипажа на всех этапах полета МЭК.

2. Обеспечение спасательных операций, необходимые технические средства.

3. Ремонтно-восстановительные работы на борту МЭК и на поверхности Марса.

Направление № 8. Экономика.

1. Оценка необходимых ресурсов при подготовке и осуществлении экспедиции на Марс.

2. Международная кооперация как способ снижения затрат, ускорения темпа работ и сближения наций.

3. Использование в народном хозяйстве новых технологий, полученных в рамках выполнения работ по марсианской экспедиции.

Направление № 9. Ресурсы Марса.

1. Полезные ископаемые Марса и его спутников, способы их добычи и утилизации.

2. Завод (установки) по переработке ресурсов Марса и его спутников.

3. Использование ресурсов Марса при осуществлении пилотируемой экспедиции на планету.

Направление № 10. Колонизация Марса.

1. Колония на Марсе, проектное решение.

2. Индустрия на Марсе.

3. Производство продуктов питания на Марсе, искусственная пища.

4. Замкнутые экологические системы на поверхности планеты.

5. Организация отдыха колонистов.

6. Возможности создания искусственной природной среды на поверхности планеты.

7. Ракетно-космические средства, используемые на этапе колонизации Марса.

8. Колония на Марсе — начальный этап экспансии человечества во Вселенную.

Информация

V Научно-техническая конференция школьников

Пятая всесоюзная Научно-техническая конференция школьников прошла с 4 по 8 мая 1990 года на международной молодежной базе ЦК ВЛКСМ «Олимпиец». Как и раньше, организатором конференции стал Московский физико-технический институт, в качестве спонсоров выступили Детский фонд им. В. И. Ленина, Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество «Союз» и редакция журнала «Юный техник». На конференцию приехали около 150 школьников со всего Советского Союза. Они выступили на 6 секциях: математики, физики, биофизики и молекулярной физики, аэрокосмической физики, программирования, информатики и вычислительной математики. Седьмая секция — юных изобретателей — была проведена редакцией журнала «Юный техник». Участники конференции совершили интересные экскурсии по Москве, в Центр управления полетом, на базовые кафедры МФТИ. По вечерам школьники встречались с редколлегиями журналов «Квант» и «Юный техник», перед ними выступали творческие коллективы из МФТИ и приглашенные Детским фондом одаренные дети. Все участники конференции были награждены дипломами и различными призами.

Теперь, как обычно, мы ждем ваших работ на VI Научно-техническую конференцию школьников, которая пройдет в апреле — мае 1991 года. Участником конференции может стать любой школьник или группа школьников. Для этого необходимо рассмотреть любой вопрос по физике, математике, информатике, или провести интересный эксперимент, или составить программу для ЭВМ. Оргкомитетом поощряются самостоятельные исследования школьников.

Работа оформляется в виде реферата (7—25, по возможности машинописных, страниц), один экземпляр которого необходимо не позднее 1 февраля 1991 года отправить по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, Оргкомитет VI Научно-технической конференции школьников. На первой странице реферата необходимо указать фамилию, имя, отчество авторов, класс и школу, а также свой полный домашний адрес. Текст реферата не возвращается, так что не забудьте оставить экземпляр себе.

Все поступившие рефераты рецензируются специалистами, авторы лучших работ получают приглашения для выступления на НТКШ.

Дополнительные справки можно получить по телефону ЗФТШ при МФТИ: (095) 408-51-45.

Член оргкомитета НТКШ
А. Сапожников

Олимпиады

XVI Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике и физике. В этом году состязания проводились в городах Владимире, Краснодаре, Пензе и Улан-Удэ.

Математика

Соревнования проходили в два дня, каждый день участникам предлагались 4 задачи. После формулировки каждой задачи в скобках указано количество баллов, присуждавшихся за полное ее решение.

9 класс

Первый день

1. Среди двадцати пяти внешне одинаковых монет 3 фальшивые и 22 настоящие. Все настоящие монеты имеют равные веса. Все фальшивые монеты также имеют равные веса, причем фальшивая монета легче настоящей. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти шесть настоящих монет? (6)

2. Числа a, b, c, d, p, q связаны соотношением $ab+cd=2pq$. Докажите, что если $ac \geqslant p^2 > 0$, то $bd \leqslant q^2$. (7)

3. Дана шахматная доска размером $n \times n$, $n \geqslant 3$. Одним ходом разрешается выбрать в любом месте доски какую-нибудь из фигур, указанных на рисунке 1, и изменить цвет всех ее клеток на противоположный. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы у всех клеток доски цвет изменился на противоположный? (14)

4. В квадрате со стороной 12 расположены 1990 точек. Докажите, что существует равносторонний треугольник со стороной 11, в котором расположены по крайней мере 498 из этих точек. (13)

Второй день

5. Найдите все положительные значения a, для которых оба корня уравнения $a^2x^2+ax+1-7a^2=0$ являются целыми числами. (6)

6. Из квадрата $n \times n$ вырезана одна угловая клетка 1×1. На какое наименьшее число равновеликих треугольников можно разрезать получившуюся фигуру? (7)

7. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, центр O окружности S_1 лежит на окружности S_2. Хорда AC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D так, как показано на рисунке 2. Докажите, что отрезки OD и BC перпендикулярны. (11)

8. Среди сторон и диагоналей выпуклого пятиугольника $ABCDE$ нет параллельных отрезков. На стороне AB рисуется стрелка, направленная в сторону точки пересечения прямых AB и CE. На стороне BC рисуется стрелка, направленная в сторону точки пересечения прямых BC и AD. Аналогичным образом рисуются стрелки на сторонах CD, DE, EA. Докажите, что в сторону одной из вершин пятиугольника направлены две из нарисованных стрелок. (16)

10 класс

Первый день

1. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

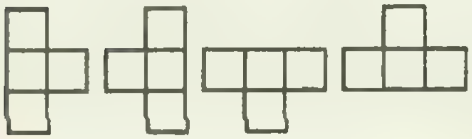


Рис. 1.

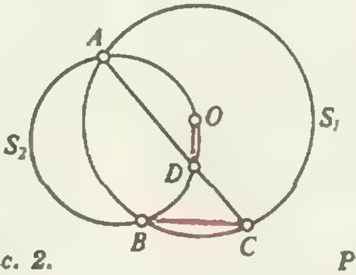


Рис. 2.

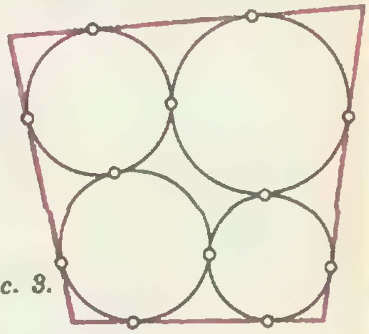


Рис. 3.

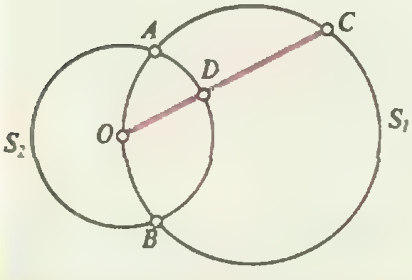


Рис. 4.

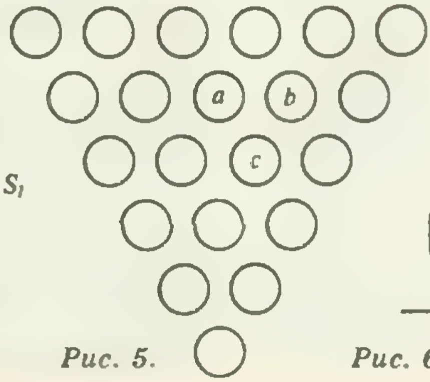


Рис. 5.

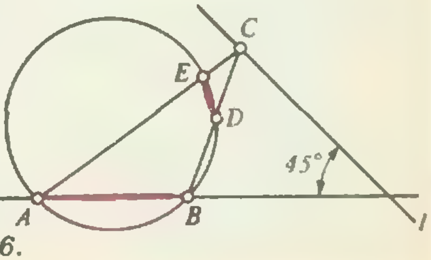


Рис. 6.

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(a+c)}>\\>\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$ (5)

2. Внутри круга расположены 100 точек, ни одна из которых не совпадает с центром круга и никакие две из которых не лежат на одном радиусе.

а) Докажите, что существует круговой сектор с углом $2\pi/11$ радиан, в котором лежат ровно 10 из данных точек. (7)

б) Верно ли, что найдется круговой сектор с углом $2\pi/11$ радиан, в котором лежат ровно 11 точек? (4)

Считается, что радиусы, ограничивающие сектор, принадлежат этому сектору.

3. Внутри выпуклого четырехугольника расположены четыре окружности, каждая из которых касается двух сторон четырехугольника и двух окружностей так, как показано на рисунке 3. Известно, что в четырехугольник можно вписать окружность. Докажите, что по крайней мере две из данных окружностей равны. (10)

4. Тройки чисел (x_n, y_n, z_n), $n=1,2,\ldots$, строятся по следующему правилу:

$$x_1=2,\ y_1=4,\ z_1=\frac{6}{7};$$

$$x_{n+1}=\frac{2x_n}{x_n^2-1},\ y_{n+1}=\frac{2y_n}{y_n^2-1},$$

$$z_{n+1}=\frac{2z_n}{z_n^2-1},\ n\geqslant 1.$$

а) Докажите, что указанный процесс построения троек может быть неограниченно продолжен. (4)

б) Может ли на некотором шаге получиться тройка чисел (x_k, y_k, z_k), для которой выполняется равенство $x_k+y_k+z_k=0$? (10)

Второй день

5. На доске написаны несколько положительных чисел таких, что сумма всех их попарных произведений равна 1. Докажите, что можно стереть одно число так, что сумма оставшихся чисел будет меньше $\sqrt{2}$. (7)

6. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, причем центр O окружности S_2 лежит на окружности S_1. Хорда OC пересекает окружность S_2 в точке D так, как показано на рисунке 4. Докажите, что точка D является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC. (9)

7. Можно ли в кружочках, показанных на рисунке 5, разместить натуральные числа от 1 до 21 так, чтобы в любой строке, кроме первой, каждое число было равно модулю разности двух стоящих над ним чисел (т. е. $c=|a-b|$)? (12)

8. Даны n различных векторов, обладающих следующим свойством: для некоторого натурального p модуль суммы любых p из данных векторов равен модулю суммы остальных $n-p$ векторов.

а) Докажите, что если $p\neq\frac{n}{2}$, то сумма всех данных векторов равна нулю. (8)

б) Верно ли, что сумма всех данных векторов равна нулю, если $p=\frac{n}{2}$? (4)

11 класс

Первый день

1. Задача 1 для девятого класса. (6)

2. Докажите, что для произвольного треугольника справедливо неравенство $a\cdot\cos A+b\cdot\cos B+c\cdot\cos C\leqslant p$, где a, b, c — стороны треугольника, A, B, C — противолежащие им углы, p — полупериметр. (9)

3. Даны 8 кубиков с ребром 1, произвольные 24 грани которых окрашены в белый цвет, а остальные 24 грани — в черный. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, на поверхности которого будет поровну белых и черных квадратиков со стороной 1. (13)

4. В окружности радиусом 1 дана хорда AB, длина которой меньше $\sqrt{2}$. Прямая l, образующая с хордой угол 45°, не пересекает данную окружность (рис. 6). С помощью циркуля и линейки на прямой l постройте точку C так, чтобы отрезки ED и AB были перпендикулярны. (E и D — точки пересечения отрезков CA и CB с окружностью.) (12)

Второй день

5. Найдите все натуральные числа x, y, удовлетворяющие уравнению $7x-3\cdot 2y=1$. (7)

6. Точки D и E лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC, точки K и M делят отрезок DE на три равные части. Прямые BK и BM пересекают сторону AC в точках T и P. Докажите, что $TP\leqslant\frac{1}{3}AC$. (8)

7. В основании пирамиды $SABCDE$ лежит правильный пятиугольник $ABCDE$. Основание M высоты пирамиды SM лежит внутри пятиугольника $ABCDE$. Известно, что радиусы сфер, описанных около тетраэдров $SMAB$, $SMBC$, $SMCD$ равны. Можно ли утверждать, что данная пирамида правильная? (11)

8. В клетках прямоугольной таблицы записаны положительные числа. Для каждой строки находится сумма всех записанных в ней чисел, а затем вычисляется произведение P всех таких сумм. Докажите, что если в каждом столбце переставить числа по неубыванию так, чтобы наименьшее число стояло в первой строке, а наибольшее — в последней, то произведение P для новой таблицы не будет превосходить первоначальное значение. (14)

Физика

На теоретическом туре каждому участнику олимпиады было предложено 4 задачи (на 4 часа). Как показали результаты проверки, для девятиклассников наиболее трудной оказалась третья задача — ее смогли решить лишь двое из девяноста участников. Очень мало одиннадцатиклассников справились со своей четвертой задачей. Остальные задачи правильно решили от 25 до 70 % участников.

Экспериментальный тур олимпиады включал 2 задачи (на решение которых отводилось тоже 4 часа).

Интересно, что в этом году школьники предложили немало весьма оригинальных решений (можно сказать, на любой вкус жюри). Сей отрадный факт был отмечен несколькими

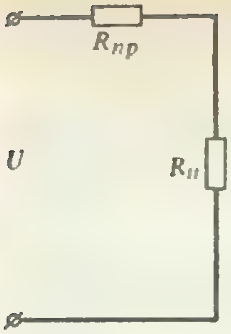


Рис. 1.

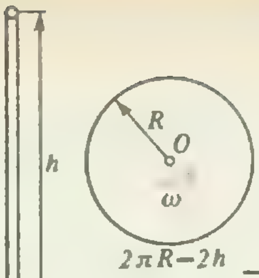


Рис. 2.

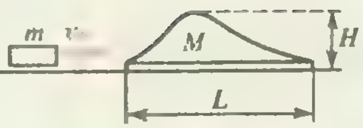


Рис. 3.

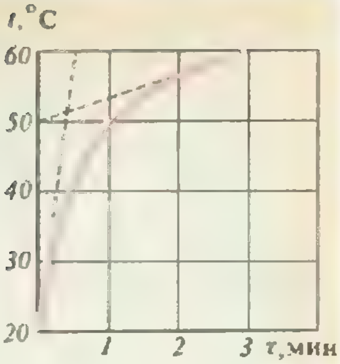


Рис. 4.

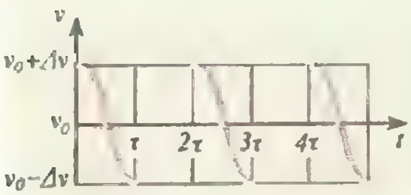


Рис. 5.

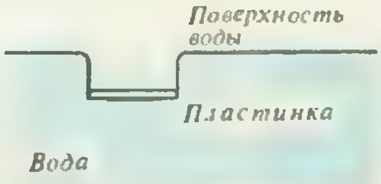


Рис. 6.

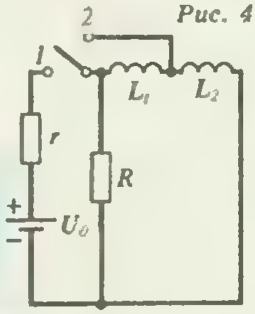


Рис. 7.

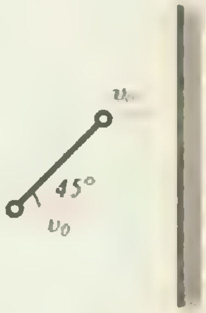


Рис. 8.

специальными призами. Так, М. Кузьменко (г. Ухта) получил приз «За лучшую литературную обработку экспериментального тура», а А. Вакушин (г. Сыктывкар) — «За свободу мысли и человеческий подход к решению задачи».

Теоретический тур

9 класс

1. Стоя на льду и оставаясь неподвижным, человек пытается сдвинуть с места тяжелые сани за привязанную к ним веревку. Масса саней $M=100$ кг, человека $m=60$ кг. Коэффициент трения саней о лед $\mu_1=0{,}2$, человека $\mu_2=0{,}3$. Под каким углом к горизонту нужно тянуть за веревку?

2. Свинцовая проволочка диаметром $d=0{,}3$ мм плавится при пропускании через нее тока $i=1{,}8$ А, а проволочка диаметром $D=0{,}6$ мм — при токе $I=5$ А. При каком токе разорвет цепь (рис. 1) предохранитель, составленный из двух свинцовых проволочек указанных диаметров, соединенных параллельно? А из двадцати тонких и одной толстой, соединенных параллельно? Считать, что сопротивление нагрузки $R_н$ гораздо больше сопротивления предохранителя $R_{пр}$, а длины проволочек одинаковые.

3. Резиновое кольцо повесили на гвоздь (рис. 2). При этом его длина оказалась равной $2h$. После этого кольцо раскрутили в горизонтальной плоскости до угловой скорости ω такой, что его длина также оказалась равной $2h$. Найдите угловую скорость вращения кольца.

4. Локатор излучает очень короткие импульсы в направлении самолета. Частота повторения этих импульсов ν_1. На борту самолета импульсы принимаются с частотой ν_2. Определите скорость самолета по направлению на локатор, если скорость распространения радиоволн c.

10 класс

1. На гладком горизонтальном столе покоится гладкая несимметричная подвижная горка. Масса горки M, ее размеры показаны на рисунке 3. На горку наезжает со скоростью v_0 грузик массой m. Через время t грузик покидает горку. На какое расстояние сместится горка к этому моменту? Грузик не отрывается от горки в процессе движения.

2. В стакан с водой опустили кипятильник, и вода начала понемногу нагреваться. График зависимости температуры воды от времени приведен на рисунке 4. По истечении 3 минут кипятильник выключают, и вода начинает остывать. Через какое время она остынет до 50 градусов?

3. Сосуд разделен жесткой неподвижной перегородкой на два объема. Первоначально в первом из них находится гелий при некотором давлении p_1, во втором — аргон при давлении p_2. Через длительное время из-за просачивания гелия сквозь перегородку в первом объеме давление стало p_2, а во втором — p_1. Найдите отношение p_2/p_1. Процесс изотермический.

4. Лампочка для фонаря рассчитана на напряжение 2,5 В при токе 0,2 А. Для питания ее от аккумулятора напряжением 6 В применяют электронное устройство, которое с высокой частотой то подключает, то отключает лампочку. Какую часть периода лампочка должна быть подключена? Внутреннее сопротивление источника 2 Ом.

11 класс

1. Получены радиосигналы, предположительно от внеземной цивилизации (ВЦ) в созвездии Кита. Интересно, что сигналы принимаются с перерывами: $\tau=45$ мин сигнал есть, потом 45 мин он отсутствует, затем опять 45 мин есть и т. д. Более того, частота сигнала

меняется, как показано на рисунке 5 ($\nu_0 = 1{,}5\cdot 10^9$ Гц, $\Delta\nu = 3\cdot 10^4$ Гц). Предполагая, что радиостанция, излучающая сигнал постоянной частоты, находится на искусственном спутнике, обращающемся по круговой орбите вокруг планеты ВЦ, найдите массу этой планеты. Считать, что отрезок Земля — планета ВЦ лежит в плоскости орбиты спутника.

2. Круглую пластинку диаметром $d=40$ мм и толщиной $a=0{,}5$ мм осторожно положили на поверхность воды. Благодаря поверхностному натяжению она осталась на плаву, причем в месте соприкосновения верхней плоскости пластинки с поверхностью воды угол между ними оказался равным 90°. (Вид сбоку схематически изображен на рисунке 6.) Определите плотность пластинки. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}073$ Н/м.

3. В схеме, приведенной на рисунке 7, после установления токов ключ мгновенно перебрасывают из положения *1* в положение *2*. Считая катушки индуктивности идеальными, найдите количество теплоты, которое выделится на резисторе R после перебрасывания ключа.

4. «Гантелька», составленная из двух очень маленьких массивных шариков, соединенных невесомым абсолютно жестким стержнем, движется поступательно со скоростью v_0 по направлению к неподвижной гладкой массивной стенке, причем ось «гантельки» составляет угол 45° с плоскостью стенки (рис. 8). Определите, как будет двигаться «гантелька» после абсолютно упругого соударения со стенкой.

Экспериментальный тур

9 класс

1. Определите плотность вещества X в твердом состоянии. Вещество X не растворяется в воде и не вступает с ней в химические реакции. Плотность воды примите равной 1000 кг/м^3.

Оборудование: стеклянный сосуд с водой, пробирка, линейка измерительная, неизвестное вещество.

2. Исследуйте зависимость между объемом пузырька воздуха и скоростью его движения в трубке с водой.

Оборудование: сосуд с водой, трубка стеклянная, пластилин, пипетка медицинская, часы с секундной стрелкой, линейка.

10 класс

1. Постройте график зависимости силы тока, протекающего через раствор медного купороса, в зависимости от напряжения на электродах. Исследуйте поведение кривых при различных концентрациях раствора.

Оборудование: сосуд с водой, медный и стальной электроды, амперметр, вольтметр, соединительные провода, кристаллический медный купорос ($CuSO_4$), весы с разновесами, источник тока, реостат.

2. Определите коэффициент трения железа по дереву.

Оборудование: две линейки ученические деревянные с миллиметровыми делениями, шарик железный.

11 класс

1. Исследуйте характеристики своего глаза как оптического прибора. Определите спектральные границы его чувствительности, разрешающую способность глаза (угловую), значения его оптической силы.

Оборудование: дифракционная решетка, электрическая лампа с прямой нитью накала (одна на класс), измерительная линейка, рулетка, листы белой и черной бумаги.

Примечание: разрешающей способностью оптической системы называется минимальный угол между направлениями на две точки, при котором получаются два отдельных изображения этих точек. Глубину глазного яблока считайте равной 2 см.

2. Определите, какую часть энергии падающего на него видимого света поглощает фильтр.

Оборудование: две лампы на подставке, две собирающие линзы, источник питания, соединительные провода, экран, черная бумага, ножницы, нейтрально-серый фильтр, миллиметровая бумага.

Публикацию подготовили М. Гаврилов, Л. Купцов, О. Овчинников, С. Резниченко

Несколько задач Бакинской физической олимпиады

1. Мяч свободно падает с высоты $H=120$ м на горизонтальную плоскость и многократно отражается от нее. При каждом отскоке скорость мяча уменьшается в $n=2$ раза. Постройте график зависимости скорости от времени и найдите путь, пройденный мячом с начала падения до остановки. (9 кл.)

2. В калориметр, содержащий $m_1=2$ кг воды при температуре $t_1=+5$ °С, положили кусок льда, масса которого $m_2=5$ кг и температура $t_2=-40$ °С. Определите температуру и объем содержимого калориметра после установления теплового равновесия. Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2$ кДж/(кг· К), льда $c_2=2{,}1$ кДж/(кг· К), удельная теплота плавления льда $\lambda=0{,}33$ МДж/кг, плотность воды $\rho_1=10^3$ кг/м^3, льда $\rho_2=0{,}9\cdot 10^3$ кг/м^3. (10 кл.)

3. Источник света помещают на расстоянии $a=5$ м от экрана, на котором с помощью собирающей линзы получают увеличенное в $\Gamma=4$ раза изображение источника. Затем экран отодвигают на расстояние $b=4$ м. Восстановить четкость увеличенного изображения можно двумя способами: 1) передвинуть только линзу; 2) передвинуть только источник. Каким будет увеличение изображения в обоих случаях? (11 кл.)

Публикацию подготовил Р. Махмудов

Ответы, указания, решения

[redacted]оторые полезные показательные и [redacted]рифмические соотношения

1. 100.
2. 10.
3. 2.
4. Решений нет.
5. $\frac{1}{81}$.
6. $\left(-2;\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.
7. $\left(\frac{1}{5};\ \frac{2}{7}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$.
8. $(0;\ 0{,}1) \cup (1;\ +\infty)$.
9. $\frac{1}{7}$; $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{2}\right)$.

[redacted]водящие сферы в электростатике

1. $\varphi_{\text{об}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(R_2-R_1)}{R_2^2}$.
2. $\varphi_{\text{ш}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}-\frac{q}{R_1}+\frac{q+Q}{R_2}\right)$.
3. $q_{\text{ш}} = -qR/L$.
4. $\frac{q_1}{q_2} \approx \frac{R_1}{R_2}\frac{L-R_2}{L-R_1} \approx \frac{R_1}{R_2}\left(1+\frac{R_1-R_2}{L}\right)$.
5. $q_{\text{ш}} = -q\frac{(R_2-R)R_1}{(R_2-R_1)R}$; $q_{\text{об}} = -q\frac{(R-R_1)R_2}{(R_2-R_1)R}$.

[redacted] Всероссийская олимпиада школьников [redacted]ематика

9 класс

1. Отложим какую-нибудь монету, а из оставшихся 24 монет выберем произвольным образом 12 и положим их на одну из чашек весов, остальные 12 монет положим на другую чашку. Если весы уравновесились, то отложенная монета фальшивая, причем на каждой чашке весов лежит ровно по одной фальшивой монете. Снимем монеты с одной из чашек и переложим на нее какие-нибудь 6 монет с другой чашки. Тогда на той чашке, которая перетянет, будут лежать 6 настоящих монет (на другой — 5 настоящих и одна фальшивая). Если весы не уравновесились, то на той чашке, которая перевесила, находится не более одной фальшивой монеты. Снимем монеты с другой чашки весов и переложим на нее какие-нибудь 6 монет с первой чашки. Если теперь весы уравновесились, то на каждой чашке находятся 6 настоящих монет. Если же какая-то чашка весов перетянет, то на ней лежат 6 настоящих монет (а на другой — 5 настоящих и 1 фальшивая).

2. Если $bd > q^2$, то $4abcd = 4(ac)\ \ (bd) > (2pq)^2 = (ab+cd)^2 = (ab)^2+(cd)^2+2abcd$, т. е. $(ab-cd)^2 < 0$.

3. **Ответ:** можно, если n — четно, и нельзя, если n — нечетно.

Указание. При $n=4k$ доску $n\times n$ можно разбить на квадраты 4×4 и каждый такой квадрат покрыть данными фигурами так, как показано на рисунке 1.

При $n=4k+2$ доску $n\times n$ можно разбить на доску $4k\times 4k$ и «уголок», который можно разбить на прямоугольники 2×1 (рис. 2). Для перекрашивания каждого прямоугольника 2×1 достаточно выполнить три хода а), б), в) (рис. 3). При этом цвет клеток в заштрихованном прямоугольнике изменится на противоположный, а все остальные «задетые» клетки не изменят свой цвет, так как каждая из них перекрасится дважды.

При нечетном n разность между числом черных и числом белых клеток доски $n\times n$ при каждом ходе изменяется на число, кратное 4. Для исходной раскраски эта разность равна 1 или -1, для противоположной раскраски — соответственно -1 или 1.

4. **Указание.** Покроем квадрат 12×12 четырьмя правильными треугольниками со стороной длины 11 так, как показано на рисунке 4. Для этого через центр O квадрата проведем два взаимно перпендикулярных отрезка EF и KM так, чтобы $\angle KMA = 60°$, а красные правильные треугольники полностью покрыли квадрат.

В один из построенных правильных треугольников попадет не менее 498 из данных точек.

5. **Ответ:** 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

6. У одного из треугольников, имеющих общие точки с ломаной ABC (рис. 5), най-

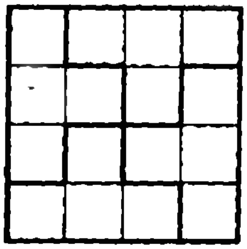


Рис. 1.

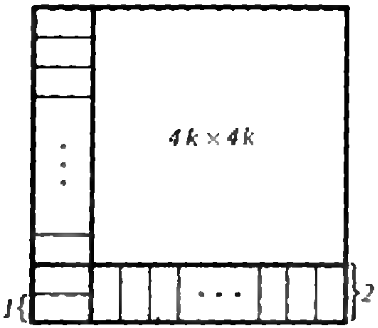


Рис. 2.

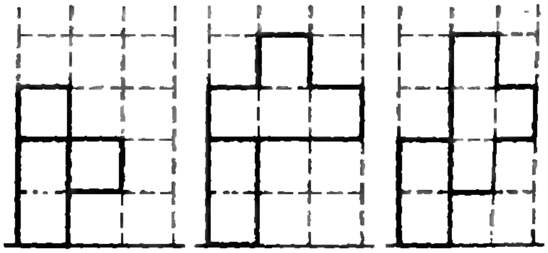


Рис. 3.

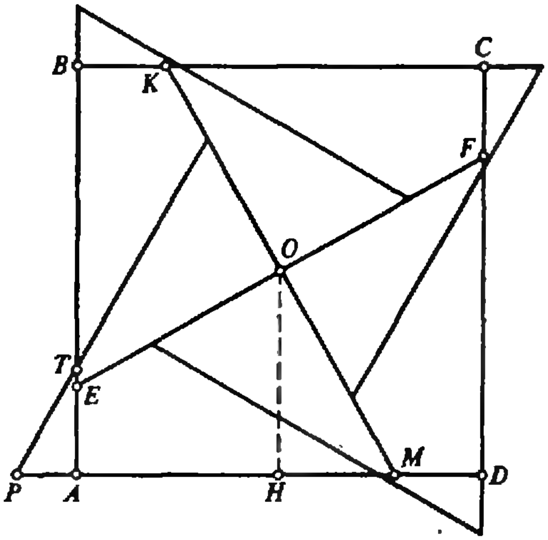


Рис. 4.

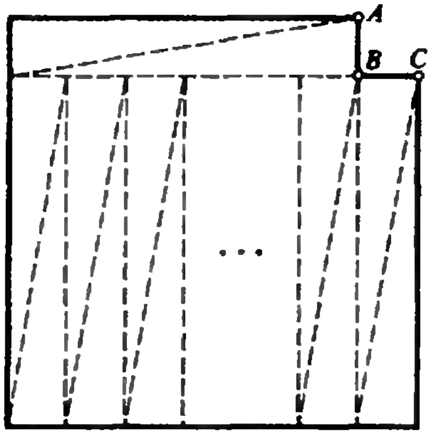


Рис. 5.

дется сторона, длина которой не больше 1, а высота, опущенная на эту сторону, не больше $n-1$. Поэтому площадь такого треугольника не больше $\frac{n-1}{2}$. С другой стороны, она равна $\frac{n^2-1}{N}$, где N — число равновеликих треугольников, на которые разрезан квадрат с вырезом. Следовательно, $\frac{n^2-1}{N} \leqslant \frac{n-1}{2}$, т. е. $N \geqslant 2n+2$. Равенство $N=2n+2$ реализуется (см. рис. 5).

7. Проведем отрезки AB, OB и OC (рис. 6). Углы BAD и BOD равны, так как они вписаны в окружность S_2 и опираются на дугу BaD. С другой стороны, $\angle BAD = \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$, поскольку угол BAC вписан в окружность S_1 и опирается на дугу BbC, а угол BOC является центральным в этой же окружности и опирается на ту же дугу BbC. Отсюда $\angle BOD = \frac{1}{2} \angle BOC$. Так как $\angle BOD + \angle DOC = \angle BOC$, то $\angle DOC = \frac{1}{2} \angle BOC$, т. е. $\angle BOD = \angle DOC$. Следовательно, OD — биссектриса в равнобедренном треугольнике BOC (в котором $BO=OC$), и поэтому $OD \perp BC$.

8. Среди пяти треугольников, вершинами которых являются тройки последовательных вершин пятиугольника, имеется треугольник наименьшей площади. Пусть, для определенности, это будет треугольник ABC (рис. 7). Покажем, что в сторону вершины B направлены две из нарисованных стрелок.

Опустим из точек C и E перпендикуляры CK и EM на прямую AB. Поскольку $S_{ABC} \leqslant S_{ABE}$, то $\frac{1}{2} CK \cdot AB \leqslant \frac{1}{2} EM \cdot AB$, т. е. $CK \leqslant EM$.

Равенство $CK=EM$ невозможно (если $CK=EM$, то $CE \parallel AB$). Итак, $CK < EM$. А это значит, что прямые EC и AB пересекаются в точке P, лежащей на продолжении AB за точку B, т. е. стрелка на AB направлена в сторону точки B. Аналогично доказывается, что стрелка на CB направлена в сторону точки B.

10 класс

1. После возведения обеих частей неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}+2\sqrt{abc^2(a+c)(b+c)}+2\sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)} > (a+b)(b+c)(c+a),$$

или, после упрощений,

$$b\sqrt{ac(a+b)(b+c)}+c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}+a\sqrt{bc+(a+b)(a+c)} > abc.$$

Последнее неравенство очевидно.

2. а) Разобьем круг на 11 равных секторов. Если в какой-то сектор попадут ровно 10 точек, то утверждение доказано. Пусть в любом секторе находятся или не менее 11 точек, или не более 9 точек. Тогда существует сектор, содержащий не менее 11 точек, и сектор, содержащий не более 9 точек (докажите это).

Теперь будем вращать вокруг центра круга тот сектор, в котором находятся не более 9 точек, до тех пор, пока он не совместится с сектором, в котором находятся не менее 11 точек. В каждый момент времени число точек, находящихся во вращающемся секторе, может измениться не более чем на 1. Следовательно, наступит такой момент, когда во вращающемся секторе окажутся ровно 10 точек.

б) Ответ: неверно. Разобьем круг на 100 равных секторов и поместим на каждый радиус по одной точке. В этом случае в любом секторе с углом $2\pi/11$ радиан будет находиться не более 10 точек.

3. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 8). Так как в него можно вписать окружность, то

$$AB+CD=BC+AD. \qquad (*)$$

Из равенства отрезков касательных и равенства $(*)$ следует, что $K_1K_2+M_1M_2=L_1L_2+N_1N_2$. Пусть радиусы O_1K_1, O_2K_2, O_3M_1, O_4M_2 равны r_1, r_2, r_3, r_4 соответственно. Тогда $K_1K_2=2\sqrt{r_1r_2}$, аналогично $L_1L_2=2\sqrt{r_2r_3}$, $M_1M_2=2\sqrt{r_3r_4}$, $N_1N_2=2\sqrt{r_1r_4}$. Поэтому $2\sqrt{r_1r_2}+2\sqrt{r_3r_4}=2\sqrt{r_2r_3}+2\sqrt{r_1r_4}$, или $(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_3})(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_4})=0$.

4. а) Докажем, что ни на каком шаге в

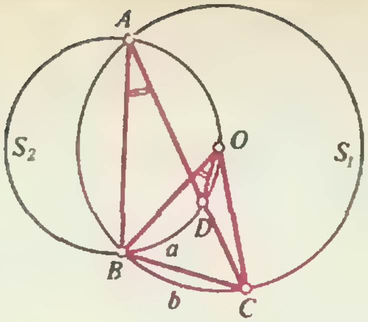


Рис. 6.

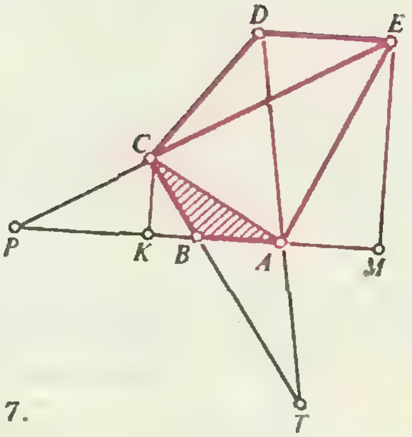


Рис. 7.

тройке не может появиться 1 или -1. Ясно, что все тройки состоят из рациональных чисел. Пусть на некотором шаге из тройки (a, b, c) получена тройка (A, B, C) и, например, $A=1$ (случай $A=-1$ и остальные случаи рассматриваются аналогично), но тогда $\frac{2a}{a^2-1}=1$, т. е. $a^2-2a-1=0$, но это невозможно.

б) Докажите, что если $x_n+y_n+z_n=x_ny_nz_n$, то $x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}=x_{n+1}y_{n+1}z_{n+1}$, $n\geqslant 1$. Если $x_n+y_n+z_n=0$ при некотором n, то хотя бы одно из чисел x_n, y_n, z_n, входящих в n-ю тройку, равно нулю, что невозможно.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — написанные числа, $S=a_1+\ldots+a_n$. Из условия задачи следует, что

$$2=a_1(S-a_1)+a_2(S-a_2)+\ldots+a_n(S-a_n).$$

Предположим, что $S-a_k\geqslant\sqrt{2}$ для всех $k=1, 2, \ldots, n$. Тогда $2\geqslant a_1\cdot\sqrt{2}+a_2\cdot\sqrt{2}+\ldots+a_n\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot S$, т. е. $\sqrt{2}\geqslant S$. С другой стороны, $S>S-a_1\geqslant\sqrt{2}$. Противоречие.

6. Докажем, что AD — биссектриса угла BAC (рис. 9). Действительно, углы BOC и BAC равны. С другой стороны, $\angle BAD=\frac{1}{2}\cdot\angle BOD$. Следовательно, $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BAC=\angle DAC$.

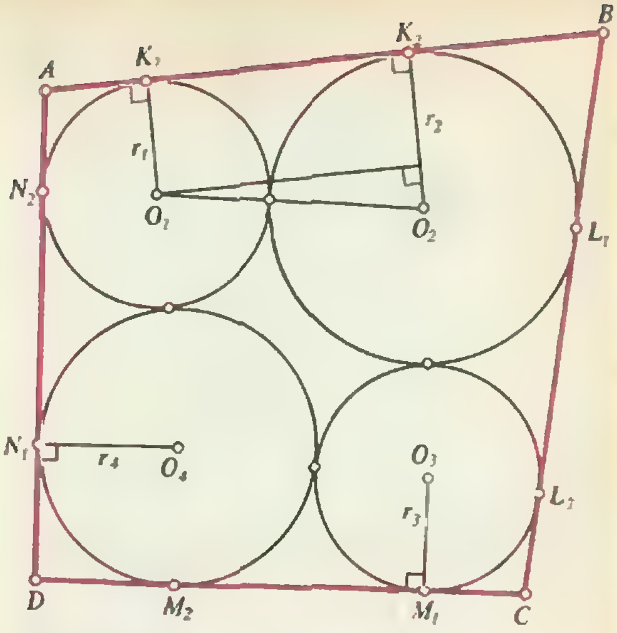


Рис. 8.

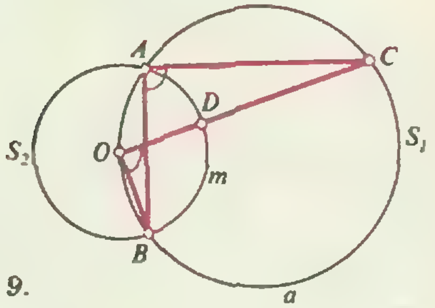


Рис. 9.

Аналогично доказывается, что BD — биссектриса угла ABC.

7. **Ответ:** нельзя. Пусть требуемое размещение чисел возможно. Тогда сумма всех записанных чисел четна, так как четна сумма

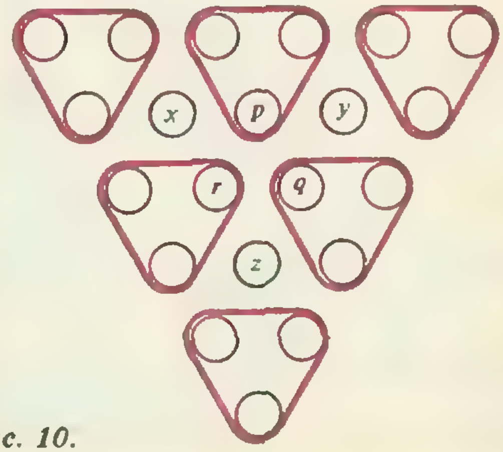


Рис. 10.

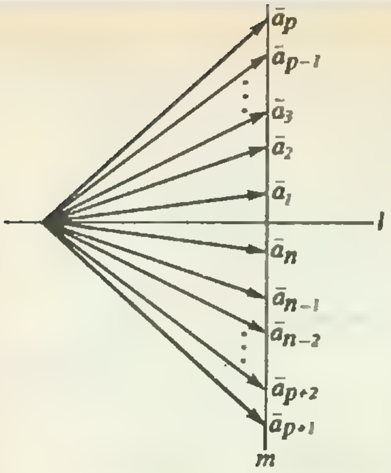


Рис. 11.

восемнадцати чисел, записанных в треугольниках на рисунке 10, а сумма трех чисел x, y, z также четна. С другой стороны, эта сумма равна $1+2+3+\ldots+21=231$.

8. а) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные векторы, $\bar S=a_1+a_2+\ldots+a_n$ — их сумма. Возьмем произвольный набор из p векторов $\bar a_{i1}, \bar a_{i2}, \ldots, \bar a_{i_{p-1}}, \bar a_i$. По условию задачи $|\bar a_{i1}+\bar a_{i2}+\ldots+\bar a_{i_{p-1}}+\vec a_i|=|S\vec a_{i1}-\vec a_{i2}-\ldots-\vec a_{ip-1}-\vec a_i|$. Отсюда следует, что $|\vec S|^2=2(\vec S, \vec a_{i1}+\vec a_{i2}+\ldots+\vec a_{ip-1}+\vec a_i)$. Точно так же для набора $\vec a_{i1}, \vec a_{i2}, \ldots, \vec a_{ip-1}$, $\vec a_j$ имеет место равенство $|\vec S|^2=2(\vec S, \vec a_{i1}+\vec a_{i2}+\ldots+\vec a_{i_{p-1}}+\vec a_j)$. Следовательно, $(\vec S, \vec a_i-\vec a_j)=0$ для любых i, j, т. е. скалярное произведение $(\bar S, \bar a_i)=k$ не зависит от i. Поэтому $|\bar S|^2=(\bar S, \bar a_1+\ldots+\bar a_n)=nk$. С другой стороны, $|\bar S|^2=2(\bar S, \bar a_{i_1}+\bar a_{i_2}+\ldots+\bar a_{i_{p-1}}+\bar a_i)=2pk$. Следовательно, $nk=2pk$, $(n-2p)k=0$, $k=0$, ибо $p\neq\frac{n}{2}$. Таким образом, $|\bar S|=0$, $\bar S=\vec 0$.

б) При $p=\frac{n}{2}$ сумма $\bar S$ может быть отлична от нуля (на рис. 11: векторы $\bar a_k$ и $\bar a_{n-k+1}$, $1\leqslant k\leqslant p$, симметричны относительно прямой l, а прямая m перпендикулярна l).

11 класс

1. См. решение задачи 1 для 9 класса.

2. Докажем, что $a\cdot\cos A+b\cdot\cos B\leqslant c$, причем равенство имеет место только тогда, когда $a=b$. Поскольку $c=a\cdot\cos B+b\cdot\cos A$, то неравенство равносильно неравенству $a\cdot\cos A+b\cdot\cos B\leqslant a\cdot\cos B+b\cdot\cos A$, или $(a-b)\times(\cos A-\cos B)\leqslant 0$. Последнее неравенство всегда справедливо, причем равенство возможно только при $a=b$.

Аналогично, $a\cdot\cos A+c\cdot\cos C\leqslant b$ и $b\cdot\cos B+c\cdot\cos C\leqslant a$. Осталось сложить три полученных неравенства.

3. Составим куб $2\times2\times2$ произвольным образом. Пусть на его поверхности оказалось m белых и n черных квадратов 1×1 (будем называть их видимыми). Тогда $m+n=24$, а число $d=m-n$ четно. Если $d=0$, то задача решена. Покажем, что если $d\neq0$, то поворотами кубиков $1\times1\times1$ можно добиться того, что d станет равным нулю. Действительно, нетрудно проверить, что справедливы следующие утверждения:

1) После поворота любого кубика $1\times1\times1$ на 90° вокруг прямой, соединяющей центры его противоположных граней, ровно один невидимый квадратик становится видимым и, соответственно, один видимый квадратик становится невидимым. Число d при этом либо вовсе не изменяется, либо изменяется на 2.

2) Для каждого кубика $1\times1\times1$ можно указать три таких последовательных поворота, после выполнения которых все его видимые грани станут невидимыми, а все невидимые — видимыми.

Если с каждым из восьми кубиков $1\times1\times1$ проделать по три поворота, указанных в пункте 2), то число d изменит свой знак. Следовательно, после одного такого поворота d станет равным нулю, что и требовалось доказать.

4. Пусть C — искомая точка, P — точка пересечения прямых AB и l, A_1 и B_1 — точки, симметричные точкам A и B относительно прямой l (рис. 12). Тогда углы CB_1A_1 и CBA равны. Обозначим $\alpha=\angle CB_1A_1$. По условию $DE\perp AB$, по построению $\angle A_1PA=2\angle CPA=90°$, поэтому $A_1B_1\parallel DE$. Покажем, что $\angle CDE=\alpha$. Действительно, $\angle CDE=180°-\angle ADE$. Так как четырехугольник $ABED$ — вписанный, то $\angle ADE+\angle ABE=180°$. Следовательно, $\angle CDE=\angle ABE=\alpha$. Таким образом, $DE\parallel A_1B_1$ и $\angle CDE=\angle CB_1A_1$. Отсюда следует, что точка B_1 лежит на прямой DC. Действительно, если

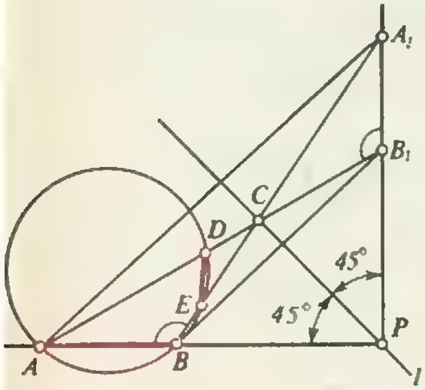


Рис. 12.

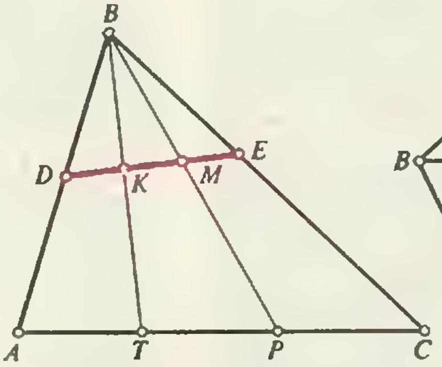


Рис. 13.

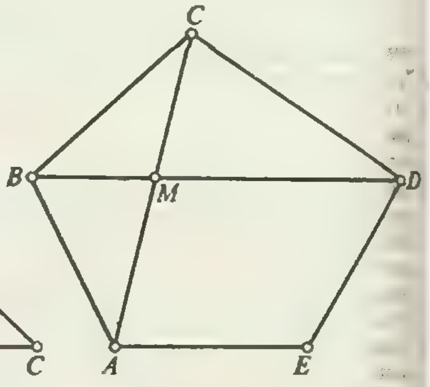


Рис. 14.

прямая DC пересекает прямую A_1P в точке B_2, отличной от B_1, то $\angle CB_2A_1=\angle CDE=\angle CB_1A_1$, что невозможно по свойству внешнего угла треугольника. Итак, точка B_1 лежит на прямой DC, как и точка A. Следовательно, точка C является точкой пересечения прямых l и AB_1. Прямая AB_1 может быть построена с помощью циркуля и линейки.

5. Ответ: (1; 1), (2; 4). Для $1\leqslant y\leqslant 4$ имеются только два решения — пары (1; 1) и (2; 4). Пусть $y\geqslant 5$. Тогда

$$7^x-1=(7-1)(7^{x-1}+7^{x-2}+\ldots+7+1)=3\cdot 2^y=6\cdot 2^{y-1},$$

откуда

$$7^{x-1}+7^{x-2}+\ldots+7+1=2^{y-1},$$

поэтому x — четное число, $x=2m$, т. е. $7^{2m}-1=3\cdot 2^y=48\cdot 2^{y-4}$.

Аналогично, из равенства

$$7^{2m}-1=(7^2-1)(7^{2m-2}+7^{2m-4}+\ldots+7^2+1)=48\cdot 2^{y-4}$$

следует, что m — четное число. Следовательно, x кратно 4, $x=4p$. Но число

$$7^x-1=7^{4p}-1=(7^4-1)(7^{4p-4}+7^{4p-8}+\ldots+7^4+1)$$

делится на 5, а число $3\cdot 2^y$ не делится на 5. Поэтому при $y\geqslant 5$ решений нет.

6. Пусть $S_{DBK}=S_{KBM}=S_{MBE}=S_0$ (рис. 13). Тогда

$$\frac{S_{ABT}}{S_0}=\frac{AB\cdot BT}{DB\cdot BK},\quad \frac{S_{TBP}}{S_0}=\frac{TB\cdot BP}{KB\cdot BM},$$

$$\frac{S_{PBC}}{S_0}=\frac{PB\cdot BC}{MB\cdot BE}.$$

Поэтому

$$\frac{S_{ABC}}{S_0}=\frac{S_{ABT}+S_{TBP}+S_{PBC}}{S_0}\geqslant$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{AB\cdot BT}{DB\cdot BK}\cdot\frac{TB\cdot BP}{KB\cdot BM}\cdot\frac{PB\cdot BC}{MB\cdot BE}}=$$

$$=3\left(\frac{BT\cdot BP}{KB\cdot BM}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{AB\cdot BC}{DB\cdot BE}\right)^{1/3}=$$

$$=3\left(\frac{S_{TBP}}{S_0}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{S_{ABC}}{S_0}\right)^{1/3},$$

откуда $S_{ABC}\geqslant 3\cdot S_{TBP}$, т. е. $AC\geqslant 3\cdot TP$.

7. Ответ: вообще говоря, нет. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 14). Центры сфер, описанных около тетраэдров $SMAB$, $SMBC$ и $SMCD$, лежат в срединной плоскости к отрезку SM и поэтому равноудалены от плоскости основания пирамиды $SABCDE$. Проекциями центров сфер на эту плоскость являются центры окружностей, описанных около треугольников MAB, MBC и MCD. Радиусы этих окружностей равны. Следовательно, равны радиусы указанных в условии задачи сфер.

8. Число P не изменяется при перестановке строк в таблице. Условимся строки таблицы и элементы столбцов нумеровать сверху вниз, а места в строках — слева направо. Выберем строку с самой маленькой суммой элементов и поставим ее на первое место.

Введем следующую операцию: если в k-й строке ($k>1$) на i-м месте стоит число x и это число *меньше* числа y, стоящего в первой строке на i-м месте, то числа x и y меняем местами. После применения этой операции сумма элементов первой строки останется, очевидно, наименьшей среди сумм элементов по строкам, а произведение P для полученной таблицы не увеличится (докажите!).

Применив описанную операцию ко всем элементам таблицы, получим таблицу, у которой в каждом столбце наименьший элемент стоит на первом месте. При этом сумма S_1 останется наименьшей, а число P не увеличится. Аналогично поступим с таблицей, составленной из оставшихся строк, и так далее. В итоге придем к требуемой таблице, для которой число P не будет превосходить первоначального значения.

Физика

9 класс

1. $\alpha\geqslant\operatorname{arctg}\dfrac{(\mu_1M)/(\mu_2m)-1}{\mu_1(1+M/m)}\approx 12^\circ.$

Указание. Угол α нужно выбрать таким, чтобы за счет силы натяжения веревки сила давления саней на лед уменьшилась, а человека — увеличилась.

2. Решение этой задачи — см. задачу Ф1225 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в восьмом номере журнала.

3. Предположим, что на нерастянутом кольце было равномерно нанесено N рисок. После того как кольцо повесили на гвоздь, риски расположились неравномерно. Сила натяжения в n-м сечении кольца пропорциональна массе части кольца ниже n-й риски; следовательно, зависимость силы натяжения T от номера риски n — линейная (рис. 15). Средняя величина силы натяжения равна $T_0/2=mg/2$, поэтому кольцо удлинится на $\Delta l=2h-l_0=T_0/(4k)=mg/(4k)$ (здесь k — жесткость кольца). Рассмотрим теперь вращающееся кольцо. Выделим маленький кусочек (рис. 16) длиной $\Delta x=R\alpha$ (где $R=h/\pi$) и массой $\Delta m=m\alpha/(2\pi)$ и запишем уравнение его движения в проекциях на направление радиуса (учтем, что для малых углов $\sin\alpha=\alpha$):

$$\Delta m\omega^2R=2T\sin(\alpha/2)=T\alpha=k(2h-l_0)\alpha.$$

Отсюда находим искомую угловую скорость вращения кольца:

$$\omega=\pi\sqrt{g/(2h)}.$$

4. $v=c(v_2/v_1-1)$.

10 класс

1. При малой начальной скорости грузика, когда он не сможет переехать горку, горка сместится на расстояние

$$l_1=mv_0t/(M+m).$$

Если же грузик переезжает горку, ее смещение оказывается равным

$$l_2=mv_0t/(M+m)-mL/(M+m).$$

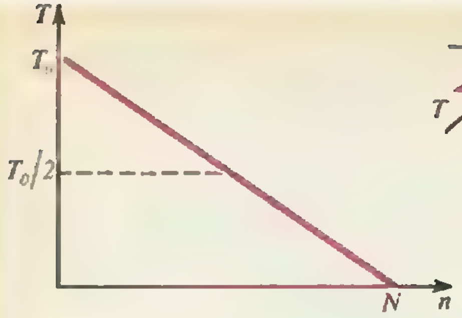


Рис. 15.

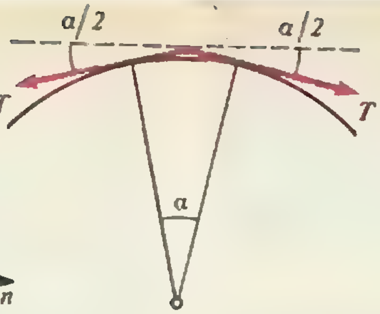


Рис. 16.

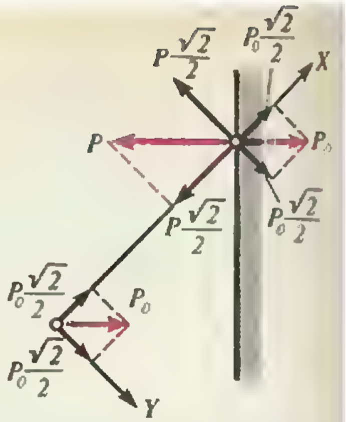


Рис. 17.

2. Решение этой задачи — см. задачу Ф1229 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в девятом номере журнала.

3. $p_2/p_1=1/2$.

4. Если переключение производится с достаточно высокой частотой, температуру нити накала лампочки можно считать постоянной, а саму лампочку можно заменить резистором с сопротивлением 12,5 Ом. При периоде T и времени замыкания t баланс энергии будет таким:

$$(6\cdot 12{,}5/14{,}5)^2 t/12{,}5=2{,}5\cdot 0{,}2T,$$

откуда

$$t/T=0{,}23.$$

11 класс

1. Решение этой задачи — см. задачу Ф1232 из «Задачника «Кванта» — было опубликовано в девятом номере журнала.

2. Решение этой задачи — см. задачу Ф1249 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

3. Решение этой задачи — см. задачу Ф1251 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

4. В результате столкновения верхнего шарика со стенкой он (и следовательно, вся «гантелька») получит некоторый импульс $\vec{P}$, перпендикулярный стенке (рис. 17). Величину его найдем из закона сохранения энергии для абсолютно упругого удара:

$$W_0=W_1+W_2,$$

или

$$2\frac{P_0^2}{2m}=\frac{1}{2m}\left((P-P_0)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{P}{2}-P_0\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)+\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2}P_0^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{P}{2}-P_0\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right),$$

откуда

$$P=8/3P_0.$$

Здесь учтено, что составляющая импульса $\vec{P}$ в направлении стержня делится поровну между обоими шариками, а перпендикулярная стержню составляющая целиком передается верхнему шарику.

Таким образом, «гантелька» отразится от стенки с импульсом

$$P'=P-2P_0=2/3P_0.$$

При этом центр масс будет двигаться со скоростью $v'=1/3v_0$, а шарики будут описывать вокруг центра масс окружности, двигаясь по ним со скоростью $v=2\sqrt{2}/3v_0$.

[illegible]олько задач [illegible]нской физической олимпиады

1. График зависимости скорости (точнее — ее проекции на вертикальную ось) мяча от времени приведен на рисунке 18.

Согласно формуле $v^2=2gH$, высота H_k подъема мяча после k-го отскока пропорциональна квадрату «начальной» скорости v_k, которая в n^k раз меньше скорости перед первым ударом. Между каждыми двумя ударами мяч проходит вверх и вниз путь, равный удвоенной высоте подъема. Поэтому для полного пути получаем

$$l=H+\frac{2H}{n^2}+\frac{2H}{n^4}+\frac{2H}{n^6}+\ldots=$$

$$=H+\frac{2H}{n^2}\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\ldots\right).$$

Выражение в скобках — это сумма членов геометрической прогрессии со знаменателем $1/n^2$, равная $n^2/(n^2-1)$. Тогда окончательно

$$l=H\frac{n^2+1}{n^2-1}=\frac{5}{3}H=200\text{ м}.$$

2. В принципе возможны 4 случая: 1) весь лед растает, и температура смеси будет выше 0 °C; 2) вся вода замерзнет, и температура содержимого будет ниже 0 °C; 3) замерзнет часть воды, и установится температура 0 °C; 4) растает часть льда, и температура смеси будет 0 °C. Сделаем оценки. При охлаждении до $t_0=0$ °C вся вода отдает количество теплоты $Q_1=c_1m_1(t_1-t_0)=42$ кДж. Для нагревания до t_0 всего льда требуется количество теплоты $Q_2=c_2m_2(t_0-t_2)=420$ кДж. Значит, возможны лишь случаи 2 и 3. Будем оценивать дальше. Если замерзнет вся вода, она отдаст количество теплоты $Q_3=\lambda m_1=660$ кДж, которое больше Q_2. Следовательно, возможен лишь случай 3: замерзнет часть воды, и в калориметре установится температура 0 °C.

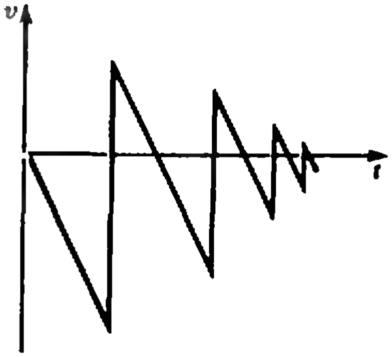


Рис. 18.

Из уравнения теплового баланса $c_1m_1(t_1-t_0)+m_x\lambda=c_2m_2(t_0-t_2)$ найдем массу m_x замерзшей воды.

Таким образом, объем содержимого калориметра будет равен

$$V=\frac{m_1-m_x}{\rho_1}+\frac{m_2+m_x}{\rho_2}=7{,}5\cdot10^{-3}\ \text{м}^3.$$

3. Для начального расположения справедливы соотношения

$$1/d+1/f=1/F,\ d+f=a,\ f/d=\Gamma.$$

В первом случае —

$$1/d+1/f=1/F,\ d+f=a,\ f/d=\Gamma.$$

В первом случае —

$$1/d_1+1/f_1=1/F,\ d_1+f_1=a+b,\ f_1/d_1=\Gamma_1;$$

Отсюда находим

$$\Gamma_1\approx9{,}1;\ \Gamma_2=9.$$

[redacted]овые конструкции
[redacted] *«Квант» № 9)*

1. Пусть S — сумма девяти искомых чисел, n — наименьшая из их попарных сумм. Подсчитав сумму всех попарных сумм двумя способами, получаем $8S=(2n+35)\cdot18$, что невозможно.

2. а) Так как сумма чисел каждой группы кратна трем, то и сумма всех чисел, равная $\frac{n(n+1)}{2}$, кратна трем. Значит, либо n, либо $n+1$ кратно трем. А для таких n построить искомые разбиения нетрудно:

$$n=3a:\ (1,2,3);\ (4,5,6);\ \dots;\ (3a-2,3a-1,3a);$$
$$n=3a-1:\ (1,2);\ (3,4,5);\ \dots;\ (3a-3,3a-2,3a-1).$$

б) Так как сумма чисел каждой группы кратна четырем, то либо n, либо $n+1$ кратно восьми. Для этих n укажем искомые разбиения. Восемь подряд идущих натуральных чисел легко разбить требуемым образом на две группы:

$$(a+1,a+3,a+4,a+8);$$
$$(a+2,a+5,a+6,a+7).$$

Если n кратно восьми, то искомое разбиение теперь очевидно. Если же $n+1$ кратно восьми, то для построения искомого примера достаточно заметить, что группа чисел от 1 до 7 обладает требуемым свойством: $3\cdot7=1+2+\dots+6$.

3. Множество A состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в разрядах, дающих остаток 1 при делении на 3 (считая справа). Множество B состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в разрядах, дающих остаток 2 при делении на 3. Множество C состоит из нуля и всех натуральных чисел, в двоичной записи которых единица находится в разрядах кратных трем.

4. Ясно, что либо n, либо $n+1$ кратно четырем. Если $n=4a$, то искомое разбиение таково: $(1, 4, 5, 8, \dots, 4a-3, 4a)$; $(2, 3, 6, 7, \dots, 4a-2, 4a-1)$. Если $n=4a-1$, то разбить на две равные по количеству гирь кучки невозможно. Разбиение же по массам таково: $(1, 2, 4, 7, \dots, 4a-4, 4a-1)$; $(3, 5, 6, \dots, 4a-3, 4a-2)$.

5. Переход осуществляется от набора из n гирь к набору из $(n+8)$ гирь. Дело в том, что имеет место равенство

$$(n+1)^2+(n+4)^2+(n+6)^2+(n+7)^2=$$
$$=(n+2)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+8)^2.$$

6. Естественно было бы попытаться разбить требуемым образом набор из девяти гирь с весами $(n+1)^2$, $(n+2)^2$, ..., $(n+9)^2$. Но, к сожалению, это невозможно. Удается получить только «почти» требуемое разбиение:

1 группа	$(n+1)^2$	$(n+6)^2$	$(n+8)^2$
2 группа	$(n+2)^2$	$(n+4)^2$	$(n+9)^2$
3 группа	$(n+3)^2$	$(n+5)^2$	$(n+7)^2$

При этом в первой и второй группах массы одинаковы, а в третьей — на 18 граммов меньше. Теперь становится понятно, как разбить требуемым образом на три группы набор из 27 гирь. Кучку из первых девяти гирь разобьем указанным образом, следующую кучку из девяти гирь разобьем так, чтобы легче была вторая группа, и последнюю кучку разложим так, чтобы легче была первая группа. Объединив затем все первые, все вторые и все третьи группы, получим требуемое разбиение набора из 27 гирь.

[redacted]нт» для младших школьников
[redacted]*«Квант» № 9)*

1. Яблоки стоили 45 копеек за килограмм.
2. Пусть задачу решило x мальчиков, а девочек было k. Тогда девочек, решивших задачу было $k-x$, а всего решило задачу $x+k-x=k$ человек. Значит, количество решивших задачу равно числу девочек.
3. $47\,486+7486+486+86+6=55\,550$.
4. Вырежем из бумаги параллелограмм, у которого одна сторона равна длине окружности основания первого цилиндра, вторая — окружности основания второго цилиндра, а высоты параллелограмма соответственно равны высотам цилиндров. Площадь такого параллелограмма равна 100 см^2. Нетрудно видеть, что этим параллелограммом можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндра.
5. Поскольку в сумме получались нечетные числа, человек шел по нечетной стороне улицы и каждый раз складывал нечетное число номе-

ров домов. При этом нетрудно найти номер среднего дома в каждой группе — он равен соответствующей *сумме, деленной* на количество домов в группе. Число 235 раскладывается на множители двумя способами: $235=5\cdot 47$ и $235=1\cdot 235$. Отсюда следует, что в этом квартале *либо 5 домов и* средний имеет номер 47, либо один дом, имеющий номер 235. Но из условия видно, что ни один из соседних домов не может иметь номер 233 или 237, поэтому в *последнем* квартале 5 домов с номерами 43, 45, 47, 49, 51. Так как $117=3\cdot 39$, то в этом квартале находятся дома с номерами 37, 39, 41, а в первом квартале — дома 31, 33, 35. Итак, человек живет в доме № 31, а школа находится в доме № 51.

[illegible]с. обложки
(см. «Квант» № 9)
См. рис. 19.

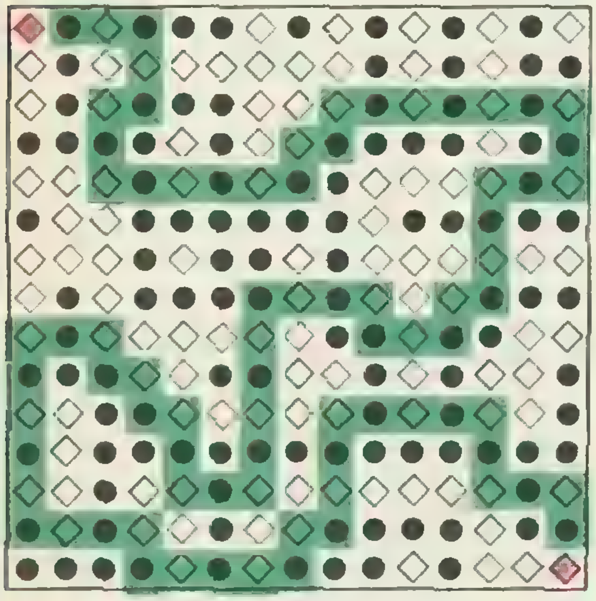


Рис. 19.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, С. Лухин, Л. Тишков, Э. Назаров,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор *20.07.90. Подписано к печати* 13.09.90.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,67.
Тираж 164555 экз. Заказ 1392. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

САМАЯ ДЛИННАЯ ПАРТИЯ

Время от времени на практике встречаются партии, длящиеся более 100 ходов, а иногда дело доходит почти до 200. Интересен такой чисто теоретический вопрос: какова самая длинная партия, которая может быть разыграна на шахматной доске?

До недавнего времени рекорд равнялся 5898 ходам, причем для создания такой фантастической партии использовалось правило 50 ходов (см. «Квант», 1978, № 12). Белые и черные могут играть как угодно, но каждые 50 ходов одна из сторон должна или взять неприятельскую фигуру, или продвинуть вперед свою пешку. И так до тех пор, пока не кончатся все ресурсы.

Внесенные в последний шахматный кодекс дополнения (см. «Квант», 1990, № 7) разрешают в отдельных случаях продлевать «маневрирование» фигур до 75 ходов. Это обстоятельство москвич И. Верещагин использовал для установления уникального рекорда. Число ходов в построенной им самой длинной партии составляет 6074.

Читатель может не пугаться: мы не собираемся приводить для доказательства всю партию. Достаточно указать узловые моменты, когда одна из сторон должна произвести какие-то действия, чтобы избежать ничьей.

И вот какая получается партия.

Первые 49 с половиной ходов «противники» маневрируют конями, лишь затем следует **50...g6**. При этом стороны всегда должны играть так, чтобы избегать троекратного повторения позиции (пространства доски для этого вполне достаточно).

100...g5 150...f6 200...f5 250...f5:Кg4. При движении пешек придется взять 8 фигур, избежать этого нельзя — иначе белые и черные пешки не смогут разойтись друг с другом. Пешки брать нельзя, они должны дойти до крайней горизонтали.

300...e6 350...e5 400...d6 450...d5 500...e4 550...d4 600...c6 650...c5 700...c5:Кb4 750...b6 800...b5 850. c3. В некоторых случаях теряется полхода (впервые после этого хода белых), таких потерь не избежать, но число их минимизировано.

900. c4 950. c5 1000. c6 1050. c7.

Перед следующим ходом белых у них остается пять фигур, обозначим их Ф1—Ф5 (король и пешки не в счет). Пешки могут превращаться в любые фигуры, но при этом белые непременно ставят на доску нового ферзя и семь произвольных фигур; для определенности мы обозначим их Ф6—Ф12.

1100. c8Ф6 1150. a3 1200. a4 1250. a5 1300. a6 1350. a6:Сb7 1400. b8Ф7 1450. b2:Кc3 1500. c4 1550. c5 1600. c6 1650. c7 1700. c8Ф8 1750. d2:Кc3 1800. c4 1850. c5 1900. c6 1950. c7 2000. c8Ф9 2050. e3 2100. e3:Сf4 2150. f5 2200. f6 2250. f7 2300. f8Ф10 2350. f3 2400. f4 2450. f5 2500. f6 2550. f7 2600. f8Ф11 2650. g2:Лf3 2700. f4 2750. f5 2800. f6 2850. f7 2900. f8Ф12.

2950. :Л. При взятии всякий раз указывается, какая именно фигура или пешка берется, но если место взятия не имеет значения, соответствующее поле не приводится.

3000. :Ф. Одну из белых пешек нельзя сдвигать с места до тех пор, пока не будут взяты все фигуры белых, а у черных не останутся два коня.

3049...g3 3099...g2.

К тому моменту, когда начинают превращаться черные пешки, все фигуры черных, стоявшие в начале партии, уже покинули доску. Всего черные поставят двух коней и шесть любых фигур, которые мы обозначим так: Ф1—Ф6.

3149...g1Ф1 3199...b3 3249...b2 3299...b1Ф2 3349...h7:Ф1g6 3399...d3 3449...d2 3499...d1Ф3 3549...e3 3599...e2 3649...e1Ф4 3699...h4 3749...b3 3799...b2 3849...b1Ф5 3899...a6 3949...a5 3999...a4 4049...a3 4099...a2 4149...a1Ф6 4199...g4 4249...g3 4299...g2 4349...g1К1 4399...g5 4449...g4 4499...g3 4549...g2 4599...g1К2.

4649...:Ф2 4699...:Ф3 4749...:Ф4 4799...:Ф5 4849...:Ф6 4899...:Ф7 4949...:Ф8 4999...:Ф9 5049...:Ф10 5099...:Ф11 5149...:Ф12 5199. Кр:Ф1 5249. Кр:Ф2 5299. Кр:Ф3 5349. Кр:Ф4 5399. Кр:Ф5 5449. Кр:Ф6.

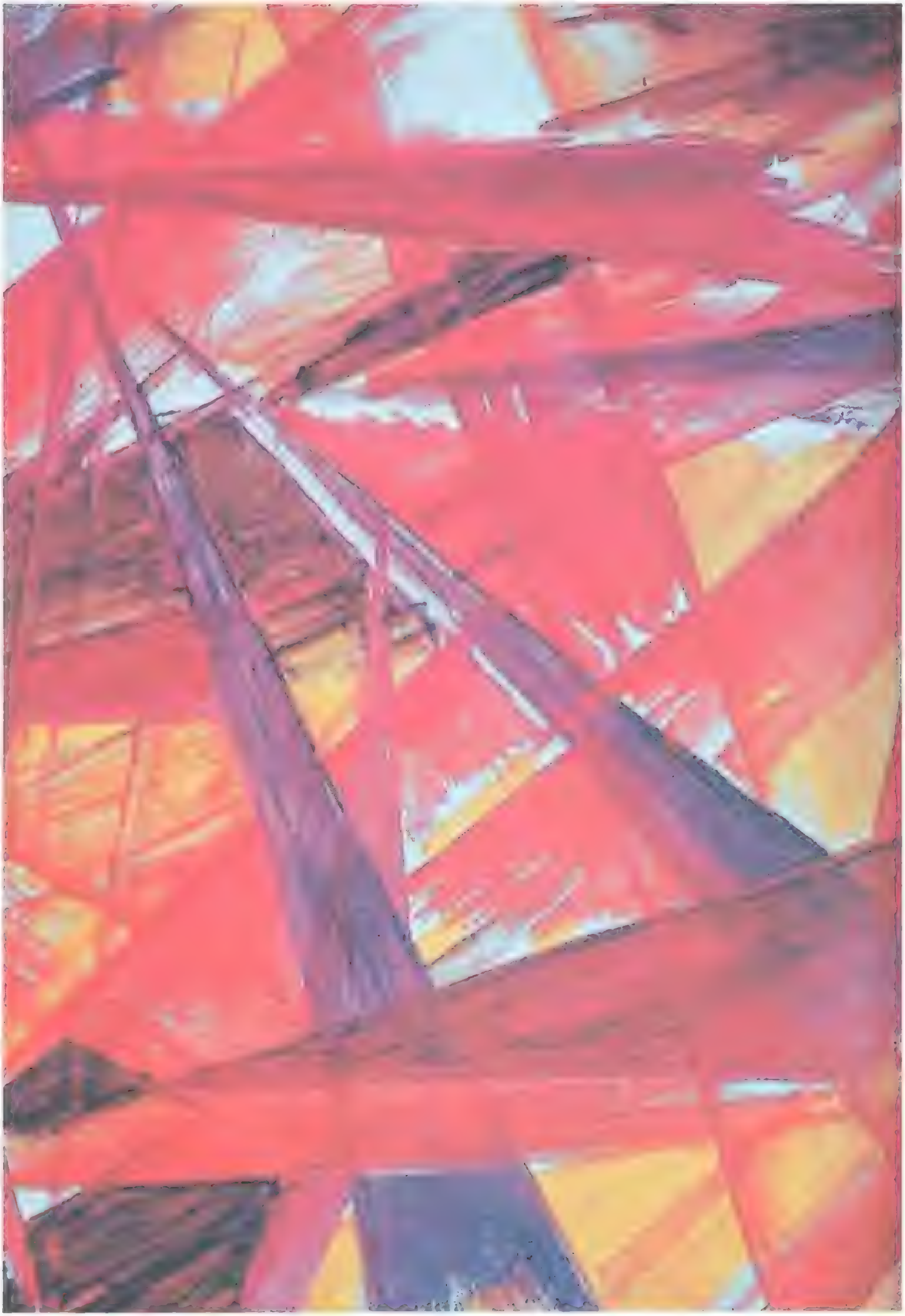
После этого хода белых на доске остается белая пешка h2 и два черных коня, поэтому вступает в силу правило б) статьи 10.9 шахматного кодекса — теперь каждое из шести продвижений *пешки «h»* отодвигает конец партии не на 50, а на 75 ходов!

5524. h3 5599. h4 5674. h5 5749. h6 5824. h7 5899. h8Ф! А теперь возникает окончание с ферзем против двух коней, и благодаря правилу г) статьи 10.9 фигуры беззаботно маневрируют еще 75 ходов.

5974. :К1 6024. :К2 6074. Ф×. Последним ходом белый ферзь объявляет мат, спектакль кончается, и партия претендует на попадание в книгу рекордов Гиннесса!

Можно ли побить этот рекорд? Все зависит от возможных изменений статьи 10.9 шахматного кодекса, т. е. в конечном счете от того, будут ли учтены достижения компьютеров в анализе окончаний!

Е. Гик



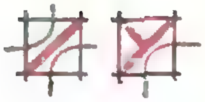
45 коп.
Индекс 70465

Экспресс-лабиринт

На рисунках 1—4 изображены четыре квадрата 10×10, в которых отмечены некоторые клеточки — «запрещенные остановки» (перечеркнутые красным крестиком) и «повороты» (как в таких клеточках осуществляется поворот, показано на рисунке слева вверху).

Для каждого квадрата нарисуйте замкнутую несамопересекающуюся ломаную, следуя вдоль которой, его можно обойти ходом шахматной ладьи, побывав в каждой свободной клеточке, не заходя ни в одну из клеток «запрещенных остановок» и поворачивая, согласно правилам, в каждой клеточке «поворота».

Л. Мочалов



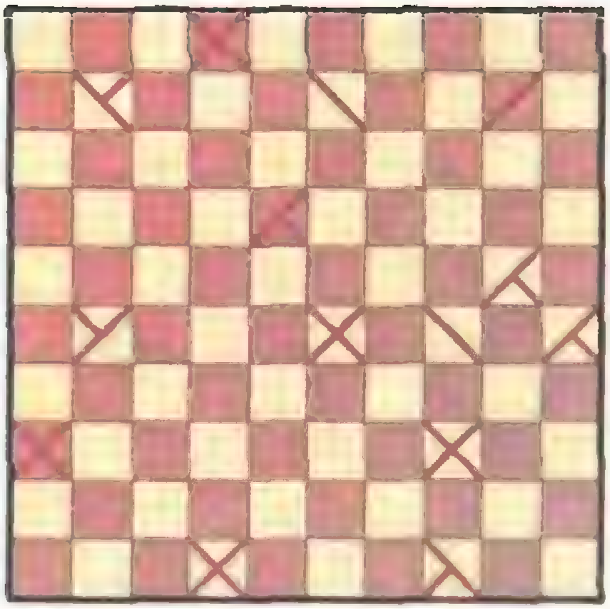


Рис. 1.

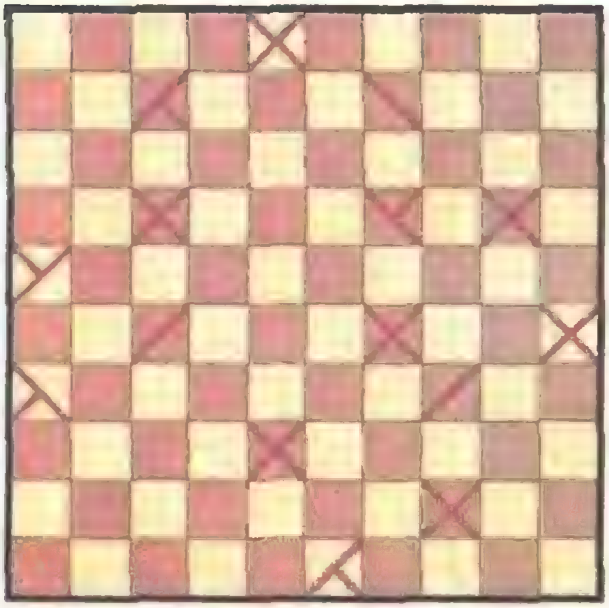


Рис. 2.

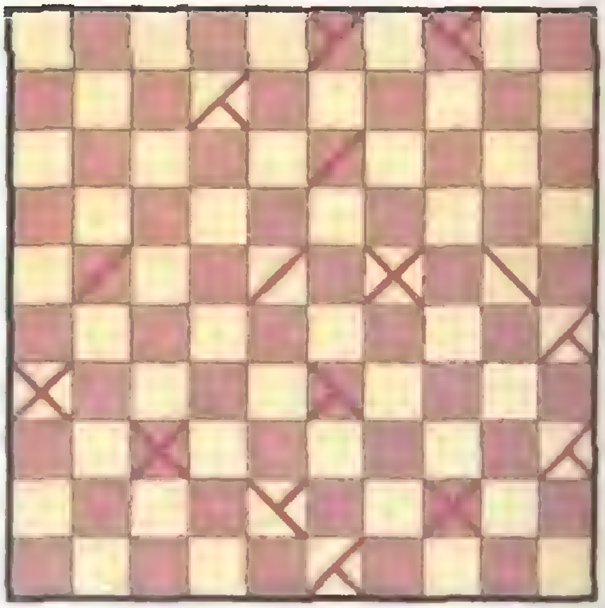


Рис. 3.

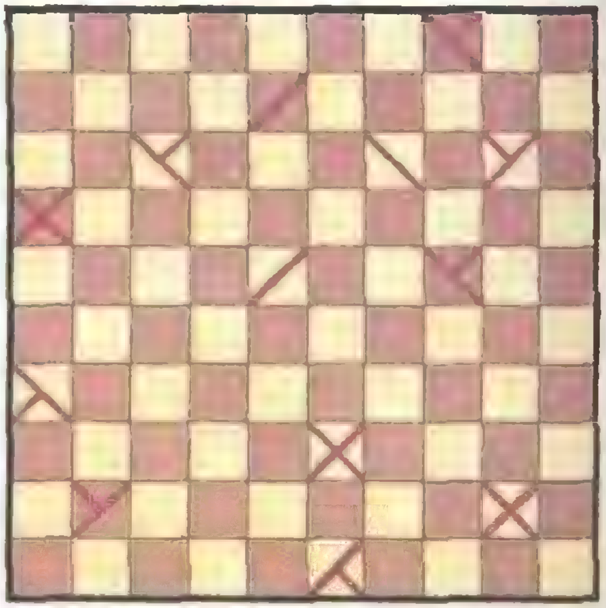


Рис. 4.

НОМЕР
11

КВАНТ

11 1990

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *Д. Фукс.* Можно ли из тетраэдра сделать куб?
12 *А. Стасенко.* От границ Вселенной до Тартара
18 *Р. Винокур.* Защита от шума и дедуктивный метод

Задачник «Кванта»

22 Задачи М1251 — М1255, Ф1258 — Ф1262
23 Решение задач М1226 — М1230, Ф1238 — Ф1242

«Квант» для младших школьников

33 Задачи
34 *С. Тихомирова.* Световые явления
36 Конкурс «Математика 6—8»

Школа в «Кванте»
Физика 9, 10, 11:

37 Сила трения покоя
42 За какое время сливаются капли?
44 Избранные школьные задачи по физике

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

46 *А. Гирич.* Несколько задач о треугольниках и окружностях

Р — значит ракета

51 *Е. Нариманов.* 56 миллионов километров до Красной планеты (Продолжение)
55 Заочная аэрокосмическая школа

Ракурс

57 Падающая капля и воздушный пузырек

Олимпиады

58 XXIV Всесоюзная олимпиада по математике
60 XXIV Всесоюзная олимпиада по физике
65 III Всесоюзная олимпиада по информатике
70 Задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

Информация

71 «Городок открытий и творчества»

Игры и головоломки

72 Четыре головоломки с одной идеей

74 **Ответы, указания, решения**

Нам пишут *(32, 50)*

«Квант» улыбается *(30, 49)*
Смесь *(17)*
Реклама *(31)*

Наша обложка

1 *Можно ли из тетраэдра сделать куб? Об этом вы узнаете из статьи Д. Фукса, в которой рассказывается об истории знаменитых проблем Гильберта и о решении одной из них.*
2 *Репродукция картины русского живописца А. Русакова «Монтер» (1928 г.) — прекрасная иллюстрация к заметке «Сила трения покоя».*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «кубики Мак-Магона».*

© Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1990

МОЖНО ЛИ ИЗ ТЕТРАЭДРА СДЕЛАТЬ КУБ?

Доктор физико-математических наук
Д. ФУКС

Многие математические работы трудны для школьников по чисто техническим причинам: для их понимания нужно знать те или иные вещи. Трудности, с которыми столкнется школьник при чтении этой статьи, иного рода: сам стиль работы покажется ему необычным. Содержательный математический результат получится в результате педантичного продумывания вещей, в которых, на первый взгляд, ничего неясного нет. Этот стиль характерен для значительной части математики XX века, и с ним стоит познакомиться.

Проблемы Гильберта

В последнем году XIX века довольно молодой, но уже весьма знаменитый немецкий математик Давид Гильберт выступал с докладом на очередном (втором) всемирном математическом съезде, который в том году состоялся в Париже. Доклад был необычен по форме. Он не включал в себя новых теорем, не предлагал решений никаких проблем. Напротив, он содержал формулировки двадцати трех проблем, решение которых, по замыслу докладчика, должно было стать главным стимулом развития математики в новом, XX столетии. И оно им стало. Проблемы Гильберта стали самыми престижными математическими задачами; как правило, решение проблемы Гильберта приводило к созданию новой области математики, и из возникших таким образом областей современная математика в значительной мере и состоит. В этом можно убедиться, просмотрев впечатляющий двухтомник «Развитие математики, выросшее из проблем Гильберта», выпущенный в 1976 году Американским математическим обществом.

Не все проблемы Гильберта оригинальны. Так, первая проблема — это «континуум-проблема» (существует ли множество мощности, промежуточной между счетной и континуальной?), принадлежащая Георгу Кантору и датируемая 1878 годом. Проблемы Гильберта относятся к совершенно разным математическим дисциплинам, но имеют общее: они конкретны, как правило, в каждой содержится вопрос, на который можно ответить «да» или «нет». Например: «Трансцендентно ли число $2^{\sqrt{2}}$?» (7-я проблема) или «Может ли уравнение 6-й степени задавать на плоскости кривую, состоящую из 11 овалов, лежащих вне друг друга?» (половина 16-й проблемы) и т. п.

Почти все проблемы Гильберта в настоящее время решены, хотя кое-что не сделано. (Например, не получил ответа конкретный вопрос о решениях уравнений 7-й степени, входящий в состав 13-й проблемы; впрочем, в некоем теоретическом смысле 13-я проблема Гильберта решена в студенческой работе В. И. Арнольда.)

Разные проблемы Гильберта потребовали для своего решения разного времени. Так, «континуум-проблема» была (в известном смысле) решена П. Коэном в 1963 году, 7-я проблема — А. О. Гельфондом в 1934 году, упоминавшаяся выше часть 16-й проблемы — Д. А. Гудковым в 1969 году. Но какая же из проблем Гильберта была решена раньше всех? Раньше всех была решена единственная из проблем Гильберта, относящаяся к классической геометрии — 3-я проблема, в которой идет речь о равносоставленности многогранников. Ее решил немецкий математик Макс Ден (драматическая биография этого замечательного ученого изложена в статье С. Табачникова «Нацизм и математика» в 10-м номере «Кванта» за 1990 год). Работа Дена появилась *настолько быстро, что упоминание* о ней имеется в английском переводе доклада Гильберта, опубликованном в Бюллетене Американского математического общества вскоре после парижского конгресса: на решение проблемы потребовалось меньше времени, чем на перевод ее (и других проблем) формулировки на английский язык!

В чем проблема?

Два многогранника называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на (многогранные) части, из которых можно составить другой. Понятие равносоставленности можно трактовать расширительно (и мы будем это делать): многогранники S' и S'' называются равносоставленными, если существуют многогранники $P_1, \ldots, P_n$ со следующим *свойством: многогранники* $S', P_1, \ldots, P_n$ можно разрезать на многогранные части, из которых можно составить многогранники $S'', P_1, \ldots, P_n$.

Очевидно, что равносоставленные многогранники имеют одинаковые объемы. 3-я проблема Гильберта спрашивает, *верно ли обратное, т. е. верно ли, что любые два многогранника одинаковых объемов равносоставленны.*

Ден показал, и мы познакомимся здесь с его доказательством, что это *неверно, т. е. что многогранники* одинаковых объемов могут быть (и в действительности, как правило, являются) не равносоставленными.

Надо сказать, что 3-я проблема Гильберта имеет конкретную формулировку: речь в ней идет не о произвольной паре многогранников одинакового объема, а о двух треугольных пирамидах с одинаковыми (по форме и размерам) основаниями и равными (по длинам) высотами. Можно показать, однако, что если бы такие пирамиды были всегда равносоставленны, то были бы равносоставленны любые два многогранника одинаковых объемов (см. ниже упражнение 1). Ввиду этого для опровержения гипотезы Гильберта достаточно установить неравносоставленность любых двух многогранников с одинаковыми объемами. И мы в качестве такой пары будем рассматривать куб и правильный тетраэдр.

Доклад Гильберта содержит краткое указание на источник проблемы: она естественно возникает при продумывании понятия объема. Предположим, что объем некоторой фигуры, пусть многогранника, равен a кубическим единицам. По определению, это означает, что наш многогранник имеет такой же объем, как брус $1\times1\times a$. А это что значит? Напрашивается определение: многогранники имеют одинаковые объемы, если они равносоставленны (тем более, что для площадей многоугольников, как мы увидим, такое определение вполне подходит). Однако неудобство такого определения испытал на себе уже Архимед при доказательстве известной вам формулы $\frac{1}{3}Sh$ для объема пирамиды. Поскольку равносоставленность пирамиды и бруса доказать не удалось (а мы увидим, что она и не имеет места), Архимеду пришлось прибегнуть к другой аргументации. Говоря современным языком, он показал, что при любом $\varepsilon>0$ можно вписать в пирамиду многогранник объемом больше $\frac{1}{3}Sh-\varepsilon$ и описать вокруг нее многогранник

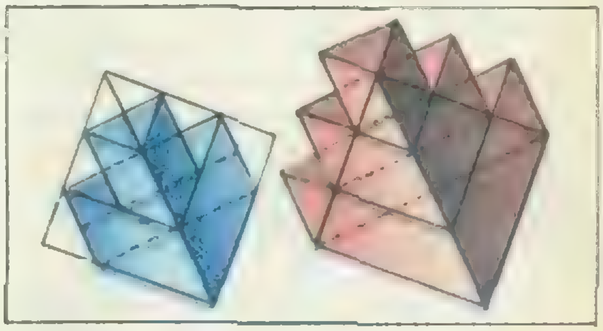


Рис. 1.

объемом меньше $\frac{1}{3}Sh+\varepsilon$ (конструкция «чертовой лестницы» — рис. 1). Значит, объем пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$. Это рассуждение ничем не плохо, но создает трудности при составлении системы аксиом стереометрии. Мотивировкой проблемы Гильберта было желание узнать, происходят ли эти трудности из существа дела или их можно избежать. Ответ Дена был категоричен: избежать нельзя.

А на плоскости?

На плоскости все в порядке: любые два многоугольника одинаковой площади можно разрезать на одинаковые части. Кстати сказать, в популярной литературе нет-нет, да и мелькнет задача: разрезать такую-то фигуру (многоугольник) на части, из которых можно сложить, скажем, квадрат. Читателю будет небезынтересно узнать, что это можно сделать всегда (хотя задачи указанного вида не всегда бессмысленны, поскольку в них иногда подразумевается существование какого-нибудь особенно красивого разрезания).

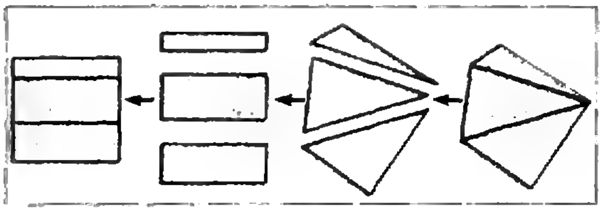


Рис. 2.

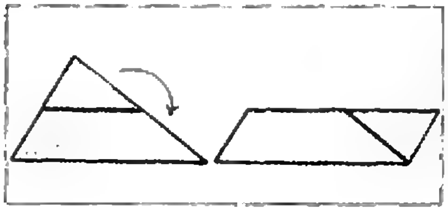


Рис. 3.

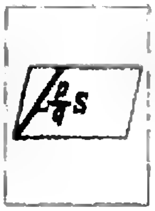


Рис. 4.

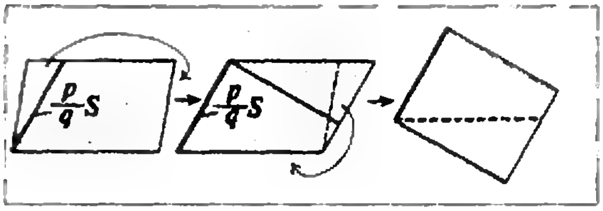


Рис. 5.

Теорема 1. *Многоугольник площадью S всегда можно разрезать на многоугольные части, из которых можно составить прямоугольник $1\times S$.*

Доказательство. Всякий многоугольник можно разрезать на треугольники, поэтому можно ограничиться случаем, когда наш многоугольник есть треугольник (многоугольник разрезается на треугольники площадей $S_1, \ldots, S_m$, эти треугольники разрезаются на части, из которых составляются прямоугольники $1\times S_1, \ldots, 1\times S_m$, из этих прямоугольников составляется прямоугольник $1\times S$ — рис. 2). Треугольник разрезается на части, из которых составляется параллелограмм (рис. 3), в параллелограмме можно провести отрезок, соединяющий вершину с точкой одной из противоположных сторон, длина которого соизмерима с S, т. е. равна $\frac{p}{q}S$, где p и q — целые (рис. 4). Затем разрезанием и перестановкой частей мы превращаем наш параллелограмм в параллелограмм, а потом и в прямоугольник со стороной $\frac{p}{q}S$ (рис. 5). Этот прямоугольник можно разрезать на p полосок со стороной $\frac{1}{q}S$, затем из этих полосок мы составляем длинную полосу, которую делим поперечными разрезами на q одинаковых частей, из которых, наконец, составляется полоса шириной S (рис. 6). Длина этой полосы равна 1, потому что ее площадь равна S. Построение закончено.

Упражнение 1. Докажите, что если бы было верно, что треугольные пирамиды с одинаковыми основаниями и равными высотами равносоставленны, то было бы верно и что любые два многогранника одинаковых объемов равносоставленны.

Теорема Дена: как подступиться к ней?

Мы уже вернулись к пространственной ситуации (упражнение 1). Пусть теперь у нас есть куб и правильный тетраэдр того же объема. Как доказать, что эти многогранники неравносоставленны, т. е. один

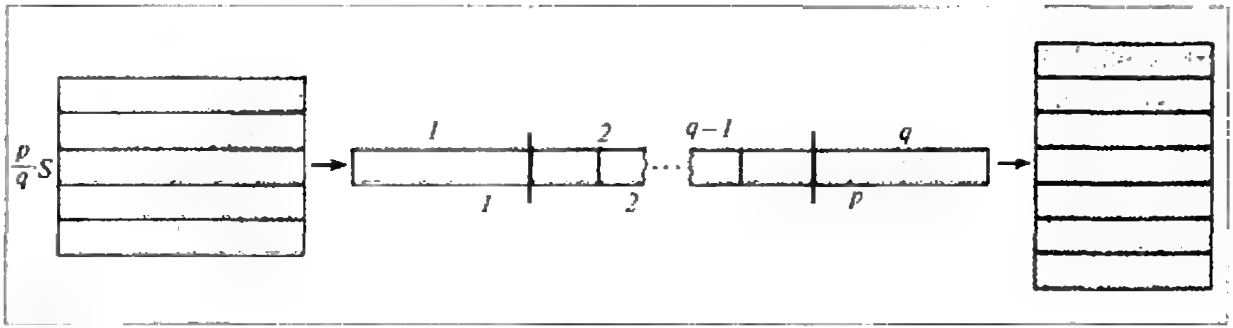


Рис. 6.

нельзя получить из другого посредством разрезания, склеивания частей и, возможно, приставления каких-то посторонних частей с последующим отрезанием таких же? При первом взгляде на проблему устрашает немыслимое разнообразие возможностей. Как обозреть все, во что можно превратить куб или тетраэдр такими операциями? Опытный математик, однако, знает, что для решения проблемы нужно выдумать способ поставить в соответствие всякому многограннику НЕЧТО, так, чтобы это НЕЧТО не менялось при всех перечисленных операциях над многогранниками (как объем) и чтобы у куба оно было одно, а у тетраэдра — другое (не как объем). Как это сделать — вопрос другой, но, сделав это, мы сможем в геометрическое разнообразие многогранников, равносоставленных с тетраэдром и кубом, не вникать. «Неизменный» по-латыни — «инвариантный», поэтому наше НЕЧТО называют *инвариантом*.

Решение нашей задачи при помощи инвариантов разделяется на следующие этапы. Нужно:

(а) договориться, чем будет наш инвариант — числом, фигурой или чем еще (в нашем случае — «чем еще»);

(б) описать способ сопоставления инварианта с многогранником (в нашем случае это будет совсем просто);

(в) убедиться в том, что это — действительно инвариант, т. е. не меняется при наших преобразованиях (в нашем случае и это не особенно сложно);

(г) вычислить инвариант для куба и тетраэдра (это займет у нас одну секунду);

(д) доказать, что получающиеся инварианты различны (это покажется нам очевидным, но строгое доказательство потребует-таки возни).

Итак, приступаем.

Инвариант Дена

Пусть S — многогранник, имеющий N ребер. Пусть $l_1, \ldots, l_N$ — длины этих ребер, $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ — величины соответствующих двугранных углов, измеренные в радианах. Сопоставим с нашим многогранником набор пар $(l_1, \varphi_1), \ldots, (l_N, \varphi_N)$. В каждой паре стоит на первом месте (положительное, но это не особенно важно для нас) действительное число, на втором месте — действительное число, заключенное между 0 и 2π (поскольку многогранник не предполагается выпуклым, углы, в принципе, могут быть и больше π. Нам удобнее считать, что на втором месте стоит действительное число, определенное с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Этот набор и будет нашим инвариантом, только мы сначала примем соглашение, которое иногда позволит нам считать одинаковыми наборы, составленные из разных пар.

Итак, слово *набор* будет обозначать у нас конечный набор пар, в которых на первом месте стоит действительное число (любое), на втором — действительное число, определенное с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Подчеркнем, что говоря «набор», мы не обязательно имеем в виду набор, получающийся из многогранника; например, набор может быть пустым ($N=0$).

Мы будем разрешать производить следующие преобразования наборов:

(1) любую пару (l, φ) можно заменить двумя парами (l', φ), (l'', φ), где $l'+l''=l$;

(2) наоборот, если набор содержит пары (l', φ), (l'', φ) с одинаковыми вторыми членами (напомним, что одинаковость вторых членов понимается с точностью до слагаемого $2k\pi$), то можно заменить их одной парой (l, φ), где $l'+l''=l$;

(3) любую пару (l, φ) можно заменить двумя парами (l, φ'), (l, φ''), где $\varphi'+\varphi''=\varphi$ (и это равенство понимается «по модулю 2π», т. е. его левая и правая части могут различаться на слагаемое вида $2k\pi$);

(4) наоборот, если набор содержит пары (l, φ'), (l, φ'') с одинаковыми первыми членами, то их можно заменить одной парой (l, φ) с $\varphi=\varphi'+\varphi''$;

(5) пару (l, φ), в которой $l=0$ или $\varphi=0$, можно просто выбросить из набора.

Если два набора таковы, что один можно получить из другого последовательным применением нескольких допустимых операций, то мы будем говорить, что эти наборы *эквивалентны*, или *подобны*.

Итак, *инвариантом Дена многогранника* S, *по определению, является описанный выше набор* (l_1, φ_1), ..., (l_n, φ_N), *рассматриваемый с точностью до подобия.*

Мы докажем две вещи:

Теорема 2. *Если два многогранника равносоставленны, то их инварианты Дена одинаковы (т. е. соответствующие им наборы подобны).*

Теорема 3. *Инварианты Дена куба и правильного тетраэдра различны (т. е. соответствующие им наборы не подобны).*

Из этих двух теорем вытекает.

Теорема Дена. *Куб и правильный тетраэдр не равносоставленны.*

(Заметим, что теорема 3 справедлива независимо от того, равны или не равны объемы куба и тетраэдра, хотя для нас важен только случай равных объемов.)

Прежде чем доказывать теоремы, мы сформулируем две леммы о наборах; первую из этих лемм мы тут же и докажем, о второй — разговор особый.

Кое-что о подобии наборов

Лемма 1. *Если число φ соизмеримо с π, то при любом l пару (l, φ) можно выбросить из любого набора, и новый набор будет подобен исходному.*

Лемма 2. *Если $l\neq0$ и φ не соизмеримо с π, то набор, состоящий из одной пары (l, φ), не подобен пустому набору.*

Доказательство леммы 1. Пусть $\varphi=\frac{p}{q}\pi$. Пару $(l, \varphi)=(l, \frac{p}{q}\pi)$ можно заменить набором из $2q$ пар $(\frac{1}{2q}l, \varphi)$ (потому что $l=\frac{1}{2q}l+\ldots+\frac{1}{2q}l$, $2q$ слагаемых), а эти $2q$ пар можно заменить одной парой $(\frac{1}{2q}l, 2q\varphi)$ (потому что $\varphi+\ldots+\varphi=2q\varphi$, $2q$ слагаемых). Но $2q\varphi=2q\cdot\frac{p}{q}\pi=2p\pi$, а по нашим правилам вместо $2p\pi$ можно написать 0. Пара же $(\frac{1}{2q}l, 0)$ может быть исключена из набора. Лемма доказана.

Лемма 2 могла бы показаться очевидной, но в ее доказательстве есть тонкость, и мы отложим его на потом. Мы докажем лемму 2 после того, как расскажем доказательства теорем 2 и 3.

Доказательство теоремы 2

Хотя теорема 2, в действительности, почти очевидна, доказывать ее тоже приходится довольно долго. Может быть, читателю лучше не читать этого доказательства, а самому перебрать все возможности и посмотреть, что происходит с ребрами и двугранными углами при разрезаниях и составлениях многогранников. Мое дело, однако, не жаловаться, а писать, и я приступаю к доказательству теоремы 2.

Заметим, что если многогранник состоит из отдельных, не соединенных между собой кусков (скажем,

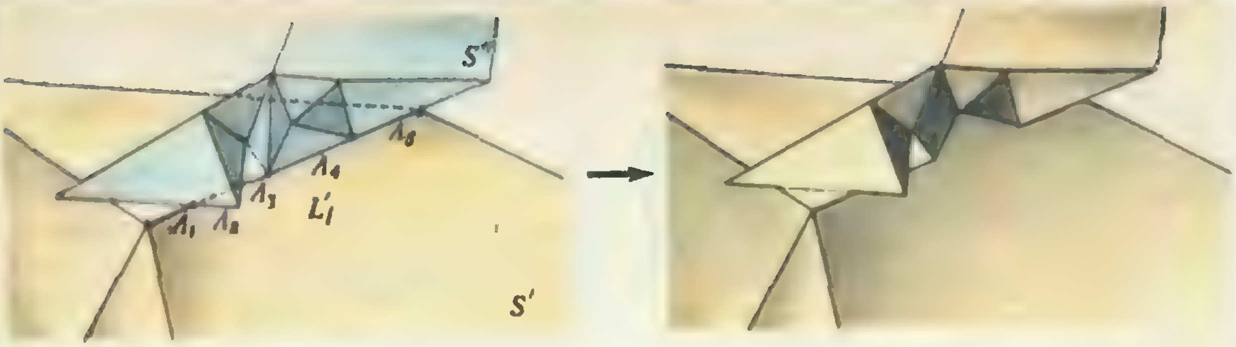


Рис. 7.

из куба и лежащего отдельно от него тетраэдра), то набор (инвариант Дена) этого многогранника есть объединение наборов, отвечающих частям. Для доказательства теоремы 2 нам достаточно установить, что если многогранник S получается посредством приставления друг к другу многогранников S' и S'', то инвариант Дена многогранника S равен инварианту Дена многогранника, составленного из S' и S'' как из отдельных частей. При этом многогранники S' и S'' приставляются друг к другу по одной или нескольким граням или их частям. (Наряду с составлением многогранников мы должны были бы рассматривать их разрезание, но эти операции взаимно обратны, поэтому если одна не меняет инварианта Дена, то и другая его не меняет.)

Пусть $L'_1, ..., L'_N$ — ребра многогранника S', $L''_1, ..., L''_M$ — *ребра многогранника* S''. Каждое ребро L'_i при склеивании многогранников подразделяется на части; частями служат пересечения ребра L'_i с гранями и ребрами многогранника S'' (одноточечные пересечения мы во внимание не принимаем) и куски ребра L'_i, не соприкасающиеся с S''. Иллюстрацией является рисунок 7, на котором ребро L'_i разрезается таким образом на 5 частей: $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5$. При этом часть Λ_2 совпадает с отрезком грани многогранника S'' (синий многогранник), часть Λ_4 — с ребром и часть Λ_5 — с отрезком ребра многогранника S''. Таким образом, мы подразделяем каждое ребро каждого из многогранников S' и S''. Соответствующим образом мы преобразуем и наборы Дена: вместо (l'_i, φ) мы пишем (λ_1, φ), (λ_2, φ), (λ_3, φ), (λ_4, φ), (λ_5, φ) (здесь l'_i — длина ребра L'_i, а $\lambda_1, ..., \lambda_5$ — длины ребер $\Lambda_1, ..., \Lambda_5$). Такое преобразование наборов является допустимым.

Пусть $\Lambda'_1, ..., \Lambda'_P$ и $\Lambda''_1, ..., \Lambda''_Q$ — куски ребер многогранников S' и S'', получающиеся при разбиении. Пусть, далее, $\lambda'_1, ..., \lambda'_P$ и $\lambda''_1, ..., \lambda''_Q$ — длины этих кусков и $\varphi'_1, ..., \varphi'_P$ и $\varphi''_1, ..., \varphi''_Q$ — соответствующие двугранные углы. Набор Дена многогранника S' подобен набору $(\lambda'_1, \varphi'_1), ..., (\lambda'_P, \varphi'_P)$, а набор Дена многогранника S'' подобен набору $(\lambda''_1, \varphi''_1), ..., (\lambda''_Q, \varphi''_Q)$. При составлении *многогранников* с каждым из наших кусков ребер может произойти следующее:

(1) Кусок Λ'_i или Λ''_j не соприкасается, соответственно, с S'' или с S' (как Λ_1 или Λ_3 на рисунке 7). Тогда соответствующая пара входит в набор S *с тем же углом, с которым она* входила в набор S' или набор S''.

(2) Кусок Λ'_i совмещается с куском Λ''_j и сумма углов φ'_i и φ''_j не равна π или 2π (Λ_5 на рисунке 7). Тогда $\lambda'_i = \lambda''_j$ и в S есть ребро той же длины с двугранным углом $\varphi = \varphi'_i + \varphi''_j$. Таким образом, в набор Дена *объединения* многогранников S' и S'' входят пары (λ'_i, φ'_i), $(\lambda''_j, \varphi''_j)$, а в набор Дена многогранника S вместо них входит пара (λ'_i, φ), что есть то же самое с точки зрения инварианта Дена.

(3) То же, но $\varphi'_i + \varphi''_j = \pi$ или 2π (случай π представлен на рисунке 7 отрезком Λ_4, случай 2π показан на рисунке 8). Тогда при слиянии многогранников ребра Λ'_i и Λ''_j исчезают: они превращаются либо в отрезок грани многогранника S, либо в отре-

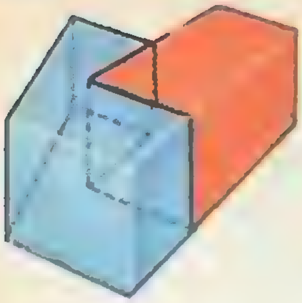


Рис. 8.

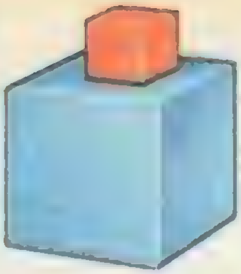


Рис. 9.

зок, лежащий внутри многогранника S. Но и пары (λ_i', φ_i'), $(\lambda_i'', \varphi_i'')$ вместе эквивалентны паре $(\lambda_i', \pi$ или $2\pi)$, которая может быть выброшена из набора (лемма 1).

(4) Наконец, кусок Λ_i' или Λ_i'' может совместиться с отрезком грани многогранника S'' или S' (рис. 9). Тогда этот кусок станет ребром в S, а к двугранному углу прибавится π, что опять-таки не скажется на инварианте Дена: пара $(\lambda, \varphi+\pi)$ эквивалентна двум парам (λ, φ), (λ, π), вторая из которых может быть отброшена *в силу леммы 1.*

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3

У куба 12 ребер одинаковой длины, скажем, a, с двугранными углами $\frac{\pi}{2}$. Пара $(a, \frac{\pi}{2})$ может быть выброшена из набора согласно лемме 1. Таким образом, набор Дена куба подобен пустому набору.

Упражнение 2. Докажите, что у любой призмы набор Дена подобен пустому набору.

Упражнение 3. Докажите, что любая призма равносоставлена с кубом (см. раздел «Обратная теорема») в конце статьи.

У правильного тетраэдра 6 ребер одинаковой длины, скажем, b, двугранные углы при них равны $\arccos\frac{1}{3}$. Набор, отвечающий тетраэдру, состоит из 6 пар $(b, \arccos\frac{1}{3})$; он подобен набору, состоящему из одной пары $(6b, \arccos\frac{1}{3})$. Так как $\arccos\frac{1}{3}$ не соизмерим с π, то последний набор не подобен пустому набору (лемма 2). Теорема 3 доказана. Осталось доказать лемму 2.

Но, впрочем,

Почему $\arccos\frac{1}{3}$ не соизмерим с π?

Этот вопрос тоже может возникнуть. Самый простой ответ таков: если бы косинус какого-нибудь угла $\frac{p}{q}\pi$ равнялся бы $\frac{1}{3}$, то мы об этом, уж наверное, знали бы.

А если серьезно? А если серьезно, то имеет место такая теорема, она вполне интересна сама по себе:

Теорема 4. *Если угол φ соизмерим с π и его косинус рационален, то $\cos\varphi=0, \pm 1$ или $\pm\frac{1}{2}$ (а уж не $\frac{1}{3}$).*

Доказательство. Если угол φ соизмерим с π, то в последовательности

$$\varphi,\ 2\varphi,\ 4\varphi,\ 8\varphi,\ 16\varphi,\ \ldots$$

непременно есть повторяющиеся углы (действительно, если $\varphi=\frac{p}{q}\pi$, то все члены этой последовательности имеют вид $\frac{r}{q}\pi$ с $r=0, 1, \ldots, 2q-1$, т. е. для членов этой бесконечной последовательности вообще есть конечное число возможностей). Рассмотрим последовательность

$$\cos\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \cos 4\varphi,\ \ldots$$

Если число $\cos\varphi$ рационально, то и все члены этой последовательности рациональны: $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1$, $\cos 4\varphi=2\cos^2 2\varphi-1$, ... Более того, эти же формулы показывают, что если $\cos 2^m\varphi$ есть несократимая дробь $\frac{s}{t}$ со знаменателем t, то $\cos 2^{m+1}\varphi$ есть несократимая дробь со знаменателем t^2 (или $t^2/2$):

$$\cos 2^{m+1}\varphi=\frac{2s^2}{t^2}-1=\frac{2s^2-t^2}{t^2},$$

а $2s^2-t^2$ и t^2 не могут иметь общего множителя, большего 2. Следовательно если знаменатель несократимой дроби $\cos\varphi$ превосходит 2, то знаменатели несократимых дробей

$\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\cos 4\varphi, \ldots$ составляют строго возрастающую последовательность, и среди ее членов не может быть попарно равных. Значит, знаменатель дроби $\cos\varphi$ не может быть больше 2. Теорема доказана.

Упражнение 4. Найдите все углы, соизмеримые с π, у которых тангенс рационален.

Упражнение 5. Найдите все углы, соизмеримые с π, у которых а) косинус, б) тангенс имеет вид $r_1\sqrt{r_2}$, где r_1 и r_2 — рациональные числа.

Приступаем к доказательству леммы 2. Аддитивные функции

Отвлечемся от геометрии и рассмотрим следующую задачу. Функция f, *определенная на множестве R всех действительных чисел* и принимающая действительные значения, называется *аддитивной*, если для любых $\alpha, \beta \in R$

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta).$$

Как перебрать все аддитивные функции?

Простейший пример аддитивной функции — линейная фунция (рис. 10):

$$f(x)=\lambda x, \text{ где } \lambda\in R.$$

Есть ли другие аддитивные функции? Я гарантирую вам, что попытка ответить на этот вопрос заведет вас в тупик. С одной стороны, вы не сможете построить такой функции, с другой — вы не сможете доказать, что ее нет.

Во всяком случае, аддитивная функция, не являющаяся линейной, не может быть непрерывной. Действительно, если f — аддитивная функция, то для любого действительного числа α и любого *рационального* числа r

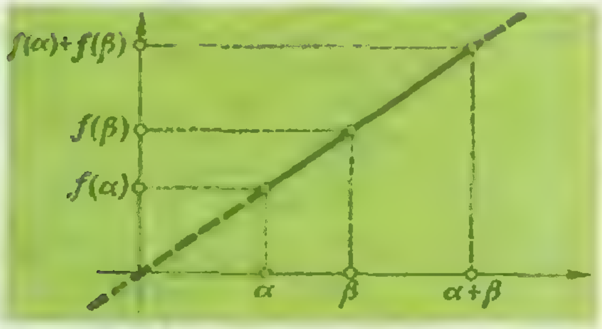


Рис. 10.

$$f(r\alpha)=rf(\alpha);$$

в самом деле, если $r=\frac{p}{q}$, то

$$qf(r\alpha)=\underbrace{f(r\alpha)+\ldots+f(r\alpha)}_{q}=$$

$$=f(\underbrace{r\alpha+\ldots+r\alpha}_{q})=f(qr\alpha)=f(p\alpha)=$$

$$=f(\underbrace{\alpha+\ldots+\alpha}_{p})=\underbrace{f(\alpha)+\ldots+f(\alpha)}_{p}=pf(\alpha),$$

откуда $f(r\alpha)=\frac{p}{q}f(\alpha)=rf(\alpha)$. Положим $f(1)=\lambda$; тогда $f(x)=xf(1)=\lambda x$ для любого рационального x, а если функция f непрерывна, то это равенство справедливо и для любого действительного x.

Упражнение 6. Докажите, что если аддитивная функция непрерывна хотя бы в одной точке, то она линейна.

Нелинейные аддитивные функции — это один из математических монстров, обитающих на периферии познания. Их существование не противоречит никаким математическим *аксиомам*, как, впрочем, и их несуществование. Таким образом, ответ на рассматриваемый нами вопрос зависит от нюансов аксиоматики.

Мне не хочется (да и страшновато) углубляться в этот предмет. Скажу лишь, что есть течение в математике, приверженцы которого признают существующими только объекты (числа, фигуры, функции, множества и т. д.), которые можно явно построить. Это течение называется «конструктивная математика». В рамках конструктивной математики нелинейных аддитивных функций не существует. С чисто эстетической точки зрения конструктивная математика выглядит очень привлекательной, но за эту привлекательность приходится платить значительным усложнением формулировок и доказательств многих фундаментальных теорем. Чаще математики принимают какую-нибудь аксиому, *разрушающую* конструктивность (это можно сделать многими эквивалентными способами). Ни на каких содержательных утверждениях это не сказывается. В неконструктивной математике справедливо, в частности, следующее утверждение.

«Теорема». *Существуют нелинейные аддитивные функции. Более того, для любого иррационального α существует аддитивная функция f такая, что $f(1)=0$, а $f(\alpha)=1$.*

(Если бы функция f была линейна, то из $f(1)=0$ следовало бы, что $f\equiv 0$.)

Доказывать «теорему» мы, конечно, не будем (да и не смогли бы). Впрочем, она нам и не нужна, как мы в конце концов увидим. А чтобы закончить этот разговор, мы приведем еще две формулировки утверждений, характерных для неконструктивной математики. Из каждого из них можно вывести нашу «теорему».

В множестве действительных чисел существует такое подмножество A, что всякое действительное число единственным образом представляется в виде конечной суммы

$$r_1a_1+\ldots+r_na_n,$$

где $r_1, \ldots, r_n$ — рациональные числа, а $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Множество действительных чисел может быть вполне упорядочено; это значит, что в R можно ввести порядок $\prec$, по отношению к которому в любом множестве $B\subset R$ есть минимальный элемент, т. е. такой элемент b, что $b\prec b'$ для всякого $b'\in B$, отличного от b. (Обычный порядок $<$ не годится: например, в множестве положительных чисел нет минимального элемента.)

Последнее утверждение часто и принимается в качестве дополнительной аксиомы (в форме «*всякое множество может быть вполне упорядочено*»).

Не очень хорошее доказательство леммы 2

С помощью «теоремы» наша лемма 2 доказывается в две секунды. Вот доказательство. Пусть (l, φ) — набор с $l\neq 0$ и с φ, не соизмеримым с π. Выберем аддитивную функцию f, такую, что $f(1)=0$ и $f(\varphi/2\pi)=1$. Поставим в соответствие всякому набору $(l_1, \varphi_1), \ldots, (l_N, \varphi_N)$ число $l_1f(\varphi_1/2\pi)+\ldots+l_Nf(\varphi_N/2\pi)$. Это число не меняется при преобразованиях (1) — (5) из определения подобия наборов (очевидную проверку я оставляю читателю). Таким образом, у подобных наборов эти числа одинаковы. Но у набора (l, φ) то число равно $lf(\varphi/2\pi)=l\neq 0$, а у пустого набора оно равно 0 (сумма нуля слагаемых). Лемма доказана.

Вполне хорошее доказательство леммы 2

Я сказал, что в своей содержательной части конструктивная математика не отличается от обычной. А лемма 2 — содержательное утверждение (во всяком случае, такова теорема Дена). Значит, ее можно доказать и без «теоремы»? Можно, вот доказательство.

Пусть наш набор (l, φ) подобен пустому набору. Значит, от (l, φ) можно перейти к пустому набору, какое-то количество раз применив преобразования (1) — (5). На каждом шаге получается какой-то набор. Выпишем на бумажку из всех пар, входящих во все эти наборы, вторые числа (углы). На бумажке появится конечный список чисел, в числе которых будет наше φ. Добавим к этому списку 2π и запишем получившиеся числа в таком порядке: сначала 2π, потом φ, а дальше — как угодно:

$$2\pi,\ \varphi,\ \varphi_3,\ \varphi_4,\ \ldots,\ \varphi_{M-1},\ \varphi_M$$

(вместо 2π и φ мы будем иногда писать для единообразия φ_1 и φ_2). Теперь подчеркнем в списке те числа, которые не представляются в виде суммы предыдущих с рациональными коэффициентами. Поясняю: 2π мы подчеркнем (предыдущих чисел вовсе нет); φ мы тоже подчеркнем, потому что φ не представляется в виде $r\cdot 2\pi$ с рациональным r. Далее, если φ_3 представляется в виде $r_1\cdot 2\pi+r_2\varphi$ с рациональными r_1 и r_2, то мы φ_3 не подчеркиваем, а если не представляется, то подчеркиваем. Аналогично, если φ_4 представляется в виде $r_1\cdot 2\pi+r_2\varphi+r_3\varphi_3$ с рациональными r_1, r_2 и r_3, то мы φ_4 не подчеркиваем, а если не представляется, то подчеркиваем. И так далее, до φ_M. Может получиться, скажем, такое:

$$\underline{2\pi},\ \underline{\varphi},\ \varphi_3,\ \underline{\varphi_4},\ \ldots,\ \varphi_{M-1},\ \underline{\varphi_M}$$

Заметим, что всякое неподчеркнутое число единственным образом представляется как сумма подчеркнутых чисел с рациональными коэффициентами (подчеркнутое тоже представляется: оно равно само себе). (Это утверждение стандартно для математической дисциплины, которая называется *линейной алгеброй* и которую проходят на первом курсе в большинстве вузов. Доказывается оно так. Что неподчеркнутые числа выражаются нужным образом через подчеркнутые — это по определению так. Если же такое представление не единственно, то, вычитая одно представление из другого, мы видим, что сумма неких подчеркнутых чисел с рациональными коэффициентами равна 0. Но это позволяет выразить, опять-таки в виде суммы с рациональными коэффициентами, одно из подчеркнутых чисел через предыдущие подчеркнутые числа, а значит, мы зря его подчеркнули.)

Теперь мы определим функцию f *только на числах*

$$1,\ \varphi/2\pi,\ \varphi_3/2\pi,\ \varphi_4/2\pi,\ \ldots/2\pi,\ \varphi_{M-1}/2\pi,\ \varphi_M/2\pi.$$

Делаем это мы так. Сначала полагаем $f(1)=0$, $f(\varphi/2\pi)=1$. Затем для подчеркнутых φ_i (начиная с φ_3) мы определяем $f(\varphi_i/2\pi)$ как угодно (хотя бы полагаем равным 0). Если же

$$\varphi_i=r_1\varphi_1+\ldots+r_{i-1}\varphi_{i-1},$$

то мы полагаем, по определению,

$$f(\varphi_i/2\pi)=r_1f(\varphi_1/2\pi)+\ldots+r_{i-1}f(\varphi_{i-1}/2\pi).$$

Функция f, которую мы построили, аддитивна в том смысле, что если одно из чисел, для которых она определена, равно сумме других из этих чисел (даже с любыми рациональными коэффициентами), то это же верно для значений функции на этих числах.

Дальше все очень просто. Пользуясь прежней формулой $l_1f(\varphi_1/2\pi)+\ldots+l_Nf(\varphi_N/2\pi)$, мы ставим в соответствие каждому из *наших* наборов число. Это число не меняется при *наших* преобразованиях наборов, но в то же время оно равно l для первоначального набора и 0 для последнего (пустого). Противоречие доказывает лемму.

Вы поняли суть последнего приема? Нам не нужна аддитивная функция, определенная на всем космосе действительных чисел, нам хватит чисел, вовлекаемых в нашу конструкцию. Обычная довольно конструктивизация. Не удивляет и то, что переход на конструктивистскую точку зрения не повлиял на результат, но усложнил доказательство.

Обратная теорема

Как оказывается, верно, что *если у двух многогранников одинаковы объемы и инварианты Дена, то они равносоставленны.*

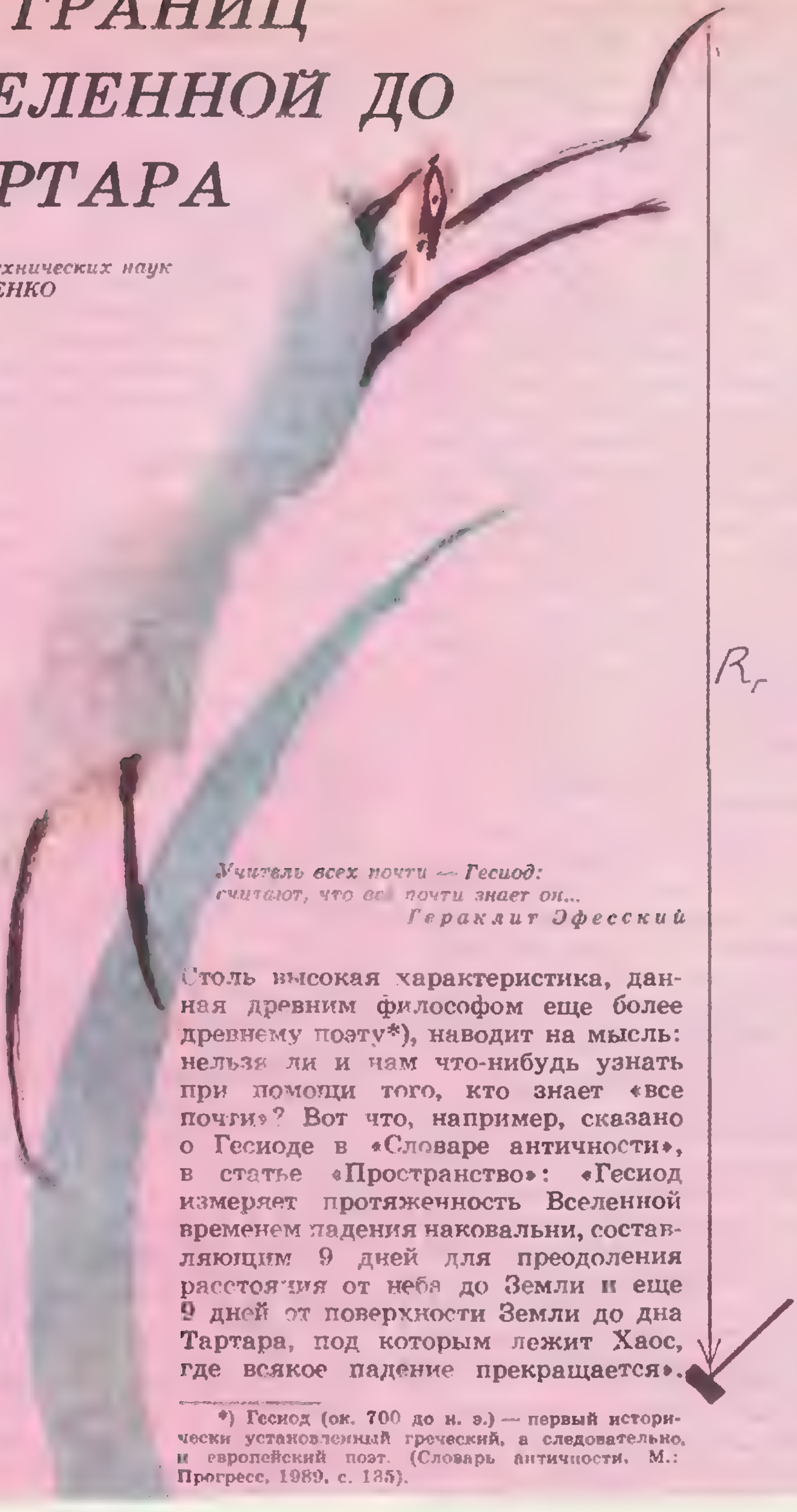
Заключение

Я снова беру в руки американский сборник, посвященный проблемам Гильберта. Что там написано о 3-й проблеме?

Быть не может! Ничего! Двадцати трем проблемам Гильберта посвящены двадцать две статьи, по штуке на каждую — кроме 3-й. Значит, в 1976 году считалось, что 3-я проблема Гильберта — никуда не ведущий тупик. Как изменилось положение дел за прошедшие полтора десятилетия! Теперь «scissor congruences», как по-английски называют равносоставленности, мелькают на страницах математических журналов. Инвариант Дена, его многомерные и гиперболические (т. е. относящиеся к геометрии Лобачевского) обобщения оказались необходимыми для K-теории, теории гомологий групп и т. д. Решенная раньше всех, 3-я проблема Гильберта позже всех заняла достойное место в математике. Может быть, дело в том, что она самая грубокая?

ОТ ГРАНИЦ ВСЕЛЕННОЙ ДО ТАРТАРА

Доктор технических наук
А. СТАСЕНКО



> *Учитель всех почти — Гесиод:*
> *считают, что всё почти знает он...*
> *Гераклит Эфесский*

Столь высокая характеристика, данная древним философом еще более древнему поэту*), наводит на мысль: нельзя ли и нам что-нибудь узнать при помощи того, кто знает «все почти»? Вот что, например, сказано о Гесиоде в «Словаре античности», в статье «Пространство»: «Гесиод измеряет протяженность Вселенной временем падения наковальни, составляющим 9 дней для преодоления расстояния от неба до Земли и еще 9 дней от поверхности Земли до дна Тартара, под которым лежит Хаос, где всякое падение прекращается».

---

*) Гесиод (ок. 700 до н. э.) — первый исторически установленный греческий, а следовательно, и европейский поэт. (Словарь античности. М.: Прогресс, 1989, с. 135).

Поставим вопрос: какие численные оценки размеров Вселенной мог бы получить древнегреческий поэт, основываясь на современных нам физических представлениях и на своих утверждениях о временны́х масштабах? Как и он, разобьем исследования на два этапа: первый этап — от неба до Земли, длящийся $t_1 = 9$ дней, и второй этап — до Тартара, тоже длящийся $t_2 = 9$ дней. (Конечно, под словом «дней» будем понимать «суток» — едва ли наковальня может падать днем и не двигаться по ночам.) При этом нам придется вспомнить о самом важном — о силах, действующих на наковальню. В космосе *превалирующей будет сила всемирного тяготения, а при погружении* в атмосферу Земли нужно учесть и силу сопротивления воздуха. Далее, поскольку не у кого спросить, где расположен Тартар, будем думать, что он в самом центре Земли (дальше некуда) и, очевидно, туда должен быть как-то обеспечен доступ наковальне — например, через специальную шахту, прорытую, в целях экономии народных средств, строго радиально. Итак, первый этап —

От неба до Земли

Как известно, сила тяготения, действующая на тело массой $m_н$ вне Земли на расстоянии r от ее центра, равна

$$F = -G\frac{M_\oplus m_н}{r^2} = -m_н g_\oplus \frac{R_\oplus^2}{r^2},$$

где $R_\oplus$ — радиус Земли, $g_\oplus = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}$ — ускорение тяготения на ее поверхности. Тогда работа, которую мы должны совершить для перемещения тела на малое расстояние $dr > 0$, равна

$$dA = \frac{GM_\oplus m_н}{r^2}dr.$$

Значит, при перемещении от поверхности Земли ($r = R_\oplus$) до границы «Вселенной Гесиода» ($r = R_Г$) мы должны были бы совершить работу

$$A = \int\limits_{r=R_\oplus}^{R_Г} \frac{GM_\oplus m_н}{r^2}dr = GM_\oplus m_н\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_Г}\right).$$

Если теперь этому телу предоставить возможность свободно падать с расстояния $r = R_Г$ до поверхности Земли, то вся затраченная нами энергия перейдет в кинетическую энергию тела. Запишем это так:

$$\frac{m_н v_\oplus^2}{2} - 0 = GM_\oplus m_н\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_Г}\right).$$

($v_\oplus$ — скорость тела у поверхности Земли, а нуль слева означает, что тело не имеет начальной скорости.)

Из аналогичных рассуждений получим, что на любом расстоянии $r < R_Г$ закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{v^2(r)}{2} = GM_\oplus\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_Г}\right) =$$

$$= g_\oplus R_\oplus^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_Г}\right)$$

(на массу $m_н$ мы сократили). Все это можно (хотя и не обязательно) записать в виде

$$\frac{v^2(r)}{2} + \varphi(r) = 0 + \varphi(R_Г),$$

где введена функция $\varphi(r) = -g_\oplus R_\oplus^2 \frac{1}{r}$, называемая потенциалом, и учтено, что начальная скорость $v_Г = 0$. В такой

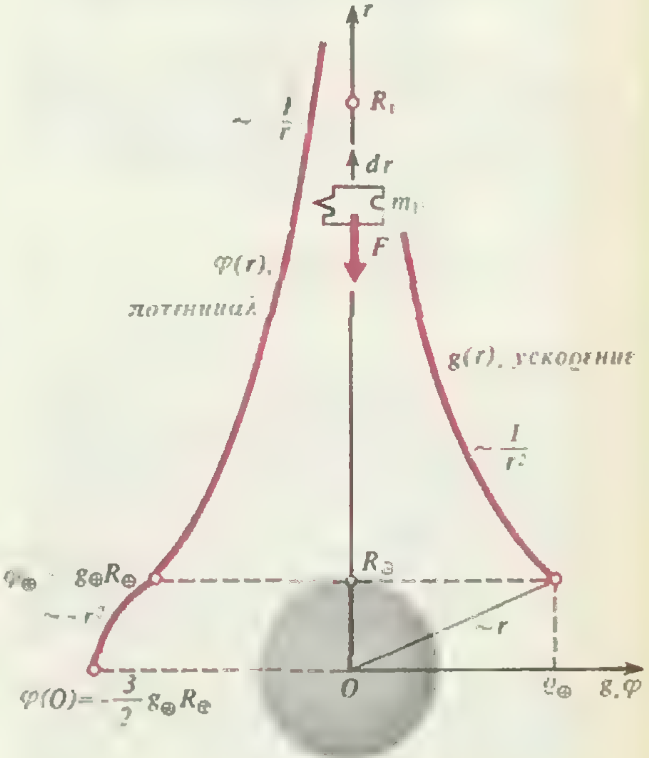


Рис. 1.

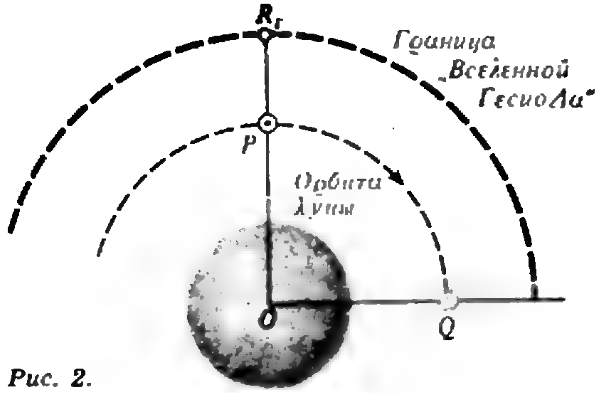


Рис. 2.

записи уже совершенно ясен закон сохранения суммы кинетической и потенциальной энергий (в расчете на единицу массы).

Можно также изобразить на рисунке (рис. 1) зависимости ускорения тяготения $g(r)=g_{\oplus}R^2_{\oplus}/r^2$ и потенциала $\varphi(r)$ при $r>R_{\oplus}$; на том же рисунке показаны и их изменения внутри Земли при $r<R_{\oplus}$ — все это довольно привычные картинки, многократно обсуждавшиеся в «Кванте» (см., например, № 3—90, с. 49).

Итак, в произвольной точке вне Земли наковальня, свободно падающая с «высоты» радиуса Гесиода $R_Г$, будет иметь скорость

$$v(r)=v_{II}\sqrt{\frac{1}{r/R_{\oplus}}-\frac{1}{R_Г/R_{\oplus}}}=-\frac{dr}{dt},$$

где $v_{II}=\sqrt{2g_{\oplus}R_{\oplus}}=\sqrt{-2\varphi_{\oplus}}$ — вторая космическая скорость*). Чтобы отсюда определить искомое расстояние $R_Г$, нужно суметь взять интеграл

$$\frac{1}{v_{II}}\int\limits_{r=R_Г}^{R_{\oplus}}\frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r/R_{\oplus}}-\frac{1}{R_Г/R_{\oplus}}}}=-t_1. \qquad (1)$$

Но можно, и не беря этот интеграл (если это скучно), сделать кое-какие грубые оценки. Ну, например, известно, что Луна обращается вокруг Земли приблизительно за 28 суток, одновременно падая на Землю. (Вспомним: Ньютон увидел тут аналогию с падением яблока.) Следовательно, из точки P в точку Q (рис. 2) она придет за $28/4=7$ суток. Может быть, неспроста эта величина близка к оценке Гесиода в «девять дней»? Если в этом подозрении что-то есть, то размер «Вселенной Гесиода» должен быть порядка радиуса орбиты Луны (≈ 380 тыс. км $\approx 60\ R_{\oplus}$).

Далее, наш интеграл (1) можно записать в безразмерном виде, выразив линейные размеры в единицах искомого радиуса $R_Г$:

$$\left(\frac{R_Г}{R_{\oplus}}\right)^{3/2}\int\limits_{r=R_{\oplus}}^{R_Г}\frac{\sqrt{r/R_Г}}{\sqrt{1-r/R_Г}}\,d\left(\frac{r}{R_Г}\right)=\frac{v_{II}t_1}{R_{\oplus}}. \qquad (2)$$

Тогда, обозначив интеграл через некоторую (безразмерную!) величину C, получим

$$\left(\frac{R_Г}{R_{\oplus}}\right)^{3/2}=\frac{v_{II}t_1}{CR_{\oplus}}. \qquad (3)$$

А поскольку $v_{II}/CR_{\oplus}$ — тоже постоянная, то это соотношение, записанное в виде $R^3_Г\sim t^2_1$, уж очень напоминает третий закон Кеплера о пропорциональности кубов больших полуосей эллипсов планет квадратам их времен обращения вокруг Солнца. Чувствуется, что и мы в любом случае вращаемся в кругу одних и тех же идей. Подставляя в (3) $v_{II}=11{,}2\cdot10^3$ м/с, $t_1=9\cdot24\cdot3600$ с $=7{,}8\cdot10^5$ с, $R_{\oplus}=6{,}4\cdot10^6$ м, получим

$$\frac{R_Г}{R_{\oplus}}=\frac{123}{C^{2/3}}.$$

Если предположить, что наш безразмерный интеграл в (2), который мы обозначили через C, порядка единицы (это джентльменское соглашение всегда принимается в теории размерностей и подобия), то можно сказать, что искомый радиус на два порядка больше радиуса Земли, $R_Г=10^2R_{\oplus}$, а это — тот же порядок, что в истории с Луной.

Те же, кто хочет еще уточнить размеры «Вселенной Гесиода», должны будут преодолеть процесс вычисления интеграла в равенстве (2). Сделаем замену переменной $r/R_Г=\sin^2\theta$, тогда

$$\sqrt{1-\frac{r}{R_Г}}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta,$$

$$\frac{dr}{R_Г}=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta,$$

---

*) Напомним, что v_{II} — это минимальная скорость, которую надо сообщить телу на поверхности Земли для того, чтобы оно могло выйти за пределы поля земного тяготения ($\varphi_{\oplus}=-g_{\oplus}R_{\oplus}$ — потенциал этого поля у земной поверхности).

так что наш интеграл примет вид

$$C=\int\limits_{r=R_\oplus}^{R_\Gamma}\frac{\sqrt{r/R_\Gamma}}{\sqrt{1-r/R_\Gamma}}\,d(r/R_\Gamma)=$$

$$=\int\limits_{\theta=\arcsin\sqrt{R_\oplus/R_\Gamma}}^{\arcsin 1}2\sin^2\theta\,d\theta=$$

$$=\int\limits_{\arcsin\sqrt{R_\oplus/R_\Gamma}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta=$$

$$=\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)\Bigg|_{\arcsin\sqrt{R_\oplus/R_\Gamma}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

Но поскольку проведенная оценка показала, что искомый радиус на два порядка больше радиуса Земли, т. е. $R_\oplus/R_\Gamma \ll 1$, можно для простоты записи нижний предел интегрирования положить равным нулю: $\arcsin(R_\oplus/R_\Gamma)\approx 0$. Тогда $C\approx\pi/2$; но мы и ожидали, что эта величина имеет порядок единицы. Итак,

$$\frac{R_\Gamma}{R_\oplus}=\frac{123}{(\pi/2)^{2/3}}\approx 90\Rightarrow R_\Gamma\approx 6\cdot 10^8\ \text{м}.$$

Таким образом, «Вселенная Гесиода» полностью включает в себя орбиту Луны и простирается даже в полтора раза дальше.

Конечно, все это далеко от современной оценки размера Вселенной ($\sim 10^{26}$ м), но не так уж и плохо, если учесть, что «автор» жил 27 веков назад и притом был деревенским поэтом, а гораздо более поздние мудрецы думали, что Земля — плоский блин и стоит на трех китах.

Однако, пусть наковальня летит дальше —

От поверхности Земли до Тартара

Тут все сложнее. Как, по представлению Гесиода, падала наковальня дальше? Знал ли он о существовании воздуха как тормозящей среды? Попробуем ответить на этот вопрос с помощью самого Гесиода.

Рассмотрим два случая:

1) Воздуха нет в той шахте, которая служит предполагаемым входом в Тартар, и этот Тартар, согласно нашему предположению, расположен от поверхности Земли не далее, чем ее центр.

Итак, пусть далее тело пролетает в момент времени $t=0$ мимо поверхности Земли в шахту, идущую до самого ее центра. Напишем уравнение движения тела под действием только силы тяготения. Внутри однородной планеты эта сила пропорциональна расстоянию от центра, $F=-m_\text{н}g_\oplus r/R_\oplus$, так что

$$m_\text{н}r''=-m_\text{н}g_\oplus\frac{r}{R_\oplus},$$

или

$$r''+\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r=0\quad(0<r<R_\oplus).\qquad(4)$$

Это — уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega=\sqrt{g_\oplus/R_\oplus}$, решение которого

$$r(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

конкретизируем, учтя начальные условия: при $t=0$ имеем

$$r=R_\oplus,\ v(R_\oplus)=\frac{dr}{dt}\bigg|_{t=0}=-v_{\text{II}}.$$

Получим

$$r(t)=R_\oplus\cos\omega t-\frac{v_{\text{II}}}{\omega}\sin\omega t.$$

В центре Земли, где $r=0$, тело окажется через время $t=t_2$ (второй отрезок времени падения наковальни). Отсюда получим

$$0=R_\oplus\cos\omega t_2-\frac{v_{\text{II}}}{\omega}\sin\omega t_2,$$

$$\operatorname{tg}\omega t_2=\frac{R_\oplus}{v_{\text{II}}}\omega=\frac{1}{\sqrt2},$$

$$t_2=\frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt2}=$$

$$=\sqrt{\frac{R_\oplus}{g_\oplus}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt2}.$$

Вспомнив, что

$$g_\oplus=G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}=G\frac{\frac{4}{3}\pi R_\oplus^3\langle\rho\rangle}{R_\oplus^2}=$$

$$=\frac{4}{3}\pi GR_\oplus\langle\rho\rangle,$$

где $\langle\rho\rangle$ — средняя плотность вещества Земли, для t_2 получим

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{\langle\rho\rangle}}\sqrt{\frac{3}{4\pi G}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt2}.$$

Обратим внимание, что время падения от поверхности до центра зависит только от средней плотности вещества планеты $\langle\rho\rangle$. И тут Гесиод пришел бы в замешательство. Либо, считая $t_2=9$ дней $=7{,}8\cdot10^5$ с, надо согласиться с тем, что плотность планеты равна

$$\langle\rho\rangle=\frac{3}{4\pi G}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}}{t_2}\right)^2\approx2\cdot10^{-3}\ \text{кг/м}^3,$$

т. е. на три порядка меньше плотности воздуха (что, очевидно, нелепо), либо надо признать, что наковальня долетит до Тартара (центра Земли) гораздо быстрее:

$$t_2=\frac{1}{\sqrt{5{,}5\cdot10^3}}\sqrt{\frac{3}{4\cdot3{,}14\cdot6{,}67\cdot10^{-11}}}\times$$
$$\times0{,}616\ \text{с}\approx500\ \text{с}.$$

Следовательно, после этой оценки Гесиод должен был бы отвергнуть предположение об отсутствии тормозящей среды. Поэтому рассмотрим второе предположение:

2) Воздух все-таки есть.

Тогда в уравнении движения (4) вместо нуля справа нужно записать силу сопротивления воздуха (деленную на массу наковальни) — эта сила пропорциональна плотности воздуха, квадрату скорости тела и квадрату его размера (или площади поперечного сечения $S_\perp$), и еще силу Архимеда, которая растет, надо думать, из-за неизбежного роста плотности воздуха ρ с глубиной. Получим

$$\frac{dv}{dt}+\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r=$$
$$=\frac{\rho(r)v^2(r)S_\perp}{m_\text{н}}C_\text{с}+\frac{\rho(r)}{\rho^0}\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r. \qquad (5)$$

Здесь ρ^0 — плотность вещества наковальни ($m_\text{н}=\rho^0V_\text{н}$, $V_\text{н}$ — ее объем) и введен еще безразмерный коэффициент сопротивления $C_\text{с}$, который, хоть и зависит от многих параметров, однако имеет значение порядка единицы. Но даже если его считать постоянным, остается важный вопрос: как плотность воздуха ρ зависит от глубины шахты $R_\oplus-r$ (или от расстояния от центра r)?

Известно, что зависимость плотности воздуха от высоты $h=r-R_\oplus$ над Землей можно описать барометрической формулой Больцмана

$$\rho(h)=\rho_\oplus e^{-mgh/(kT)},$$

где T — температура атмосферы (предполагается постоянной), m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, $\rho_\oplus\sim1$ кг/м^3 — значение ρ у поверхности Земли («на уровне моря»; см. рис. 3). Но что стоит под знаком экспоненты? — это ведь отношение значений двух видов энергии: потенциальной (с нулевой отметкой на уровне моря) mgh и энергии теплового движения молекул kT. Предположим, что мы сделаем шахту со стенками с той же температурой T ($T\sim300$ К) и что на некоторой глубине ускорение тяготения можно считать приблизительно равным $g_\oplus$ (вообще-то оно убывает с глубиной (см. рис. 1), но мы пока что не собираемся лезть слишком глубоко). В этих предположениях формула (5) верна. Получим значение глубины $h_*<0$, на которой воздух будет сжат до такой плотности ρ_*, что его молекулы соприкасаются. Можно ли его будет назвать жидким — это вопрос термодинамики фазового состояния; мы для осторожности (и не напрасно) будем брать слово «жидкий» воздух в кавычки. Примем, что эта плотность ρ_* имеет порядок плотности воды ($\sim10^3$ кг/м^3). Тогда из (5) получим

$$\rho_*=\rho(h_*)=\rho_\ominus e^{-mg_\oplus h_*/(kT)}\sim10^3\ \text{кг/м}^3,$$

$$h_*=\frac{kT}{mg_\oplus}\ln\frac{\rho_\oplus}{\rho_*}=\frac{RT}{\mathrm{M}g_\oplus}\ln\frac{\rho_\oplus}{\rho_*}=$$
$$=\frac{8{,}31\cdot300}{29\cdot10^{-3}\cdot10}\ln10^{-3}\ \text{м}\approx-60\cdot10^3\ \text{м}.$$

(Очевидно, что на этой глубине, составляющей порядка процента от радиуса Земли, ускорение тяготения действительно изменится мало.)

Что же произойдет с наковальней? Разогнавшись в свободном падении от границы «Вселенной Гесиода» ($r=R_\text{Г}$) до почти второй космической скорости, она врежется в атмосферу Земли и начнет тормозиться, нагреваясь из-за трения о воздух. Если при этом

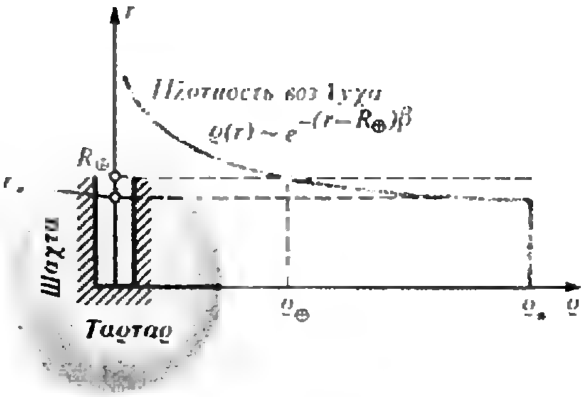


Рис. 3.

она не расплавится, не развалится, не сгорит (ведь эта наковальня, надо думать, принадлежит богу-кузнецу Гефесту), она пройдет далее в шахту, наполненную все более уплотняющимся воздухом, а затем, начиная с глубины h_* (начиная с $r_*=R_\oplus-h_*$), будет двигаться уже почти в «жидком» воздухе. Ясно, что атмосферу с характерной толщиной порядка 10 км наковальня пройдет за время порядка секунды. Еще несколько десятков (или сотен?) секунд она будет двигаться в уплотняющемся воздухе шахты, пока, наконец, почти вся ее кинетическая энергия не будет поглощена работой сил сопротивления. Это демонстративное пренебрежение к величине времени «привыкания» наковальни к новым условиям движения (или, как говорят в научном простонародье, ко времени релаксации) просто свидетельствует о нашей надежде на малость этого отрезка времени по сравнению с t_1 и t_2 и о нежелании тратить свои силы и государственную бумагу на доказательство этого (что, впрочем, не очень трудно).

Дальнейшее движение в «жидком» воздухе с плотностью ρ_* будет уже проходить в условиях равновесия силы тяжести, силы Архимеда и силы сопротивления воздуха, так что из уравнения (5) получим

$$\frac{\rho_* v^2(r) S_\perp C_c}{m_н}=\frac{g_\oplus}{R_\oplus}r\left(1-\frac{\rho_*}{\rho^0}\right),$$

откуда

$$v(r)=\sqrt{r}\,\frac{v_{II}}{R_\oplus\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho^0}{\rho_*}-1}\sqrt{\frac{m_н}{\rho^0 S_\perp C_c}}=-\frac{dr}{dt},$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^{t_2}\frac{v_{II}}{R_\oplus\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\rho^0}{\rho_*}-1}\sqrt{\frac{m_н}{\rho^0 S_\perp C_c}}\,dt=-\int\limits_{R_\oplus}^{0}\frac{dr}{\sqrt{r}}.$$

А отсюда получаем для времени «утопания» наковальни до центра Земли

$$t_2=\frac{R_\oplus^{3/2}\,2\sqrt{2}}{v_{II}\sqrt{\rho^0/\rho_*-1}\,\sqrt{V_н/(S_\perp C_c)}}.$$

Можно оценить порядок этой величины, приняв $\rho^0/\rho_*-1\sim 10$, $V_н/S_\perp\sim 1$ м, $C_c\sim 1$; получим $t_2\sim 10^6$ с, что очень напоминает «9 дней» Гесиода.

Конечно, те, у кого есть компьютер, могут при желании решать уравнение (5). Нам же важно то, что слова древнего поэта Гесиода позволили обсудить несколько физических идей и заодно показать, что поэзия и физика не так уж далеки друг от друга.

Вниманию наших читателей

Магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига» высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Готовятся к печати

Арнольд В. И. *Теория катастроф.* Изд. 3-е, перераб. и доп.— 50 к.

Бейсик в примерах и задачах. (Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения).— 1 р. 30 к.

Бронштейн М. П. *Солнечное вещество.* (Библиотечка «Квант»).— 40 к.

Брудно А. Л., Каплан Л. И. *Московские городские олимпиады по программированию.*— 50 к.

Вальковский В. А., Малышкин В. Э. *Элементы современного программирования и супер-ЭВМ.* (Наука и технический прогресс).— 1 р.

Никольский С. М., Потапов М. К. *Алгебра.* Пособие для самообразования.— 1 р.

Носов Ю. Р. *Дебют оптоэлектроники.* (Библиотечка «Квант»).— 60 к.

(Окончание см. на с. 32)

ЗАЩИТА ОТ ШУМА И ДЕДУКТИВНЫЙ МЕТОД

(из рассказов доктора Ватсона)

Кандидат технических наук
Р. ВИНОКУР

«С тех пор, как по моей улице стал ходить трамвай, мой дом перестал быть моей крепостью. В кабинете теперь шумно, это мешает работать и нервирует пациентов. Толстые кирпичные стены почти не пропускают шума, однако он проникает через окно, как бы плотно я его ни затворял... И как кстати это неожиданное появление стекольщика. Он долго осматривал окно и предложил вставить в раму еще одно стекло, чтобы вместо однослойного остекления получилось двойное: два стекла толщиной по 3 мм*) с промежутком 15 мм между ними...»

— Дорогой Ватсон! — четкий голос Холмса прервал мои размышления.— Надо увеличить и толщину стекол, и ширину промежутка. Это, конечно, обойдется дороже, но затраты безусловно окупятся достигнутым комфортом.

— Холмс,— удивился я,— как вы прочитали мои мысли?

— Ничего проще,— улыбнулся знаменитый сыщик.— В газете на столе вашей рукой подчеркнут адрес стекольной мастерской и сделана надпись «двойное остекление — от шума». Затем, я обратил внимание, как вы, поморщившись от грохота очередного трамвая, задумчиво начертили пальцем на запотевшем стекле «3+ +15+3». Вот, пожалуй, и все.

— Действительно, просто,— согласился я,— но тогда не поможете ли мне разобраться в этом деле?

— Истинный сыщик, на мой взгляд, должен иметь представление об акустических эффектах. Добавьте сюда мое увлечение музыкой, и вам станет ясно, почему я в курсе проблемы.

Постараюсь вам помочь. Часто говорят, что звуковая волна проходит сквозь стену. Но не следует понимать это буквально. Падающая на стену от какого-нибудь источника звука волна оказывает на нее переменное во времени давление, амплитуда которого Δp значительно меньше атмосферного давления p. Однако это воздействие вполне достаточно, чтобы вызвать колебания стены в направлении, перпендикулярном ее поверхности. А эти колебания, в свою очередь, вызывают колебания воздуха. Иными словами, колеблющаяся стена излучает звук. Таким образом, прошедшая волна — волна, излученная стеной в защищаемое (изолируемое) от шума помещение. Энергия E прошедшей волны пропорциональна произведению Sv^2, где S — площадь стены, v — амплитуда скорости колебаний той поверхности стены, которая обращена в изолируемое помещение. Чем меньше величина E по сравнению с энергией E_0 падающей волны (рис. 1), тем лучше шумозащитные свойства стены (иначе говоря — звукоизоляция). Чтобы понять, от чего в основном зависят эти свойства, обратимся к аналогии. Вы, наверное, знаете такой цирковой номер: на грудь лежащего атлета ставится тяжеленная наковальня, и по ней изо всех сил бьют молотом. Публика — в экстазе: ей представляется, что сила ударов, способных сплющить рыцарский шлем, к тому же складывается с весом наковальни. Однако эффект здесь совершенно обратный. В грудь атлета бьет не молот, а наковальня, а то ускорение, которое сообщает наковальне при ударе молот, очень мало из-за ее огромной массы (вспомните второй закон Ньютона). Следовательно, очень мала и скорость, приобретаемая наковальней. Так что она, наковальня, как бы «гасит» удары молота. В нашей задаче роль наковальни играет стена (я имею в виду стену как одиночную плиту или массивную пластину); удары молота — это падающая на стену звуковая волна, а толчки наковальни, которые испытывает на себе атлет,— прошедшая звуковая волна. И, по аналогии, чем массивнее стена, тем лучше звукоизоляция.

---

*) Для удобства нашего читателя здесь и в дальнейшем традиционные английские дюймы, футы и т. п. заменены соответствующими единицами СИ.

Конечно, звукоизоляция зависит и от упругих свойств стены, и от ее способности поглощать энергию механических колебаний, преобразуя ее в тепловую, но обычно в меньшей степени, чем от массы стены. Точнее, от ее так называемой поверхностной плотности

$$\sigma = \frac{m}{S} = \rho h,$$

где m — масса стены, h — ее толщина, ρ — плотность материала, из которого она сделана. Действительно, если принять величину Δp одинаковой для всех точек поверхности стены со стороны падающей волны, то амплитуда ускорения стены —

$$a = \frac{\Delta p S}{m} = \frac{\Delta p}{\sigma},$$

а при колебаниях $v \sim a$. Так что чем больше поверхностная плотность стены σ, тем меньше амплитуда скорости колебаний стены v и тем меньше, следовательно, энергия прошедшей звуковой волны.

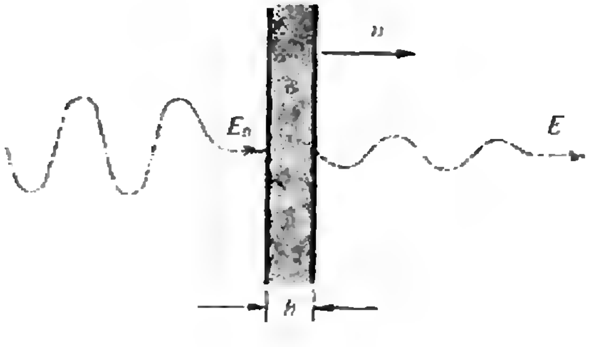


Рис. 1. Схема прохождения звука через однослойное ограждение.

— Это интересно,— заметил я.— Однако можно ли как-то сопоставить поверхностную плотность стены и воспринимаемое на слух снижение шума?

— Существуют ориентировочные соотношения,— ответил Холмс.— Например, в моем доме стены толщиной 0,75 м сделаны из кирпича, а его плотность $\rho \approx 1600$ кг/м^3, так что $\sigma \approx 1200$ кг/м^2. При этом звуки пистолетных выстрелов в моем домашнем тире почти не беспокоят соседей. При $\sigma \approx 500$ кг/м^2 вы не услышите даже громкого разговора за стеной. Если $\sigma \approx 200$ кг/м^2, то он уже будет вам слышен, но спокойная речь не слышна. При $\sigma \approx 50$ кг/м^2 вы услышите и ее, причем почти разборчиво. Естественно, эти оценки надежны, если в стене отсутствуют сквозные отверстия или, хуже того, щели. Совсем плоха как звукоизолятор тонкая фанерная перегородка, и не потому, как считают некоторые, что фанера хорошо проводит звук, а только по причине очень малой поверхностной плотности такой перегородки — около 5 кг/м^2.

— Плохо дело,— сообразил я.— Плотность стекла 2500 кг/м^3, значит, поверхностная плотность 3-миллиметрового стекла всего 7,5 кг/м^2, почти как у фанерной перегородки. Неужели легкие пластины совсем не годятся для защиты от шума?

— К счастью, годятся,— успокоил меня Холмс.— Но не в одиночку. Хорошую звукоизоляцию дают ограждения, состоящие из двух пластин, разделенных воздушным промежутком достаточной толщины. Чем легче пластины, тем больше должен быть промежуток между ними. Понять физическую природу этого эффекта нам поможет все тот же трамвай. Его кузов (с водителем, кондуктором и пассажирами) соединен с шасси не жестко, а через специальные упругие элементы — амортизаторы. Это сделано для того, чтобы вибрации шасси, неизбежные при движении трамвая,

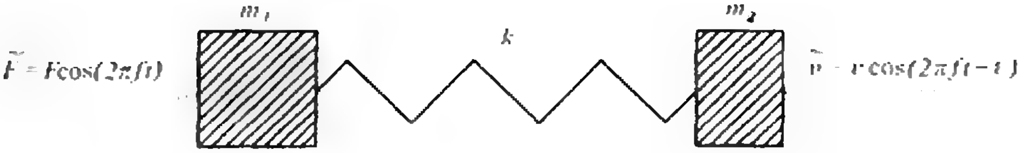

m_1
k
m_2
$\tilde{F} = F\cos(2\pi ft)$
$\tilde{v} = v\cos(2\pi f(t-\tau))$

Рис. 2. Механическая система, совершающая вынужденные колебания с частотой f; τ — сдвиг фаз между силой $\tilde{F}$, действующей на первое тело, и скоростью $\tilde{v}$ второго тела.

доходили до кузова в ослабленном виде. Можно рассмотреть простую механическую систему, имитирующую этот процесс: два абсолютно жестких тела с массами m_1 и m_2, соединенные невесомой пружиной с жесткостью k (рис. 2). Если на первое тело действует сила, изменяющаяся во времени по гармоническому закону с частотой f, то система совершает вынужденные колебания. Здесь первое тело играет роль трамвайного шасси, второе — кузова, а пружина — это амортизатор. Надо так подобрать величину k, чтобы амплитуда скорости колебаний второго тела v была как можно меньше, в этом — цель амортизации. Можно записать уравнения движения обоих тел и, решив их, получить зависимость величины v от параметров системы и частоты звука. Однако, если не возражаете, я приведу готовые результаты, причем в основном в качественном виде.

Собственная частота колебаний этой системы —

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}.$$

Если частота f вынуждающей силы равна f_0, наступает резонанс — амплитуда колебаний второго (да и первого) тела резко возрастает, причем она тем больше, чем меньше в системе потери механической энергии за счет преобразования ее в тепло (например, из-за трения). В области частот $f \lesssim \frac{1}{2} f_0$ система колеблется как одно жесткое тело с массой $m = m_1 + m_2$ и амплитуда скорости колебаний v практически не зависит от упругости пружины. В случае же $f > f_0$ величина v также зависит от массы системы, однако очень быстро уменьшается с ростом частоты. Поэтому амортизаторы подбирают так, чтобы резонансная частота системы была хотя бы вдвое меньше частоты вынуждающей силы...

— Об амортизаторах я кое-что знаю,— прервал я плавную речь Холмса.— Но как это связано со звукоизоляцией с помощью двойных ограждений?

Холмс посмотрел на меня слегка сочувственно.

— Слой воздуха между пластинами (рис. 3) играет роль амортизатора. И мы можем оценить его жесткость. Если толщина слоя d, то объем воздушного зазора $V = Sd$ (S — площадь каждой пластины). При смещении пластин в случае их колебательного движения толщина промежутка может изменяться на небольшую величину Δx. Тогда по закону Бойля — Мариотта имеем:

$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = pV,$$

где $\Delta V = S \cdot \Delta x$ — изменение объема воздуха, Δp — изменение его давления. Учитывая, что $\Delta V \ll V$, $\Delta p \ll p$, и пренебрегая произведением малых величин, получаем:

$$\Delta p = -p \cdot \Delta V / V = -p \cdot \Delta x / d.$$

Таким образом, максимальная сила, с которой действует колеблющийся воздух на пластины,—

$$F = -\Delta p \cdot S = -\frac{pS}{d}\Delta x,$$

и, следовательно, жесткость воздушного слоя между пластинами $k = pS/d$.*)

Итак, по аналогии с «трамвайной» задачей записываем резонансную частоту системы двойного остекления:

---

*) Холмс рассматривал колебания воздуха в зазоре как изотермический процесс, что не совсем верно. Строгое решение задачи о звуковом давлении Δp сложнее, однако полученное Холмсом значение k очень близко к точному.

$$f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pS}{d}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{p}{d}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)}.$$

При $f\lesssim\frac{1}{2}f_0$ звукоизоляционная система двойного ограждения примерно эквивалентна однослойному ограждению с поверхностной плотностью $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$. В области частот, равных или близких к величине f_0, звукоизоляция даже хуже, чем при таком однослойном ограждении, и только при $f\gtrsim 2f_0$ можно рассчитывать на существенное улучшение. Оценим значение резонансной частоты для двойного остекления из 6-миллиметровых стекол с промежутком 200 мм. Подставляя $\sigma_1=\sigma_2\approx 15$ кг/м^2 и атмосферное давление $p\approx 10^5$ Н/м^2, получаем $f_0\approx 41$ Гц...

За окном загрохотал очередной трамвай. Холмс некоторое время внимательно прислушивался, а затем продолжил:

— Досаждающий вам шум наиболее силен на частотах от 100 до 500 Гц. Наименьшая частота этого диапазона более чем вдвое превышает резонансную частоту остекления, так что все в порядке. А вот для варианта, предложенного стекольщиком, резонансная частота гораздо выше — примерно 210 Гц. Такое решение не только не помогло бы вам, но еще и усугубило бы ситуацию. Странно... Обычно мастера недостаток теоретических знаний в значительной мере компенсируют накопленным опытом и здравым смыслом. Послушайте, Ватсон, а как выглядит этот стекольщик?

Я принялся описывать внешность своего неожиданного посетителя. Холмс слушал, стоя у окна и глядя на дом напротив, и лишь однажды перебил меня, спросив, не было ли у незванного визитера большой родинки на левой щеке. Получив утвердительный ответ, Холмс, казалось, потерял интерес к разговору, скоро собрался и ушел, пообещав придти завтра. Я ждал его с нетерпением, понимая, что впереди — интересная история. Так оно и вышло.

— Инспектор Лестрейд предупредил меня накануне,— начал Холмс, удобно расположившись в кресле у окна,— что в Лондоне объявился бежавший с каторги весьма ловкий вор Джон Бертон. В свое время он внимательно изучил ваши записки о Шерлоке Холмсе и, будучи от природы наблюдательным и сообразительным малым, мог бы вполне законно считаться моим учеником, если бы не применял дедуктивный метод в недостойных целях. В доме прямо напротив вас живет небогатый, но весьма искусный ювелир, человек настолько осторожный, что, не доверяя замкам и сейфам, прячет изделия в различных потайных местах своих комнат. Недавно он получил заказ от самого правительства, об этом писали в газетах. Бертон решил проникнуть в дом ювелира и выкрасть присланные для отделки драгоценности. Но как выявить тайники? Он заметил, что ювелир иногда забывает зашторивать окна, и они хорошо просматриваются из вашего дома, особенно вечером, когда в комнатах зажигают свет. Под видом стекольщика он зашел к вам и, наблюдая из окна, увидел, куда прячутся на ночь драгоценности. Когда вы поинтересовались его координатами, он сообщил первый попавшийся на глаза в газете адрес стекольной мастерской. Не имея необходимой квалификации, он не смог дать вам дельного совета. Это-то и вызвало мои подозрения...

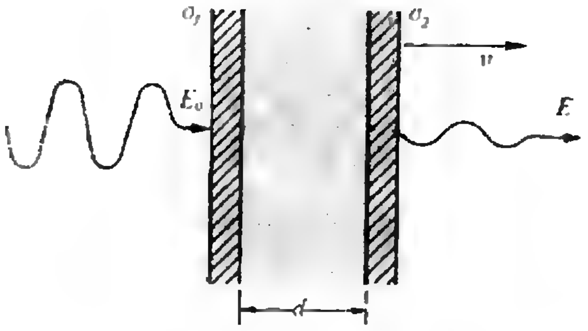


Рис. 3. Схема прохождения звука через двойное ограждение.

О том, чем закончилась эта история, читатель может догадаться сам.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1251 — М1255, Ф1258 — Ф1262

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 января 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1251» или «Ф1258». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1251. На плоскости дан угол (меньше развернутого). Проведите два отрезка PM и QM с заданной суммой длин s, отрезающие от угла четырехугольник наибольшей площади (P и Q — точки на сторонах угла, M — внутри угла).

В. Сендеров

М1252. Пусть a и n — натуральные числа, $a>1$. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ делится на n.

К. Кохась

М1253. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M, разбитый на несколько выпуклых многоугольников,— «карта» из нескольких «стран». Будем говорить, что такая карта *реализуема* в пространстве, если существует выпуклый многогранник, у которого одна из граней — M, а проекции остальных граней на плоскость грани M — страны этой карты (причем все они лежат внутри M).

а) Постройте пример карты из треугольников, не допускающей реализацию в пространстве.

Докажите, что карта допускает выпуклую реализацию в каждом из следующих случаев:

б) все страны — остроугольные треугольники;

в) каждая страна — вписанный многоугольник, содержащий внутри себя центр описанной окружности.

С. Оревков

М1254. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $m \times n$ клеток, $m \geqslant n > 1$. Докажите, что его можно разрезать на фигурки из четырех клеток в форме буквы Г в том и только в том случае, если mn делится на 8.

Б. Гинзбург, Д. Фомин

М1255. Пусть h — наименьшая высота тетраэдра, d — наименьшее из расстояний между двумя его скрещивающимися ребрами. Докажите неравенства $1/2 < d/h < 3/2$.

А. Скопенков

Ф1258. На горизонтальном столе находится катушка радиусом R. На катушку намотана тонкая невесомая нить, радиус намотки равен r. Нить пропущена через маленькое отверстие на высоте h от поверхности стола ($h>R$). В начальный момент катушка неподвижна, а нить вертикальна (рис. 1). За нить начинают тянуть с постоянной силой F, и катушка катится по столу без проскальзывания. Найти максимальную скорость катушки. Масса катушки M. Считайте, что половина всей массы сосредоточена на оси катушки, а вторая половина распределена по внешнему ободу радиусом R. Нить считать гладкой.

А. Ходулев

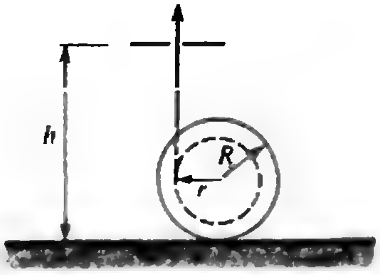


Рис. 1.

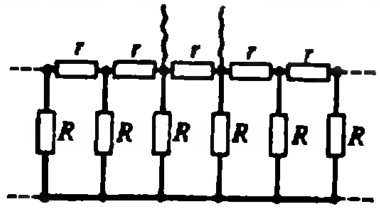


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Ф1259. Свисток издает звук частоты $f_0=2000$ Гц. Как изменится частота звука, если температура воздуха поднимается от 20 до 40 градусов по Цельсию? Какой тон будет издавать свисток в воздушном колоколе для подводных работ, в который подается дыхательная смесь из гелия и кислорода под давлением 1,5 атм? Парциальное давление кислорода принять равным 0,3 атм. Как изменится в этом колоколе тон речи человека? Нужно ли будет перестраивать гитару, чтобы она звучала в колоколе так, как снаружи?

А. Зильберман

Ф1260. Хорошо всем известная бесконечная цепочка резисторов (рис. 2) содержит резисторы r и R. Чему равно сопротивление, измеренное между двумя соседними узлами (разделенными ровно одним резистором r)? Чему равно сопротивление, измеренное между двумя узлами, которые находятся очень далеко друг от друга? Найти это сопротивление в общем случае, когда между интересующими нас точками включено ровно n резисторов r.

П. Родин

Ф1261. К батарейке напряжением $U_0=4$ В последовательно подключены два конденсатора, емкости которых $C_1=1$ мкФ и $C_2=3$ мкФ. Катушку индуктивностью $L=1$ Гн подключают параллельно конденсатору C_1. Найти амплитуду тока в катушке. К моменту подключения катушки напряжения на конденсаторах считать установившимися. Потерями в цепи пренебречь.

Р. Александров

Ф1262. Электрический вентилятор с асинхронным двигателем, включенный в сеть 220 В, развивает 1800 об/мин. Чтобы он не гудел так громко, его подключают через автотрансформатор к напряжению 127 В. С какой скоростью он будет вращаться? Считайте, что нагрузка на лопасти вентилятора определяется перегоняемым воздушным потоком. Трением в подшипниках пренебречь. Силу тока в обмотках статора считать зависящей только от приложенного напряжения.

О. Фатьянов

Решения задач

М1226—М1230, Ф1238—Ф1242

М1226. *Если квадрат повернуть вокруг его центра на 45°, то его стороны разделятся в некотором отношении (рис. 1). Возьмем теперь произвольный выпуклый четырехугольник. Разделим его стороны в указанном отношении и через точки деления проведем прямые, образую-*

Отношение, в котором каждый квадрат на рисунке 1 делит стороны другого квадрата, равно $1:\sqrt{2}:1$. Действительно, если обозначить меньший отрезок через x, то больший равен $x\sqrt{2}$.

Рассмотрим четырехугольник, образованный в соответствии с условиями задачи (см. рис. 2). Как следует из подобия треугольников, его стороны параллельны диагоналям исходного четырехугольника, т. е. этот четырехугольник — параллелограмм, причем отношение его стороны к параллельной ей диагонали исход-

щие новый четырехугольник (рис. 2). Докажите, что площади этих четырехугольников равны.

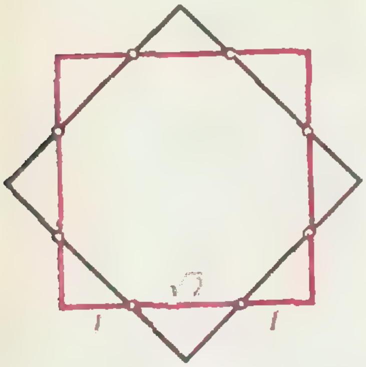


Рис. 1.

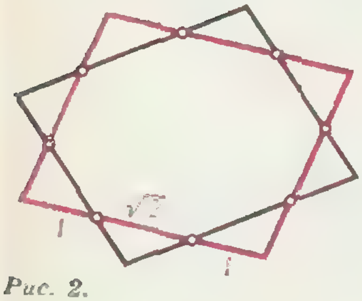


Рис. 2.

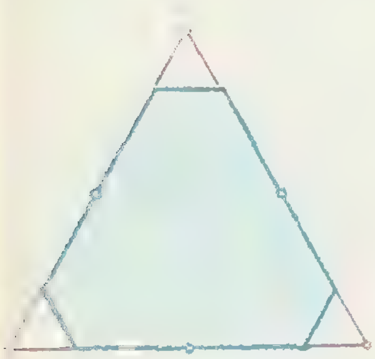


Рис. 3.

ного четырехугольника равно $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Остается заметить, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на половину синуса угла между ними, а площадь параллелограмма равна произведению соседних сторон на синус угла между ними: если a и b — диагонали исходного четырехугольника, то стороны параллелограмма будут равны $a/\sqrt{2}$ и $b/\sqrt{2}$, угол α между ними будет равен углу между диагоналями, поэтому площади первоначального четырехугольника и параллелограмма обе равны $(ab\sin\alpha)/2$.

Любопытно рассмотреть аналогичную задачу для треугольников. *При повороте* правильного треугольника вокруг центра на 60° его стороны разделят стороны исходного в отношении 1:1:1; при делении сторон некоторого треугольника в этом отношении после проведения прямых через точки деления получается равный (симметричный) ему треугольник. Но для многоугольников с числом сторон $n>4$ соответствующая процедура не сохраняет площадь.

Для шестиугольников это проверяется особенно просто. (Сторону нужно делить здесь в отношении $1:\sqrt{3}:1$.) Рассмотрим вырожденный шестиугольник, вершинами которого являются вершины правильного треугольника и середины его сторон (рис. 3). Если стороны полученного шестиугольника разделить в отношении $1:\sqrt{3}:1$, то *после проведения* соответствующих прямых получится шестиугольник, являющийся частью исходного треугольника, т. е. заведомо имеющий меньшую площадь. Разумеется, тот же эффект будет и для невырожденного выпуклого шестиугольника, близкого к этому вырожденному. Такие же (близкие к «вырожденным») примеры n-угольников, для которых площадь не сохраняется, можно построить и для других $n>4$.

А. Савин

М1227. *Назовем шахматный турнир, в котором n игроков сыграли друг с другом по одной партии, логичным, если для любых двух игроков тот из них, кто набрал не больше очков, не выиграл и в личной встрече. (За выигрыш дается 1 очко, за ничью — 1/2, за поражение — 0.)*

Пусть турнир нелогичный. Найдутся два игрока A и B такие, что A набрал не больше очков, чем B, но выиграл у B в личной встрече. Тогда найдется игрок C такой, что A сыграл с C хуже, чем B с C (иначе со всеми $n-2$ игроками, кроме A и B, A набрал бы не меньше очков, чем B). *Изменим турнирную* таблицу следующим образом: партию A с B заменим ничьей, результат игры A с C увеличим на 1/2, а B с C — уменьшим на 1/2. При этом итог — сумма, набранная каждым игроком,— не изменится, а общее число ничьих увеличится.

Докажите, что, каков бы ни был турнир, тот же итог (распределение очков между участниками) достигается и в некотором логичном турнире.

Теперь из всех турниров с данным итогом выберем такой, в котором число ничьих наибольшее. В нем уже нельзя найти пару A, B игроков, нарушающих «логичность», так что этот турнир удовлетворяет требуемым условиям.

В связи с этой задачей естественно возникает вопрос: какие строчки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полуцелых чисел могут быть итоговыми для турнира с n участниками? Попробуйте найти необходимые и достаточные условия.

А. Зелевинский, С. Оревков

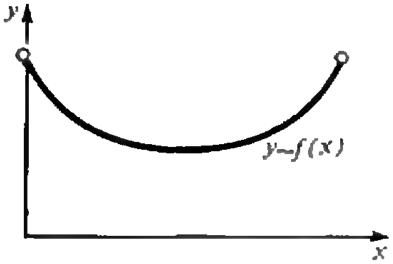
М1228. *Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, не превосходящих 1, выполнено неравенство*

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant 2.$$

Приведем два решения. Первое — чисто алгебраическое, второе — скорее аналитическое. Заметим сразу, что поскольку a, b, c входят в условие совершенно симметрично, можно считать, что $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$.

1. Так как $(1-a)(1-b)\geqslant 0$, то $a+b\leqslant 1+ab\leqslant 1+2ab$. Следовательно, $a+b+c\leqslant a+b+1\leqslant 2+2ab$. Поскольку $1+ab\leqslant 1+ac\leqslant 1+bc$,

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1}\leqslant\frac{a+b+c}{1+ab}\leqslant 2. \qquad (*)$$



$$f(x)=kx+\sum_i \frac{p_i}{q_i x+r},$$

$$f'(x)=k-\sum_i \frac{p_i q_i}{(q_i x+r)^2}$$

a	b	c	F
0	0	1	1
0	1	1	2
1	1	1	3/2

2. Рассмотрим левую часть неравенства (*) как функцию $F(a)$ на отрезке $0\leqslant a\leqslant b$. Ее наибольшее значение достигается в одном из концов отрезка, поскольку она «выпукла вниз» — ее производная по a возрастает на этом отрезке. Так будет для любой функции $y=f(x)$, являющейся суммой функций вида $y=kx$ и $y=\dfrac{p}{qx+r}$ с положительными k, p, q, r при $x>0$ (см. рисунок). Таким образом, F не превосходит одной из величин, получающихся при $a=0$ и $a=b$: $b+c$ или $2b/(bc+1)+c/(b^2+1)$. По условию, $b+c\leqslant 2$; второе выражение как функция от c на отрезке $b\leqslant c\leqslant 1$ не превосходит одной из величин:

$$\frac{2b}{b^2+1}+\frac{b}{b^2+1}\leqslant\frac{3b}{b^2+1}\leqslant\frac{3}{2} \text{ или } \frac{2b}{b+1}+\frac{1}{b^2+1}=$$

$$=2-\frac{2b^2-b+1}{(b+1)(b^2+1)}\leqslant 2.$$

Можно несколько изменить рассуждения во втором решении, рассматривая функцию F сразу на всем «кубе» $0\leqslant a\leqslant 1$, $0\leqslant b\leqslant 1$, $0\leqslant c\leqslant 1$. Из сказанного ясно, что максимум функции F достигается в вершинах куба, т. е. в точках, где a, b, c равны 0 или 1. Небольшой перебор показывает, что в этих точках $F\leqslant 2$ (см. табличку на полях), причем $F=2$ только, если одно из чисел a, b, c равно 0 и два другие равны 1 (это можно увидеть и из первого решения).

Д. Фомин, Н. Васильев

M1229. *Докажите, что при каждом натуральном $m>1$ число*
а) 4^m+5;
б) 8^m+9;
в) a^m+a+1, где a — целое и не делится на 8;
не является квадратом целого числа.

а) Предположим, что $4^m+5=q^2$, где q — натуральное число. Тогда $(q+2^m)(q-2^m)=5$. Поэтому $q+2^m=5$, $q-2^m=1$, откуда $q=3$, $2^m=2$, т. е. $m=1$. Таким образом, число 4^m+5 может быть квадратом лишь при $m=1$.

б) Число 8^m+9 — нечетное. Предположим, что $8^m+9=(2p+1)^2$, где p — натуральное число. Тогда $8^m=(2p+1)^2-3^2=(2p-2)(2p+4)$, откуда

$$2^{3m-2}=(p-1)(p+2).$$

Поскольку числа $p-1$ и $p+2$ разной четности, это возможно лишь при $p-1=1$, $p=2$, но тогда $p+2=4$ и $3m-2=2$, что невозможно при целом m.

в) Здесь при четном m работает та же идея, что и в пункте а): число $N=a^m+a+1$ находится слишком близко к a^m; а при нечетном m, как и в пункте б), достаточно разобраться с остатками при делении на степени двойки.

Пусть сначала $m=2r$. Тогда

$$a^{2r}<a^{2r}+a+1<a^{2r}+2a^r+1=(a^r+1)^2,$$

т. е. $a^{2r}+a+1$ — не квадрат.

Пусть теперь $m=2r+1$. Тогда, рассматривая различные возможные остатки 1, 2, 3 при делении a на 4, убеждаемся, что N дает при делении на 4 остаток 3 (см. табличку на полях), а при $n=8k+4$ число $N=(8k+4)^m+8k+4+1$ дает остаток 5 при делении на 8.

Остатки при делении на 4 (при нечетном $m>1$):

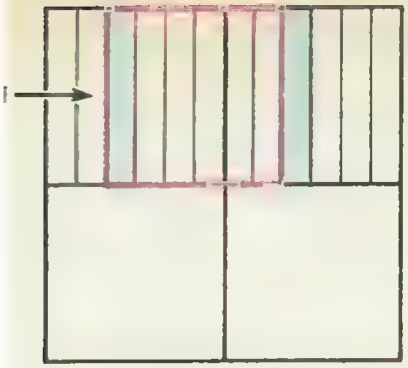
a	a^m	$N=a^m+a+1$
1	1	3
2	0	3
3	3	3

Но квадрат может давать при делении на 8 лишь остатки 0, 1 или 4. В самом деле, при целом k
$(4k\pm1)^2=16k^2\pm8k+1$, $(4k\pm2)^2=16k^2\pm8k+4$,
$(4k\pm3)^2=16k^2\pm24k+1$, $(4k)^2=16k^2$.
Заметим, что при a, кратном 8, утверждение задачи не всегда верно: например, при $a=72$ и $m=3$ число $a^m+a+1=611^2$. (Из общих теорем алгебраической геометрии следует, что при каждом $m>3$ уравнение $x^m+x+1=y^2$ имеет лишь конечное число решений в целых числах.)

Р. Хайруллаев

M1230. *В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа +1 и —1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.*

Разобьем квадрат 100×100 на четыре четверти — квадраты 25×25. Если во всех них сумма чисел имеет один и тот же знак (или равна 0), то, очевидно, в одном из них она не превосходит по модулю четверти общей суммы, т. е. 25. В противном случае найдутся две соседние четверти, в которых суммы имеют разные знаки. Рассмотрим цепочку квадратов 25×25, соединяющую эти четверти, в которых соседние квадраты отличаются лишь 50-ю числами, заполняющими два ряда возле противоположных сторон (см. рисунок). Пусть $s_0, s_1, \ldots, s_{25}$ — суммы чисел в этих квадратах; s_0 и s_{25} имеют разные знаки и $|s_{i+1}-s_i|\leqslant 50$. Найдет-



ся i такое, что s_i и s_{i+1} имеют разные знаки. Тогда одно из них по модулю не больше 25.

С. Генкин

Ф1238. *В середине длинной цилиндрической трубки с глицерином находится небольшой воздушный пузырек. Если поставить трубку вертикально, то пузырек будет двигаться с постоянной по величине скоростью $v_0=1$ см/с. Трубку расположили горизонтально и разогнали ее вдоль длинной стороны до скорости $v=20$ м/с. Где остановится пузырек? Куда он сместится, если скорость плавно увеличить до 30 м/с? Где он окажется после того, как трубку затормозят?*

Глицерин — очень вязкая жидкость, поэтому можно считать, что в любой момент скорость пузырька относительно трубки пропорциональна ускорению трубки (и пузырька!) относительно земли — сила вязкого трения пропорциональна относительной скорости. Учитывая связь между ускорением, скоростью и перемещением точки, можно сказать, что перемещение пузырька относительно трубки связано с его скоростью относительно трубки так же, как скорость трубки относительно земли с ускорением трубки относительно земли.

Движение пузырька при вертикальном положении трубки такое же, как если бы при горизонтальном положении трубку двигали с постоянным по величине ускорением $a=g=10$ м/с^2 (скорость пузырька направлена в ту же сторону, что и ускорение — пузырек легче воды). Учтем числа из условия: при ускорении трубки 10 м/с^2 за 1 секунду она приобретет скорость 10 м/с, а пузырек сдвинется при этом на 1 см.

Итак, скорости трубки 10 м/с соответствует смещение 1 см. Значит, при скорости 20 м/с пузырек остановится на расстоянии 2 см от начального положения. При увеличении скорости до 30 м/с он сдвинется еще на 1 см, а когда трубка остановится, пузырек вернется в начальное положение.

А. Андрианов

Ф1239. *В вертикальном теплоизолированном цилиндрическом сосуде под массивным поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа при температуре T_0. Начнем сжимать газ, опуская поршень. После того как совершили работу A, поршень отпустили, и он остановился в новом положении равновесия. Найти температуру T_x в этом состоянии.*

Работа A, совершаемая над системой, идет на изменение *внутренней энергии газа* ΔU *и потенциальной энергии* поршня ΔE_p:

$$A=\Delta U+\Delta E_p.$$

Для моля одноатомного идеального газа изменение внутренней энергии дается выражением

$$\Delta U=\frac{3}{2}R(T_x-T_0).$$

Изменение потенциальной энергии поршня можно найти так — оно равно работе, которую нужно было бы совершить, чтобы квазистатически перевести поршень из начального положения в конечное. При этом внешняя сила, совершающая работу, в каждый момент времени должна быть равна силе тяжести mg, действующей на поршень. Поскольку поршень в начальном и конечном состояниях находится в равновесии, эта сила тяжести равна по модулю силе давления газа в сосуде pS (давлением наружного воздуха мы пренебрегаем). Обозначив через Δh изменение высоты поршня, получим

$$\Delta E_p = mg\Delta h = pS\Delta h = p\Delta V,$$

где ΔV — изменение объема газа. Воспользовавшись уравнением Менделеева — Клапейрона для 1 моля газа, найдем

$$\Delta E_p = p\Delta V = R(T_x - T_0).$$

Таким образом,

$$A = \frac{3}{2}R(T_x - T_0) + R(T_x - T_0) = \frac{5}{2}R(T_x - T_0),$$

и следовательно,

$$T_x = T_0 + \frac{2}{5}\frac{A}{R}.$$

В. Уздин

Ф1240. *В схеме, приведенной на рисунке 1, емкости конденсаторов равны C, сопротивления резисторов — R и 2R. Какой заряд протечет через перемычку AB после подключения батарейки с напряжением U_0? А если между точками A и B включен резистор R? Все элементы считать идеальными.*

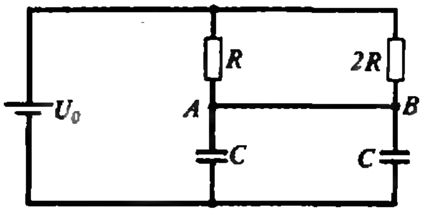


Рис. 1.

Вначале разберем случай с перемычкой (ее сопротивление равно нулю). Каждый из конденсаторов в конце концов будет заряжен до напряжения U_0, т. е. через резисторы пройдет заряд

$$q = 2CU_0.$$

Однако ток, текущий через R, в любой момент в два раза больше тока через $2R$. Таким образом, через перемычку пройдет заряд

$$Q = q_R - q_C = \frac{2}{3}q - \frac{1}{2}q = \frac{CU_0}{3}.$$

Теперь обсудим общий случай — сопротивление перемычки не равно нулю. Рассмотрим некоторый момент времени, когда батарейку уже подключили, но равновесие еще не установилось (рис. 2). Ток, текущий через резистор R (перемычка), равен

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R} = \frac{q_1 - q_2}{RC}.$$

За малый промежуток времени Δt произойдут следующие изменения зарядов:

$$\frac{U_0 - \varphi_A}{R_1}\Delta t = I\Delta t + \Delta q_1,$$

$$\frac{U_0 - \varphi_B}{R_2}\Delta t + I\Delta t = \Delta q_2.$$

Домножим первое равенство на R_1, второе — на R_2 и вычтем одно из другого. В результате получим

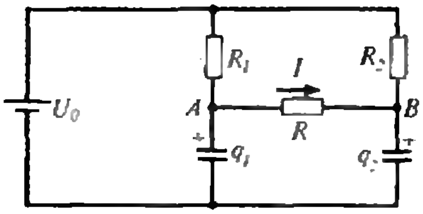


Рис. 2.

$$I\Delta t = \frac{R_2\Delta q_2 - R_1\Delta q_1}{R_1+R_2+R}.$$

Суммируя по всем промежуткам времени Δt и учитывая, что после установления равновесия заряды на конденсаторах будут одинаковыми и равными $q_1 = q_2 = q = CU_0$, найдем искомый заряд:

$$Q = \frac{(R_2 - R_1)CU_0}{R_1+R_2+R} = \frac{CU_0}{4}.$$

А. Зильберман

Ф1241. *На наклонной плоскости с углом α и коэффициентом трения μ лежит небольшая шайба массой M, на которой помещен заряд Q. Однородное магнитное поле с индукцией B перпендикулярно наклонной плоскости, как показано на рисунке 1. Шайбу отпускают без начальной скорости. Определите величину и направление ее установившейся скорости.*

Сразу заметим, что, если $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$, шайба вообще не поедет. Поэтому будем обсуждать случай $\mu < \operatorname{tg}\alpha$.

Рассмотрим силы, действующие на шайбу и лежащие в плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 2). Это — составляющая $\vec{F}_т$ силы тяжести, направленная по плоскости вниз и равная $F_т = Mg\sin\alpha$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная против скорости $\vec{v}$ шайбы и равная $F_{тр} = \mu Mg\cos\alpha$, и магнитная сила $\vec{F}_м$, перпендикулярная скорости $\vec{v}$ и равная $F_м = QvB$. При установившемся движении векторная сумма всех трех сил равна нулю:

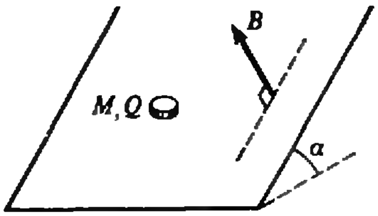


Рис. 1.

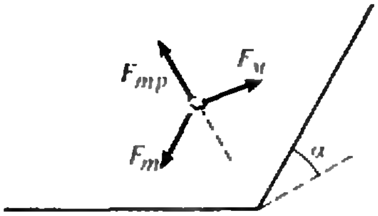


Рис. 2.

$$\vec{F}_т + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_м = 0,$$

или, учитывая перпендикулярность сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{F}_м$,

$$F_т^2 = F_{тр}^2 + F_м^2.$$

Отсюда находим величину установившейся скорости:

$$v = \frac{Mg}{QB}\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}$$

и угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{F}_т$:

$$\beta = \arcsin\frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

А. Алексеев

Ф1242. *Из нескольких одинаковых CL-звеньев, подключенных друг за*

Ясно, что выполнить условие задачи можно только в том случае, когда одно CL-звено с подключенным к нему конденсатором будет эквивалентно (на выбранной часто-

другом, собрана цепь для измерений на частоте 50 Гц (рис. 1). К выходу последнего звена был подключен конденсатор, после чего ток, потребляемый всей цепью от источника, и разность фаз между этим током и приложенным напряжением перестали зависеть от числа подключенных звеньев. Какую емкость C_x имел подключенный конденсатор? Можно ли дать однозначный ответ на этот вопрос?

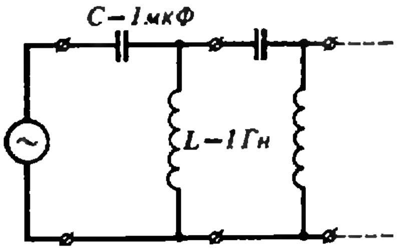


Рис. 1.

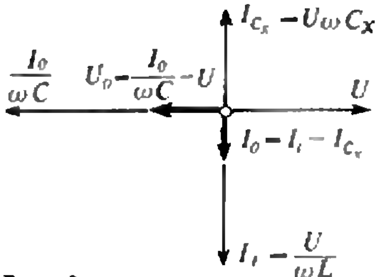


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

те) этому конденсатору. Построим векторную диаграмму для этого участка цепи (рис. 2).

Нарисуем вектор $\vec{U}$ — он изобразит напряжение на C_x. Теперь можно нарисовать векторы токов через L и C_x (они направлены противоположно) и суммарный ток I_0 — он течет от источника через конденсатор C. Затем изобразим вектор напряжения на C и, наконец, вектор суммарного напряжения на входе звена — сумму напряжений на C и C_x (разумеется, с учетом знаков).

Теперь немного арифметики:

$$I_L=U/(\omega L),\ I_{Cx}=U\omega C_x,\ I_0=U/(\omega L)-$$
$$-U\omega C_x,\ U_0=I_0/(\omega C)-U=I_0/(\omega C_x).$$

Связь между амплитудами напряжения и тока для всей цепи такая же, как для конденсатора C_x. Отсюда можно найти C_x, только удобнее в качестве неизвестной величины рассмотреть связанное с ней емкостное сопротивление $X=1/(\omega C_x)$. Относительно него получаем уравнение

$$X^2-X/(\omega C)+L/C=0,$$

откуда

$$X=1/(2\omega C)\pm\sqrt{1/(4\omega^2C^2)-L/C}=$$
$$=1/(\omega C)\,(0{,}5\pm\sqrt{0{,}25-\omega^2LC}),$$
$$X_1=1/(1{,}25\omega C),\ X_2=1/(9\omega C),$$
$$C_{x1}=1{,}125C,\ C_{x2}=9C.$$

Видно, что возможны два ответа — два значения емкости, удовлетворяющие условию задачи. Конечно, результат этот неочевиден и нуждается в проверке. Можно, например, построить векторные диаграммы для полученных конкретных значений и убедиться, что все в порядке. Я это сделал — и убедился, попробуйте и вы.

И еще: бесконечная цепь, составленная из резисторов, имеет вполне определенное сопротивление — там не может быть нескольких ответов.

А. Зильберман

„Квант" улыбается

Теорема о крокодиле

Теорема. Крокодил более длинный, чем широкий.

Лемма 1. Крокодил более длинный, чем зеленый.

Доказательство Леммы 1. Посмотрим на крокодила сверху. Он длинный и зеленый. Теперь посмотрим на крокодила снизу. Он длинный, но не везде зеленый (брюхо у него белое). Значит, крокодил более длинный, чем зеленый. Лемма доказана.

Лемма 2. Крокодил более зеленый, чем широкий.

Доказательство Леммы 2. Посмотрим на крокодила сверху. Он зеленый и в длину, и в ширину. А широкий он только в ширину.

Доказательство с других точек зрения аналогично. Лемма 2 доказана.

Доказательство Теоремы. Согласно лемме 1 крокодил более длинный, чем зеленый, а по лемме 2 — более зеленый, чем широкий. Поэтому крокодил более длинный, чем широкий. ЧТД.

Прислал В. Сергеев (теорема доказана на «матбое» командой с. ш. № 109 г. Омска)

Фирма BORLAND поможет Вам выйти на передний край современной информатики и быть полностью готовым к любым неожиданностям!

В сегодняшнем мире производство программ превратилось в самостоятельную отрасль промышленности с огромным оборотом. В индустрии программного обеспечения заняты сотни тысяч высококвалифицированных специалистов. Одной из самых известных корпораций в области создания программных средств является фирма Borland International Inc. (в дальнейшем — просто Борланд). Она была основана в США молодым и талантливым ученым-предпринимателем Филипом Каном в 1983 году. Единственным программным продуктом, представленным фирмой в то время, был компилятор языка программирования Паскаль, который получил коммерческое наименование Турбо Паскаль.

В основу первой фирменной версии одного из наиболее популярных языков программирования были положены простые принципы, отличающие любую высококачественную продукцию: эффективность, надежность, удобство в эксплуатации. Кроме того, ошеломляющей новостью для конкурентов Борланд явилась чрезвычайно низкая цена продукта, которая составляла не более однодневного заработка среднего программиста в США.

«Турбо» — это интеграция в едином продукте наиболее важных для программиста средств и инструментов, выполненных на одинаково высоком уровне, в едином стиле, к тому же — с прекрасно написанной, простой и ясной документацией, и это сделало Турбо Паскаль самым распространенным языком программирования для ПЭВМ, совместимых с IBM PC. За короткое время обладателями программного комплекса Турбо Паскаль *стали более миллио*на пользователей, причем во многих случаях этот профессиональный программный инструмент приобретался на личные средства, а многие фирмы начали поспешно воспроизводить в своих программных продуктах принципы организации рабочего места пользователя и программиста, которые были впервые предложены именно Борланд.

Постоянно вкладывая огромные средства в научные исследования и пионерные разработки, в 1984—1988 годах коллектив разработчиков фирмы Борланд резко расширил номенклатуру поставляемых средств и продуктов.

На сегодняшний день Борланд является всемирно известным поставщиком целого семейства программ, которые отличают концептуальная новизна и высокое техническое совершенство. Деятельность фирмы можно условно разделить на два направления:

— производство инструментальных средств («средств производства») для программистов: компиляторы, средства для отладки программ, другие инструменты для разработчиков;

— производство программных средств для конечных пользователей: электронные таблицы, системы управления базами данных, средства автоматизации оффиса, текстпроцессоры.

К наиболее популярным продуктам Борланд на сегодняшний день относятся:

Для программистов

— Turbo Assembler/Debugger;
— Turbo C/Professional (2.0 и C++);
— Turbo Pascal/Professional (5.5);
— Turbo Pascal Toolboxes;
— Paradox Engine и многое, многое другое;

Для пользователей — непрограммистов

— система ведения электронных таблиц и графического отображения данных Quattro 1.0/Quattro Pro;
— системы управления базами данных Paradox 3.5, Paradox 386 (v. 2.0), Paradox OS/2 (v. 2.0);
— средство для автоматизации рабочих мест управленческого персонала Sidekick Plus;
— текстовый процессор Sprint;
— средства контроля правописания Turbo Lightning (с программным интерфейсом) и Lightning Word Wizard;
— инструмент для научных, инженерных и финансовых расчетов Eureka: The Solver;
— система ведения плоских файлов Reflex 2.0.

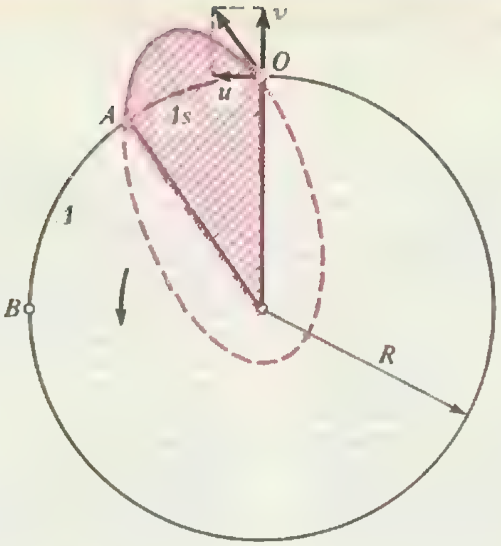
Долгое время Борланд не имел представительства в СССР. С июня 1990 года интересы фирмы в нашей стране представляет совместное предприятие Интерквадро. Сотрудники Интерквадро прилагают все силы для успешного распространения и обслуживания на отечественном рынке инновационной, технологически лидирующей продукции Борланд и готовы оказать содействие любой организации, желающей приобрести ее!

Не забывайте: программы Борланд содержат наивысшие достижения инженерной мысли в области программирования, распространяются со скоростью компьютерных вирусов и продаются по цене компьютерных игр!

За справками обращаться:
СП «ИНТЕРКВАДРО»
Москва, 125130,
2-й Новопод-
московный пер., д. 4
телефон 150-92-01,
телекс 41 3560,
телетайп 207321,
телефакс 9430059
Официальный партнер фирмы
BORLAND в СССР

Нам пишут

Еще раз о трудной задаче



В восьмом номере «Кванта» за 1989 год опубликована статья В. Бронштэна «Трудная задача», повествующая о задаче, которая имеет трехвековую историю: куда упадет снаряд, выпущенный из орудия вертикально вверх. В статье автор приводит свое приближенное решение для случая, когда начальная скорость снаряда равна первой космической скорости. Однако представляет интерес нахождение решения и для произвольной начальной скорости снаряда. Попытаемся это сделать.

К сожалению, строгое решение задачи требует знания законов, выходящих за рамки школьной программы (их можно найти, например, в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Механика»). Поэтому здесь мы приведем лишь основные идеи решения и конечный результат.

1) Относительно центра Земли снаряд после выстрела движется по эллипсу, все параметры которого определяются следующими условиями: начальной скоростью снаряда v, линейной скоростью вращения Земли u, ее радиусом R и ускорением свободного падения g. Траектория полета показана на рисунке.

Из уравнения эллипса можно найти точку A, в которой снаряд коснется земной поверхности, и соответствующую величину смещения $OA=\Delta s$.

2) Земля не остается неподвижной, и за время полета снаряда орудие сместится из точки O в точку B. Определив «заметенную» (заштрихованную на рисунке) площадь, при помощи второго закона Кеплера найдем это время, точку B и расстояние OB, «пройденное» орудием.

3) Искомое смещение снаряда относительно Земли составляет

$$\Delta=OB-OA.$$

В результате всех расчетов, после существенных упрощений (автор выражает признательность В. Бронштэну за предложенный вариант упрощения конечных формул) получаем

$$\Delta\approx\frac{\pi g u R^2}{(2Rg-(v^2+u^2))^{3/2}}.$$

В качестве примера найдем Δ для случая $v=8000$ м/с (т. е. для первой космической скорости):
$\Delta\approx1226$ км (в статье Бронштэна ≈1210 км).

Заметим, что полученное нами решение справедливо не только для вертикальных выстрелов, но и для выстрелов под любым углом α к горизонту. При этом нужно лишь заменить v на $v\sin\alpha$, а u — на $v\cos\alpha+u$.

Е. Мищенко

Вниманию наших читателей

(Начало см. на с. 17)

Сборник задач по физике. Под ред. С. М. Козела. Изд. 2-е, испр.— 90 к.

Филиппов А. Т. *Многоликий солитон.* Изд. 2-е, перераб. (Библиотечка «Квант»).— 70 к.

Имеются в наличии

Гальперин Г. А., Земляков А. Н. *Математические бильярды* (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики). (Библиотечка «Квант»).— 1990.— 65 к.

Каганов М. И., Лифшиц И. М. *Квазичастицы: Идеи и принципы квантовой физики твердого тела.*— 1989. — 25 к.

Математика для техникумов. Геометрия.— 1989.— 75 к.

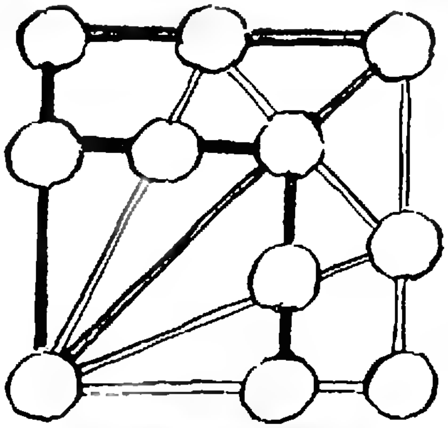
Формирование радиоэлектроники. Середина 20-х — середина 50-х гг. Радиоэлектроника в ее историческом развитии.— 1988.— 3 р. 30 к.

Заказы направляйте по адресу: 117393 Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2, магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига».

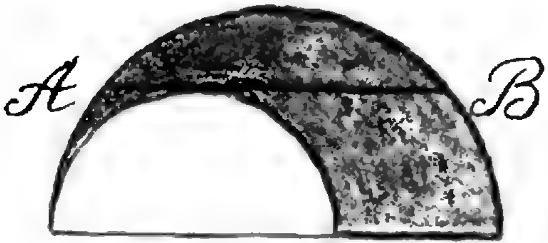
Задачи

1. Из двух одинаковых железных проволок кузнец сковал по одной цепи. Первая содержит 80 одинаковых звеньев, а вторая — 100. Каждое звено первой цепи на 5 грамм тяжелее каждого звена второй цепи. Какова была масса каждой проволоки?

2. Покажите, что если выражение $3a+4b+5c$ при некоторых целых значениях a, b и c делится на 11, то и выражение $9a+b+4c$ при этих значениях a, b и c также делится на 11.



3. Расставьте в кружках рисунка числа от 1 до 11 так, чтобы сумма трех чисел на каждом из десяти отрезков была одна и та же.



4. Отрезок AB параллелен обоим диаметрам двух полукругов, расположенных, как показано на рисунке, касается меньшего полукруга и равен 24 см. Чему равна площадь фигуры, окрашенной в красный цвет?

5. Два приятеля пришли на базар. Веселый молодец продавал 20 котов по цене от 12 до 15 рублей и 20 мешков по цене от 30 копеек до 1 рубля. При этом цены всех котов и всех мешков попарно различны. Покажите, что каждый из друзей может купить по коту в мешке так, чтобы они заплатили одинаковую сумму денег.

Эти задачи нам предложили А. Савин, П. Антонович, М. Варга и К. Кохась; задача 4 взята из американского журнала «Mathematics Teacher» (1990, № 1).

СВЕТОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Кандидат педагогических наук
С. ТИХОМИРОВА

Небольшие отрывки из художественных произведений, которые приводятся в этой статье, мы предлагаем вам рассматривать как... задачи по физике. (Конечно, авторы этих произведений не думали задавать задачи. Но писатель умеет видеть.) На наш взгляд, некоторые из этих задач довольно сложны. Придется подумать. А в одном из следующих номеров журнала мы приведем наши решения.

ень вечереет, ночь близка,
Длинней с горы ложится тень,
На небе гаснут облака...
Уж поздно. Вечереет день.
Ф. Тютчев

Почему вечером тени удлиняются?

огда тень от крыши соседнего дома, падавшая на стену, покрытую в верхней своей части двумя рядами листового железа, проходит верхний ряд,— самое время идти в школу.

Ф. Искандер.
«Время по часам»

Потом неделю лили дожди, еще неделю было пасмурно, и когда мальчик пошел в школу, ориентируясь на тень от своего дома, он опоздал.

Почему мальчик опоздал? В какое время года имел место указанный эпизод?

омната, в которую вступил Иван Иванович, была совершенно темной, потому что ставни были закрыты, и солнечный луч, проходя в дыру, сделанную в ставне... и ударяясь в противоположную стену, рисовал на ней пестрый ландшафт из... крыш, деревьев и развешанного во дворе платья, все только в обращенном виде...

Н. Гоголь.
«Повесть о том, как поссорился Иван Иванович с Иваном Никифоровичем»

Объясните явление. Какой физический прибор действует на основе этого явления?

ти рельсы, сведенные далью,
Разбежались и брызнули врозь.
А. Прасолов.
«Не бросай свое сердце как жребий»

Почему кажется, что вдали рельсы сходятся?

ень начинает заметно бледнеть. Лица людей принимают страшный оттенок, тени человеческих фигур лежат на земле бледные, неясные...

Однако, пока остается тонкий серповидный ободок солнца, все еще царит впечатление сильно побледневшего дня... Но вот эта искра исчезла...

Круглое, темное, враждебное тело, точно паук, впилось в яркое солнце...

В. Короленко.
«На затмении»

Почему тени во время затмения стали «бледные, неясные»? Какую форму примет тень от шара во время частичного солнечного затмения?

каждой минутой тьма неумолимо и величественно наплывала на лунные кратеры. Казалось, что огромный бледный шар приблизился к земле и стал еще больше. Луна приобрела медный оттенок, а часть ее поверхности, которая не была еще охвачена мраком, стала пепельно-серой. Кольцо тени все больше закрывало луну — оно теперь уже заволокло более половины ее кроваво-красного диска, а багровая мгла сгущалась все больше и больше.

Г. Хаггард.
«Копи царя Соломона»

Какое явление описывается в этом отрывке? Почему луна приобрела медный оттенок?

ы идем с Ладой — моей охотничьей собакой — вдоль небольшого озерка. Вода сегодня такая, что ле-

тящий кулик и его отражение в воде были совершенно одинаковы: казалось, летели нам навстречу два кулика... Лада наметилась. Какого она выберет себе: настоящего, летящего над водой, или его отражение в воде — оба ведь схожи между собой как две капли воды. Вот бедная Лада выбирает себе отражение и, наверно думая, что сейчас поймает живого кулика, с высокого берега делает скачок и бухается в воду. А верхний, настоящий кулик улетает.

М. Пришвин.
«Отражение»

Имеется ли различие между предметом и его отражением?

ак только жар усиливался, он (жрец-хранитель Высших Тайн.— *С. Т.*) спускался в свои подземные комнаты. Здесь всегда стояла ровная прохладная температура. Хорошая вентиляция освежала воздух. Дневной свет проникал, преломленный шлифованными зеркалами. Зеркала эти вращались по ходу солнца.

А. Беляев.
«Последний человек
из Атлантиды»

Нарисуйте систему из трех плоских зеркал, позволяющую повернуть луч света на 90°.

небе тают облака,
И, лучистая на зное,
В искрах катится река,
Словно зеркало стальное.

Ф. Тютчев

Почему поверхность воды искрится?

лодка чуть колышется,
одна средь темных вод,
И белый столб от месяца
по зыби к нам идет.

В. Брюсов.
«В лодке»

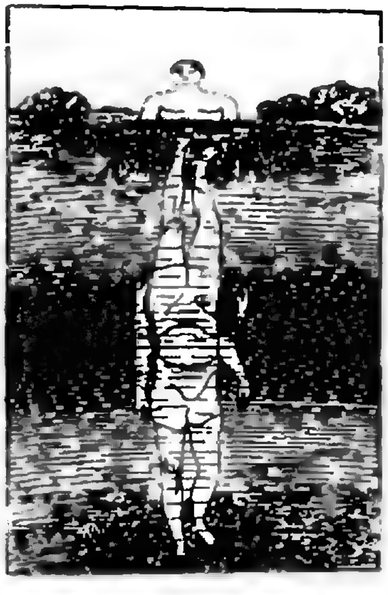
Как образуется светящийся столб на воде?

квамарин считается по своему имени (аквамарин — морская вода) камнем, передающим цвет морской воды. Это не совсем так. В прозрачной его глубине есть оттенки мягкого зеленоватого цвета и бледной синевы. Но все своеобразие аквамарина заключается в том, что он ярко освещен изнутри совершенно серебряным (именно, а не белым) огнем.

К. Паустовский.
«Золотая роза»

Как объяснить возникновение серебряного света в камне?

хтиандр был без очков и поэтому снизу видел поверхность моря так, как она представляется рыбам: из-под воды поверхность представлялась не плоской, а в виде конуса,— будто он находился на дне огромной воронки. Края этого конуса были окружены красной, желтой, зеленой, синей и фиолетовой каемками. За конусом расстилалась блестящая поверхность воды, в которой, как в зеркале, отражались подводные предметы: скалы, водоросли и рыбы... Ихтиандр видел над водой безногого рыбака, а в воде — только его ноги, а они снова отражались в зеркале водной поверхности. Другой рыбак погрузился в воду по плечи. И в воде показалось странное, безголовое, но четвероногое существо,



как будто двум одинаковым людям отрубили головы и поставили плечи одного человека на плечи другого.

А. Беляев.
«Человек-амфибия»

Как объяснить видимую Ихтиандром картину? Изменилось бы восприятие Ихтиандра, если бы он был в очках? Почему края конуса были окружены разноцветными каемками?

Нырни на дно,— стеной отвесных вод
Сойдется вкруг тебя водоворот.
Сквозь столб воды кайма волны лазурной
Со дна тебе покажется пурпурной.
Где ты не стой, куда не отходи,
Все будешь в центре, все посереди.

И.-В. Гете.
«Фауст»

Объясните явления.

Когда узнаешь ты, как странны
В Сицилии фата-морганы,
Вопросов этих не задашь.
Там часто в воздухе стеною
Средь бела дня, на зыбком зное
Встает обманчивый мираж.
То это всем сплетеньем веток
Висящий над землею сад,
То город, волн качанью в лад
Качающийся так и этак.

И.-В. Гете.
«Фауст»

Что такое фата-моргана? Какова природа этого явления?

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае будущего года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика». Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 января 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс. Напоминаем вам, что первые шесть задач конкурса были опубликованы в 10-м номере нашего журнала. Еще не поздно прислать ваши решения, но их следует отправить не позднее 15 декабря 1990 года (по почтовому штемпелю).

Задачи

7. На листе клетчатой бумаги отмечено 100 узлов — вершины клеток, образующих квадрат 9×9. Двое игроков по очереди соединяют вертикальным или горизонтальным отрезком два соседних отмеченных узла. Игрок, после хода которого образуется квадратик, закрашивает его в свой цвет. Выигрывает тот, кто закрасит больше квадратиков. Существует ли выигрышная стратегия у первого игрока? У второго игрока? Если да, то какая?

С. Савчев

8. В строчку записаны 1990 чисел, равных 1 или —1. Снизу между каждыми двумя числами запишем их произведение; получится новая строка, состоящая из 1989 чисел. Будем продолжать эту операцию, пока не останется строчка из одного числа. Покажите, что если в первой строке хотя бы одно число равно —1, то в полученном числовом треугольнике количество таких чисел не менее 1990.

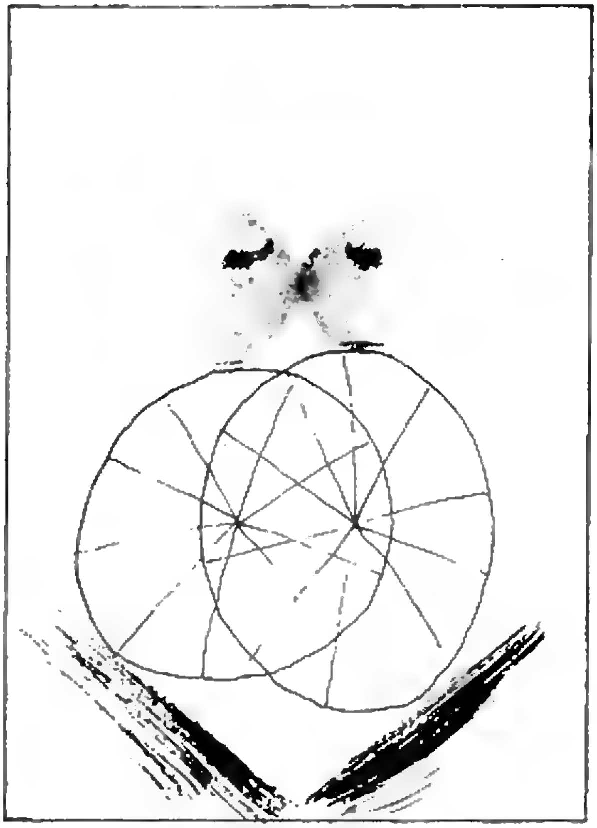
С. Савчев

9. Точка на плоскости, имеющая координаты (a; b), соединяется отрезками с точками ($a-b$; a) и (a; $b-a$). Можно ли с помощью таких отрезков связать непрерывными ломаными точки

а) (19; 90) и (1990; 3383);

б) (234; 1001) и (611; 7007)?

К. Банков, С. Савчев



Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Сила трения покоя» предназначена девятиклассникам, заметка «За какое время сливаются капли?» — десятиклассникам. Одиннадцатиклассникам мы советуем прочитать обе заметки.

Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

Сила трения покоя

Как мы обычно решаем задачи по динамике? Делаем чертеж, изображаем силы и пишем уравнения второго закона Ньютона, проектируя все силы и ускорения на выбранные оси. Чтобы решить полученные уравнения, к ним необходимо добавить формулы, отражающие закономерности, которым подчиняются действующие на тела силы. Например, вместо величины силы тяжести мы подставляем mg (m — масса тела, g — ускорение свободного падения), вместо силы упругости — kx (k — жесткость, x — величина упругой деформации), силы трения скольжения — μN (μ — коэффициент трения, N — сила нормальной реакции). Еще на стадии составления чертежа мы опираемся на правила для определения направления сил: сила тяжести всегда направлена вниз, сила трения скольжения — против относительной скорости тела и поверхности и т. д.

Однако не все силы имеют свои законы. Так, силу нормальной реакции или силу натяжения нити нам удается определить только благодаря тем ограничениям, которые они накладывают на движение тел. Сила реакции, например, возникает ровно такой величины, чтобы обеспечить движение тела точно вдоль поверхности.

Аналогичными свойствами обладает и известная вам сила трения покоя. Рецепт для определения этой силы выглядит примерно так: сила трения покоя всегда имеет такие величину и направление, чтобы обеспечить покой тела относительно поверхности, по которой оно может двигаться. Эта сила иногда доставляет нам большие неприятности. Первые трудности возникают уже при изображении этой силы на чертеже. Про ее направление известно лишь одно — она направлена по касательной к поверхности. Но в какую сторону? Это не всегда ясно. Кроме того, при решении задач необходимо проверять, что получившееся значение силы трения лежит в допустимых пределах ($0 \leqslant F_{тр} \leqslant \mu N$); в противном случае начнется проскальзывание. И последнее: сила трения покоя выступает иногда в столь незнакомом обличии (например, в виде силы тяги поезда или машины), что порой бывает трудно ее даже распознать.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

1. Неподвижное тело. Пусть на тело действуют несколько сил, но при этом оно остается неподвижным. Это означает, что сила трения покоя имеет

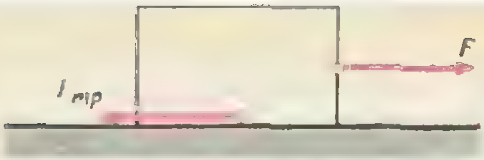


Рис. 1.

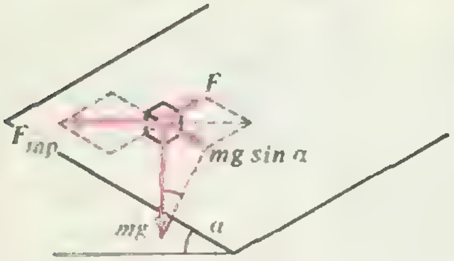


Рис. 2.

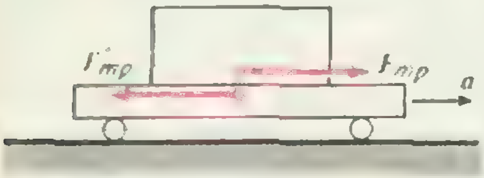


Рис. 3.

такие величину и направление, что сумма всех сил равна нулю. Какие же именно?

В простейшем случае (рис. 1) ответ очевиден: $\vec F_{тр}=-\vec F$. Если тело лежит на наклонной плоскости с углом α, *сила трения направлена вверх вдоль* плоскости и равна $F_{тр}=mg\sin\alpha$ (m — масса тела). Тело не соскальзывает в том случае, если $F_{тр}\leqslant\mu N=\mu mg\cos\alpha$, т. е. если $\operatorname{tg}\alpha\leqslant\mu$. Теперь приложим к этому телу небольшую горизонтальную силу, направленную вдоль плоскости (рис. 2), *и будем увеличивать ее* модуль F. При этом $\vec F_{тр}$ будет изменяться как по величине, так и по направлению. Когда величина силы трения покоя $F_{тр}=\sqrt{(mg\sin\alpha)^2+F^2}$ достигнет значения $\mu N=\mu mg\cos\alpha$, начнется проскальзывание тела, причем в сторону, противоположную направлению $\vec F_{тр}$ в этот момент.

2. Тело на движущейся тележке. Пусть тележка разгоняется по горизонтальной плоскости с ускорением $\vec a$ (рис. 3). Чтобы тело массой m, находящееся на тележке, двигалось вместе с ней, сила трения покоя должна придать телу такое же ускорение $\vec a$, как у тележки. Таким образом, $\vec F_{тр}$ направлена вперед и равна $F_{тр}=ma$. Проскальзывания не будет в том случае, если $F_{тр}\leqslant\mu N=\mu mg$; если же ускорение тележки превысит величину $a_0=\mu g$, тело с нее соскользнет назад. На рисунке 3 изображена также сила трения $\vec F'_{тр}$, действующая на тележку со стороны тела; по третьему закону Ньютона $\vec F'_{тр}=-\vec F_{тр}$.

3. Тело на вращающейся платформе. Ускорение тела, неподвижного относительно вращающейся платформы, должно быть направлено к центру платформы. *Так как сила трения* — единственная горизонтальная сила, которая может сообщить это ускорение, она направлена к центру и равна $m\omega^2r$ (рис. 4, *а*). Если очень медленно увеличивать угловую скорость вращения *платформы ω, то в тот момент*, когда сила трения покоя достигнет величины $\mu N=\mu mg$, тело начнет соскальзывать с платформы. Если же платформа раскручивается быстро, то кроме центростремительного (или так называемого нормального) ускорения нужно учитывать еще одно ускорение, направленное вдоль скорости и отвечающее за изменение модуля скорости (так называемое тангенциальное ускорение, в случае медленного раскручивания мы им пренебрегли).

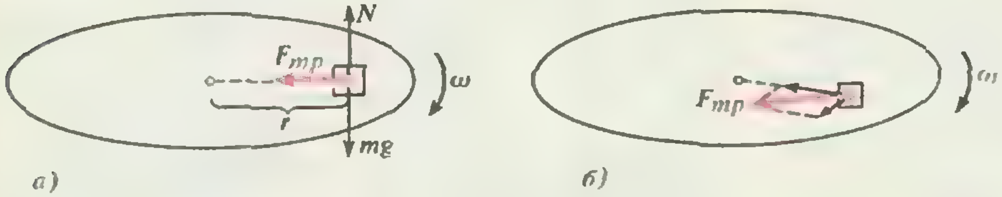


Рис. 4.

Это значит, что сила трения покоя, обеспечивающая оба эти ускорения, точнее — две составляющие ускорения (оно, конечно же, всегда одно), будет направлена не строго в сторону центра, а под некоторым углом к радиусу (рис. 4, *б*).

4. Колесо на наклонной плоскости. Пусть колесо скатывается с наклонной плоскости, но проскальзывание между колесом и плоскостью отсутствует. Это означает, что те точки колеса, которые в данный момент соприкасаются с плоскостью, являются в этот момент неподвижными. При этом сила трения покоя имеет такую величину, чтобы обеспечивать «раскручивание» колеса (рис. 5). Если бы сила трения отсутствовала, то имело бы место не скатывание колеса, а его соскальзывание — колесо двигалось бы вдоль плоскости поступательно, без вращения.

5. Разгон покоящегося автомобиля. Заметим, что сила тяги мотора, разгоняющая машину, есть не что иное, как действующая на ведущие (задние) колеса сила трения покоя. На вал машины со стороны мотора через передачу действуют силы, которые пытаются повернуть колеса по часовой стрелке (рис. 6). Препятствуя проскальзыванию, и возникает сила трения покоя, направленная вперед и приводящая в движение автомобиль.

А как насчет ведомых (передних) колес — действует ли на них сила трения покоя? Да, действует, но гораздо меньшей величины, а именно такой, которая необходима для раскручивания этих колес.

Кроме этих сил, в горизонтальном направлении действует еще сила сопротивления движению, которая состоит из двух частей: силы трения качения, связанной с деформацией поверхности колеса и с неровностями на дороге, и силы сопротивления воздуха.

6. Машина на повороте. Пусть автомобиль совершает поворот, двигаясь с постоянной по величине скоростью. Тогда ускорение машины направлено к центру закругления, перпендикулярно скорости машины.

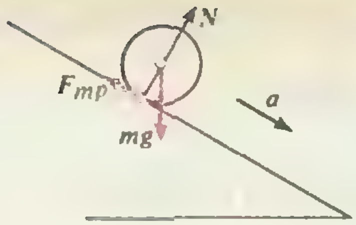


Рис. 5.

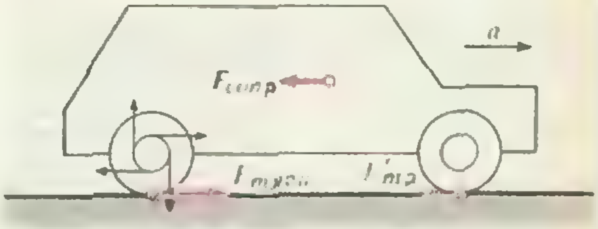


Рис. 6.

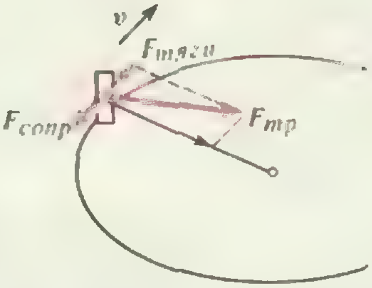


Рис. 7.

В эту же сторону направлена и сила трения покоя, действующая на колеса, которые катятся без проскальзывания. К сожалению, школьники часто принимают эту силу трения за силу трения скольжения (ведь автомобиль движется!) и направляют ее против скорости. Но тогда сразу возникает вопрос: а какая же сила создает центростремительное ускорение?

Интересно, что, кроме силы трения покоя, на машину и в самом деле действует сила сопротивления движению, направленная против скорости. Влияет ли она на силу трения покоя? В принципе влияет. Так как машина движется с постоянной скоростью, то сила сопротивления должна быть скомпенсирована такой же по величине силой тяги, т. е. дополнительной силой трения покоя, направленной вперед по ходу движения. Это значит, что результирующая сила трения покоя направлена под углом к радиусу (рис. 7): одна ее составляющая создает центростремительное ускорение, а другая — компенсирует

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Среднее гармоническое

Среднее гармоническое n положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ определяется так:

$$M=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}.$$

Если сравнить его с более известными средними — средним арифметическим

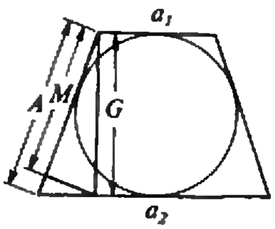
$$A=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$$

и средним геометрическим

$$G=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\dots\cdot a_n},$$

то оно окажется меньше каждого из них. Более точно, $A\geqslant G\geqslant M$. Равенство достигается лишь в том случае, если все числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ равны.

Это соотношение для $n=2$ красиво иллюстрируется геометрически. Рассмотрим равнобочную трапецию с основаниями a_1 и a_2, описанную вокруг окружности. (Такая трапеция, как легко видеть, всегда существует.) Тогда ее боковая сторона равна среднему арифметическому чисел a_1 и a_2, высота — среднему геометрическому, а проекция высоты на боковую сторону — среднему гармоническому этих чисел.



С понятием «среднего» связано понятие прогрессии. Арифметическая прогрессия — та, у которой каждый член, кроме первого и последнего, является средним арифметическим соседних членов, геометрическая — средним геометрическим. Аналогично определяется гармоническая прогрессия, у которой каждый член, кроме первого и последнего, является средним гармоническим соседних с ним членов. Примером гармонической прогрессии является последовательность $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots$

Действительно, соседними с членом $1/n$ являются члены $1/(n-1)$ и $1/(n+1)$, а их среднее гармоническое равно

$$\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{n-1}}+\frac{1}{\frac{1}{n+1}}}=\frac{2}{n-1+n+1}=\frac{1}{n}.$$

Сумма ее членов называется гармоническим рядом $1+1/2+1/3+1/4+\dots$

В 1673 году великий немецкий математик, физик, философ Готфрид Вильгельм Лейбниц доказал, что эта сумма равна бесконечности, а именно, что предел частичных сумм $S_n=1+1/2+1/3+\dots+1/n$ стремится к бесконечности при возрастании n.

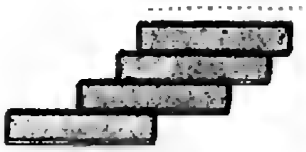
Его рассуждения были таковы. Рассмотрим сумму n членов гармонического ряда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}.$$

Каждый из них не меньше чем $1/(2n)$, следовательно, такая сумма больше чем $1/2$. Использовав это наблюдение, получаем

$$1>1/2,\ 1/2\geqslant 1/2,\ 1/3+1/4>1/2,\ 1/5+1/6+1/7+1/8>1/2,\ \dots,\ \frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}>\frac{1}{2}.$$

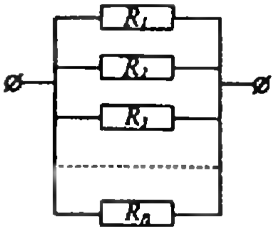
Ясно, что группируя члены ряда подобным образом, мы будем получать отрезки ряда с суммой, не меньшей $1/2$, и таких отрезков в ряду содержится бесконечно много. Любопытно, что если рассматривать лесенку из кирпичей, изображенную на рисунке, где



длина кирпича равна 2, то при величинах сдвигов кирпичей соответственно равных 1, 1/2, 1/3, ... получается устойчивая конструкция. Таким образом из нескрепленных между собой кирпичей можно создать навес сколь угодно большой протяженности. Правда, он будет очень высоким.

В 1740 году Леонард Эйлер показал, что сумма S_n растет как $\ln n$, а более точно, что существует такая постоянная C, что $S_n = \ln n + C + \varepsilon_n$, где ε_n стремится к нулю при n стремящемся к бесконечности. Число $C = 0{,}57721\ldots$ называется постоянной Эйлера.

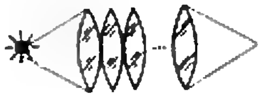
Гармонический ряд — не единственный пример гармонической прогрессии. Если два члена гармонической прогрессии заданы и, скажем, равны a и b, то третий ее член равен $\frac{ab}{2a-b}$, четвертый $\frac{ab}{3a-2b}$ и т. д., n-й член равен $\frac{ab}{(n-1)a-(n-2)b}$. Заметим, что если записать через первые два члена a и b n-й член арифметической прогрессии, то мы получим величину $na-(n-1)b$, а для геометрической прогрессии — $\frac{a^n}{b^{n-1}}$. Нетрудно показать, что сумма членов любой гармонической прогрессии стремится к бесконечности, если ни a, ни b не равняются нулю.



Со средними гармоническими мы часто встречаемся в физике. Известно, например, что сопротивление системы из n параллельно соединенных сопротивлений R_1, R_2, ..., R_n равно

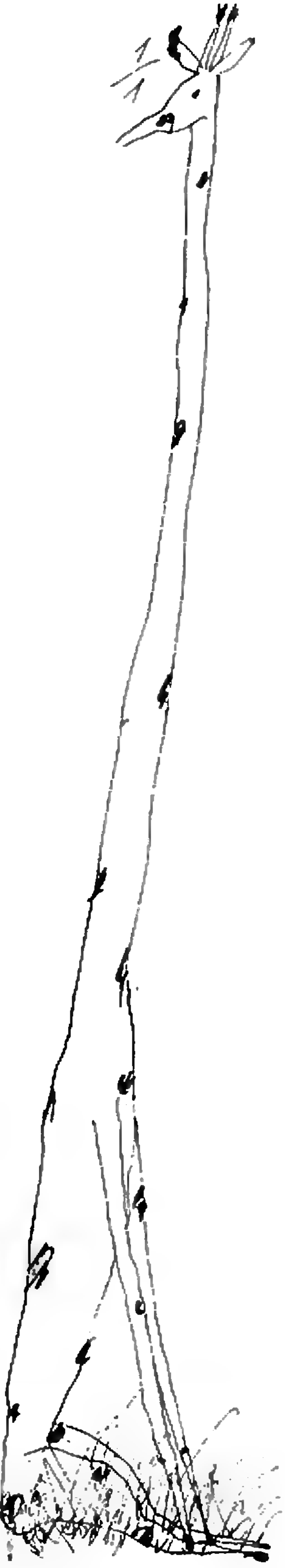
$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\ldots+\frac{1}{R_n}},$$

т. е. равно $1/n$ от их среднего гармонического.



Соответственно, фокусное расстояние системы из n тонких линз с фокусными расстояниями f_1, f_2, ..., f_n выражается точно также:

$$f = \frac{1}{\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}+\ldots+\frac{1}{f_n}}.$$



силу сопротивления. На плохой дороге сила сопротивления может быть немалой, и этим обстоятельством пренебрегать нельзя. Ведь проскальзывание (и потеря управления!) произойдет в тот момент, когда именно эта полная сила трения покоя достигнет величины $\mu N = \mu mg$. Правда, в теоретических задачах обычно молчаливо подразумевается, что силой сопротивления можно пренебречь. Ну, а в жизни?!

А. Черноуцан

За какое время сливаются капли?

Сиживали ли вы когда-нибудь за тарелкой прозрачного куриного бульона, покрытого пятнышками золотистого жира? Если у вас при этом не было аппетита, то вы наверняка пробовали гонять эти пятнышки по тарелке, разрывая перегородки между ними или, наоборот, соединяя пятнышки воедино, наблюдая, как неспешно они сливаются, принимая форму круга.

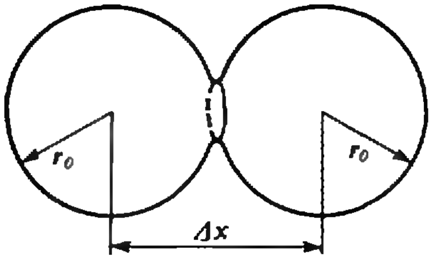
Другое наблюдение из той же серии — за слиянием капелек ртути из разбитого термометра (осторожно! занятие это — небезопасное, поскольку ртуть очень ядовита). Правда, тут вы даже не успеете моргнуть глазом, как из двух капелек образуется одна.

От чего же зависит время слияния жидких капель?

Прежде чем попытаться ответить на этот вопрос, поговорим немного о причине слияния капель — о поверхностном натяжении жидкости. Причем мы попробуем взглянуть на это явление с точки зрения энергетической.

Молекулы, расположенные в тонком слое жидкости вблизи поверхности, находятся в особых условиях. Дело в том, что они имеют одинаковых с ними соседей только с одной стороны поверхности, в отличие от молекул внутри жидкости, окруженных со всех сторон себе подобными. Взаимодействие молекул на не слишком малых расстояниях носит характер притяжения. Если потенциальную энергию притяжения двух молекул, находящихся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, считать равной нулю, то при меньших расстояниях эта энергия будет отрицательной. По абсолютной же величине, в первом приближении, энергию каждой молекулы можно считать пропорциональной числу ближайших соседей. Поэтому ясно, что у молекул в поверхностном слое (число соседей для которых меньше, чем в объеме) потенциальная энергия оказывается выше, чем у молекул внутри жидкости. (Еще одним фактором увеличения потенциальной энергии молекул в поверхностном слое является то, что по мере приближения к поверхности концентрация молекул падает.)

Разумеется, молекулы жидкости не неподвижны, а находятся в непрерывном тепловом движении — одни молекулы уходят с поверхности, другие, наоборот, попадают на нее. Но и в этом случае можно говорить о некоторой средней добавочной потенциальной энергии поверхностного слоя жидкости. А это означает, что для того чтобы извлечь молекулу на поверхность, внешним силам необходимо совершить некоторую положительную работу. Избыток потенциальной энергии молекул, находящихся на участке поверхности единичной площади, по сравнению с потенциальной энергией, которой обладали бы эти же молекулы в толще жидкости, называется коэффициентом поверхностного натяжения σ. Он характеризуется той работой, которую необходимо затратить на увеличение свободной поверхности жидкости на единицу площади. Конечно же, такое определение σ полностью эквивалентно известному определению коэффициента поверхностного натяжения как силы, действующей на единицу длины границы жидкости.



Известно, что из всех возможных состояний системы устойчивым является то, в котором ее потенциальная энергия минимальна. В частности, и поверхность жидкости стремится принять такую форму, при которой ее поверхностная энергия в заданных условиях будет минимальной. Так, для одной капли в условиях, когда силой тяжести можно пренебречь, энергетически наиболее выгодна сферическая форма. Для двух или нескольких касающихся друг друга капель выгоднее слиться воедино — поверхность одного большого шара меньше, чем суммарная поверхность нескольких малых шаров с той же общей массой (проверьте это самостоятельно), и, следовательно, поверхностная энергия у одной большой капли будет меньше.

Теперь мы можем вернуться к поставленному в самом начале вопросу: от чего же зависит время слияния двух капель? Над этим вопросом ученые начали задумываться довольно давно. Тем более, что он вовсе не праздный, а имеет, как оказалось, большое практическое значение. В частности — для понимания физических процессов, происходящих в порошковой металлургии, где спрессованные металлические зерна в процессе термической обработки «спекают» в вещества, обладающие уникальными свойствами. В 1944 году замечательный советский физик Я. И. Френкель предложил простейшую модель этого явления, в результате чего появилась его пионерская работа, заложившая физические основы порошковой металлургии. Основная идея этой работы и позволит нам оценить время слияния жидких капель. Для этого проще всего воспользоваться энергетическими соображениями.

Пусть две одинаковые капли в какой-то момент приходят в соприкосновение. В месте касания образуется перешеек (см. рисунок), который начинает постепенно расти и растет до тех пор, пока слияние не завершится. Что же происходит с точки зрения энергии?

Всего в «активе» у системы двух капель имеется избыточная энергия $\Delta E_п$, равная разности поверхностных энергий начального и конечного состояний, т. е. разности энергий двух отдельных капель радиусом r_0 каждая и одной общей капли радиусом r:

$$\Delta E_п = 8\pi\sigma r_0^2 - 4\pi\sigma r^2.$$

Так как при слиянии капель их полный объем не меняется, справедливо равенство

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\,\frac{4}{3}\pi r_0^3,$$

откуда получаем

$$r = r_0\sqrt[3]{2}.$$

Таким образом,

$$\Delta E_п = 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2.$$

Согласно идее Френкеля, этот избыток энергии должен быть израсходован на работу против сил вязкого трения, возникающих в процессе перемещения вещества капель при их слиянии. Попробуем оценить величину этой работы.

Для определения силы вязкого трения воспользуемся выражением, найденным в середине прошлого века английским ученым Дж. Стоксом для шара радиусом R, движущегося в жидкости со скоростью v:

$$F = 6\pi\eta R v.$$

Вошедший в эту формулу (называемую теперь формулой или законом Стокса) размерный коэффициент η называется коэффициентом вязкости или просто вязкостью. Он характеризует способность жидкости затормаживать относительное движение соседних слоев.

Понятно, что в нашем случае слияния жидких капель сила вязкого трения также может зависеть лишь от вязкости вещества капель, их линейных размеров и скорости протекания процесса слияния. Поэтому для оценки, по порядку величины, силы вязкого трения вполне допустимо использовать формулу Стокса. Только произведем в ней небольшую замену. А именно: вместо R подставим радиус наших капель r_0, вместо скорости шара v — скорость процесса слияния, обозначив его тоже через v, а под η будем понимать вязкость вещества капель. Тогда для силы вязкого трения в нашем случае получим

$$F=6\pi\eta r_0 v.$$

Заметим, что масштаб перемещения массы жидкости при слиянии капель — того же порядка, что и радиус капель: $\Delta x=r_0$. Поэтому работа сил вязкого трения будет равна

$$A=F\Delta x=6\pi\eta r_0^2 v.$$

Из полученного выражения видно, что чем быстрее сливаются капли, тем бо́льшая энергия на это требуется (из-за возрастания сил вязкого трения). Но запас энергии у нас ограничен величиной $\Delta E_п$. Этим и определяется искомое время слияния капель τ (так называемое френкелевское время слияния). Оценивая скорость процесса как $v=r_0/\tau$, из условия $A=\Delta E_п$ получаем

$$6\pi\eta r_0^2\,\frac{r_0}{\tau}=4\pi\sigma(2-2^{2/3})r_0^2,$$

или

$$\tau\sim\frac{r_0\eta}{\sigma}.$$

Вот несколько примеров. Для капель воды с $r_0\sim1$ см, $\sigma\sim0{,}1$ Н/м и $\eta\sim10^{-3}$ кг/(м · с) соответствующее время составляет всего лишь $\sim10^{-4}$ с. А для значительно более вязкого глицерина с $\sigma\sim0{,}01$ Н/м и $\eta\sim1$ кг/(м · с) время слияния составляет уже ~1 с. Таким образом, для различных жидкостей, в зависимости от их вязкости и поверхностного натяжения, время процесса слияния капель одного и того же радиуса может меняться в весьма широких пределах. Мало того, благодаря сильной зависимости вязкости от температуры (чего нельзя сказать о коэффициенте поверхностного натяжения), это время может существенно изменяться и для одной и той же жидкости.

А. Варламов

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. К одному концу веревки, перекинутой через неподвижный блок, подвешен груз массой m. С какой силой нужно тянуть вниз за другой конец веревки, чтобы груз поднимался с ускорением a? Веревку считать идеальной (массой и растяжением веревки можно пренебречь). Какой груз нужно подвесить к свободному концу веревки, чтобы первый груз (массой m) поднимался с тем же ускорением a?

2. Шарик массой m, прикрепленный к горизонтальному резиновому шнуру, совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Длина нерастянутого резинового шнура l_0, сила натяжения шнура растет пропорционально его растяжению, жесткость шнура k. Найдите радиус окружности, по которой движется шарик, и силу натяжения шнура.

3. Два спутника движутся в одном направлении по круговым траекториям, лежащим в одной плоскости, со скоростями v_1 и v_2. Определите минимальное расстояние между спутниками. Радиус Земли R.

4. Брусок массой m находится на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения скольжения бруска μ. Изобразите графически зависимость силы трения от силы тяги, приложенной к бруску вдоль плоскости скольжения.

5. Какие капли дождя падают быстрее — крупные или мелкие? Почему?

10 класс

6. На рисунке 1 приведен график изменения состояния идеального газа в координатах p, V. Представьте этот процесс в координатах p, T и V, T. Укажите, на каком из участков процесса газ отдает тепло, на каком — получает.

7. В вертикальном цилиндре под поршнем находится кислород, масса которого равна m, а молярная масса — M. Для повышения температуры кислорода на ΔT ему было сообщено количество теплоты Q. Найдите удель-

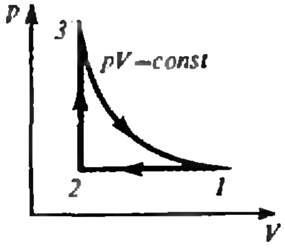


Рис. 1.

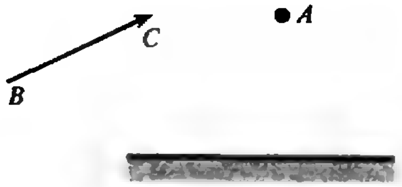


Рис. 2.

ную теплоемкость кислорода в этом процессе, работу, совершаемую газом при расширении, и увеличение его внутренней энергии.

8. В какую сумму обойдется приготовление 1 кг льда в домашнем холодильнике, если считать, что он работает по идеальному циклу? Комнатная температура равна 20 °С, фреон охлажден до температуры −10 °С. Стоимость 1 кВт·ч электроэнергии составляет 4 копейки.

9. Влажный воздух, масса которого равна m, занимает объем V при температуре T и давлении p. Давление насыщенных паров при этой температуре равно $p_н$. Определите относительную влажность воздуха.

10. В калориметр, содержащий $m_1=200$ г воды при температуре $t_1=8$ °С, погружают $m_2=300$ г льда, имеющего температуру $t_2=-20$ °С. Определите содержимое калориметра после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot 10^3$ Дж/(кг·К), льда $c_2=2{,}1\cdot 10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}4\cdot 10^5$ Дж/кг. Тепловые потери не учитывать.

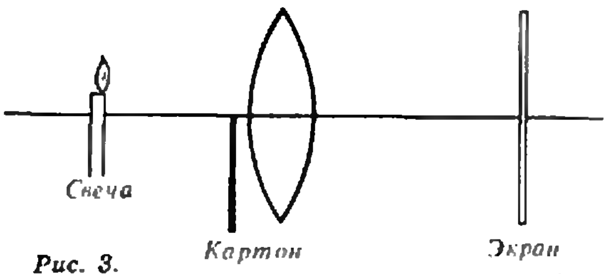


Рис. 3.

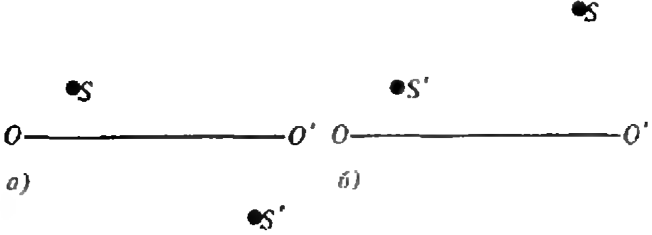


Рис. 4.

11 класс

11. Определите графически, при каких положениях глаза наблюдатель может видеть в плоском зеркале конечных размеров одновременно изображение точки A и предмета BC, расположенных относительно зеркала так, как это показано на рисунке 2.

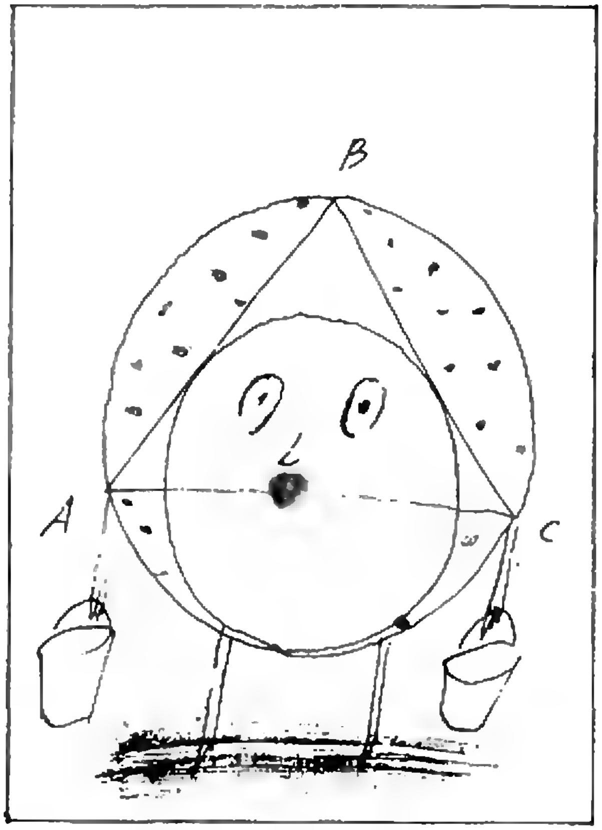
12. Точечный источник света помещен между двумя взаимно перпендикулярными плоскими зеркалами. Сколько получается изображений? Постройте их.

13. Между светящейся точкой и глазом помещается плоскопараллельная пластинка. Найдите построением кажущееся положение точки.

14. С помощью двояковыпуклой линзы получают на экране изображение свечи. Как изменится это изображение, если линзу закрыть наполовину картоном (рис. 3)?

15. На рисунке 4 (*а* и *б*) изображена светящаяся точка S и ее изображение S', даваемое линзой, оптическая ось которой OO'. Найдите положения линзы и ее фокусов.

Публикацию подготовила
В. Тихомирова



Математический кружок

Несколько задач о треугольниках и окружностях

А. ГИРИЧ

В этой заметке речь пойдет об окружностях, касающихся двух сторон треугольника и окружности, описанной вокруг этого треугольника. Такие окружности будем называть полувписанными. Мы обнаружим целый ряд интересных свойств полувписанных окружностей.

Как обычно, длины сторон треугольника ABC, противоположных вершинам A, B и C, мы обозначим через a, b и c, соответственно углы при этих вершинах — α, β и γ; радиусы вписанной и описанной окружностей — r и R, площадь треугольника — S, его полупериметр — p.

Прежде чем приступать к изучению полувписанных окружностей, решим следующую вспомогательную задачу.

Задача 1. *Выразите радиус R описанной окружности через радиус r вписанной окружности и углы α, β, γ.*

Решение. Известны две формулы для площади треугольника

$$S=\frac{abc}{4R}=rp. \qquad (1)$$

По теореме синусов $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$. Подставляя эти выражения в (1), получаем

$$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=Rr(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

но $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, и $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$. Поэтому

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Итак, $2R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=4r\cos\frac{\alpha}{2}\times\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, откуда без труда получаем

$$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Задача 2. *Докажите, что радиус полувписанной окружности, касающейся сторон AB и AC треугольника ABC, равен $r/\cos^2\frac{\alpha}{2}$.*

Доказательство. Пусть r_1 — радиус, а I_1 — центр полувписанной окружности, O — центр описанной около треугольника ABC окружности (рис. 1). Тогда $OI_1=R-r_1$, $AI_1=r_1/\sin\frac{\alpha}{2}$, $OA=R$, $\cos\angle OAI_1=\cos\frac{(\beta-\gamma)}{2}$ (убедитесь в этом).

Применяя теорему косинусов к треугольнику OAI_1, получим после преобразования

$$r_1\cos^2\frac{\alpha}{2}=2R\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Автор этой заметки — ученик 11 класса школы № 206 г. Киева.

Поскольку $\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)-\sin\frac{\alpha}{2}=$

$$=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

правая часть равенства (2) равна $4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=r.$

Итак, $r_1=r/\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Задача 3. *Докажите, что середина I отрезка B_1C_1, где B_1 и C_1 — точки касания полувписанной окружности со сторонами AB и AC (см. рис. 1), является центром вписанной окружности треугольника ABC.*

Доказательство. Очевидно, что треугольник AB_1C_1 — равнобедренный, а треугольник AIC_1 — прямоугольный. Поэтому

$$AI=AC_1\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=r_1\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=r/\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Но это значит, что точка I — центр вписанной окружности.

Задача 4. *Прямая B_1C_1 касается окружности, описанной около треугольника BIC.*

Доказательство. Пусть W — точка пересечения биссектрисы угла A с описанной около треугольника ABC окружностью (рис. 2.) Тогда $CW=WB$, $\angle CBW=\alpha/2$, так что $\angle IBW=(\alpha+\beta)/2$. Кроме того, $\angle WIB=(\alpha+\beta)/2$ (как внешний угол по отношению к треугольнику AIB). Поэтому треугольник WIB — равнобедренный. Таким образом, $CW=WI=WB$, т. е. W — центр описанной около треугольника CIB окружности. Утверждение задачи следует из ранее доказанной перпендикулярности AI и B_1C_1.

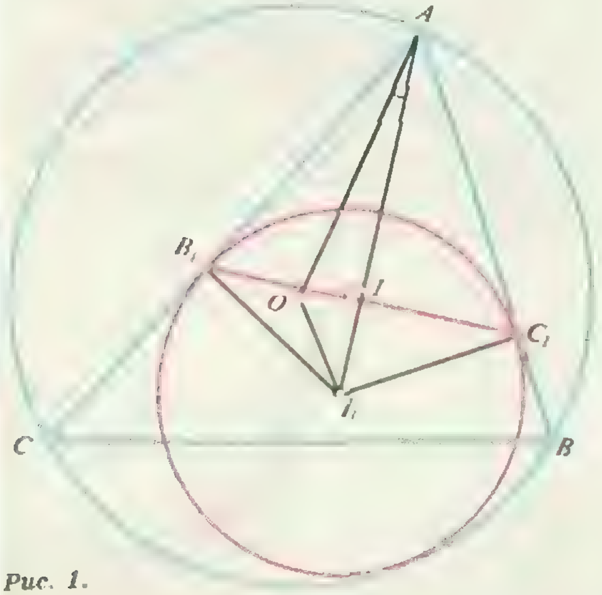


Рис. 1.

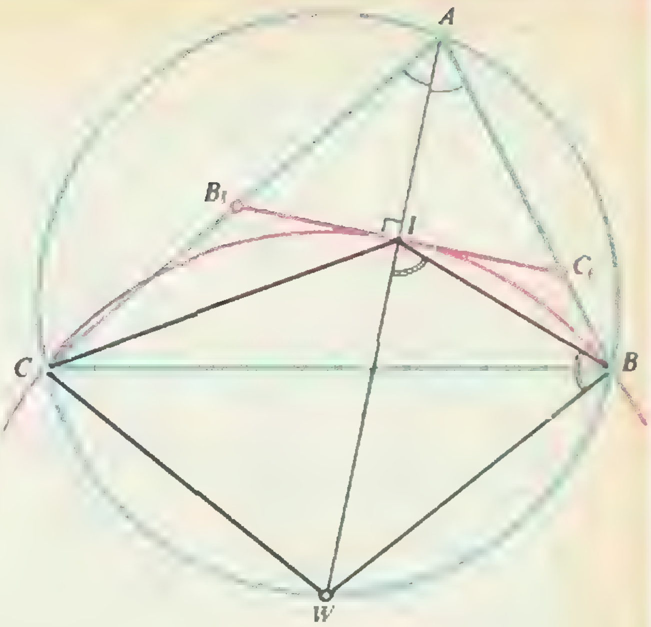


Рис. 2.

Проведем теперь через вершины B и C касательные к полувписанной окружности. Пусть K — точка их пересечения, а M и N — соответствующие точки касания (рис. 3).

Задача 5. *Докажите, что прямые B_1M, C_1N, BC и AK пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть T — точка пересечения отрезков B_1M и BC (см. рис. 3). Из треугольников B_1TC и BMT получаем (по теореме синусов)

$$\frac{CT}{\sin\angle CB_1T}=\frac{CB_1}{\sin\angle B_1TC},$$

$$\frac{BT}{\sin\angle BMT}=\frac{BM}{\sin\angle BTM},$$

но $\angle B_1TC=\angle BTM$, а $\angle BMT+\angle CB_1T=\pi$ ($\angle CB_1M=\angle B_1MK$, поскольку AC и KB — касательные к одной окружности). Поэтому

$$\frac{CT}{BT}=\frac{CB_1}{BM}=\frac{CB_1}{C_1B}.$$

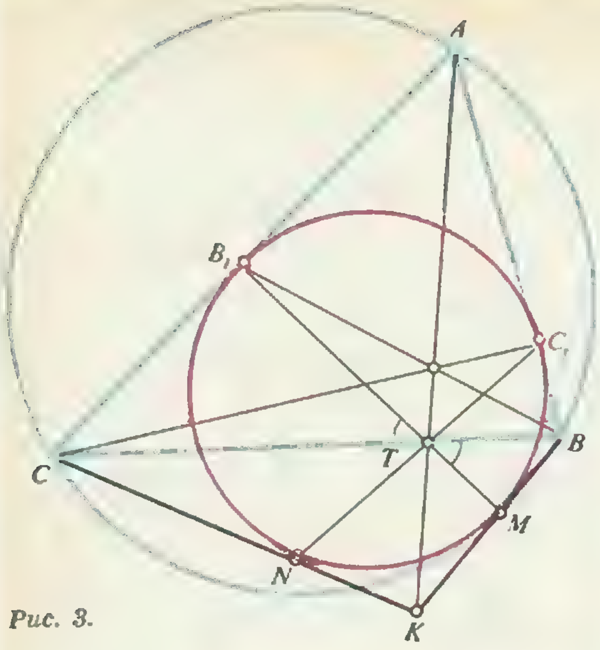


Рис. 3.

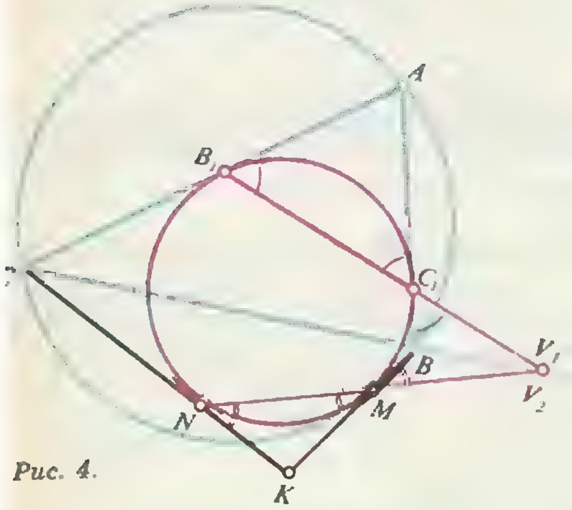


Рис. 4.

Аналогично доказывается, что прямые C_1N и AK делят отрезок BC в том же отношении. А это и значит, что все их точки пересечения с BC совпадают.

Задача 6. *Докажите, что точка пересечения прямых B_1C_1 и MN лежит на прямой BC (рис. 4).*

Доказательство. Пусть V_1 — точка пересечения B_1C_1 и BC. Из треугольников BC_1V_1 и CB_1V_1 получаем

$$\frac{BV_1}{\sin \angle BC_1V_1}=\frac{BC_1}{\sin \angle BV_1C_1}$$

и

$$\frac{CV_1}{\sin \angle CB_1V_1}=\frac{CB_1}{\sin \angle CV_1B},$$

но $\angle BC_1V_1+\angle CB_1V_1=180°$. Следовательно, $\frac{BV_1}{CV_1}=\frac{BC_1}{CB_1}$. Аналогично получим (предполагая, что V_2 — точка пересечения MN с BC): $\frac{BV_2}{CV_2}=\frac{BM}{CN}$, но $BM=BC_1$, $CN=CB_1$. Итак, $\frac{BV_1}{CV_1}=\frac{BV_2}{CV_2}$, поэтому $V_1=V_2$.

Задача 7. *Докажите, что прямые BB_1, CC_1 и AK пересекаются в одной точке (см. рис. 3).*

Доказательство. Поскольку $B_1A=AC_1$, а, как было установлено ранее, $\frac{BT}{CT}=\frac{BC_1}{CB_1}$, получаем

$$\frac{BT}{CT}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

Осталось воспользоваться теоремой Чевы (о теореме Чевы см. статью Б. Эрдниева и Н. Мацаева в «Кванте» № 3 за 1990 год).

В заключение предлагаем серию задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Пусть теперь A_1, A_2, B_2, C_2 — точки касания двух других (отличных от рассмотренной) полувписанных окружностей со сторонами треугольника. Докажите, что точки пересечения прямых B_1C_1 и BC, B_2A_2 и AB, A_1C_2 и AC лежат на одной прямой.

2. Пусть K_1, K_2, K_3 — точки пересечения касательных, проведенных к каждой из трех полувписанных окружностей через вершины треугольника. Докажите, что прямые AK_1, BK_2 и CK_3 пересекаются в одной точке.

3. Пусть D — точка пересечения прямых BB_2 и CC_2. Докажите, что D принадлежит медиане треугольника ABC, проведенной через вершину A.

4. Пусть P_1, P_2, P_3 — точки касания полувписанных окружностей с описанной окружностью. Докажите, что прямые AP_1, BP_2 и CP_3 пересекаются в одной точке.

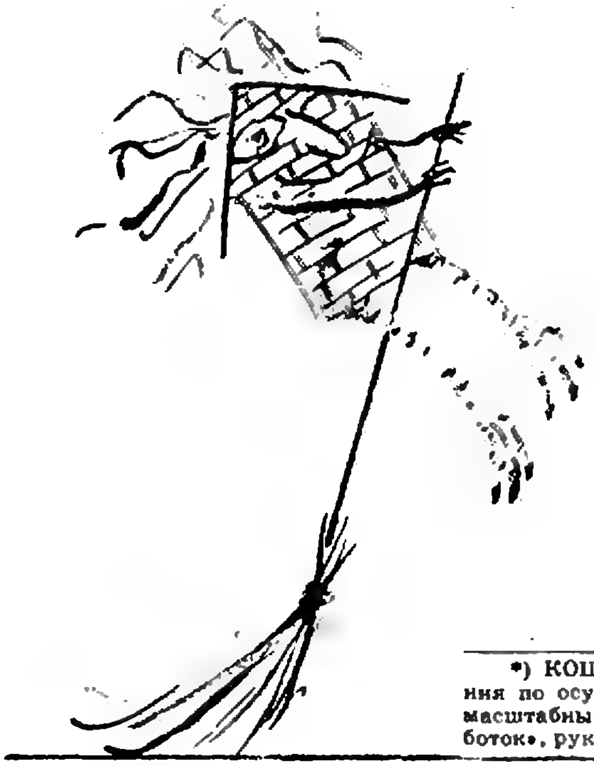
„Квант" улыбается

Магнитный мех

Архитекторам, занимающимся проблемами теплоизоляции зданий, следовало бы поучиться у природы. Теплоизоляционный слой должен находиться не с внутренней стороны стен и не в стенах, а снаружи. В этом случае кирпичная кладка, обладающая большой тепловой инерцией, будет сглаживать суточные колебания температуры внутри помещения. В идеале наружное покрытие стен должно также обладать водоотталкивающими, звукопоглощающими, декоративными и защитными свойствами. Построить мохнатое здание, однако, не так просто. Покрытие из стекловаты слишком неэлегантно, а электростатический метод, применяемый при изготовлении искусственного меха, слишком сложен. Биологи фирмы КОШМАР*) подыскивают газонную траву, которую можно было бы выращивать на стенах как своего рода растительный «мех». Но есть опасения, что трава, как и плющ, будет со временем разрушать кирпичную кладку.

По мнению Дедала, решение проблемы дает новая магнитная краска. Она представляет собой взвесь железных опилок в нитролаке. Краску наносят на поверхность и над слоем свежей краски проводят мощным магнитом. Опилки притягиваются магнитом и вытягивают за собой ниточку лака. Нить очень быстро затвердевает, и стена оказывается покрытой длинным ворсом. Такое покрытие, которому можно придать любую окраску, не только обладает прекрасными теплоизоляционными звукопоглощающими свойствами, но и очень привлекательно на вид. Зеленый домик отлично впишется в сельский пейзаж, радуя глаз колышущимся на ветру мохнатым покровом. Даже в городах «пушистые кварталы» будут выглядеть гораздо эстетичнее нынешних. Дома можно раскрашивать «под зебру», «под жирафа», изобретать любые орнаменты. И архитектура в целом обогатится новой невиданной мягкостью цветов, линий и поверхностей. Дедал также намеревается применить свое изобретение для решения более частных проблем. Нет сомнения, что огромным спросом будет пользоваться средство против облысения КОШМАР (наносится на лысину и укладывается в прическу магнитом; новые волосы держатся не хуже старых!). Подобное же средство надежно защитит полярников от холода и поможет специалистам по приматам войти в более тесный контакт с обезьянами.

Дедал догадывается, однако, что названные применения не исчерпывают всех возможностей нового покрытия. Железные опилки на кончиках волокон можно отклонять магнитным полем. Таким образом, магнитный «мех» может стать первым управляемым теплоизолятором. Теплоизоляционными свойствами мохнатого дома или махровой рубашки можно будет управлять при помощи магнитного поля, создаваемого системой электрических приводов. В жаркую погоду термостат включает ток и ворс приглаживается; в холодную погоду ворс взъерошивается и его теплоизоляционные свойства



---

*) КОШМАР — это «Компания по осуществлению широкомасштабных актуальных разработок», руководимая Дедалом.

улучшаются. Дом будет приспосабливаться к изменениям погоды, а владелец рубашки на собственном опыте ощутит все прелести автоматической терморегуляции, существующей у кошек и других животных. Если рубашка будет покрыта ворсом и с изнанки, то движением ворса на отдельных участках можно будет управлять со спрятанного в рукаве пульта, и владелец рубашки сможет в любой момент дистанционно почесаться там, где на людях это сделать неприлично...

Что еще более интересно, магнитные волокна могут вибрировать в переменном магнитном поле с частотой вплоть до верхней границы звукового диапазона. Рубашка-громкоговоритель со встроенным в воротник микрофоном и усилителем пригодится ораторам; по этому же принципу можно изготовить и громкоговорящие обои. Колебания магнитных ворсинок передаются воздуху за счет вязкого трения и создают однородное ненаправленное звуковое поле. Подавая на различные участки стены разные сигналы, можно добиться подлинно объемного звучания. В качестве других применений этого замечательного изобретения можно назвать магнитную зубную щетку, которая сама чистит зубы, и перистальтический ковер. В основу этого ковра вплетены управляющие провода, создающие на ворсе бегущую волну, которая уносит пыль и мелкий мусор к миниатюрному мусоросборнику. Такой ковер избавит хозяйку от многих забот, но вряд ли придется по душе кошкам.

(Из книги Д. Джоунса «Изобретения Дедала»)

Нам пишут

«Монстр» — брат «монстра»

В статье «У попа была собака» («Квант» № 6 за 1989 год) была опубликована целая россыпь фраз, которые что-то говорят сами о себе. Например, такая:

В этой фразе двадцать восемь букв.

Несомненно, так оно и есть. Но ведь во фразе имеются также и знаки препинания (правда, всего лишь один — точка — но тем не менее...). Поэтому имеет смысл поправить ее так:

В этой фразе тридцать восемь букв и одна точка.

Согласитесь, что теперь информация стала гораздо полнее. Но и этого мало. Слова-то в русском языке пишутся не слитно, а разделяются либо пробелами, либо знаками препинания. Посему имеет смысл еще дополнить фразу так:

В этой фразе шестьдесят две буквы, десять пробелов, две запятые и одна точка.

Правда, здесь можно спорить. Ведь пробел — это не что иное, как отсутствие буквы, поэтому получается что-то вроде парадоксального выражения «НАЛИЧИЕ ОТСУТСТВИЯ». Кроме того, подразумевает ли наличие запятой между двумя словами отсутствие пробела между словами? Трудно сказать: напечатать-то можно и так, и этак — и все будет правильно. Поэтому с пробелами, видимо, лучше не связываться.

Кроме того, можно составлять и фразы, дающие о себе не просто неверную (это было бы слишком просто!), а прямо противоположную истинной информацию:

Неправда, что в этой фразе тридцать семь букв.

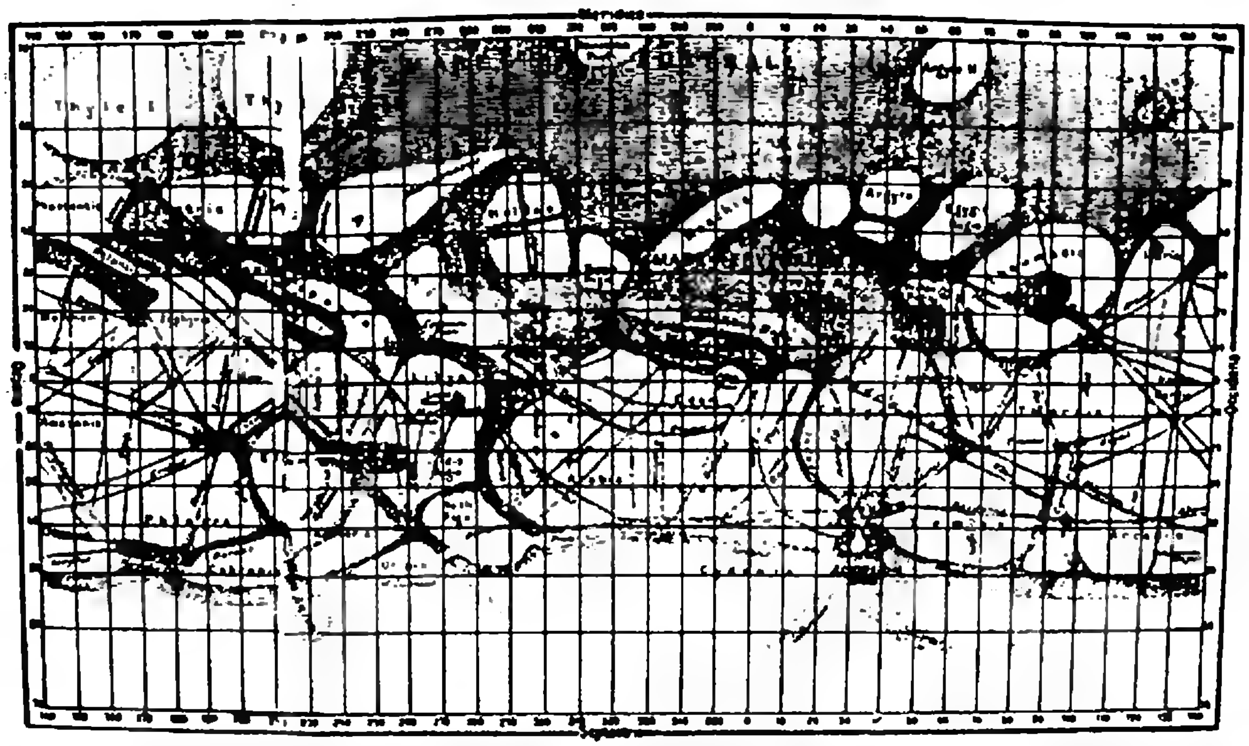
Неправда, что в этой фразе шестьдесят пять букв, а также две запятые и одна точка.

Но все это — лишь прелюдия к главному. В той фразе, которая справедливо названа в статье «монстром», также содержится не совсем полная о себе самой информация: о знаках препинания ничего не сказано. Поэтому предлагаю фразу, которая рассказывает не только о словах, но и о всех знаках пунктуации.

Фраза, которую Вы читаете, содержит:
два слова «Фраза»,
два слова «которую»,
два слова «Вы»,
два слова «читаете»,
два слова «содержит»,
двадцать пять слов «слова»,
два слова «слов»,
два слова «двоеточие»,
два слова «запятых»,
два слова «по»,
два слова «левых»,
два слова «и»,
два слова «правых»,
два слова «кавычек»,
два слова «а»,
два слова «также»,
два слова «точку»,
два слова «одно»,
два слова «одну»,
двадцать два слова «два»,
три слова «три»,
два слова «четыре»,
три слова «пять»,
четыре слова «двадцать»,
два слова «тридцать»,
одно двоеточие,
тридцать запятых,
по двадцать пять левых и правых кавычек,
а также одну точку.

Годится ли это предложение в двоюродные братья «монстру»?

И. Акулич



Р-значит ракета

56 миллионов километров до Красной планеты

Е. НАРИМАНОВ

Технические средства

Марсианский экспедиционный комплекс (МЭК) целесообразно строить по модульному принципу, согласно которому весь комплекс разделяется на отдельные функциональные блоки, независимо и последовательно доставляемые с Земли на околоземную орбиту. В их числе жилой модуль, научный модуль, энергетический модуль, посадочный аппарат и др.

При создании МЭК и осуществлении экспедиции должны быть решены четыре основополагающие проблемы, а именно:

— выведение грузов большой массы и габаритов с Земли на низкую околоземную орбиту и сборка их на орбите;

— межорбитальная транспортировка межпланетного корабля с космонавтами на борту от Земли к Марсу и обратно;

— обеспечение безопасности экипажа на всех этапах полета экспедиционного комплекса;

— создание искусственной тяжести на борту межпланетного корабля либо разработка специальных мер предупреждения нежелательных последствий длительного пребывания в невесомости.

Указанные проблемы на сегодняшний день находятся в стадии разрешения. В СССР создана сверхмощная грузовая ракета-носитель «Энергия», грузоподъемность которой составляет около ста тонн. Аналогичная по размерности ракета-носитель «ALS» раз-

---

Продолжение. Начало см. в № 10.

рабатывается в США и будет введена в эксплуатацию к 2000 году. Не исключено, что для реализации марсианской экспедиции потребуется ракета-носитель еще большей грузоподъемности, выводящая в космос полезный груз массой 200—250 тонн. Она может представлять собой модификацию ракет-носителей баллистического типа либо являться принципиально новой разработкой. Такой перспективной транспортной системой, построенной на новых принципах, может быть космический самолет, оснащенный многорежимной двигательной установкой, совершающий горизонтальный взлет с аэродрома и посадку на нем.

Перелет с орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ) на орбиту искусственного спутника Марса (ИСМ) может выполняться с помощью специальных разгонно-тормозных ракетных блоков, включающих двигательные установки (ДУ) различного типа. Химические и ядерные ракетные двигатели позволяют создавать большие тяги, в то время как тяга у электрических двигателей незначительна. Зато скорость истечения реактивной струи для химических двигателей составляет 3—4 км/с, у ядерных — 10 км/с, а у электрических двигателей — 40—50 км/с, что делает их значительно эффективнее.

Следует отметить, что с целью экономии массы топлива перевод экспедиционного комплекса с межпланетной траектории на орбиту искусственного спутника Марса и Земли может выполняться путем торможения в атмосфере планет. В этом случае конструкция должна быть защищена специальным тепловым экраном.

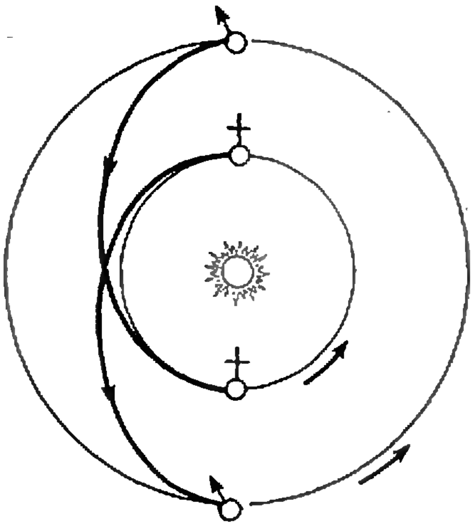
Проблема защиты экипажа на межпланетных участках полета от ионизирующих излучений и метеоритной опасности может быть решена специальными мерами — созданием убежища на борту космического корабля, введением защитных экранов и возможностью выполнения ограниченных ремонтно-восстановительных работ с целью обеспечения герметичности конструкции.

Искусственная тяжесть в жилом модуле МЭК может быть создана путем вращения всего корабля либо его отдельных отсеков. При вращении с угловой скоростью три оборота в минуту при радиусе 60 м обеспечивается искусственная гравитация $0{,}6g_0$ (g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли).

В состав экспедиционного комплекса должен входить посадочный аппарат, включающий в себя научную аппаратуру для исследований на поверхности Марса, ракету возвращения и капсулу для экипажа. Спуск аппарата с орбиты ИСМ выполняется путем торможения в атмосфере и ракетодинамического маневра на конечном участке траектории спуска с целью выбора участка посадки и обеспечения малой скорости соприкосновения с грунтом. Посадочный аппарат служит жилищем для членов экипажа в течение всего времени пребывания на поверхности планеты. После выполнения научной программы экипаж переходит в капсулу и с помощью ракеты возвращения доставляется на межпланетный корабль, вращающийся на орбите вокруг Марса.

Организация экспедиции и схемы полета

В качестве исходных положений при рассмотрении научно-инженерной за-



«Классическая» схема полета.

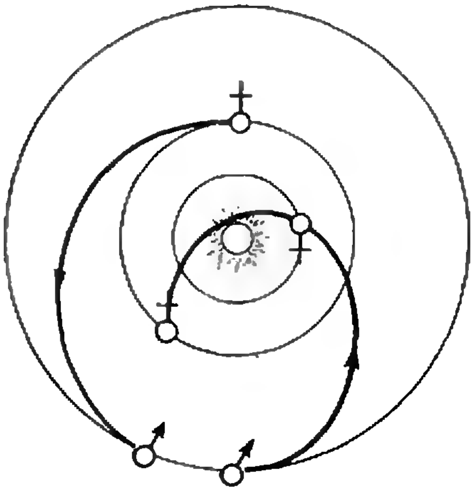


Схема полета с попутным облетом Венеры.

дачи проектирования марсианского экспедиционного комплекса могут быть приняты некоторые допущения, позволяющие классифицировать все многообразие возможных способов организации экспедиции, схем полета.

Будем считать, что формирование МЭК производится на низкой околоземной орбите путем сборки квантов полезного груза, предварительно выведенных в космос грузовыми ракетами-носителями. Сборка выполняется с борта станции, представляющей собой сборочно-монтажный орбитальный центр. После окончания формирования марсианского экспедиционного комплекса на околоземной орбите и всесторонней проверки работоспособности его системы в транспортном корабле типа «Союз» или в орбитальном самолете «Буран» на борт доставляется экипаж экспедиции. В этот же сборочно-монтажный орбитальный центр доставляется экипаж после возвращения от Марса. В этом случае межпланетный корабль производит торможение в атмосфере Земли и переводится с траектории подлета на круговую околоземную орбиту. Рассматривается также вариант возвращения экипажа на Землю в спускаемом аппарате непосредственно с траектории подлета, как это было реализовано в программе «Аполлон».

Кратко опишем некоторые характерные схемы осуществления экспедиции.

«Классическая» схема полета (минимальные энергетические затраты, но длительное время пребывания у Марса; используются ракетные блоки с ДУ «большой» тяги).

Межпланетные траектории полета представляют собой эллипсы, касательные к орбитам Земли и Марса. Время перелета между орбитами Земли и Марса около 240—280 суток. Время ожидания у Марса благоприятного положения планет для обратного полета — 330—450 суток. Длительность всей экспедиции 810—1000 суток.

Суммарные энергетические затраты — 12 км/с*), в том числе: разгон у Земли с орбиты ИСЗ — 3,8 км/с, торможение у Марса с выходом на круговую орбиту ИСМ — 2,0 км/с, разгон с орбиты ИСМ к Земле — 2,2 км/с, торможение у Земли с выходом на низкую круговую орбиту ИСЗ — 4,0 км/с.

Схема полета с попутным облетом Венеры (приемлемые энергетические затраты и малое время пребывания у Марса; используются ракетные блоки с ДУ «большой» тяги).

Один из участков межпланетного перелета является переходным эллипсом, другой представляет собой сочетание двух фрагментов переходных эллипсов, соединяющихся в окрестности планеты Венеры.

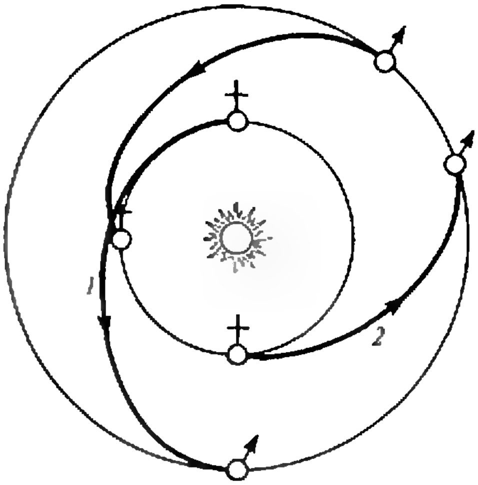
Время перелета от Земли к Марсу — 240 суток, время обратного полета от Марса к Венере — 185 суток, от Венеры к Земле — 145 суток. Длительность всей экспедиции — 600 суток.

Суммарные энергетические затраты — 16,2 км/с, в том числе: разгон у Земли — 4,3 км/с, торможение у Марса — 2,3 км/с, разгон с орбиты ИСМ на траекторию перелета Марс — Венера — Земля — 4,0 км/с, торможение у Земли — 5,6 км/с.

Двухкорабельная схема полета со стыковкой на орбите ИСМ (комплекс

---

*) Изменение скорости космического аппарата всегда связано с энергетическими затратами. В связи с этим приращение скорости аппарата в результате включения двигательных установок принято называть в ракетодинамике энергетическими затратами.



Двухкорабельная схема полета.

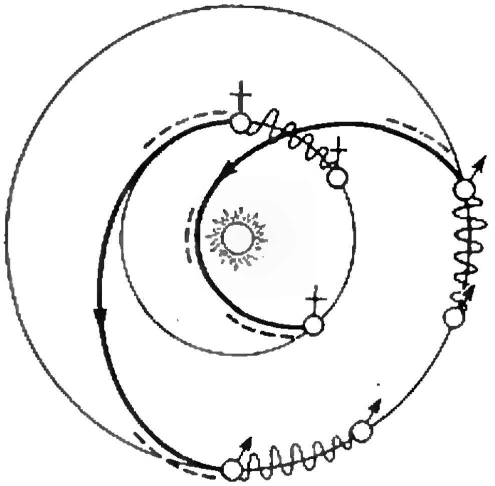
состоит из автоматического и пилотируемого кораблей, причем автоматический совершает полет по оптимальной траектории, а пилотируемый — по «ускоренным» траекториям; схема характеризуется малым временем пребывания экипажа в космосе, требует значительных энергетических затрат, используются ракетные блоки с ДУ «большой» тяги).

От Земли к Марсу по оптимальной траектории полета отправляется грузовой корабль без экипажа, содержащий посадочный корабль и баки с топливом для обратного полета пилотируемого корабля. Время перелета автоматического корабля — 240—280 суток при энергетических затратах 6,0 км/с.

После благополучного прибытия на орбиту ИСМ грузового корабля от Земли отправляется пилотируемый корабль, совершающий межпланетные перелеты по «ускоренным» траекториям. Пилотируемый корабль на орбите ИСМ стыкуется с грузовым кораблем. Длительность пилотируемой экспедиции равна 380 суткам. Суммарные энергетические затраты пилотируемого корабля оцениваются в 21 км/с.

Однокорабельная схема полета экспедиционного комплекса с использованием маршевой двигательной установки «малой» тяги (существенно сокращается расход топлива; необходимо включение в состав комплекса мощной энергоустановки — ядерной или солнечной).

Маневр отлета с орбиты ИСЗ на межпланетную траекторию полета к Марсу, маневр перехода на орбиту ИСМ и разгон с нее для обратного



Однокорабельная схема полета с использованием маршевой ДУ «малой» тяги.

Таблица

Схема полета: тип маршевой ДУ	Длительность экспедиции, сут.	Энергетические затраты, км/с	Ориентировочный срок осуществления экспедиции (год)	Стартовая масса (на ОИСЗ), т
«Классическая»; ЖРД	810—1000	8,0	2005	1500
С попутным облетом Венеры; ЖРД	600	10,0	2005	2200
ЯРД	600	10,0	2010—2015	1000
Двухкорабельная; ЯРД	400	15,0	2010—2015	2×500
С «малой» тягой; ЭРД (ЯЭУ или СЭУ)	650		2015—2020	400

Принятые обозначения:
ЖРД — жидкостный ракетный двигатель,
ЯРД — ядерный ракетный двигатель,
ЭРД — электрический ракетный двигатель,
ЯЭУ — ядерная энергоустановка,
СЭУ — солнечная энергоустановка.

полета представляют собой медленно раскручивающиеся или скручивающиеся спирали. На межпланетных участках полета двигательная установка «малой» тяги работает на участках, примыкающих к орбитам планет, а также в районе перигелия перелетной траектории. Суммарная длительность экспедиции — 650 суток. При электрической мощности энергоустановки в 10 МВт время работы ДУ составит 300 суток. Расход топлива — 600 кг/сут, тяга ЭРД — 400 Н, масса ЭЯРДУ — около 50 т. Начальное ускорение — 0,8—1,0 мм/$с^2$.

В 70—80-х годах в СССР и США были разработаны проекты марсианского экспедиционного комплекса, совершающего полет по вышеприведенным схемам. В приведенной таблице даны начальные массы МЭК на низкой опорной орбите ИСЗ при следующих исходных данных: численность экипажа — 5 человек, масса межпланетного орбитального корабля — 80 т, масса посадочного корабля — 60 т, возвращение экипажа на Землю выполняется в спускаемом аппарате с подлетной траектории.

Учеными и инженерами в настоящее время изучаются разнообразные схемы полета, отличающиеся рядом особенностей. К ним относятся:

— комбинация различных типов маршевой ДУ;

— замена ракетодинамического торможения у Марса и Земли на аэродинамическое;

— использование произведенного на поверхности Марса или его спутников топлива для обратного полета к Земле;

— дублирование числа модулей и двигательных установок для повышения надежности и безопасности полета и др.

(Окончание следует)

Заочная аэрокосмическая школа

Заочная аэрокосмическая школа (ЗАКШ) Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества (ВАКО) «Союз» проводит конкурсный набор учащихся в 9, 10 и 11 классы на 1991/92 учебный год.

Основная цель школы — помочь в понимании физических принципов ракетостроения и космонавтики, в развитии интереса к проблемам освоения космического пространства, а также в расширении знаний по физике и математике и повышении общей эрудиции. Особенно полезным будет обучение в школе для тех, кто собирается поступать в вузы аэрокосмического профиля.

Обучение в школе — для выдержавших конкурсные вступительные экзамены — индивидуальное и бесплатное.

В течение года учащиеся Заочной аэрокосмической школы будут получать методические пособия, состоящие из двух частей. Первая часть — задание, соответствующие одному из разделов Программы школы (в том числе 6—10 вопросов и задач для проверки глубины освоения данного материала и список литературы, рекомендуемой для расширения знаний и повышения эрудиции). Вторая часть — материалы ознакомительного характера для лучшей ориентации в потоке информации по аэрофизике и исследованию космического пространства.

Кроме того, в течение года учащиеся будут получать «Космическую экспресс-информацию», составленную из наиболее значительных событий в космонавтике 1991 года.

Задания и пособия школы подготовлены квалифицированными специалистами — сотрудниками и аспирантами Московского физико-технического института, активно работающими в одном из направлений космонавтики и ракетной техники.

Программа школы состоит из шести разделов:

1) Ракетная техника.

2) Движение космических аппаратов в гравитационных полях.

3) Движение космических и летательных аппаратов в атмосфере.

4) Исследования Земли из космоса.

5) Исследования Космоса из космоса.

6) Перспективная космонавтика.

Полный курс обучения — 3 года. При условии успешного окончания обучения выпускники школы получают диплом. Учащиеся, поступающие в школу в 10 и 11 классы, имеют возможность окончить школу по сокращенной программе.

Конкурсный набор в школу проводится с целью зачисления учащихся на бесплатную форму обучения. Не прошедшие конкурса могут стать учениками школы по платной форме обучения. Все необходимые сведения по этому вопросу будут сообщены после получения приемной комиссией решения вступительного задания. Кроме того, все желающие — не ученики школы — могут в течение года получать методические пособия школы за небольшую плату.

Для участия в конкурсе необходимо выполнить вступительное задание. Это задание — решение задач по физике — каждый ученик выполняет *самостоятельно*. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь — по одной задаче на каждом листе тетради, с сохранением порядка задач в задании.

На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Подробный домашний адрес (с индексом), телефон (если есть).
3. Номер школы и класс, в котором вы учитесь.
4. Любые дополнительные сообщения о себе (сведения о родителях, участие в олимпиадах, обучение в других заочных школах, членство в ВАКО «Союз» и т. п.).

Внимание: п. 4 заполнять не обязательно.

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п	
Оценка	

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом. Тетрадь с выполненным заданием вышлите простой бандеролью по адресу:

141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований (с пометкой «Школа»).

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1991 года.* Вступительное задание обратно не высылается. О решении приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 мая 1991 года.

Ниже приводится вступительное задание по физике. Задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов (одиннадцатилетней школы), 4—9 — для учащихся девятых классов, 7—12 — для десятых классов. Для участия в конкурсе не обязательно решать все предлагаемые задачи.

Вступительное задание

1. Парашютист, выпрыгнув из корзины аэростата, находящегося на высоте $H=2$ км, в течение $t_1=30$ с падал не открывая парашюта с вертикальной скоростью $v_1=40$ м с. Остаток пути он опускался с вертикальной скоростью $v_2=8$ м/с. Кроме того, на протяжении всего полета боковой ветер сносил его со скоростью $v_3=4$ м/с. Найдите длину траектории спуска парашютиста.

2. Две электрички, длиной $L=200$ м каждая, движутся навстречу друг другу. Скорость одной из них меньше, чем другой, и равна $v_1=40$ км/ч. Расстояние между местом встречи первых вагонов и местом расставания последних вагонов $d=40$ м. Определите скорость второй электрички.

3. В два сосуда, в каждом из которых находится $M=300$ г воды при температуре $t=80$ °С, опускают по кипятильнику. Мощность первого кипятильника вдвое больше мощности второго. Сколько воды выкипит в первом сосуде до начала кипения во втором? Удельная теплота парообразования воды $L=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость $c=4200$ Дж/(кг·°С).

4. В пластмассовом кубике со стороной $d=6$ см имеется полость. При полном погружении в воду кубик находится в равновесии, т. е. не тонет и не всплывает. Определите объем полости, если известно следующее соотношение между плотностями воды и пластмассы: $\rho_в=7/8\rho_п$.

5. Кольцо из медной проволоки имеет радиус $R=30$ см. Концы проволоки спаяны. Определите электрическое сопротивление между диаметрально противоположными точками кольца. Площадь поперечного сечения проволоки $S=1$ мм², удельное сопротивление меди $\rho=1{,}8\cdot10^{-8}$ Ом·м.

6. В калориметре находится $M=200$ г воды при температуре $t_1=5$ °С. В воду бросают $m=20$ г льда при температуре таяния льда $t_2=0$ °С. Какая температура будет в калориметре после установления теплового равновесия? Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг.

7. Троллейбус, двигаясь между остановками, сначала в течение $t_1=10$ с разгоняется с постоянным ускорением, затем в течение $t_2=100$ с движется с постоянной скоростью и, наконец, в течение $t_3=10$ с тормозит с постоянным ускорением. Движение всюду прямолинейное. Длина всего пути $L=1{,}1$ км. Определите скорость троллейбуса на участке движения с постоянной скоростью.

8. Подача теннисного мяча осуществляется с задней линии корта в горизонтальном направлении на высоте $H=2$ м. Высота сетки $h=1$ м, общая длина корта $L=20$ м. При каких скоростях подачи мяч попадет на поле противника? Сопротиалением воздуха пренебречь.

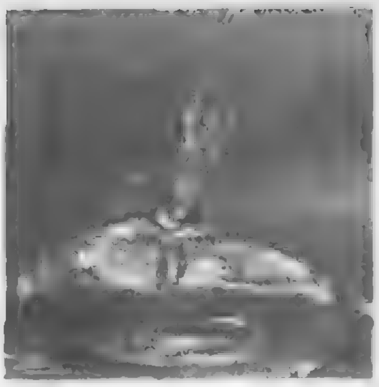
9. Два конца графитового стержня, имеющего длину $L=50$ см и площадь поперечного сечения $S=1$ мм², соединены с одним полюсом батареи с ЭДС $\mathscr{E}=4{,}5$ В. По стержню может перемещаться контакт, соединенный через резистор сопротивлением $R=3$ Ом со вторым полюсом батареи. Определите минимальное значение силы тока в резисторе. Удельное сопротивление графита $\rho=1{,}2\times10^{-5}$ Ом·м.

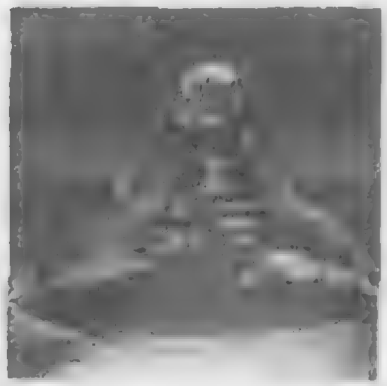
(Окончание см. на с. 73)

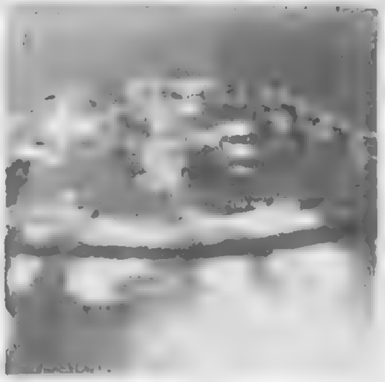
Падающая капля и воздушный пузырек

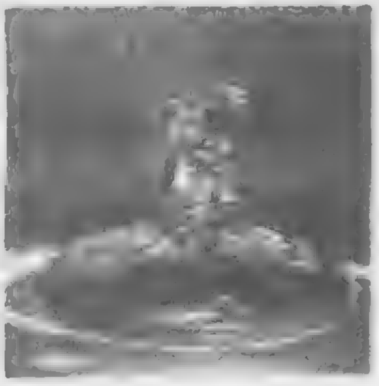
Фотографии, которые вы здесь видите, сделал и прислал нам в редакцию ученик средней школы № 542 при Московском инженерно-физическом институте Константин Юфряков (сейчас он уже студент).

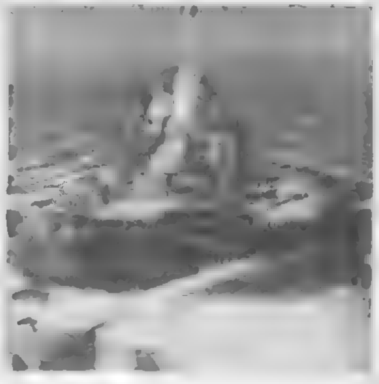
На снимках запечатлен процесс образования воздушного пузырька при падении капли в воду. Главная проблема при фотографировании таких быстропротекающих процессов — вовремя включить фотовспышку. Автор успешно справился с этой задачей с помощью специально разработанной им установки.











XXIV Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. РЕЗНИЧЕНКО

С 18 по 25 апреля в г. Ашхабаде состоялся заключительный этап XXIV Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В олимпиаде приняли участие 165 учащихся, представлявших команды 14 союзных республик (команда Литвы не участвовала), городов Москвы, Ленинграда, Ашхабада и физико-математических школ при университетах Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Киева, Еревана, Алма-Аты, Ташкента. Отметим, что команда АзССР была сформирована из двух школьников по итогам участия в конкурсе решения задач журнала «Квант».

Как обычно, участникам олимпиады было предложено на двух турах по четыре задачи. Каждая задача олимпиады оценивалась в баллах с тем расчетом, чтобы суммарное число баллов в туре по каждому классу было равно тридцати (см. таблицу 1).

По итогам олимпиады дипломы I, II и III степени и грамоты были вручены 101 школьнику. В таблице 2 приведены сведения о числе призеров по каждому классу с указанием количества баллов, набранных по итогам обоих туров. Кроме того, 26 школьников были награждены специальными призами научных и общественных организаций.

В программе олимпиады, наряду с основными соревнованиями, уже второй раз для всех желающих проходил компьютерный турнир, в котором приняли участие 105 школьников, состоялся традиционный «математический бой» между участниками олимпиады и жюри.

В рамках насыщенной культурной программы, как всегда, интересно и увлекательно прошла встреча с членами редколлегии журнала «Квант».

Хочется поблагодарить хозяев олимпиады, не пожалевших времени и сил на ее организацию. Олимпиада прошла на высоком уровне. А всех ее участников мы поздравляем и желаем новых успехов.

Задачи

9 класс

1. Докажите, что для любого числа t выполняется неравенство $t^4 - t + \frac{1}{2} > 0$.

И. Воронович

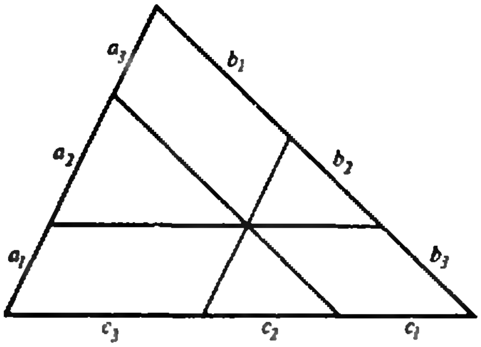
2. В выпуклом четырехугольнике прямая, проходящая через середины двух противопо-

Таблица 1

Задачи / Класс	1	2	3	4	5	6	7	8
9	6	6	9	9	6	6	8	10
10	6	7	8	9	5	7	8	10
11	6	7	8	9	5	8	10	7

Таблица 2

Класс / Премия	9	10	11
I	4 (46—59)	2 (53—57)	6 (49—60)
II	9 (34—41)	7 (39—46)	8 (41—45)
III	14 (25—31)	8 (25—31)	8 (30—33)
Грамота	9 (20—24)	14 (18—23)	12 (20—27)



ложных сторон, образует равные углы с диагоналями четырехугольника. Докажите, что диагонали равны.

А. Анджанс

3*. В сенате 30 сенаторов. Каждые два из них либо дружат, либо враждуют. Каждый сенатор враждует ровно с шестью другими. Каждые три сенатора образуют комиссию. Найдите общее число таких комиссий, в которых все три члена попарно дружат, либо все три попарно враждуют.

Д. Фомин

4. а) Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на 15 равных многоугольников, не являющихся прямоугольниками?

б) Существует ли квадрат с указанным свойством?

С. Елисеев

5. Через произвольную точку внутри треугольника проведены три прямые параллельно его сторонам. Они делят стороны на отрезки длины a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3, как указано на рисунке. Докажите, что $a_1b_1c_1=a_2b_2c_2=a_3b_3c_3$.

Б. Чиник

6. Двое играют в следующую игру. Первый называет три любые отличные от нуля числа, а второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек в выражении $*x^2+*x+*$. Первый игрок считается выигравшим, если полученный квадратный трехчлен имеет два различных рациональных корня. Докажите, что он может добиться победы.

А. Берзиньш

7. Найдите максимум выражения $|\ldots||x_1-x_2|-x_3|-\ldots-x_{1990}|$, где x_1, x_2, ..., x_{1990} — различные натуральные числа от 1 до 1990.

8. Правильный треугольник со стороной n разбит прямыми, параллельными сторонам треугольника, на n^2 правильных треугольников со стороной 1. По сторонам полученных треугольников проведена незамкнутая ломаная, проходящая через все вершины треугольников разбиения ровно по одному разу. Докажите, что имеется не менее n пар соседних звеньев ломаной, образующих между собой острый угол.

А. Берзиньш

10 класс

1. Можно ли раскрасить клетки таблицы 1990×1990 в черный и белый цвета так, чтобы симметричные относительно центра таблицы клетки были окрашены в разные цвета, а в любой строке и в любом столбце таблицы было поровну черных и белых клеток?

Н. Агаханов

2. Докажите, что для положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n, сумма которых равна 1, справедливо неравенство

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Д. Терёшин

3. На стороне AB выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка E, отличная от точек A и B. Отрезки AC и DE пересекаются в точке F. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC, CDF и BDE, имеют общую точку.

Л. Купцов

4. В концах отрезка $[0;\ 1]$ сидят два кузнечика. Внутри отрезка отмечены несколько точек. Кузнечики умеют прыгать по отрезку через отмеченные точки: положения кузнечика до прыжка и после прыжка симметричны относительно отмеченной точки, через которую прыгает кузнечик, причем разрешаются только прыжки, не выводящие из отрезка $[0;\ 1]$. Ход состоит в том, что каждый из кузнечиков независимо от другого или прыгает, или остается на месте. За какое наименьшее число ходов кузнечики всегда могут оказаться вместе на одном из отрезков, на которые разбивают отрезок $[0;\ 1]$ отмеченные точки?

С. Конягин

5. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\ldots+\left[\frac{x}{10!}\right]=1001.$$

С. Резниченко

6*. На сторонах A_1A_2 и A_2A_3 правильного $2n$-угольника $A_1A_2\ldots A_{2n}$ взяты точки K и N соответственно так, что $\angle KA_{n+2}N=\pi/(2n)$. Докажите, что NA_{n+2} биссектриса угла KNA_3.

Н. Агаханов, Д. Терёшин, Д. Фомин

7. В выпуклом многоугольнике проведены все диагонали. Каждая сторона и каждая диагональ многоугольника покрашены в один из цветов так, что не существует замкнутой ломаной с вершинами в вершинах многоугольника, у которой все звенья одного цвета. При каком наибольшем числе вершин это возможно?

А. Анджанс, Д. Флаас

8*. На плоскости заданы точка A_0 и n векторов $\vec{a}_1$, ..., $\vec{a}_n$, сумма которых равна $\vec{0}$. Каждая перестановка $\vec{a}_{i_1}$, ..., $\vec{a}_{i_n}$ этих векторов определяет множество точек A_1, A_2, ..., $A_n=A_0$ так, что $\vec{a}_{i_1}=\overrightarrow{A_0A_1}$, $\vec{a}_{i_2}=\overrightarrow{A_1A_2}$, ..., $\vec{a}_{i_n}=\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$. Докажите, что существует перестановка, при

Задачи, отмеченные звездочкой, вошли в «Задачник «Кванта».

которой все точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$ лежат внутри или на сторонах некоторого угла в 60° с вершиной в точке A_0.

С. Августинович, С. Севастьянов

11 класс

1. Даны две пересекающиеся окружности, вписанные в угол с вершиной A, причем B — одна из точек пересечения этих окружностей, а C и D — точки их касания с одной стороной угла. Докажите, что прямая AB касается окружности, проходящей через точки B, C, D.

И. Шарыгин

2*. Имеется 1990 кучек, состоящих из 1, 2, ..., 1990 камней. За один шаг разрешается выбросить из любого набора кучек по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?

Н. Агаханов

3. У квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ все коэффициенты положительны и $a+b+c=1$. Докажите, что для любых положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих равенству $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n=1$, выполнено неравенство

$$f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n) \geqslant 1.$$

Д. Фомин

4. Куб с ребром 100 сложен из миллиона единичных кубиков, ребра которых образуют каркас. Любая тройка взаимно перпендикулярных единичных ребер с одной общей вершиной называется репером. Можно ли весь каркас разбить на реперы, не имеющие общих ребер?

А. Берзиньш

5. При каких натуральных n число

$$3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$$

является составным?

Д. Фомин

6*. Пусть d — наименьшее из расстояний между скрещивающимися ребрами произвольного тетраэдра, а h — наименьшая из его высот. Докажите, что $2d > h$.

А. Скопенков

7*. На доске написано уравнение

$$x^3+\ldots x^2+\ldots x+\ldots=0.$$

Двое играют в следующую игру: первый называет любое число, а второй ставит его на любое из трех пустых мест; затем снова называет любое число, а второй ставит его на любое из двух оставшихся свободных мест; наконец, первый ставит любое число на последнее место. Всегда ли первый может добиться, что получившееся уравнение имело три различных целых корня?

А. Берзиньш

8. Даны $4m$ монет, из которых ровно половина являются фальшивыми. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже, но они легче настоящих. Как не более чем на $3m$ взвешиваний на чашечных весах без гирь определить все фальшивые монеты?

А. Курляндчик, Д. Фомин

XXIV Всесоюзная олимпиада по физике

А. ЗИЛЬБЕРМАН

Заключительный тур Всесоюзной олимпиады школьников по физике в этом году проходил в Вологде. Собственно, олимпиаду предполагалось провести в Душанбе, но у устроителей возникли трудности, и предложение вологжан оказалось очень своевременным. Проведение Всесоюзной олимпиады всегда сопряжено с многочисленными хлопотами для организаторов на местах, и Оргкомитет очень благодарен представителям Вологды — если бы не они, олимпиада могла бы оказаться под угрозой.

В Вологду приехали команды всех республик, кроме Азербайджана и Грузии, где по разным причинам не были проведены республиканские туры олимпиады (школьники, приехавшие из Тбилиси, и некоторые другие участники выступали на олимпиаде в Вологде вне конкурса).

Торжественное открытие олимпиады состоялось 19 апреля, а 20 апреля участники уже решали задачи теоретического тура. Как обычно, в 9 классе (бывшем восьмом) давалось четыре задачи и тур продолжался четыре часа, а в 10 и 11 классах — пять задач на пять часов. Вот условия этих задач (часть их, по традиции, уже опубликована в рубрике «Задачник «Кванта»).

Теоретический тур

9 класс

1. С помощью термометра измеряют попеременно температуры жидкостей, налитых в два калориметра. Показания термометра: 80, 16, 78, 19 °С. Что покажет термометр после следующего переноса? После большого числа переносов?

2. На горизонтальной доске с коэффициентом трения μ лежит кусок мела. Доске

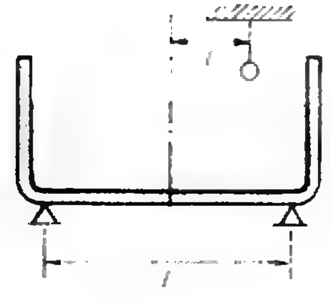


Рис. 1.

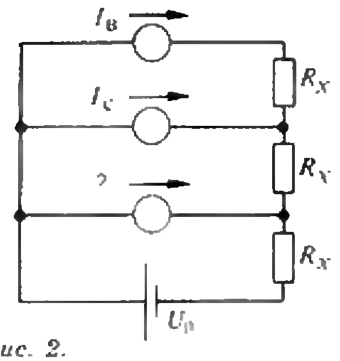


Рис. 2.

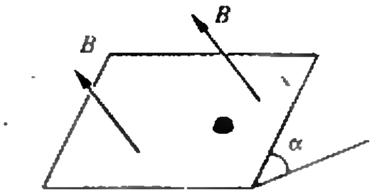


Рис. 3.

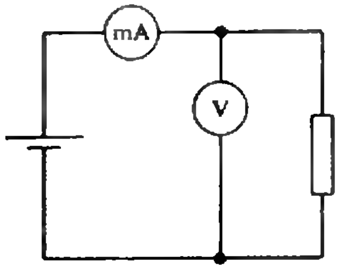


Рис. 4.

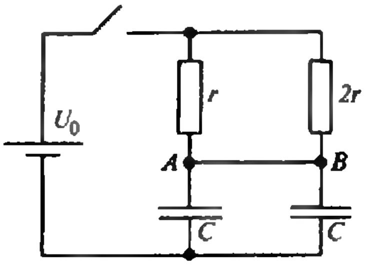


Рис. 5.

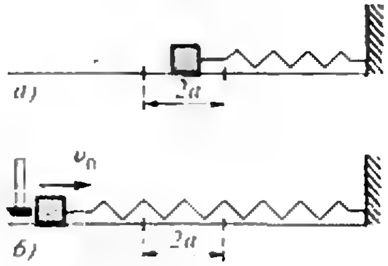


Рис. 6.

мгновенно придают горизонтальную скорость и останавливают тоже мгновенно через время t после первого толчка. Найдите длину следа мела на доске и полное смещение мела относительно доски.

3. Прямоугольный сосуд с водой стоит на двух опорах, разнесенных на расстояние L друг от друга (рис. 1). Над сосудом на перекладине подвешен на нити кусок свинца массой M на расстоянии l от центра сосуда. Силы реакции в опорах равны N_1 и N_2. Нить удлиняют так, что свинец погружается в воду. Какими станут после этого силы в опорах? Плотность свинца в n раз больше плотности воды.

4. В схеме на рисунке 2 все три амперметра одинаковые. Резисторы R_x также не отличаются друг от друга. Верхний амперметр показывает ток $I_в=1$ мА, средний — ток $I_с=4$ мА. Напряжение батарейки $U_0=4{,}5$ В. Найдите ток нижнего амперметра. Чему равно сопротивление R_x?

10 класс

1. См. задачу 3 для 9 класса.

2. В морозную осеннюю ночь на спокойной поверхности озера начинает нарастать лед, и за 10 часов он достигает толщины 10 см. Какой толщины достигнет лед, если такая температура продержится без изменений в течение 1000 часов? Считайте теплопроводность льда намного большей теплопроводности воды. Озеро очень глубокое.

3. На наклонной плоскости с углом α и коэффициентом трения μ находится небольшая шайба массой M, на которую помещен заряд Q. Индукция однородного магнитного поля B перпендикулярна наклонной плоскости (рис. 3). Шайбу отпускают без начальной скорости. Определите величину и направление установившейся скорости шайбы.

4. В схеме на рисунке 4 миллиамперметр показывает ток $I=10$ мА, а вольтметр — напряжение $U=2$ В. После того как резистор отключили от вольтметра и подключили параллельно миллиамперметру, его показания уменьшились до $I'=2{,}5$ мА. Определите по этим данным сопротивление резистора. Чему равно сопротивление вольтметра? Батарейку считать идеальной.

5. В схеме на рисунке 5 емкости конденсаторов одинаковы и равны C, сопротивления резисторов r и $2r$, напряжение батарейки U_0. Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа? Какой заряд протек бы по перемычке, если бы между точками A и B был включен резистор сопротивлением R? Все элементы цепи считать идеальными.

11 класс

1. Гонки мотоциклистов происходят по узкой круговой трассе. Трогаясь с места, мотоциклист стремится как можно быстрее набрать скорость. Какую часть круга он пройдет к моменту достижения максимальной скорости?

2. Бытовой холодильник поддерживает в камере постоянную температуру —12 °С. При температуре в комнате +25 °С его мотор включается каждые 8 минут и, проработав 5 минут, выключается. Считая холодильник идеальной тепловой машиной, работающей по обращенному (холодильному) циклу, предскажите, как часто и на какое время он станет включаться, если температура в комнате понизится до +15 °С. При какой максимальной температуре в комнате холодильник сможет поддерживать в камере заданную температуру?

3. См. задачу 5 для 10 класса.

4. Период свободных колебаний груза, висящего на пружине, оказался равным T_0.

Затем груз расположили на горизонтальной поверхности с трением (рис. 6, *а*) и, смещая груз влево и вправо, измерили ширину области $2a$, в которой груз может находиться в равновесии под действием силы трения и упругой силы пружины (так называемая зона застоя). В следующем опыте груз сместили из зоны застоя на расстояние, существенно превышающее a, и наблюдали колебания груза при наличии трения. Каков будет период колебаний в этом случае?

Теперь поставим опыт иначе. Всякий раз, когда груз при колебаниях оказывается в крайнем левом положении, по грузу стукают молоточком и его скорость после удара становится равной v_0 (рис. 6, *б*). Какова будет амплитуда установившихся колебаний груза? Предполагая, что амплитуда установившихся колебаний значительно больше ширины зоны застоя, определите, на сколько период установившихся колебаний отличается от периода свободных колебаний T_0.

5. На противоположных стенах комнаты висят друг против друга два одинаковых круглых зеркала диаметром 1 м. Наблюдатель находится на оси симметрии оптической системы и смотрит на одно из зеркал. Сколько «вложенных» отражений он сможет насчитать, если угловое разрешение его глаза 1 минута? Зеркала находятся на расстоянии 5 м друг от друга. Размерами головы наблюдателя можете пренебречь.

22 апреля прошел экспериментальный тур. Каждому из участников было предложено по две задачи. Коротко расскажем о них.

В первой задаче для 9 класса был дан высокий прямоугольный брусок из дерева и нужно было измерить два значения коэффициента трения бруска о стол — вдоль волокон (боковая поверхность) и поперек (торец бруска). Стол наклонять не разрешалось; в оборудование входили нитка, кнопка канцелярская, заточенный карандаш и миллиметровая бумага. Задача довольно интересная, фактически это даже две задачи. Когда брусок лежит на столе, можно кнопкой прикрепить к его торцу нить и тянуть ее под углом к горизонту так, чтобы груз ехал, а его край не приподнимался. Если брусок стоит вертикально (измерение трения поперек волокон), можно толкать его острым концом карандаша — так, чтобы он ехал, но не падал. Ясно, что, найдя самую высокую из возможных точек упора, можно вычислить коэффициент трения. Размеры бруска и углы можно мерить при помощи миллиметровки. Для выбранного бруска значения коэффициента трения вдоль и поперек волокон отличались примерно на 10—15 %, точность измерений оказалась вполне достаточной для того, чтобы эту разницу уверенно определить. Такую работу можно легко поставить в школьном кабинете физики.

Во второй задаче нужно было измерять малые сопротивления. Оборудование включало миллиамперметр на 5 мА, батарейку 4,5 В, потенциометр сопротивлением 1 кОм, резисторы 2 Ом и 3 Ом — их сопротивления считались известными, резистор с неизвестным сопротивлением и кусок проволоки. Требовалось найти сопротивление неизвестного резистора (оно составляло 1 Ом) и удельное сопротивление материала проволоки (устроители не пожалели для участников олимпиады нескольких реостатов и размотали их на кусочки). Диаметр проволоки можно было измерить обычным образом — плотно намотав несколько витков на карандаш. Самое простое решение этой задачи — использование малых сопротивлений как шунтов к миллиамперметру. Включая известные резисторы поочередно, а также параллельно и последовательно друг с другом, можно проградуировать шкалу в омах и довольно точно измерять неизвестные сопротивления, которые укладываются в полученный диапазон (в этой работе так и было).

В первой задаче для 10 класса нужно было определить плотность неизвестной жидкости (чуть подкрашенный концентрированный раствор поваренной соли в воде) при помощи небольшой колбы известного объема с тонким длинным горлышком и миллиметровки. Неизвестная жидкость была налита в один большой сосуд, обычная вода — в другой. Один из способов измерения: сделать из колбочки ареометр, налив туда некоторое количество жидкости и пустив ее плавать в сосуде с водой. Количество жидкости нужно было подобрать так, чтобы над поверхностью торчало только горлышко колбы, диаметр которого легко измерить,— в этом случае можно было произвести теоретический расчет плотности. Для достижения приемлемой точности приходилось учитывать и поверхностные эффекты. В целом задача была не очень сложной, но требовала аккуратности в измерениях.

Вторая задача была сложнее. Нужно было определить зависимость от температуры обратного тока маломощного германиевого диода (диод Д9В) в диапазоне 20—70 °С. Оборудование: батарейка 4,5 В, микроамперметр на 100 мкА, конденсатор (его емкость составляла от 3,3 до 4,7 мкФ), сосуд с горячей водой, термометр, нить с грузиком для изготовления маятника, миллиметровка. В условии задачи было сказано, что обратный ток мало изменяется в диапазоне обратных напряжений от 1 до 4,5 В. Еще в условии было предупреждение о том, что вода, хотя и не очень хороший, но все же проводник. Трудность была в том, что при небольших температурах обратный ток диода составлял всего 2—3 мкА и измерить его непосредственно микроамперметром (точность которого 4 % — прибор стандартный, школьный) было невозможно. Возможный вариант — заряжать обратным током конденсатор в течение заданного отрезка времени (тут и пригодится маятник), а затем наблюдать отброс стрелки микроамперметра при подключении к нему заряженного конденсатора. При других температурах можно было менять время заряда для получения такого же отброса стрелки, при этом не нужно проверять пропорциональность отброса и протекшего заряда. Впрочем, можно установить зависимость отброса стрелки от заряда конденсатора при изменении времени заряда. Для упрощения расчетов существенно указание о постоянстве обратного тока при заданной температуре. При температурах 50—70 °С ток легко измерить непосредственно. Полученные двумя разными способами части графика можно «сшить» с учетом того, что они плавно переходят одна в другую. Нужно сказать, что мало кто из участников сделал эту задачу полностью. Большинство померили, что сумели, просто микроамперметром и сохранили в неприкосновенности конденсатор, нитку и грузик (жюри не присуждало баллов за экономию материалов и приборов!).

В первой задаче для 11 класса участнику предлагалось измерить температуру его ладоней при помощи большого сосуда с водой комнатной температуры (эта температура была известна), маленькой колбы с длинным тонким горлышком (объем колбы до риски на горлышке был задан) и миллиметровки. Один из возможных способов: нагретую в ладонях колбу опустить вниз горлышком в воду, а затем дать ей остыть и измерить количество воды, вошедшей в горлышко. Эти измерения требовали достаточной аккуратности и грамотности. Отметим, что при помощи такого простого оборудования можно довольно точно измерять небольшие разницы температур.

Вторая задача была сложнее — нужно было измерить емкость конденсатора при помощи следующего оборудования: источник переменного напряжения, частота которого участникам не была известна, миллиамперметр переменного тока на 5 мА (детекторной системы), конденсатор известной емкости, стержень из материала с большой магнитной проницаемостью (ферритовая антенна для радиоприемника), тонкий провод в изоляции для намотки катушки. Источник переменного напряжения имел довольно большое внутреннее сопротивление (о чем участникам было известно); довольно велико было и сопротивление миллиамперметра (причем у прибора детекторной системы это сопротивление сильно зависит от протекающего по нему тока — об этом многие из участников не знали). Из-за этого нельзя было воспользоваться прямыми измерениями токов в цепи с конденсаторами. Кстати, емкости конденсаторов были выбраны такими, что последовательное подключение конденсатора к миллиамперметру почти не изменяло тока в цепи. Для получения хороших результатов нужно было использовать резонанс — например, в параллельном контуре, сопротивление которого сильно возрастает на резонансной частоте. Подключив такой контур последовательно с миллиамперметром к источнику, можно было бы добиться минимального тока в цепи. Для этого следует намотать на ферритовый стержень катушку, подключить ее параллельно конденсатору и заметить число витков при резонансе. То же самое можно повторить с другим конденсатором. Дальше нужно учесть, что при использовании длинного стержня с большой магнитной проницаемостью и катушки, витки которой расположены рядом друг с другом (но не «виток к витку», а «внавал»), силовые линии поля всех витков пронизывают друг друга и магнитный поток оказывается пропорциональным квадрату числа витков катушки. Резонанс в этой цепи фиксировался довольно точно — плюс-минус один виток уже чувствовался и точность измерений получалась хорошей. Достоинство такого метода состоит в том, что миллиамперметр используется только как индикатор резонанса по минимуму тока и погрешность его шкалы не увеличивает ошибки измерений.

Проверка работ проводилась как обычно: работы теоретического тура «шифровались», при этом проверяющие не знали, чьи именно работы они оценивают; каждая из работ полностью проверялась как минимум дважды, разными членами жюри — для большей объективности. Кроме того, участникам подробно рассказывались критерии оценки задач (конечно, после тура), и они могли при необходимости апеллировать к жюри, если считали полученные ими оценки несправедливыми. Можно было апеллировать и по результатам проверки экспериментального тура.

Победители олимпиады были награждены дипломами и различными специальными призами. Специальный приз имени академика И. К. Кикоина — микрокомпьютер МК-85 — был присужден за лучшую экспериментальную работу девятикласснику из 145 школы г. Киева Николаю Ивченко. Хочется специально отметить чрезвычайно приятное событие: впервые за много лет дипломом первой степени была награждена представительница прекрасного пола — Аня Лемперт из подмосковного поселка Черноголовка, которая не только хорошо решила теоретические задачи, но и превосходно выступила в экспериментальном туре.

Хозяева олимпиады постарались как следует развлечь участников. Ребята побывали на вечерах отдыха в школах города, приняли участие в автобусной экскурсии по историческим местам области, посетили театр, смотрели концерт самодеятельности на открытии, а также развлекались сами как могли. Была и встреча с представителями редколлегии журнала «Квант», на которой к журналу были предъявлены многочисленные суровые требования (к счастью, они оказались взаимоисключающими, так что за «Квант» можно не опасаться). Приехавшие на олимпиаду студенты — сами в прошлом участники и победители всевозможных олимпиад, активно общались с ребятами, давая им множество полезных советов и рекомендаций. При этом каждый участник мог своими глазами видеть, каких прекрасных результатов можно добиться (конечно, если хорошо себя вести).

Следующую Всесоюзную олимпиаду по физике пригласил Ереван.

Мы желаем всем участникам олимпиады больших успехов!

III Всесоюзная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН,
кандидат физико-математических наук
С. РАКОВ

Отрадным является тот факт, что и олимпиада среди школьников по информатике заняла достойное место среди других олимпиад. В этом году заключительный этап III Всесоюзной олимпиады проходил с 18 по 25 апреля на Украине в г. Харькове. В олимпиаде принимали участие 87 школьников практически из всех союзных республик, а также городов Москвы, Ленинграда, города-устроителя олимпиады Харькова и МПС.

На организационном заседании жюри олимпиады, которое возглавил академик АН УССР В. Л. Рвачев, было принято принципиально новое решение о проведении двух туров олимпиады с использованием компьютеров. Это решение вызвало неоднозначную оценку среди руководителей команд. Некоторые из них утверждали, что принятый на прошлых олимпиадах порядок проведения туров (I тур — теоретический, без использования компьютеров; II тур — практический, с их использованием) позволяет, с одной стороны, уравнять шансы на победу школьников, имеющих различные возможности доступа к персональным компьютерам, а с другой стороны, выделить ребят, которые имеют хорошую теоретическую подготовку, а не быстро нажимают на клавиши. Однако большинство членов жюри и руководителей команд поддержали принятое решение. Основные доводы заключались в следующем:

— в процессе решения задач по информатике этапы формализации, разработки наилучшего алгоритма и его реализации на персональном компьютере взаимосвязаны и неотделимы друг от друга; более того, разработка алгоритма не может осуществляться без учета возможностей конкретной ЭВМ;

— техника работы за компьютером является неотъемлемой частью решения задачи по информатике;

— от школьников трудно требовать разработки новых алгоритмов, основанных на серьезном теоретическом анализе известных алгоритмов; что касается оценок предлагаемых ими алгоритмов, то проведение тура с использованием компьютеров также предполагает необходимость такого анализа;

— уровень Всесоюзных олимпиад по информатике должен соответствовать международным олимпиадам и если раньше проведение теоретического тура, равно как и введение в стране безкомпьютерного обучения информатике в средней школе, было связано с отсутствием необходимой вычислительной техники, то сейчас положение с персональными компьютерами существенно улучшилось, и в каждой республике есть все необходимые условия для подготовки своих команд с учетом названных требований;

— введение компьютерных туров нисколько не ограничивает класс предлагаемых на олимпиаде задач, так как в этом случае появляется необходимость самим школьникам определять, в какой мере они должны использовать компьютер для получения требуемого результата;

— значительно повышается уровень объективности оценок за счет использования компьютеров при проверке представленных участниками решений.

Итак, в этом году проводились оба тура с использованием персональных компьютеров. Однако в качестве компромисса жюри олимпиады приняло такое решение: при проверке работ в первом туре акцент делать на оценку предлагаемого алгоритма решения задачи, а во втором туре — на реализацию алгоритма. Этим также определялось число задач, предлагаемых на разных турах. В частности, на первом туре было предложено две задачи, на втором — одна. Приведем условия задач.

Первый тур

Т 1.1. Круг разрезан несамопересекающейся ломаной, координаты вершин которой заданы парами натуральных чисел $(X_1;\ Y_1),\ldots,(X_k;\ Y_k)$. Первая и последняя вершины лежат на границе круга, а остальные — внутри него. Определить, можно ли разъединить две получившиеся части круга (выход из плоскости не допускается).

П. Панков

Т 1.2. Какое минимальное количество одинаковых $(P,\ Q)$-коней требуется для контроля:

а) ограниченной шахматной доски размером $M\times N$ клеток;

б) бесконечной полосы шириной M клеток;

в) бесконечной плоскости?

Примечание 1. (P, Q)-конь — фигура, которая за один ход перемещается на P клеток по горизонтали и Q клеток по вертикали или на P клеток по вертикали и Q клеток по горизонтали. Например, (1, 2)-конь — это обычный шахматный конь.

Примечание 2. Фигура или группа фигур контролирует поле, если каждая клетка поля доступна за один или несколько ходов хотя бы одной фигуре. Например, для контроля стандартной доски размером 8×8 требуется два (1, 1)-коня.

Я. Зайдельман

Второй тур

Т 2. Обозначим

$$S(N, a, b)=\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{a^{[\log_b k]}},$$

где

$$\sum_{k=1}^{N}x_k=x_1+x_2+\ldots+x_N,$$

$[\log_b k]$ означает целую часть $\log_b k$, через $\log_b k$ обозначено такое число z, что $b^z=k$.

Требуется составить программу, которая выводит с возможно большим числом верных десятичных знаков:

а) $S(100,\ \ 3,\ \ 2)$;

б) $S(100,\ \ 3,\ 1.9)$;

в) $S(100,\ 3.1,\ 1.9)$.

В. Прохоров

Перед каждым туром жюри олимпиады осуществляло выбор задач из пакета, представленного методической комиссией по информатике Гособразования СССР. Читателям журнала будет небезынтересно узнать, какие еще задачи рассматривало жюри. Вот эти задачи.

Задачи для первого тура

1. *Палиндромом* называют последовательность некоторых символов, которая читается одинаково как слева направо, так и справа налево. Предложите алгоритм, позволяющий в заданной строке найти подстроку-палиндром максимальной длины.

В. Бардадым

2. Задана последовательность длины N, состоящая из единиц и нулей. Определить количество M-значных двоичных чисел ($M\leqslant N$), входящих в указанную последовательность, которые делятся на 21.

В. Бардадым

3. Вершины и стороны N-угольника помечены натуральными числами от 1 до $2N$. Если суммы трех чисел, соответствующих каждой стороне, равны, то N-угольник называется *магическим*. Требуется:

а) для заданного натурального N сформировать хотя бы один магический N-угольник;

б) для заданного натурального N сформировать возможно большее число магических N-угольников.

А. Раков

Задачи для второго тура

1. Скала имеет форму тела вращения. Ее основание лежит на плоскости xOy. Каждое звено образуется частью конической поверхности. Гору завершает плато. Требуется написать программу, которая вычисляет кратчайший путь от точки A при основании скалы до точки B на плато. Программа должна проложить маршрут в ответ на вводимые данные:

координаты точек A и B;

количество звеньев N;

радиусы R_i $(i=1,\ldots,N)$ при основании каждого звена;

длины L_i $(i=1,\ldots,N)$ образующих каждого звена.

Радиусы R_i строго монотонно убывают с ростом i. Выполнены соотношения: $L_i\geqslant R_i-R_{i+1}$, $i=1, 2, \ldots, N$; $R_{N+1}=0$; $L_N=R_N$ (N-е звено образует плато). Для каждого звена указывается, куда направлен склон — в гору или под гору — при движении к оси скалы.

Н. Красовский

2. Папа Карло собрал Буратино трехколесный велосипед. Не умея делать круглые колеса, он выпилил их их дерева в виде многоугольников. Заметим, что задние колеса велосипеда жестко закреплены на оси. Буратино взял велосипед и отправился к Мальвине по ровной дороге.

Для исходного положения колес требуется определить:

а) угловую амплитуду (в радианах) качания при езде оси задних колес относительно дороги;

б) как следует повернуть на оси одно заднее колесо относительно другого, чтобы амплитуда этого качания была минимальной;

в) угловую амплитуду качания перекладины, соединяющей переднюю ось с серединой задней, при езде на велосипеде, у которого задняя ось с колесами — конструкция, симметричная относительно плоскости, перпендикулярной оси в ее середине.

Многоугольники колес задаются координатами своих вершин в произвольном порядке. Также задаются расстояние между задними колесами и длина перекладины, упомянутой в пункте (в).

В. Прохоров

Следует отметить заслуги организаторов олимпиады, обеспечивших школьников необходимыми персональными компьютерами и программами. В частности, всем, кто пожелал работать на IBM PC, были предоставлены эти персональные компьютеры. Остальные работали на «Ямахах».

Каждый тур олимпиады жюри оценивало исходя из 100 баллов. При этом первая задача первого тура оценивалась из 40 баллов, а вторая — из 60.

Указания к решениям задач и критерии оценки, составленные авторами задач, приведены в конце журнала.

После проверки членами жюри задач обоих туров проводился их разбор авторами, а затем рассматривались апелляции. На прошлых олимпиадах этот процесс проходил достаточно спокойно. В этом году под воздействием некоторых руководителей команд разбор апелляций принял лавинообразный характер. Практически все участники, пытаясь любой ценой повысить себе оценки, начали апеллировать к жюри. Большое количество апелляций существенно усложнило работу комиссии. На будущее, чтобы этого не возникало, необходимо при разборе задач достаточно подробно излагать и критерии оценки.

Закрытие III Всесоюзной олимпиады по информатике состоялось во Дворце пионеров им. П. П. Постышева. Дипломы I степени получили 6 школьников (они набрали 98—115 баллов), дипломы II степени — 11 (60—85 баллов), дипломы III степени — 14 школьников (48—58 баллов).

Многие школьники были награждены призами общественных, научных организаций и спонсоров олимпиады — НТТМ «Поиск». В частности, за лучшее решение первой задачи I тура призы получили Ю. Зайцев (Киев, с. ш. № 57, 11 класс), Т. Докшицер (Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.) и Л. Нетрошвили (Тбилиси, с. ш. № 25, 11 кл.).

За лучшее решение второй задачи I тура приз получил Г. Еськов (Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.). За лучшее решение задачи II тура — О. Таборовец (Пинск, с. ш. № 4, 11 кл.).

Жюри олимпиады приняло также решение о дополнительном включении в состав кандидатов в сборную СССР для участия во II Международной олимпиаде по информатике А. Демакова (Кировская обл., Даровская с. ш.) и Г. Еськова. Более того, призеры олимпиады, которые не оканчивают школу в этом году, включены в состав кандидатов для подготовки к участию в III Международной олимпиаде по информатике, которая состоится в 1991 году в Греции.

III Всесоюзная олимпиада по информатике подвела итоги олимпиадного движения по этому предмету в нашей стране в 1990 году. Говорить об установившихся формах проведения этих олимпиад еще рано — достаточно еще проблем в методическом, организационном и техническом обеспечении. Однако имеющаяся тенденция вселяет определенную уверенность в ее будущее. Хочется надеяться, что эта олимпиада явилась важным шагом на пути формирования профессиональных навыков всех ее участников. Желаем им успехов в этом трудном деле!

Призеры XXIV Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 9 классам получили
Амбайнис А. (Даугавпилс, с. ш. № 12),
Галванс А. (Олайне, с. ш. № 1),
Каукис В. (Рига, с. ш. № 1),
Некрашевич В. (с. Крутые Горы Киевской обл., с. ш.);

по 10 классам —
Малинникова Е. (Ленинград, с. ш. № 239),
Перяин А. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 11 классам —
Абрамов Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Дубров Б. (Минск, с. ш. № 107),
Пихурко О. (Нестеров Львовской обл., с. ш. № 1),
Симановскис Р. (Рига, с. ш. № 1),
Смотровс Ю. (Рига, с. ш. № 1),
Стояновский А. (Москва, с. ш. № 57).

Дипломы II степени

по 9 классам получили
Аншмитс У. (Рига, с. ш. № 1),
Аринкин Д. (Харьков, с. ш. № 132),
Бородин А. (Донецк, с. ш. № 17),
Бурков А. (Киров, с. ш. № 35),
Гельбанд М. (Одесса, с. ш. № 100),
Изместьев И. (Киров, с. ш. № 35),
Кожевников П. (Калуга, с. ш. № 24),
Певцова Ю. (Ленинград, с. ш. № 239),
Фельдман К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 10 классам —
Андерсонс Г. (Рига, с. ш. № 1),
Волченко К. (Донецк, с. ш. № 17),
Жуховицкий В. (Ленинград, с. ш. № 239),
Козачко А. (Винница, с. ш. № 6),
Мишачев К. (Липецк, с. ш. № 14),
Мучник Р. (Винница, с. ш. № 17),
Янсонс М. (Сигулда, с. ш. № 1);

по 11 классам —
Барановский В. (Омск, с. ш. № 105),
Городецкий А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Зарубин Н. (Харьков, с. ш. № 27),
Мавлютов Р. (Набережные Челны, с. ш. № 12),
Пионтковский Д. (Тула, с. ш. № 13),
Разин М. (Запорожье, с. ш. № 28),
Соловьев И. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Шабес Д. (Минск, с. ш. № 13).

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Аманов М. (Ташауз, ФМШ),
Белоус Ю. (Нижний Тагил, с. ш. № 9),
Виллемсон Я. (Тарту, с. ш. № 12),
Григорян В. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Дмитриев А. (Грозный, с. ш. № 41),
Климов С. (Ижевск, с. ш. № 30),
Лапин П. (Гусев, с. ш. № 2),
Лебедев А. (Краснодар, с. ш. № 4),
Лимонин С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Номировский Д. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Наумович А. (Минск, с. ш. № 19),
Рымов А. (Алма-Ата, РФМШ),
Стучинина С. (Москва, с. ш. № 2),
Шеенков М. (Иваново, с. ш. № 36);

по 10 классам —
Андреевс Ю. (Рига, с. ш. № 25),
Балашов О. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Бродский Н. (Челябинск, с. ш. № 31),
Днестранский А. (Рязань, с. ш. № 2),
Комаров Д. (Саранск, с. ш. № 4),
Рябичева О. (Киров, с. ш. № 8),
Страусс У. (Рига, с. ш. № 1),
Темкин М. (Москва, с. ш. № 57);

по 11 классам —
Бачурин А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Безрукавников Р. (Москва, с. ш. № 57),
Милтузис А. (Екабпилс, с. ш. № 1),
Можей Н. (Минск, с. ш. № 10),
Потапов С. (Тамбов, с. ш. № 14),
Селищев И. (УССР, Манчевская с. ш.),
Скадиньш Р. (Латвия, Скайсткалтская с. ш.),
Тихонов С. (Воронеж, с. ш. № 58).

Физика

Дипломы I степени

по 9 классам получили
Фролов А. (Москва, с. ш. № 303),
Чистый А. (Брест, с. ш. № 1),
Шутенко Т. (Мариуполь, с. ш. № 41);

по 10 классам —
Башинский С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Джосюк С. (Винница, с. ш. № 17),
Литвак А. (Горький, с. ш. № 40),
Ляпин А. (Нальчик, с. ш. № 9),
Полищук И. (Москва, с. ш. № 1121),
Тамошюнас В. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Шурупов К. (Куйбышев, с. ш. № 63);

по 11 классам —
Заркевич Н. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Лебединский П. (Алма-Ата, РФМШ),
Лемперт А. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Матюнин Ю. (Вольск, с. ш. № 11),
Шеянов В. (Ленинград, с. ш. № 566).

Дипломы II степени

по 9 классам получили
Болдырев С. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 36),
Ганноха А. (Киев, с. ш. № 61),
Гращенко А. (Могилев, с. ш. № 18),

Ивченко Н. (Киев, с. ш. № 145),
Июгин Б. (Тула, с. ш. № 73),
Краснов Е. (Новочебоксарск, с. ш. № 8),
Рацюс А. (Каунас, с. ш. № 8);

по 10 классам —
Вавилов М. (Свердловск, с. ш. № 2),
Добровольский С. (Днепропетровск, с. ш. № 13),
Кулешов М. (Усть-Каменогорск, с. ш. № 17),
Марташвили Л. (Тбилиси, ФМШ № 42),
Усольцев К. (Владивосток, с. ш. № 23),
Чарушин А. (Актюбинск, с. ш. № 1),
Чулинин Ю. (Новосибирск, с. ш. № 10);

по 11 классам —
Кузьменко В. (Ивано-Франковск, с. ш. № 1),
Мартин И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Орловский А. (Киев, с. ш. № 145),
Резвов В. (Вологда, с. ш. № 29),
Шинкевич С. (Березники, с. ш. № 3).

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Базаров И. (Владивосток, с. ш. № 23),
Гуляев Н. (Горький, с. ш. № 82),
Линник В. (Новосибирская обл., Каргатская с. ш.),
Лобанов А. (Алма-Ата, РФМШ),
Овечкин В. (Петропавловск-Камчатский, с. ш. № 1),
Овсицер Б. (Северодвинск, с. ш. № 17),
Писляков В. (Тверь, с. ш. № 6);

по 10 классам —
Бизяев А. (Киров, с. ш. № 35),
Денисов И. (Могилевская обл., Осиновская с. ш.),
Иванов М. (Тула, с. ш. № 73),
Коновалов И. (Кондопожский р-н, Сунская с. ш.),
Любый В. (Хуст, с. ш. № 4),
Пузыня П. (Гродно, с. ш. № 19),
Рязанцев А. (Свердловск, с. ш. № 19),
Тайманов С. (Раменское, с. ш. № 4),
Ульков В. (Тихвин, с. ш. № 8);

по 11 классам —
Борисенко О. (Киев, с. ш. № 145),
Гринчук А. (Брестская обл., Мохровская с. ш.),
Иванов В. (Тула, с. ш. № 73),
Соколинский И. (Москва, с. ш. № 47),
Усинский А. (Ровенская обл., Вербская школа-интернат),
Фридлянд А. (Саратов, с. ш. № 13),
Чокин Д. (Алма-Ата, РФМШ),
Энтин М. (Тула, с. ш. № 73).

Призеры III Всесоюзной олимпиады школьников по информатике

Дипломы I степени получили
Козлов Д. (Ленинград, с. ш. № 566, 11 кл.),
Зайцев Ю. (Киев, с. ш. № 57, 11 кл.),
Таборовец О. (Пинск, с. ш. № 4, 11 кл.),
Варблане Р. (п. Ныо ЭССР, Ныосская с. ш., 12 кл.),
Демаков А. (Кировская обл., Даровская с. ш., 11 кл.),
Еськов Г. (Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.).

Дипломы II степени получили
Челышев А. (Чирчик, с. ш. № 24, 9 кл.),
Москаленко А. (Омск, с. ш. № 20, 11 кл.),
Натрошвили Л. (Тбилиси, с. ш. № 25, 11 кл.),
Кузьменко Т. (Киев, с. ш. № 51, 11 кл.),
Датуашвили Г. (Тбилиси, с. ш. № 25, 11 кл.),
Яценко Р. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 11 кл.),
Курбасов М. (Рязань, с. ш. № 2, 11 кл.),
Тарасов Ю. (Киров, с. ш. № 35, 11 кл.),
Докшицер Т. (Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.),
Свинарев А. (Харьков, с. ш. № 106, 11 кл.),
Капиньш А. (Латвийская ССР, 11 кл.).

Дипломы III степени получили
Гурдюмов А. (Благовещенск, с. ш. № 1, 11 кл.),
Лепихин В. (Волгоград, с. ш. № 132, 10 кл.),
Ткачук К. (Ташкент, с. ш. № 243, 10 кл.),
Труц А. (п. Ныо ЭССР, Ныосская с. ш., 12 кл.),
Зильберфайн В. (Новосибирск, с. ш. № 166, 11 кл.),
Дуда Е. (Харьков, с. ш. № 27, 11 кл.),
Зиновьев Н. (Москва, с. ш. № 843, 11 кл.),
Николаев М. (Брест, с. ш. № 3, 11 кл.),
Костюк А. (Воронеж, с. ш. № 1, 11 кл.),
Герштейн С. (Свердловск, интернат № 19, 10 кл.),
Уваров Д. (Новокузнецк, с. ш. № 11, 10 кл.),
Григорошвили С. (Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 11 кл.),
Быструев Д. (Москва, с. ш. № 47, 11 кл.),
Хаменя В. (Гродно, с. ш. № 1, 10 кл.).

Задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

Задачи третьего тура для 6—8 классов

6 класс

1. Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради какие-то 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Докажите, что у него не могла получиться сумма 1990.

2. Имеется 101 монета. Среди них 100 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по массе. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Как это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

3. Можно ли прямоугольник размером 55×39 разрезать на прямоугольники размером 5×11?

4. Волк и Заяц играют в следующую игру. На доске написано число, и ход состоит в том, чтобы вычесть из числа какую-либо его ненулевую цифру и написать получившееся число на месте старого. Ходят по очереди. Выигрывает тот, у кого получается ноль. Пусть на доске написано число 1234. Первым ходит Волк. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Петя, Коля и Вася решили 100 задач, причем каждый решил 60 задач. Назовем задачу «трудной», если ее решил только один из мальчиков. Назовем задачу «легкой», если ее решили все трое. Докажите, что «трудных» задач больше, чем «легких» ровно на 20.

6. В деревне Мартышкино у каждого мальчика все знакомые с ним девочки знакомы между собой. Среди знакомых каждой девочки мальчиков больше, чем девочек. Докажите, что в Мартышкино мальчиков живет не меньше, чем девочек. (6 и 7 класс)

7 класс

7. Джон и Мэри живут в небоскребе, на каждом этаже которого — по 10 квартир. Номер этажа Джона равен номеру квартиры Мэри, а сумма номеров их квартир равна 239. В какой квартире живет Джон?

8. 30 стульев стоят в ряд. Время от времени подходит человек и садится на один из свободных стульев. При этом один из его соседей (если такие есть) встает и уходит. Какое максимальное число стульев может оказаться занятым, если сначала они все свободны?

9. На экране компьютера — число 123. Компьютер каждую минуту прибавляет к числу на экране 102. Программист Федя в любой момент может изменить число на экране, переставив произвольным образом его цифры. Может ли Федя действовать так, чтобы на экране всегда оставалось трехзначное число?

10. В четырехугольнике $ABCD$: $BC=AD$, M — середина AD, N — середина BC. Серединные перпендикуляры к AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что P лежит и на серединном перпендикуляре к отрезку MN. (7 и 8 класс)

11. Квадрат 2×2 разрезан на прямоугольники. Докажите, что некоторые из них можно заштриховать так, чтобы проекция заштрихованной фигуры на одну из сторон квадрата имела длину не меньше 1, а на другую — не больше 1.

12. В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

8 класс

13. Дима купил в магазине тетрадь в 96 листов и пронумеровал по порядку все ее страницы числами от 1 до 192. Сережа вырвал из этой тетради 24 листа и сложил все написанные на этих листах 48 чисел. Могло ли у него получиться число 1990? (Сравните с задачей 1.)

14. Найдите все тройки натуральных чисел (A, B, C) такие, что

$$A^2+B-C=100,\ A+B^2-C=124.$$

15. В стране Далекой 101 город; города соединены дорогами с односторонним движением так, что любые два города соединены не более чем одной дорогой. Известно также, что из любого города выходит ровно 40 дорог и в любой город входит ровно 40 дорог. Докажите, что из каждого города в любой другой можно попасть, проехав не более чем по трем дорогам.

16. Среди 103 монет две монеты — фальшивые, отличающиеся по весу от настоящих. Известно, что все настоящие монеты весят одинаково, равно как и обе фальшивые. За три взвешивания на двухчашечных весах без гирь определите, что тяжелее: настоящая монета или фальшивая?

17. На острове Логика каждый человек либо «лжец», всегда говорящий неправду, либо «рыцарь», всегда говорящий правду. Каждый островитянин произнес следующие две фразы:

а) все мои знакомые знакомы между собой;

б) среди моих знакомых лжецов не меньше, чем рыцарей.

Докажите, что на острове рыцарей не меньше, чем лжецов.

18. Сколько существует пар натуральных чисел (m, n) таких, что $m, n\leqslant1000$ и

$$\frac{m}{n+1}<\sqrt{2}<\frac{m+1}{n}?$$

Избранные задачи заключительного тура для 9—11 классов

9 класс

19. Натуральные числа a и b таковы, что a^2+ab+1 делится на b^2+ba+1. Докажите, что $a=b$.

20. На стороне BC квадрата $ABCD$ взята произвольная точка P, через A, B и P проведена окружность, пересекающая диагональ BD еще раз в точке Q. Через C, P и Q проведена окружность, которая пересекается с BD еще раз в точке R. Докажите, что точки A, R и P лежат на одной прямой.

21. Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества $\{1, 2, \ldots, N\}$, не содержащие двух соседних чисел. Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна $(N+1)!-1$. (Пример: $N=3$. Тогда $1^2+2^2+3^2+(1\cdot 3)^2=23=4!-1$.)

22. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо P человек, либо Q, где P и Q — взаимно просты. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

10 класс

23. На полке в беспорядке стоит 100-томное собрание сочинений Л. Н. Толстого. Разрешается взять любые два тома с номерами разной четности и поменять их местами. За какое минимальное число перестановок всегда можно расставить тома по порядку?

24. В отрезке $[0; 1]$ отмечены 22 точки. Разрешается заменять любые две из этих точек на середину соединяющего их отрезка. Докажите, что, выполнив 20 таких операций, можно добиться того, чтобы две оставшихся точки находились на расстоянии, не превышающем 0,001.

11 класс

25. У доски в клетку 100×100 склеили верхний край с нижним, а также правый с левым, после чего доска приобрела вид «бублика». Можно ли в ее клетках расставить 50 ладей — красных, синих и зеленых — так, чтобы каждая красная ладья «била» не менее двух синих, каждая синяя — не менее двух зеленых, и каждая зеленая — не менее двух красных?

26. Непрерывная функция $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такова, что для любого действительного x выполняется равенство $f(x+f(x))=f(x)$. Докажите, что функция $f(x)$ постоянна.

Публикацию подготовили Н. Васильев, Д. Фомин

Информация

«Городок открытий и творчества»

(первый в стране детский научно-технический центр на ВДНХ СССР)

Раскрыть перед детьми «окно» в окружающий мир, пробудить в них интерес к научному поиску, стимулировать творческие способности ребят — такова цель создаваемого на ВДНХ СССР детского научно-технического центра под названием «Городок открытий и творчества» (сокращенно ГОТ). Его организаторы — Государственный комитет СССР по науке и технике и ВДНХ СССР.

В ноябре этого года намечено открыть в павильоне «Центральный» следующие разделы Городка: «Человек в реальном мире», «Удивительный мир физики и техники», «В мире персональных ЭВМ». Яркие и необычные по форме экспозиции разделов по самым неординарным, трудно объяснимым явлениям природы поведут ребят в глубь процессов и явлений, а открытый доступ к управлению экспонатами сделает зрителей участниками происходящих процессов.

Самым маленьким предложит свои услуги компьютерный игровой комплекс, где наряду с играми предусмотрено проведение абонементного обучения развитию памяти и логического мышления малышей. Французский игровой экспонат «Строительная площадка» поможет детям приобрести навыки коллективных действий. Весной 1991 года в составе Городка открытий и творчества откроется аэрокосмический комплекс, в котором посетители в форме игры будут готовиться и осуществят «полет в космос».

В рамках ГОТ намечено организовать лабораторию «Творят дети» по широкому спектру физико-технических направлений, проводить встречи школьников с ведущими учеными и специалистами, олимпиады, конкурсы, выставки самодеятельного творчества. Важнейшей задачей лаборатории станет выявление талантливых детей, проявивших себя в области физики и техники из других городов страны. Они будут приглашаться на стажировку в лабораторию Городка, где вместе со взрослыми будут работать над научными проблемами, искать практическое воплощение теоретических разработок.

Становление первого в стране детского научно-технического центра — дело нелегкое. При ГОТ создается Ассоциация научных работников, изобретателей и детей «Союз творцов», фонд научно-технических стажировок, финансируемый Академией наук СССР, ГКНТ СССР, Главкосмосом и др. организациями, но организаторы ГОТ ждут предложений о сотрудничестве, советов и рекомендаций от заинтересованных организаций и лиц, а также от самих ребят и их родителей. Свои предложения направляйте по адресу: 129223 Москва, проспект Мира, ВДНХ СССР, павильон «Центральный». Телефоны Городка открытий и творчества: 181-96-04, 181-98-12, 181-94-34.

Δm) должна превратиться в лед. Найдем ее из уравнения теплового баланса:

$$c_1m_1(t_1-t)+\Delta m\lambda=c_2m_2(t-t_2),$$

откуда

$$\Delta m=\frac{c_2m_2(t-t_2)-c_1m_1(t_1-t)}{\lambda}=0{,}17\text{ кг}=17\text{ г}.$$

Значит, наше предположение верное, и в калориметре содержится $m_1'=183$ г воды и $m_2'=317$ г льда.

11. Область видения изображена цветом на рисунке 3.

12. Получается 3 изображения (см. рис. 4).

13. См. рис. 5.

14. Изображение предмета получается полным, но только вдвое менее ярким.

15. См. рис. 6.

Всесоюзная олимпиада по информатике

Т 1.1. Обозначим вершины ломаной буквами M_i. Каждая вершина ломаной, кроме крайних, определяет угол разъединения этой вершины, в котором должен находиться вектор параллельного переноса одной из частей круга (это один из вертикальных углов, образованных продолжением соседних звеньев ломаной, пересекающихся в данной вершине). Существование вектора разъединения частей круга эквивалентно наличию общего угла разъединения для всех вершин ломаной.

Обозначим через $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (определяемый поворотом вектора $\vec{b}$ к вектору $\vec{a}$ против часовой стрелки). Угол $\langle \vec{r}_i, \vec{s}_i\rangle$ разъединения вершины M_i можно найти, выбирая из двух углов $\langle \overrightarrow{M_iM_{i+1}}, \overrightarrow{M_iM_{i-1}}\rangle$ и $\langle -\overrightarrow{M_{i-1}M_i}, -\overrightarrow{M_{i+1}M_i}\rangle$ тот, который не превышает π. Затем необходимо выбрать из векторов $\vec{r}_i$ вектор $\vec{r}$, образующий с осью Ox наименьший угол, обозначим этот угол через α_r. Аналогично обозначим через $\vec{s}$ тот из векторов $\vec{s}_i$, который образует с осью Ox наибольший угол α_s. Если $\alpha_r\geqslant\alpha_s$, то любой вектор, угол α которого с осью Ox удовлетворяет условиям $\alpha_s\leqslant\alpha\leqslant\alpha_r$, является вектором разъединения частей круга.

Если $\alpha_r<\alpha_s$, то разъединить сдвигом части круга нельзя. Целочисленность координат вершин ломаной обеспечивает возможность точной проверки всех необходимых для реализации приведенного алгоритма условий, при этом значения координат по абсолютной величине должны быть небольшими.

Рассмотренный алгоритм определяет, можно ли выполнить разъединение параллельным переносом одной из частей круга. Попытки некоторых участников олимпиады исследовать возможность разъединения с поворотом членами жюри оценивалось особо, хотя таких попыток было очень мало.

Т 1.2. Для пункта в) возможно полное аналитическое решение. При этом надо рассмотреть три случая.

1) P и Q — взаимно простые числа разной четности. Можно показать, что тогда существует серия ходов, приводящая к результату (0, 1) (переводящая коня на соседнюю клетку). В этом случае достаточно одного коня.
2) P и Q — взаимно простые нечетные числа. Тогда каждый конь будет ходить по клеткам только одного цвета, но можно показать, что существует серия ходов с результатом (1, 1). Это означает, что достаточно двух коней.
3) P и Q не взаимно просты. Пусть $k=$ НОД (P, Q). Для контроля необходимо k^2 или $2k^2$ коней в зависимости от того, одинаковой или разной четности числа P/k и Q/k.

Для ограниченной (в одном или двух направлениях) доски при не взаимно простых P и Q задачу удается упростить. Например, для доски 10×14 при НОД $(P, Q)=3$ получаем

$$f(10, 14)=2f(4, 5)+f(4, 4)+4f(3, 5)+2f(3, 4).$$

Для взаимно простых P и Q на ограниченной доске размером больше $(2M+1)\times(2M+1)$, где $M=\max(P, Q)$, ответ совпадает с результатом для бесконечной доски (более точная оценка размера доски: $(2M+1)\times(P+Q+1)$ при $Q=1$ и нечетном P и $(2M+1)\times(P+Q)$ в остальных случаях). На досках меньшего размера результат можно получить перебором. Для полосы шириной L и взаимно простых P и Q результат тот же, что и для бесконечной доски при $L\geqslant 2M+1$ (более точная оценка: $P+Q+1$ при $Q=1$ и нечетном P и $P+Q$ в остальных случаях). При меньших значениях L ответ совпадает с ответом для конечной доски размером $L\times(2M+1)$.

Т 2. Знаменатели слагаемых суммы $S(N, a, b)$ медленно растут, это позволяет вычислять их без погрешностей в виде рациональных дробей (пар целых чисел). Использование стандартных функций для вычисления логарифма и целой части числа здесь нецелесообразно. Лучше накапливать знаменатель, домножая его текущее значение на величину b в тот момент, когда параметр $p=[\log_b k]$ изменяет свое значение. В свою очередь, значение p целесообразно накапливать, увеличивая его в тот момент, когда будет нарушено условие $k<b^{p+1}$. Накопление суммы $S(N, a, b)$ выполняется последовательно путем приведения дробей к общему знаменателю, сложения их и последующего сокращения. При преобразовании обыкновенной дроби в десятичную надо найти период десятичной дроби. Здесь целесообразно использовать следующий известный факт: для того, чтобы правильная несократимая обыкновенная дробь представлялась в виде чистой периодической дроби, необходимо и достаточно, чтобы ее знаменатель не делился нацело ни на 2, ни на 5.

Жюри оценивало решение задачи по результатам тестирования. При этом учитывалось, к какой группе алгоритмов относится представленное решение. Наименьшим числом баллов оценивались «прямолинейные» алгоритмы, которые для вычисления суммы $S(N, a, b)$ использовали стандартные вычислительные средства языков программирования. Бо́льшим количеством баллов оценивались «академические» алгоритмы, реализующие вычисления с высокой точностью и основанные на представлении чисел в виде массивов цифр их десятичных представлений. Максимально возможное число баллов получили участники, использовавшие «рациональные» алгоритмы, в которых вычисления проводились в рамках рациональной арифметики с последующим преобразованием результата в бесконечную десятичную периодическую дробь.

Задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

1. Сумма двух чисел, написанных на каждом листе, нечетна, поэтому, сложив все числа, написанные на 25 листах, мы получим нечетное число.

2. Положим на чашки весов по 50 монет. Если весы находятся в равновесии, то оставшаяся монета — фальшивая, и за следующее взвешивание мы определим, легче она настоящей или тяжелее. Пусть весы не находятся в равновесии. Снимем с них более тяжелую кучку из 50 монет, а оставшиеся разложим по 25 на каждую чашку. Если весы в равновесии, то среди монет нет фальшивой, значит, она среди более тяжелой кучки в 50 монет, т. е. фальшивая монета тяжелее настоящей. В противном случае фальшивая монета является более легкой.

3. Поскольку число 39 нельзя представить в виде суммы вида $5a+11b$, то сторона длиной 39 данного прямоугольника не может быть заполнена сторонами прямоугольников 5×11.

4. Выиграет Волк, если он все время будет вычитать из имеющегося на доске числа его последнюю цифру.

5. Пусть x — число «трудных» задач, y — число «легких», а z — число задач «средней трудности» (т. е. таких, которые решили двое мальчиков). Тогда $100=x+y+z$, а $180=x+2y+3z$. Из первого уравнения $200=2x+2y+2z$, откуда $x-z=20$.

6. Выберем из всех девочек нескольких (условившись называть их «звеньевыми») так, чтобы они не были знакомы друг с другом, но чтобы любая из девочек была знакома хотя бы с одной из звеньевых. Число всех девочек не превосходит суммарного числа знакомых девочек всех звеньевых, которое в свою очередь не превосходит суммарного числа всех мальчиков, знакомых со звеньевыми. А поскольку из условия следует, что каждый мальчик знаком не более чем с одной звеньевой, то это последнее число не больше чем число всех мальчиков.

7. Джон живет в квартире № 217. В самом деле, если a — номер его этажа, то номер его квартиры имеет вид $10(a-1)+b$, где $1\leqslant b\leqslant 10$. Поэтому $10(a-1)+b+a=11a+b-10=239$, значит, число $249-b$ делится на 11, а поскольку $1\leqslant b\leqslant 10$, то оно равно 242. Таким образом, $b=7$ и $a=22$.

8. 29. Ясно, что более 29 стульев занятыми быть не могут. Покажем, как занять 29 стульев. Если заняты k левых стульев ($k\leqslant 28$), то из двух новых гостей первый может сесть на стул с номером $k+2$, а затем встать, когда $(k+1)$-й стул займет второй. Таким образом, занят уже $k+1$ стул. Если $k+1\leqslant 28$, то рассуждение можно продолжить.

9. Федя может поступить следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
123 \arrow[r, "+"] & 225 \arrow[r, "+"] & 327 \arrow[r, "+"] & 429 \arrow[r, "+"] & 531 \arrow[r, "\curvearrowright"] & 135 \arrow[r, "+"] & 237 \arrow[r, "\curvearrowright"] & 327 \arrow[lllll, bend left]
\end{tikzcd}$$

и далее по циклу.

10. Указание. Докажите равенство треугольников ADP и BCP.

11. Возможны следующие случаи: а) высоты всех прямоугольников, примыкающих к нижней (верхней) стороне квадрата, не превосходят 1; б) один из прямоугольников, примыкающих к нижней (верхней) стороне квадрата, имеет высоту больше 1, а ширину — не превосходящую 1; в) и высота, и ширина одного из прямоугольников, примыкающего к нижней (верхней) стороне, больше 1.
Утверждение задачи следует из того, что в случаях а), б) оно очевидно, а случай в) для верхней и нижней сторон одновременно иметь место не может.

12. См. решение задачи М1230 из Задачника «Кванта».

13. Нет, не могло. Поскольку ясно, что сумма чисел, стоящих на одном листе, имеет остаток 3 при делении на 1, то сумма двадцати четырех таких чисел делится на 4 и не равна 1990.

14. $(a, b, c)=(12, 13, 57)$. Указание. Воспользуйтесь тем, что $(b-a)(a+b-1)=24$.

15. Пусть A и B — два каких-то города. Предположим, что нет дороги $A\rightarrow B$, а также, что нет такого города C, для которого имеются дороги $A\rightarrow C$ и $C\rightarrow B$. Рассмотрим города $A_1, \ldots, A_{10}$, в которые ведут дороги из A, и другие 40 городов $B_1, \ldots, B_{40}$, из которых дороги ведут в B. Из городов A_i выходят $20\cdot 80$ дорог. Суммарное число дорог, соединяющих эти города, не превосходит $20\cdot 39$. Число дорог, ведущих из них в оставшиеся 19 городов, не более $20\cdot 38$. Поэтому найдется дорога $A_i\rightarrow B_j$.

16. Выделим три кучки по 34 монеты в каждой и сравним веса первой и второй, второй и третьей. Ясно, что все они равными быть не могут. Предположим, что при одном взвешивании, для определенности — первом, веса равны, а при другом — нет; опять-таки для определенности, пусть третий набор тяжелее. Тогда либо в первой и второй кучках все монеты настоящие, значит, фальшивая монета тяжелее настоящей, либо же в них имеется по одной фальшивой монете (а значит, она более легкая). Выяснить, имеется ли в них фальшивая монета, можно, сравнив веса двух половин (по 17 монет) первой кучки.

17. Задача сводится к задаче 6. Все знакомые каждого рыцаря знакомы между собой, а среди знакомых любого лжеца рыцарей больше, чем лжецов.

18. 1706. Рассмотрим лист бумаги в клетку, узлы которого — пары целых чисел (n, m) на плоскости Oxy, где $0\leqslant n, m\leqslant 1001$. Неравенства $m/(n+1)<\sqrt{2}<(m+1)/n$ выполнены в том и только в том случае, если прямая $y=\sqrt{2}x$ пересекает квадрат, левый нижний угол которого совпадает с узлом (n, m). Рассмотрим 1001 горизонтальную полосу $m\leqslant y\leqslant m+1$. Наша прямая будет пересекать два квадрата

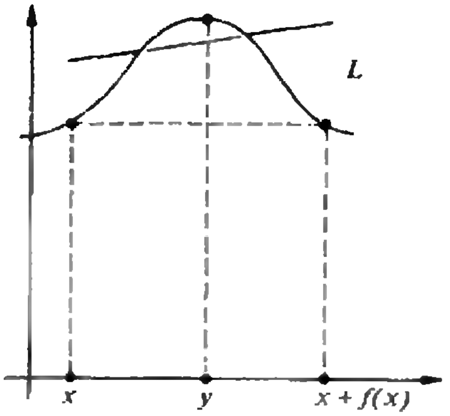


Рис. 7.

в полосе, если она пересекает один из единичных вертикальных отрезков в этой полосе. Поскольку $707 < \frac{1001}{\sqrt{2}} < 708$, то всего таких отрезков 707. Значит, в первых 1001 полосах прямая пересекает 1708 квадратов, из которых два первых нужно откинуть.

19. Из тождества $b(a^2+ab+1)-a(b^2+ba+1)=b-a$ следует, что $a-b$ делится на b^2+ba+1, что, очевидно, возможно только при $a-b=0$.

20. Пусть R — точка пересечения AP и BD. Достаточно доказать, что она лежит на окружности, проходящей через точки C, P, Q, т. е. четырехугольник $CPRQ$ — вписанный. Углы BAR и RQP равны как опирающиеся на одну дугу исходной окружности, а углы BAR и BCR равны как симметричные относительно BD. Следовательно, $\angle RQP = \angle RCP$ и четырехугольник $CPRQ$ — вписанный.

21. Доказательство проводится индукцией по N. Разобьем множество всех данных в задаче наборов на два подмножества: наборы, содержащие число N, и наборы, не содержащие N. Сумма квадратов произведений в первом подмножестве равна (по предположению индукции) $N^2((N-1)!-1)+N^2$, а во втором подмножестве — $N!-1$. Складывая, получаем $(N+1)!-1$.

22. См. решение задачи М1232 из Задачника «Кванта».

23. 124 перестановки.

24. Указание. Пусть $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{21} < a_{22} \leqslant 1$ — данные 22 точки. Разобьем их на пары (a_1, a_2), ..., (a_{21}, a_{22}). Тогда из каждой пары можно выбрать по точке и проиумеровать их в некотором порядке $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$; соответствующие вторые точки пар обозначим $y_1, y_2, \ldots, y_{11}$. Выполняя операции «слияния точек», мы можем получить точки $A = \frac{1}{1024}(x_1+x_2+2x_3+\ldots+1024x_{11})$ и $B = \frac{1}{1024}(y_1+y_2+2y_3+\ldots+1024y_{11})$. Докажите, что выбор точек x_i и их нумерацию можно подобрать так, чтобы расстояние между точками A и B было не более 1/1024.

25. Нет, нельзя. Указание. Обозначим через A, B и C количество красных, синих и зеленых ладей, а через x, y, z — количество пар бьющих друг друга ладей красного и синего, синего и зеленого, зеленого и красного цветов соответственно. Тогда из требований задачи вытекают неравенства

$$2A \leqslant x \leqslant 2B \leqslant y \leqslant 2C \leqslant z \leqslant 2A.$$

Следовательно, имеем $A=B=C$, и, значит, общее количество ладей должно делиться на 3.

26. Если предположить, что данная функция не постоянна, то найдутся действительные числа x и y, такие, что $f(x)<f(y)$ и при этом точка y находится между x и $x+f(x)$ (см. рис. 7). Тогда, очевидно, существует прямая L, задаваемая уравнением $x+ny=c$ (n — натуральное), отделяющая точку $(y; f(y))$ от точек $(x; f(x))$, $(x+f(x); f(x+f(x))=f(x))$. По теореме о промежуточном значении, существуют две различные точки A и B с различными абсциссами a и b соответственно, лежащие одновременно и на прямой L, и на графике f. Но так как следствием соотношения $f(x+f(x))=f(x)$ является соотношение $f(x+nf(x))=f(x)$, то получаем $f(c)=f(a+nf(a))=f(a)$, и, аналогично, $f(c)=f(b)$. Итак, $f(a)=f(b)$, а также $a+nf(a)=b+nf(b)$, откуда заключаем, что $a=b$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. Очевидно, что искомое число $p \neq 1$ может иметь только вид $p=3k$ (если $p=3k+1$, то число $p+2=3k+3$ — составное, если $p=3k+2$, то число $p+4=3k+6$ — составное). Значит, p может быть равно только 3. Легко убедиться, что $p=3$ действительно нужное.

2. Нужно включить один выключатель, подождать некоторое время, затем его выключить и включить второй, после этого пойти в комнату с лампочками. Горящая лампочка связана со вторым выключателем, а из потушенных горячая связана с первым, а холодная — с третьим выключателем.

3. Первое число равно 2345, так как если оно больше, то сумма трех чисел больше чем 12 300, если меньше, то сумма меньше чем 12 300. Отсюда второе число равно 5432, а третье — 4523.

4. Заметим, что при параллельном переносе маленького квадрата сумма площадей как красных, так и синих четырехугольников не меняется, а для квадратов, центры которых совпадают, утверждение очевидно.

5. Пусть уплачено x рублей, а получено y рублей, тогда $y-x=m$. Во второй раз было куплено товара в y/x раз больше, чем в первый, поэтому за него во второй раз было получено во столько же раз больше, чем в первый, т. е. было получено y^2/x рублей. Значит $y^2/x - y = n$. Из этих уравнений получаем, что $x = \frac{m^2}{n-m}$.

Шахматная страничка

ЭКС-ЧЕМПИОН ПРОТИВ КОМПЬЮТЕРОВ

В «Кванте» № 3 за этот год рассказывалось об увлекательном матче между двумя чемпионами мира — Г. Каспаровым и «Дип сот», закончившемся победой человека со счетом 2:0. После этого поражения электронный чемпион был усовершенствован и на равных сразился с несколькими гроссмейстерами. Это навело его на мысль бросить вызов А. Карпову — в надежде взять у экс-чемпиона мира реванш за поражение от чемпиона. Карпов вылетел в Нью-Йорк и провел с «Дип сот» одну встречу с укороченным контролем (1 час на всю партию), кстати, более выгодным машине, для которой время имеет меньшее значение, чем для человека.

В дебюте и в миттельшпиле компьютер действовал уверенно и сохранял равновесие. Однако в эндшпиле электронный гроссмейстер растерялся, и Карпов, отдав пешку, перехитрил его. Как видно, машине еще есть чему поучиться у человека.

А. Карпов — «Дип сот»
Защита Каро-Канн

1. e4 c6 2. d4 d5 3. Кd2. Если последует размен на e4, то разницы между выпадами коня на c3 и d2 нет. Идея хода 3. Кd2 заключается в том, что в случае 3...g6 белые смогут поддержать центральную пешку ходом c2—c3. И все же «Дип сот», не обращая внимания на эти теоретические нюансы, избирает вариант с фианкеттированием слона.

3...g6 4. c3 Сg7 5. e5. При укрепленном центре белые могли спокойно закончить развитие фигур. Вместо этого они фиксируют свою пешечную цепь, и компьютер немедленно атакует ее по всем правилам подобных построений.

5...f6! 6. f4 Кh6 7. Кgf3 0—0 8. Сe2 fe 9. fe c5! 10. Кb3 cd 11. cd Кc6 12. 0—0 Фb6 13. Крh1 a5! 14. a4. Заслуживало внимания сразу 14. Кc5 с идеей Кa4 и Кc3.

14...Сf5 15. Сg5. Делая этот ход, белые, наверное, уже имели в виду жертву пешки b2, иначе они сразу бы сыграли 15. Кc5. **15...Сe4 16. Кc5 Ф:b2.** Рискованное решение. В духе позиции 16...Кf5, жертвуя качество, но успешно завершая осаду центра: 17. Кd7 Ф:b2 18. К:f8 Кf:d4 с контригрой.

17. К:e4 de 18. Лb1 Фa3! Единственный ход! 18...Фc3 ведет к потере ферзя — 19. Лb3, на 18...Фa2 сильно 19. Кd2!

19. Сc1 Фc3 20. Сd2 Фa3 21. Сc1 Фc3. Да, ничью повторением ходов белые имеют. Такой результат устраивает машину, но не Карпова. Экс-чемпион стремится запутать электронного партнера, но до глубокого эндшпиля тот действует весьма точно.

22. Лb3! Фa1 23. Сc4+ Крh8 24. С:h6 Ф:d1 25. С:g7+ Кр:g7 26. Л:d1 ef 27. gf. Возможно, стоило взять пешку b7, но следующий ход машины, защищающий ее, трудно предугадать даже гроссмейстеру. **27...Лa7! 28. Сd5 Лd8 29. Лb5 Лa6!** Оказывается, маневры ладьи по линии «a» не так уж нелепы: грозит 30...Кa7 31. С:b7 К:b5 32. С:a6 Л:d4 с полным уравниванием. Ничего не дает белым 30. Сe4 Л:d4 31. Л:d4 К:d4 32. Л:b7 Лc6, и на доске битая ничья.

30. Сc4 Лa7 31. Сd5 Лa6 32. Лc5 Лd7 33. Крg2 Лb6. Хитроумная ладья умудряется даже проявить активность. **24. С:c6.** Не обидно ли менять слона на коня? Лучше было сразу подтянуть короля к центру. **34...bc 35. Крf2.** После 35. Л:a5 Лb4 шансы белых на успех были бы равны нулю. **35...Лd5! 36. Л:d5 cd 37. Лc1 Лb4 38. Крe3 Л:a4.** Проще всего вело к ничьей 38...Лb3+ 39. Крe2 Лb4, но компьютер не упускает случая прихватить пешку.

39. Лc5 e6 40. Лc7+ Крg8 41. Лe7 Лa3+ 42. Крf4 Лd3 43. Л:e6 Л:d4+ 44. Крg5 Крf7 45. Лa6 a4? Странно, что «Дип сот» не замечает форсированный ничейный вариант: 45...h6+ 46. Кр:h6 Лh4+ 47. Крg5 Лh5+ 48. Крf4 Лf5+ и 49...Л:e5.

46. f4 h6+ 47. Крg4 Лc4? Решающая ошибка. Последний шанс добиться ничьей состоял в 47...g5! Ладейный эндшпиль машина проводит ниже всякой критики.

48. h4 Лd4 49. Лf6+ Крg7 50. Лa6 Крf7 51. h5! gh+. И здесь необходимо было 51...g5, правда, после 52. Л:h6 Л:f4+ 53. Кр:g5 окончание, кажется, уже не спасти. В любом случае человеку не пришло бы в голову организовывать противнику пару связанных проходных...

52. Крf5 Крg7 53. Лa7+ Крf8 54. e6 Лe4 55. Лd7 Лc4 56. Л:d5 h4 57. Лd3 Крe7 58. Лd7+ Крf8 59. Лh7 h5 60. Крe5 h3 61. f5 Крg8 62. Л:h5 a3 63. Л:h3 a2 64. Лa3 Лc5+ 65. Крf6. Черные сдались.

Итак, встреча с чемпионом мира среди больших, сверхмощных машин завершилась для А. Карпова успешно. Но вскоре его ждало новое испытание — игра с шестикратным чемпионом мира среди специализированных шахматных микрокомпьютеров — знаменитым роботом «Мефисто». Об этом мы расскажем в следующем номере.

Е. Гик

НОМЕР
12

Квант

12 1990

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

*Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *С. Табачников.* Вариации на тему Эшера
8 *Я. Смородинский.* Закон всемирного тяготения
14 *В. Гисин.* Чертежник рисует квадрат
18 *А. Митрофанов.* О морозных узорах и царапинах на стекле

Задачник «Кванта»

20 Задачи М1256 — М1260, Ф1263 — Ф1267
21 Решения задач М1231 — М1235, Ф1243 — Ф1247
30 Конкурс «Математика 6—8»

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
32 *А. Савин.* Римские, арабские и другие

Школа в «Кванте»

Математика 9—11:

34 Начинаем с неравенства Евклида...

Лаборатория «Кванта»

36 *Д. Паненко.* Дифракция в лазерном свете
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Практикум абитуриента

42 *И. Гельфгат.* Такие интересные ошибки...

Р — значит ракета

46 *Е. Нариманов.* 56 миллионов километров до Красной планеты (Окончание)
49 III Заочная аэрокосмическая олимпиада

Олимпиады

52 XXXI Международная математическая олимпиада
54 XXI Международная физическая олимпиада
58 II Международная олимпиада по информатике

Информация

61 Заочная физико-техническая школа при МФТИ
66 Конкурс программных разработок «Борланд-Контест»

Игры и головоломки

64 Кубики Мак-Магона и таблица Конвея
65 Кроссворд

67 **Ответы, указания, решения**
76 **Напечатано в 1990 году**
79 **Анкета 12—90**
«Квант» улыбается *(45)*
Нам пишут *(50)*
Реклама *(53, 79)*

Наша обложка

1 *Оказывается, «красотой морозного узора мы обязаны несовершенству поверхности стекла» (подробности — в статье А. Митрофанова).*

2 *Репродукция литографии «Бельведер» (1958 г.) голландского художника М. Эшера. О работах Эшера и некоторых общих математических идеях читайте в статье С. Табачникова.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Таблица Дж. Конвея (см. с. 64).*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1990

ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ ЭШЕРА

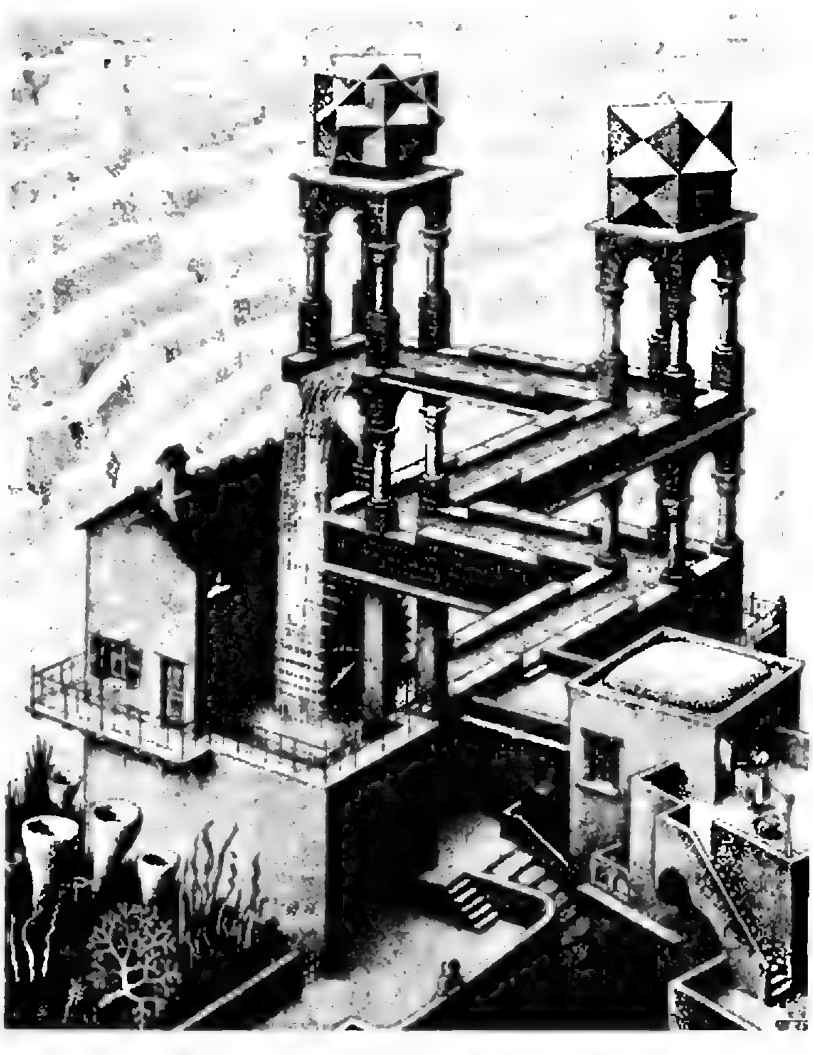
Кандидат физико-математических наук
С. ТАБАЧНИКОВ

Постоянные читатели «Кванта», вероятно, обращали внимание на репродукции работ замечательного голландского художника М. Эшера, которые время от времени публикуются в журнале. Жизнь Эшера, как часто пишут в биографиях выдающихся людей, была небогата событиями. Морис Корнелиус Эшер родился в городе Лееварден в 1898 году. В школе Эшер учился неважно (еще одна характерная деталь биографии знаменитого человека!); лучше всего давалось ему рисование. Его отец, инженер-гидравлик, хотел, чтобы сын получил солидную профессию; и в 1919 году Эшер поступает в Гарлемское училище архитектуры и декоративного искусства. В 1922 году, проучившись в училище два года, Эшер переезжает в Италию, где он прожил 13 лет.

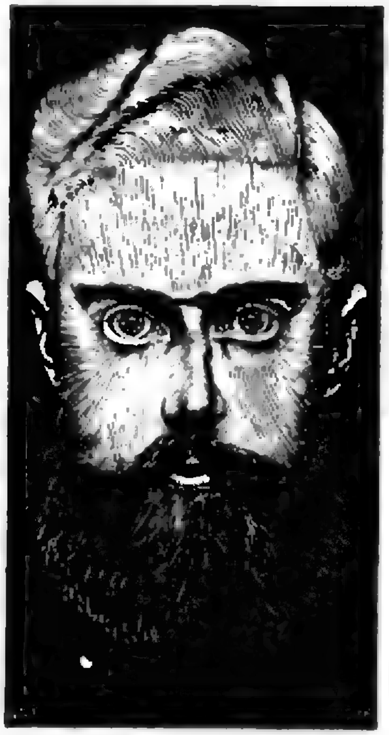
Каждое лето он путешествует по Южной Италии или Испании. Летние впечатления служили материалом для гравюр, над которыми он работал зимой. К середине тридцатых годов политический климат в Италии стал нетерпимым. В 1935 году девятилетнего сына Эшера обязали носить форму юного фашиста; это послужило толчком к решению семьи переехать в Швейцарию.

Холодная снежная Швейцария действовала на Эшера угнетающе. Он обратился в морскую компанию, совершавшую грузовые перевозки по Средиземному морю, с просьбой разрешить ему путешествовать на ее судах с оплатой гравюрами, выполненными в пути. Удивительно, но предложение было принято. Это было последнее большое путешествие Эшера. После этого он больше не нуждался во внешних впечатлениях для творчества.

С 1941 года Эшер постоянно живет в Голландии. Всемирная известность пришла к нему в 1951 году после публикаций сразу в трех популярных журналах: «The Studio», «Time» и «Life». В 1954 году в Амстердаме состоялась большая выставка Эшера, приуроченная к Международному математическому конгрессу. Ма-



«Водопад» (1961).



«Автопортрет» (1923).

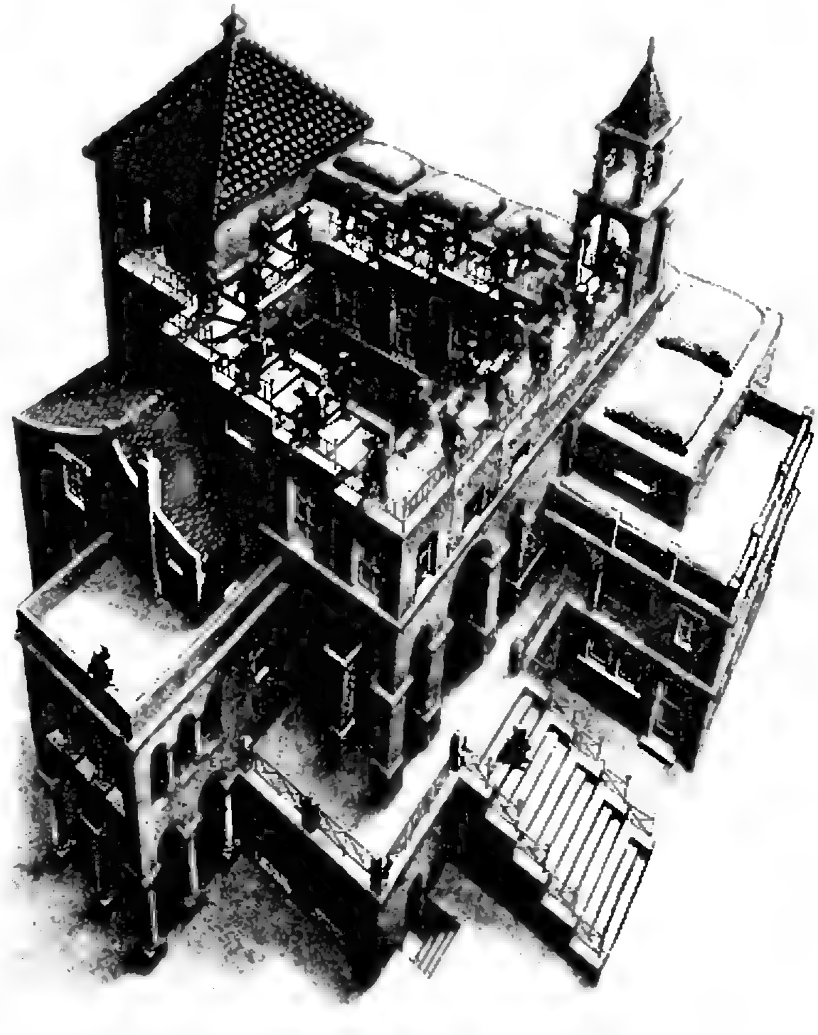
тематики сразу признали «своего» художника; с этого времени его рисунки — неизменный атрибут физико-математических изданий («Квант» публиковал Эшера более 20 раз). Слава мало изменила образ жизни художника, который настойчиво продолжал работать. Умер он 27 марта 1971 года.

Обратимся теперь к теме «Эшер и математика». Как я уже говорил, математики любят Эшера. Комментаторы обычно объясняют, как достигается тот или иной неожиданный эффект в его работах. Часто это — хороший повод рассказать о математических теориях. Например, орнаменты Эшера — прекрасная иллюстрация к теории кристаллографических групп (о которой «Квант» планирует рассказать в одном из ближайших номеров).

Сам Эшер плохо знал математику. Однажды известный геометр Г. Кокстер пригласил Эшера на свою лекцию, посвященную математическому содержанию его гравюр и литографий. Ко взаимному разочарованию, Эшер не понял почти ни слова из того, о чем рассказывал Кокстер. Вот что писал об этом сам художник:

«Я так ни разу и не смог получить хорошей оценки по математике. Забавно, что я неожиданно оказался связанным с этой наукой. Поверьте, в школе я был очень плохим учеником. И вот теперь математики используют мои рисунки для иллюстрации своих книг. Представьте себе, эти ученые люди принимают меня в свою компанию как потерянного и вновь обретенного брата! Они, кажется, не подозревают, что математически я абсолютно безграмотен».

В этих словах, наверное, есть доля преувеличения. Все же мне кажется, что творчество Эшера интересно математикам не только потому, что в его работах можно обнаружить отголоски конкретных математических результатов. Скорее они вызывают ассоциации с общими математическими идеями. Платон считал, что абстрактные идеи живут отдельно в «мире чистых сущностей» (таковы идеи пространства и времени). Думаю, что в таком,

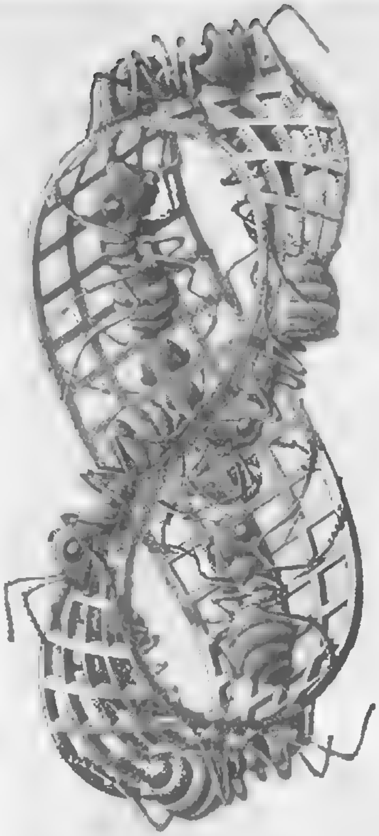


«Поднимаясь и опускаясь» (1960).

платоновском понимании мир Эшера и мир математики — близкие соседи. Попробую проиллюстрировать этот тезис.

Посмотрите на литографии «Бельведер» (см. 2-ю с. обл.), «Водопад» и «Поднимаясь и опускаясь». В каждой из них что-то не так... Лестница, по которой поднимается юноша,— внутри или снаружи беседки находится она? Вода все время течет вниз — и бесконечно движется по кругу. А монахи идут по замкнутой лестнице: одни все время вверх, а другие — вниз (кстати, бессмысленную работу голландцы называют «монашеский труд»). Каждый небольшой фрагмент этих работ безупречно изображает реальность, но в целом эти фрагменты складываются в невозможные объекты.

Но ведь нечто похожее бывает и в математике! Например, окружность и прямая: «в малом», или как говорят в математике, локально, устроены одинаково (если разрешить изгибание), но «в целом» — глобально — совершенно различны. Выбросьте из прямой точку и она распадется на два куска; окружность же останется связной. Или знаменитая лента Мебиуса: в малом ее не отличить от бумажного кольца, но после обхода вы оказываетесь на ее противоположной стороне. Один из главных предметов исследования в топологии — это такие объекты, которые локально устроены одинаково, а глобально — поразному.

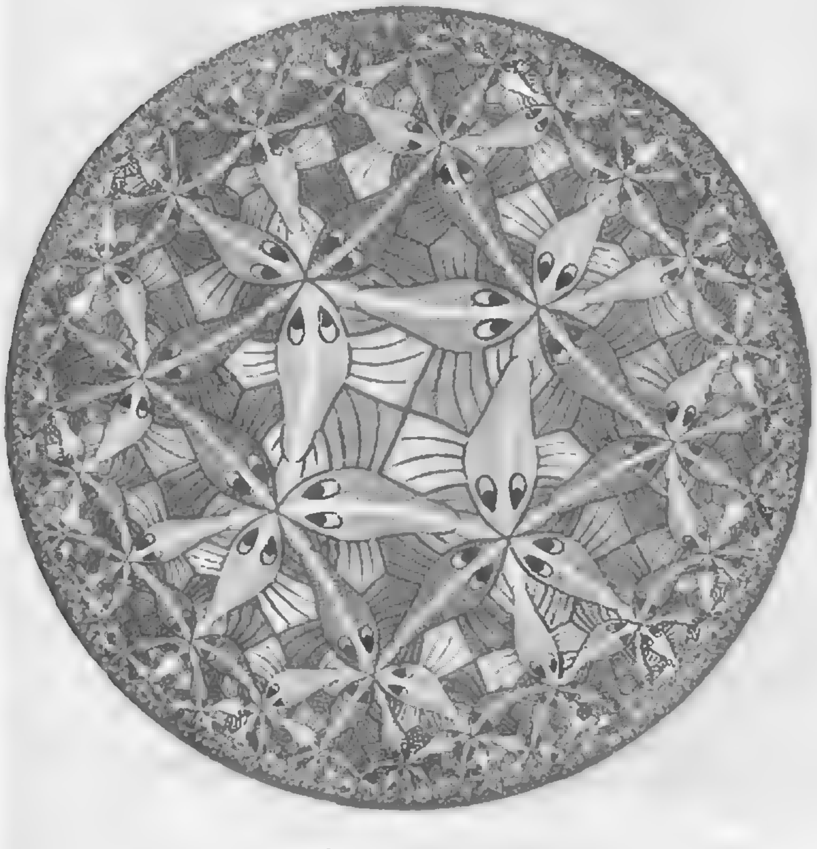


«Лента Мёбиуса» (1963).

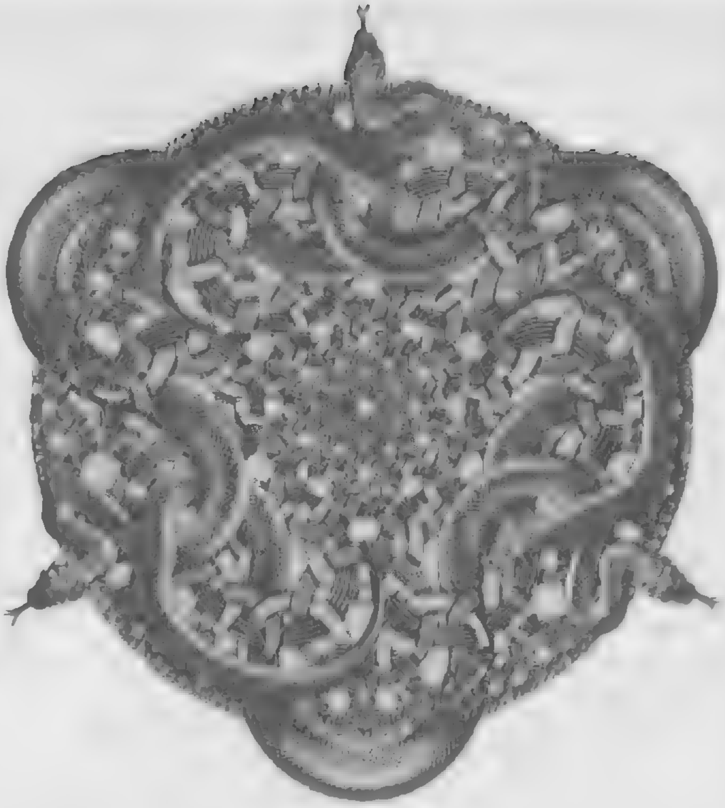
Обратите внимание на каркас куба в левом нижнем углу «Бельведера». Конечно же, это — невозможный объект! Английский математик Роджер Пенроуз опубликовал в 1958 году в психологическом журнале изображение другого невозможного объекта — «треугольника Пенроуза». Этот рисунок Эшер использовал при работе над «Водопадом». (Целое «созвездие» невозможных объектов вы увидите на обложке «Кванта» № [illegible] за 1979 год, а как получить их фотографии, рассказано в № 5 за *1971 год.)*

Для того чтобы обсудить другие общие математические идеи, с которыми у меня ассоциируются работы Эшера, я предлагаю вам такую задачу. На столе лежит карта города, а на ней (строго внутри) — еще одна карта этого города, но меньшего масштаба. Нужно доказать, что найдется такое место в городе, изображение которого на обеих картах совпадает.

Задача решается так. Построим отображение *f*



Орнамент «Круговой предел» III (1959).



«Змеи» (1969).

большей карты в себя. Возьмем любую ее точку A и найдем на меньшей карте точку B, изображающую то же место в городе, которому отвечает точка A. Точка большей карты, лежащая под точкой B,— это и есть точка $f(A)$. Пусть M обозначает бо́льшую карту. $f(M)$ лежит внутри M, $f(f(M))$ — внутри $f(M)$, $f(f(f(M)))$ — внутри $f(f(M))$ и т. д. В пределе получается единственная точка — изображение одного и того же места на обеих картах.

Хорошо известен также орнамент «Меньше и меньше». Этот орнамент напоминает задачу о карте. *Здесь тоже масштаб* уменьшается к центру, который служит неподвижной точкой всего хоровода ящериц. На орнаменте «Круговой предел» ситуация обратная — масштаб уменьшается к периферии рисунка (о связи этого орнамента с инверсией и так называемой *модулярной* фигурой вы можете прочитать в статье «Геометрия круга», «Квант» № 6 за 1977 год). Наконец, на последней работе Эщера «Змеи» масштаб уменьшается *как* к центру, так и к граничной окружности.

Идея неподвижной точки — одна из основных в математике. Что отображение, уменьшающее масштаб, имеет единственную неподвижную точку — ясно из решения задачи о картах (кстати, почему точка единственная?). В действительности, неподвижную точку имеет любое непрерывное отображение круга (или шара) в себя — это знаменитая теорема Брауэра.

В задаче о картах присутствует еще одна общая идея — идея взаимодействия объекта и обозначающего его знака (*объект — большая карта*, знак — меньшая). Совмещение предмета и его изображения вы видите на литографиях «Встреча», «Рисующие руки», «Рептилии». Рисунок на каждой из них покидает плоскость и превращается в реальное трехмерное тело, а затем снова возвращается в плоскость.

Следующая задача внешне совсем не похожа на задачу о картах, но в основе ее решения лежит та же идея взаимодействия объекта и знака. Рассмотрим последовательность из нулей и единиц; первая цифра — нуль, а затем последовательность строится по правилу: к уже построенному куску приписывается справа кусок такой же длины и заменой всех нулей на единицы, а единиц — на нули (как если бы в этом месте стояло зеркало). Вот первые члены этой последовательности (она называется последовательностью Морса):

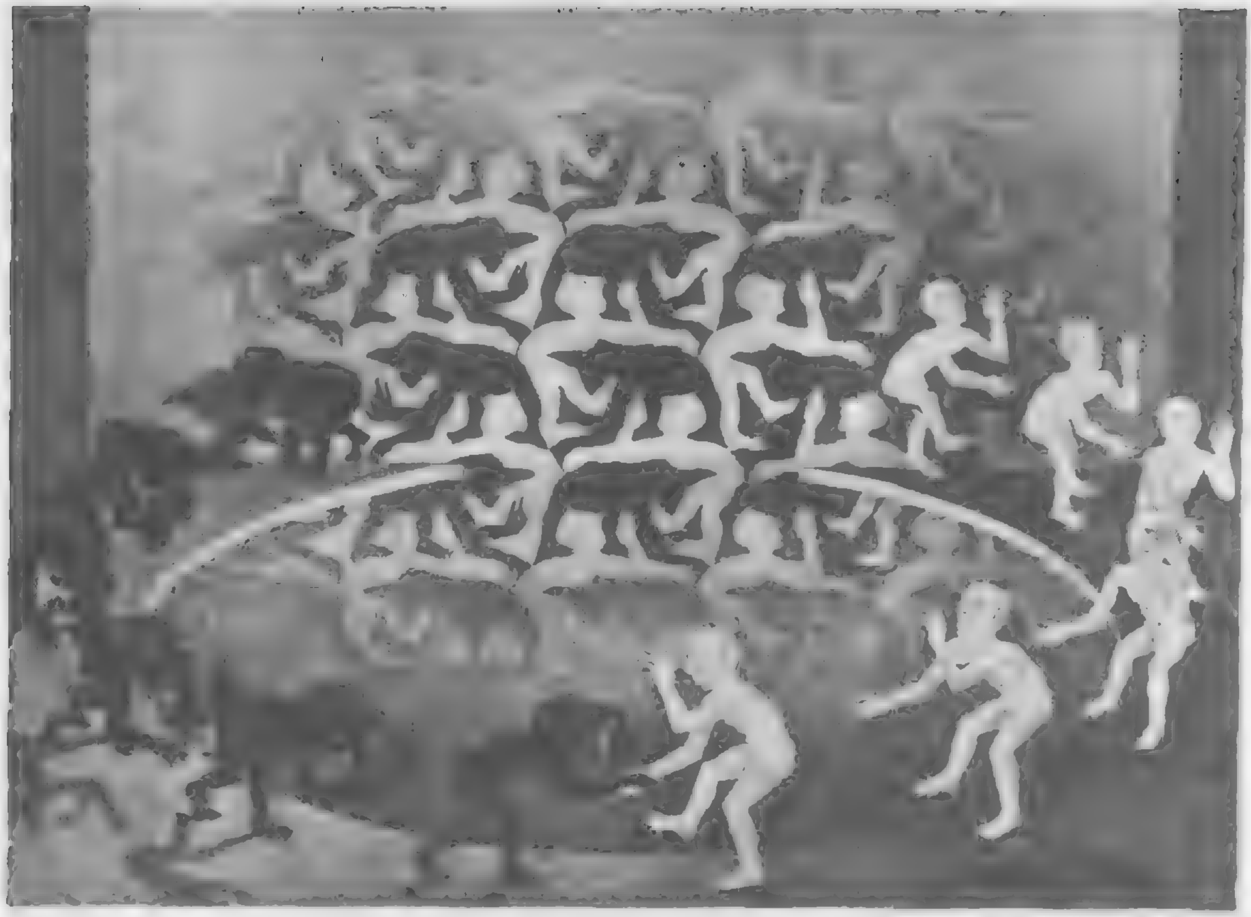
$$M = 0110100110010110\ldots$$

Требуется доказать, что эта последовательность непериодическая.

Будем писать $0*$ вместо пары 01 и $1*$ — вместо 10. С помощью этих символов наша последовательность записывается точно так же, как раньше:

$$M* = 0*1*1*0*1*0*0*1*\ldots$$

Предположим, что M имеет период. Ясно, что M содержит примерно поровну нулей и единиц (скажем, в каждом начальном отрезке длиной 2^k их точно поровну). Если бы период имел нечетную длину, то в нем или единиц, или нулей было бы



«Встреча» (1944).

больше, а тогда и M одних цифр становилось бы все больше и больше, чем других. Итак, если период есть, *то его длина четна.*

Но тогда можно считать, что M состоит из предпериода четной длины и минимального периода длины $2n$. *Значит, и предпериод*, и период можно записать с помощью символов $0*$ и $1*$; период будет состоять из n знаков $0*$ и $1*$. *А теперь внимание:* уберем звездочки у цифр — последовательность от этого не изменится. Следовательно, M имеет период *и длины n,* что противоречит его миннмальности.

Не правда ли, это напоминает решение задачи о картах? M — аналог большой карты, $M*$ — карты меньшего масштаба (или так: M — исходный объект, $M*$ — обозначающий его знак, совпадающий к тому же с самим M). Продумайте эту аналогию, а заодно попытайтесь догадаться, как определить значение n-го члена последовательности Морса по его номеру (подсказка: запишите n в двоичной системе счисления).

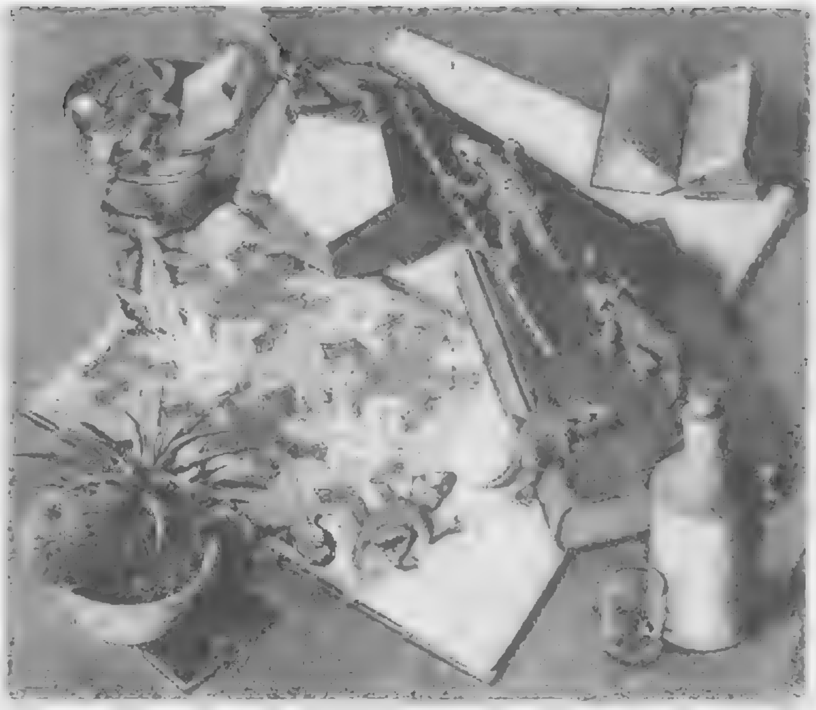
Неосторожное совмещение объекта и знака может приводить к парадоксам типа:

то, что написано на этой
строке, неверно.

(Об этом рассказано в статье «У попа была собака», «Квант» № [illegible] за 1989 год.) Но может привести и к замечательным результатам.

Самый известный пример такого рода — это знаменитая теорема Геделя о неполноте арифметики. Речь идет о том, всякое ли истинное арифметическое утверждение может быть формально доказано, т. е. выведено из аксиом арифметики по законам логики (которые тоже описываются аксиомами). Представьте себе, что удалось построить формулу, которая утверждает собственную недоказуемость. Если эта формула ложна, значит она доказуема, а доказуемые утверждения истинны. Следовательно, она истинна, а стало быть, недоказуема! Итак, если на языке арифметики можно построить такую формулу, то арифметика окажется неполной: в ней есть истинные, но недоказуемые утверждения.

Именно это и удалось сделать австрийскому ло-

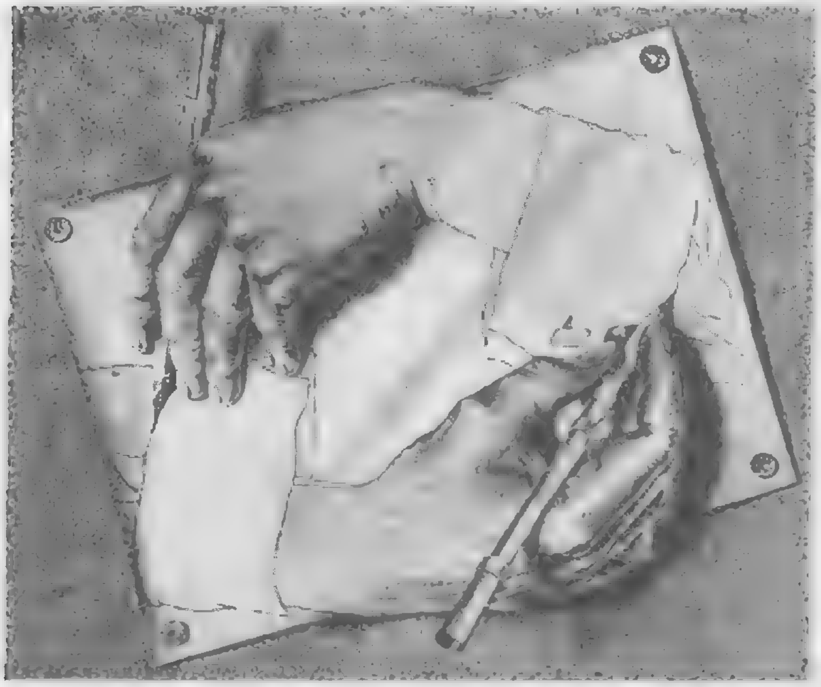


«Рептилии» (1943).

тику Курту Геделю. Для построения нужной формулы он присваивает всем формулам и их последовательностям номера, по которым формулы однозначно восстанавливаются (вот проявление идеи объекта и знака: формулы — объекты, геделевские номера — знаки). Свойство формулы *быть доказуемой* оказывается распознаваемым по ее номеру. После этого Гедель конструирует формулу, выражающую свою собственную *недоказуемость. Конечно, это очень* приблизительное описание работы Геделя (рекомендую по этому поводу замечательную книгу Ю. И. Манина «Доказуемое и недоказуемое», М.: *Радио*, 1979). На английском языке есть книга Д. Хофстадтера «Гедель, Эшер, Бах», посвященная теореме Геделя и иллюстрированная *репродукциями Эшера*. (Вскоре выйдет ее перевод на русский язык.) Теорема Геделя произвела в начале 30-х годов эффект разорвавшейся бомбы, заставив математиков отказаться от веры во всемогущество аксиоматического метода.

Пожалуй, из всех работ Эшера лучше всего известны его орнаменты, т. е. периодические заполнения плоскости одинаковыми фигурами. Во время путешествия в Испанию Эшер старательно изучал и зарисовывал орнаменты в *Альгамбре*, выполненные в период мавританского владычества. В искусстве орнамента арабские мастера достигли совершенства. Ислам запрещает *изображение* человека, животных, рыб и птиц (в соответствии с заповедью: «Не сотвори кумира!»), поэтому мусульманские орнаменты составлены из *абстрактных геометрических* фигур. Эшера очень занимала задача составления орнаментов, использующих в качестве повторяющихся элементов реальные изображения. О результатах, которых ему удалось достичь, вы можете судить сами.

Орнаменты Эшера, конечно, отвечают важной математической идее периодичности (недавно «Квант» писал об этом: см. статью «И возвращается ветер...», или Периодичность в математике», № 4 за этот год).



«Рисующие руки» (1948).

(Окончание см. на с. 19)

Я убежден, что Исаак Ньютон
То яблоко, которое открыло
Ему закон земного тяготения,
Что он его,
В конечном счете,— съел...

Дж. Байрон. Дон Жуан,
песнь X

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Доктор физико-математических наук
Я. СМОРОДИНСКИЙ

В современной физике есть постоянные, которые называют фундаментальными. Среди них скорость света c, заряд электрона e, масса электрона m, гравитационная постоянная G, постоянная Планка h. Эти постоянные входят в формулы, описывающие физические процессы в микромире и в космическом пространстве. Фундаментальность этих постоянных в том, что их значения не изменяются ни со временем, ни с местом в пространстве. Где бы мы ни измеряли эти постоянные, мы всегда получим одни и те же значения. Физики знают, что эти постоянные не изменились сколь-нибудь заметно за миллиарды лет эволюции Вселенной.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 6 за 1977 год.

Первую фундаментальную постоянную — гравитационную постоянную G — ввел в физику Исаак Ньютон. Появилась она с открытием закона всемирного тяготения.

В истории этого открытия много удивительного и интересного. Забавна легенда о том, как Ньютон открыл этот закон, сидя под яблоней, когда ему на голову упало яблоко. Интересно, как Ньютон смог доказать справедливость этого закона, изучая движение Луны. Удивительно, сколь точным оказался этот закон.

Но самым удивительным было то, с какой смелостью Ньютон объявил, что закон тяготения есть всеобщий закон, который определяет взаимодействие любых тел во Вселенной.

Из равенства ускорений всех падающих тел он заключил, что сила, действующая на падающее тело, пропорциональна массе этого тела; сила, с которой Луна притягивается Землей, должна быть пропорциональна как массе Луны, так и массе Земли, поскольку можно с таким же успехом считать, что Земля притягивается Луной.

Это было главное в открытии Ньютона. Но Ньютон понял и то, что, хотя для разных тел ускорение должно быть одним и тем же, оно должно уменьшаться с возрастанием расстояния между притягивающимися телами.

В своем сочинении «Математические начала натуральной философии», вышедшем в Англии в 1686 году, Ньютон подвел итог своим многолетним исследованиям в механике*); он излагает, как он нашел зависимость сил притяжения между телами от расстояния между ними.

Проще всего было бы вывести этот закон для движения по окружности (мы это и сделаем ниже); но планеты движутся по эллипсам, и надо было доказать, что из того же закона можно получить и эллиптическую траекторию.

В своей книге Ньютон формулирует четыре правила, которыми должен руководствоваться естествоиспытатель. Он называет эти правила «правилами философствования». Мы приведем их полностью:

«Правило I. Не до́лжно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

Правило II. Поэтому, поскольку возможно, до́лжно приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.

Правило III. Такие свойства тел, которые не могут быть ни усиляемы, ни ослабляемы и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

Правило IV. В опытной физике предложения, выведенные из совершающихся явлений помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточняются или же окажутся подтвержденными исключениям.»

Правило III позволяет Ньютону сделать следующий вывод: «...Опытами и астрономическими наблюдениями устанавливается, что все тела по соседству с Землей тяготеют к Земле, и притом пропорционально количеству материи каждого из них; так, Луна тяготеет к Земле пропорционально своей массе, и взаимно наши моря тяготеют к Луне, все планеты тяготеют друг к другу, подобно этому и тяготение комет к Солнцу. На основании этого правила надо утверждать, что все тела тяготеют друг к другу». Зависимость сил тяготения от расстояния Ньютон сформулировал так: «Если времена находятся в полукубическом отношении радиусов, то центростремительные силы обратно пропорциональны квадратам радиусов...» Первая половина этой теоремы есть просто третий закон Кеплера:

---

*) Натуральной философией в Англии называли в XVII веке физику. Книга Ньютона была переведена на русский язык только в 1915 году замечательным русским ученым А. Н. Крыловым. Этот перевод помещен в V томе Собрания сочинений Крылова. Ниже в тексте статьи все цитаты приводятся из этого перевода.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1^{3/2}}{R_2^{3/2}}$$

— периоды обращения планет относятся как полукубические степени (степени 3/2) радиусов их орбит. Центростремительная же сила есть та сила, которая заставляет планеты падать на Солнце, т. е. сила притяжения планет Солнцем.

Книга Ньютона была первой книгой, где механика излагалась как точная наука; эту книгу нужно считать первой книгой по теоретической физике и считать год выхода книги — 1686 год — годом рождения теоретической физики. Влияние этой книги на науку было огромным. После нее уже нельзя было ограничиться только рассуждениями, словесными описаниями явлений природы — надо было создавать их теорию. А правильность теории может быть установлена только опытной проверкой: если предсказания теории совпадают с данными опытов, наблюдений,— теория верна. Создание Ньютоном и Лейбницем математического анализа дало средства для выполнения этой программы.

* * *

Еще древние греки создали первую теорию движения планет. Эта теория была изложена Птолемеем в трактате «Альмагест». Но она совсем не касалась вопроса о том, почему движутся планеты. Такой вопрос и не возникал. Следуя учению Аристотеля, греки считали, что планетам свойственно движение по окружностям, подобно тому как тяжелым телам свойственно падать, а легким, как дым, подыматься вверх. Даже в средние века рассуждать о причинах движения планет значило смешивать астрономию с физикой, что было по представлениям того времени не позволительно; законы небесные и земные принадлежали разным областям,и в них не следовало искать чего-либо общего.

Все же Коперник в 1543 году говорил о том, что тяжесть — это общее свойство тел, «...стремление, благодаря которому они, смыкаясь в форме шара, образуют единое целое. И следует допустить, что это стремление присуще также Солнцу, Луне и остальным планетам...».

Кеплер (а до Кеплера еще и Гильберт) сравнивал тяжесть с магнитным действием. При этом Кеплер был первым, кто объявил задачу о движении планет физической задачей, и первым, кто ясно поставил вопрос, *почему* движутся планеты, в то время как все остальные астрономы лишь придумывали геометрические модели, которые описывали, *как* движутся планеты. Физики времен Галилея и Кеплера решали физические задачи, составляя пропорции. Так, о падении тел на Земле говорилось, что если промежутки времени расположить в форме арифметической прогрессии, то отрезки путей, проходимых телом за последовательные промежутки времени, будут относиться как квадраты последовательных чисел. Галилей знал, что все тела на Земле падают с одинаковым ускорением; он вполне мог объяснить, почему брошенное на Землю тело летит по параболе. Описывая полет снаряда, он говорил, что это движение складывается из равноускоренного падения и равномерного прямолинейного движения по инерции, и не задавался вопросом о том, почему снаряд падает равноускоренно. Очень трудно было прийти к мысли, что ускорение зависит от высоты. Галилей считал, что даже Луна (если остановить ее поступательное движение) будет падать на Землю с тем же ускорением, с каким камень падает на Земле.

Правда, Галилей считал, что и для Луны должен выполняться «земной» закон независимости ускорения свободного падения от массы. Так что «половину» задачи он понимал правильно! Но Галилей никак не мог воспринять идею, что Земля притягивает камень. Падение камня (Луны) на Землю есть просто проявление стремления всех тел собраться поближе к одному центру, собраться в некую шарообразную «кучу». В то время считалось очевидным, что одно тело может действовать на другое, только соприкасаясь с ним. Действие на расстоянии казалось просто немыслимым.

Поэтому Галилей отверг идею Кеплера о том, что приливы и отливы на Земле связаны с притяжением Луной вод океанов. К времени Ньютона положение начало изменяться.

Не все слепо следовали за Галилеем. Так, Роберт Гук, основываясь на аналогии тяжести с притяжением магнита, пытался в 1666 году опытным путем определить, как изменяется вес тела с высотой. Он проводил опыты с маятниками разной длины в Вестминстерском аббатстве в Лондоне. Ясно, что обнаружить что-либо существенное он так и не смог. Даже высказывая предположение о том, что сила притяжения изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, он не смог облечь свои мысли в строгую форму уравнений. Гук не умел еще ни писать уравнений, ни решать их и потому не смог проверить справедливость этого предположения. Также ничего не смог сделать и другой знаменитый в то время механик англичанин Рен. Рен также говорил о законе обратных квадратов, но и у него все ограничивалось словами.

Только в руках Ньютона все стало на свои места. Первая, и главная, идея пришла ему в голову в 1665 году, когда он спасался от чумы в своем родовом поместье. Как рассказывают, все дело началось с яблока, упавшего с дерева. 23-летнего ученого поразила мысль, что причина, заставляющая яблоко падать на Землю, должна быть родственна причине, заставляющей Луну отклоняться от своего прямолинейного пути. Сейчас это кажется очевидным, но во времена Ньютона сама мысль о подчинении космических тел простым земным законам была необычайно смелой. Но одно дело поверить самому в смелую гипотезу, а другое — убедить в ее справедливости других. Для этого надо, по крайней мере, найти способ ее проверки, *найти способ, как мы говорим сейчас*, сравнить теорию с опытом.

Лучше всего было начать с исследования движения Луны, используя имеющиеся результаты наблюдений. Это требовало сил и времени. Ньютон, кроме того, был еще занят оптическими исследованиями; и вообще ученые того времени обычно не торопились с публикациями. Вероятно, поэтому лишь через 20 лет — в апреле 1686 года — Ньютон представил Королевскому обществу (Английской академии наук) первый том «Начал», а весь труд был опубликован к середине 1687 года. Только тогда теория была выдана на суд других физиков.

* * *

Напишем закон всемирного тяготения для Солнца и планеты (обозначая их массы M и m). Сила притяжения

$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Ускорение, сообщаемое этой силой планете,

$$a = G\frac{M}{r^2}.$$

Как же Ньютон получил эти формулы?

В своих поисках закона тяготения Ньютон исходил из третьего закона Кеплера: квадраты средних времен обращения планет относятся как кубы их средних расстояний от Солнца. (Этот закон Ньютон называет полукубическим отношением.) Еще тогда, когда Ньютон сравнивал падение яблока и Луны, он знал, что, если тело движется по окружности, на это тело действует сила, притягивающая его к центру окружности; он знал также, что центростремительное ускорение пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально расстоянию.

Правда, честь открытия законов кругового движения приписывается Гюйгенсу, но Гюйгенс опубликовал свое открытие лишь в 1673 году (хотя знал о нем еще в 1659). Ньютону пришлось поэтому разбираться во всем самому.

Ньютон рассуждал примерно так. Третий закон Кеплера гласит, что для планет одной системы

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \ldots = \text{const}.$$

Пусть планеты движутся по окружностям. Введем угловую скорость вращения планеты по орбите $\omega = 2\pi/T$. Тогда третий закон Кеплера примет вид:

$$\omega_1^2 R_1^3 = \omega_2^2 R_2^3 = \ldots = \mathrm{const}.$$

Предположим теперь, что сила взаимодействия планеты с Солнцем пропорциональна некоторой степени расстояния:

$$F \sim R^n.$$

Этой же степени R пропорционально и ускорение планеты:

$$a = CR^n,$$

где C — некоторая константа. Так как $a = \omega^2 R$,

$$\omega^2 = CR^{n-1}.$$

Какова должна быть степень n, чтобы произведение $\omega^2 R^3$ было постоянным? Так как

$$\omega^2 R^3 = CR^{n-1} R^3 = CR^{n+2},$$

то ясно, что произведение $\omega^2 R^3$ не зависит от R, если $n = -2$. Тогда

$$\omega^2 R^3 = C.$$

Ньютон также предположил, что постоянная C пропорциональна массе притягивающего тела, т. е. Солнца:

$$C = GM_\odot.$$

Постоянная G и есть гравитационная постоянная, которая, по предположению Ньютона, уже не зависит ни от каких других величин. Итак,

$$a = G\frac{M_\odot}{R^2}.$$

Следовательно, сила, сообщающая планете массой m это ускорение, т. е. сила взаимодействия планеты с Солнцем, равна

$$F = G\frac{M_\odot m}{R^2}.$$

В этом выводе, однако, задача слишком упрощена. На самом деле она значительно сложнее.

Вводя в формулу одно-единственное расстояние R, мы рассуждали так, как будто бы Солнце — материальная точка, не имеющая размеров. Но Ньютон понимал, что, для того чтобы проверить закон тяготения, например, по движению Луны, надо уметь решать задачу для тела конечного размера, просуммировав как-то вклады от разных частей Земли и Луны. Задача была сложной, и ее решение было получено не скоро. Вероятно, это было главной причиной, почему Ньютон так долго не публиковал свое открытие.

Результаты решения этой сложной задачи Ньютон представил в виде теорем. Для однородных по плотности тел формула для закона притяжения выглядит так, как будто бы вся масса тела сосредоточена в его центре. Ньютон доказал, что сферический слой однородной плотности притягивается другими телами и, по закону равенства действия и противодействия, притягивает сам другие тела так, как будто вся его масса сосредоточена в центре.*) Если представить себе шар сложенным из сферических слоев, то можно видеть, как вычислять поле тяготения тела со сферически симметричным распределением массы. Эти теоремы Ньютона решили дело. Теперь в выражении для силы, действующей между Луной и Землей, под R следовало понимать расстояние между центрами этих тел. Замена реальных Земли и Луны телами со сферически симметричным распределением масс оказалась настолько хорошим приближением, что только в последние годы, при расчетах траекторий спутников, пришлось уточнять формулы.**)

Была и еще одна причина, которая, по-видимому, мешала Ньютону опубликовать его исследования закона тяготения. Ньютон не имел точного значения радиуса Земли, и сравнение расчетов с результатами наблюдений не давало хорошего согласия. Только после того, как Пикар измерил радиус Земли с большой точностью (ошибка не превышала 0,03 %), исчезли расхождения.

---

*) Речь идет о телах, находящихся вне слоя. Ньютон доказал, что внутри полости гравитационные силы равны нулю.

**) Конечно, все рассуждения о Луне верны только приблизительно. В реальном мире движение Луны вокруг Земли определяется не только их взаимодействием по закону Ньютона. Ньютон сам это заметил и без успеха бился над решением задачи о Луне. Корень зла таился во взаимодействии Луны с другими планетами. Должно было пройти много лет, пока астрономы научились рассчитывать движение Луны с нужной точностью. Если читателю интересны подробности, он может прочесть книгу Бронштэна В. А. «Как движется Луна» (М., «Наука», 1990).

Теперь можно было доказать самое главное. Доказать, что из закона всемирного тяготения следует, что траекториями планет будут эллипсы, а траекториями комет — гиперболы.

Необходимость такого доказательства была четко сформулирована в январе 1684 года во время беседы трех английских физиков — Галлея, Рена и Гука. Рен даже объявил приз — книгу, которую он отдаст тому, кто в течение двух месяцев решит задачу. Приз так и не был вручен. В мае Галлей предлагает эту задачу Ньютону, который и прислал ему через полгода нужное доказательство.

В «Началах» Ньютон излагает решение обратной задачи: он находит, каков должен быть закон взаимодействия, чтобы траекторией был эллипс, и показывает, что это должен быть закон «обратных квадратов». Более того, Ньютон доказывает, что если бы закон сил, действующих между планетой и Солнцем, хотя бы немного отклонился от закона обратных квадратов, то точки наибольшего и наименьшего удаления планеты от Солнца не были бы неподвижны в пространстве. А из наблюдений было известно, что эти точки (их называют апсидами) почти неподвижны. Это доказательство Ньютона — одно из самых блестящих в астрономии.

Обратим еще раз внимание на сказанное: можно утверждать, что закон обратных квадратов для сил притяжения следует из одного только факта неподвижности апсид; так что расчеты силы притяжения с помощью третьего закона Кеплера излишни; на самом деле третий закон является следствием первого. Этого, конечно, Кеплер знать не мог.*)

> *Что есть слава? Порождение случая!*
> *Сэр Исаак Ньютон открыл, что яблоки*
> *падают на землю,— честное слово,*
> *такие пустяковые открытия делали*
> *до него миллионы людей. Но у Ньютона*
> *были влиятельные родители, и они*
> *раздули этот банальный случай*
> *в чрезвычайное событие, а простаки*
> *подхватили их крик. И вот в одно*
> *мгновение Ньютон стал знаменит!!*
>
> Марк Твен. Когда я служил оператором

* * *

Много лет теория Ньютона была основой небесной механики, и хотя многие пытались обнаружить какие-либо поправки к закону всемирного тяготения, найти их удалось только Эйнштейну. Сейчас мы знаем, когда закон всемирного тяготения становится неточным, и умеем вычислять к нему поправки. Закон тяготения верен до тех пор, пока расстояние между телами много больше так называемого гравитационного радиуса притягивающего тела. Гравитационным радиусом тела массой M называют величину

$$R_{гр} = \frac{2GM}{c^2},$$

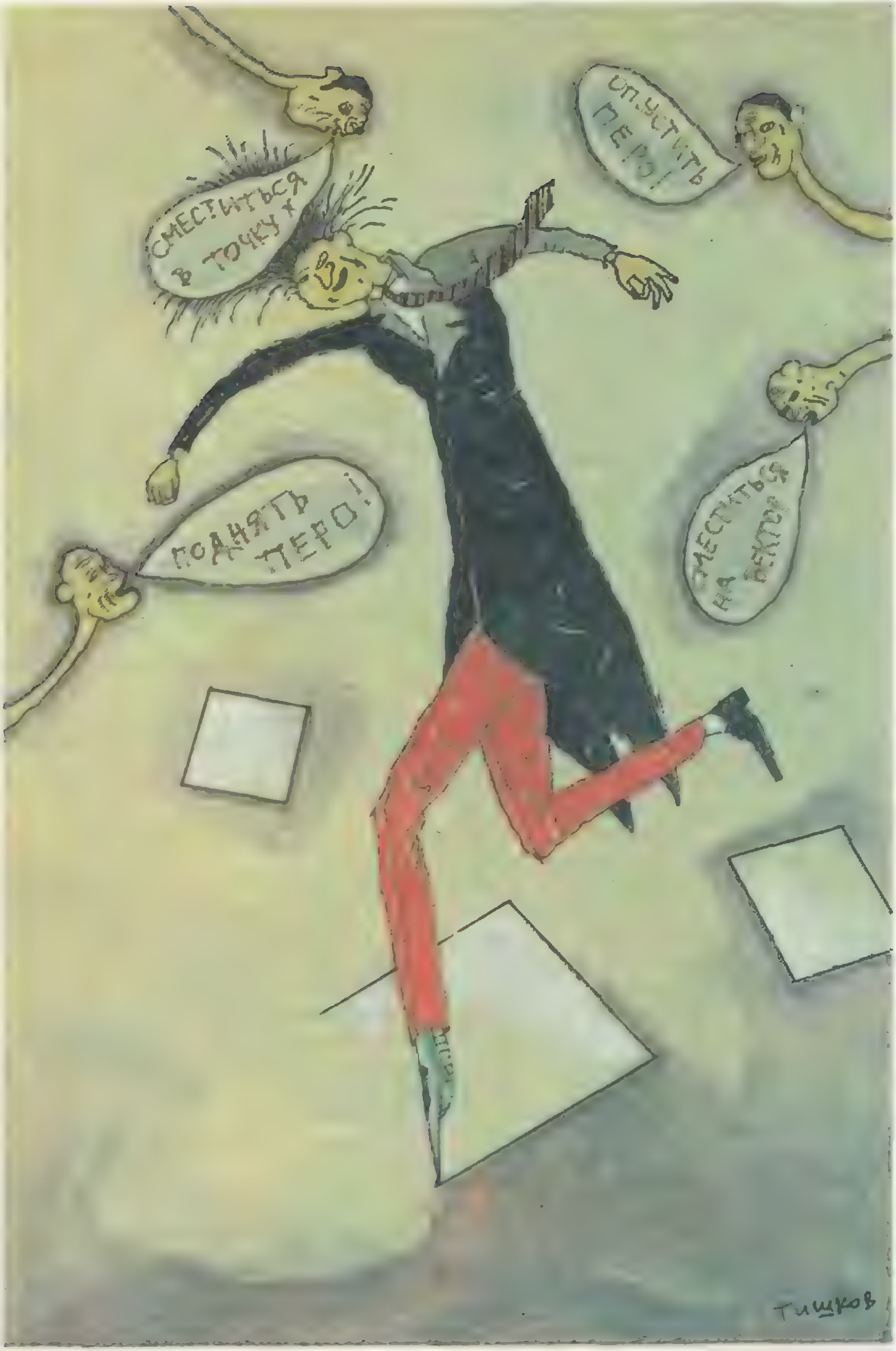
где $GM = C$ — это известная уже нам «постоянная Кеплера», а c — скорость света. Для Солнца гравитационный радиус равен 3 км, а для Земли — 7 мм. Отсюда мы можем заключить, что закон всемирного тяготения на поверхности Земли может иметь относительную ошибку, равную примерно $\frac{7 \cdot 10^{-3}\ м}{6{,}4 \cdot 10^6\ м} \approx 10^{-9}$ (радиус Земли $\approx$6400 км), а на поверхности Солнца — $\frac{3 \cdot 10^3\ м}{7 \cdot 10^8\ м} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-5}$ (радиус Солнца $\approx$700 000 км).

На расстоянии, равном расстоянию от Солнца до Меркурия (около 50 млн. км), мы можем ожидать ошибку в законе всемирного тяготения

(Окончание см. на с. 51)

---

*) Если бы сила притяжения была пропорциональна расстоянию, планета имела бы замкнутую эллиптическую орбиту только в том случае, если бы Солнце располагалось не в фокусе эллипса, а в его центре.


СМЕСТИТЬСЯ В ТОЧКУ Х
ОПУСТИТЬ ПЕРО!
ПОДНЯТЬ ПЕРО!
СМЕСТИТЬСЯ НА ВЕКТОР
ТИШКОВ

ЧЕРТЕЖНИК РИСУЕТ КВАДРАТ

Кандидат физико-математических наук
В. ГИСИН

Иногда казалось бы совсем простые задачи по информатике приводят к интересным математическим задачам. Мы рассмотрим одну такую задачу из учебника информатики под редакцией А. П. Ершова (1988 г.).

Сначала напомним описание Чертежника — устройства, предназначенного для построения рисунков на координатной плоскости. Чертежник имеет перо, которое может перемещаться по плоскости. Если перо опущено, оно оставляет след. Чертежник может исполнять 4 команды: «поднять перо», «опустить перо», «сместиться в точку $(x;\ y)$», «сместиться на вектор $(d_x;\ d_y)$». Координаты точек и векторов в командах Чертежника записываются в виде конечных десятичных дробей. Считается, что перед началом работы Чертежника плоскость чиста, перо поднято и находится в начале координат. Чтобы получить рисунок, нужно дать Чертежнику серию команд. Например, если скомандовать:

> сместиться в точку (1; 1); опустить перо; сместиться на вектор (0; —2); сместиться на вектор (—2; 0); сместиться на вектор (0; 2); сместиться на вектор (2; 0); поднять перо,

то после исполнения будет нарисован квадрат со стороной 2 и центром в начале координат (задача 1 в §4). Возникает естественный вопрос: может ли Чертежник нарисовать какой-нибудь квадрат со стороной 2 и центром в начале координат, не совпадающий с нашим квадратом?

Понятно, что у всякого такого квадрата координаты вершин выражаются конечными десятичными дробями. Наоборот, если координаты хотя бы одной вершины квадрата с центром в начале координат — конечные десятичные дроби (например, $(x;\ y)$), то конечными десятичными дробями будут и координаты остальных вершин (именно, $(x;\ y)$, $(-y;\ x)$, $(-x;\ -y)$, $(y;\ -x)$) и координаты всех векторов-сторон (именно, $(-x-y;\ x-y)$, $(-x+y;\ -x-y)$, $(x+y;\ -x+y)$, $(x-y;\ x+y)$) — рисунок 1. Точно так же, если хотя бы один из наших четырех векторов имеет конечные десятичные координаты, то остальные векторы и все вершины имеют конечные десятичные координаты. Таким образом, квадрат с центром в начале координат можно построить при помощи нашего Чертежника тогда и только тогда, когда хотя бы у одной его вершины или хотя бы у одного вектора его сторон координаты — конечные десятичные дроби.

Нам удобнее рассматривать не векторы, а *половины векторов*. Если длина стороны квадрата равна 2, то длина ее половины равна 1. Таким образом, чтобы найти все квадраты, являющиеся решениями нашей зада-

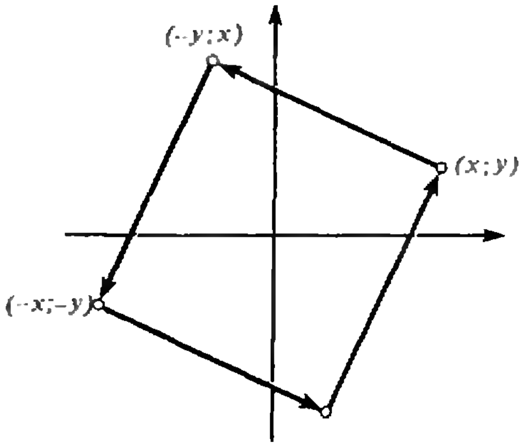


Рис. 1.

чи, мы должны просто отыскать все пары (a; b) конечных десятичных дробей, для которых $a^2+b^2=1$. По-другому — найти все точки единичной окружности с центром в начале координат, координаты которых — конечные десятичные дроби.

Четыре такие точки видны сразу: (±1; 0) и (0; ±1). Но они соответствуют нашему квадрату. А еще есть? Да, например, $a=0{,}6$, $b=0{,}8$ (или $a=\pm0{,}6$, $b=\pm0{,}8$, или $a=\pm0{,}8$, $b=\pm0{,}6$). А еще? Есть и еще, как показывает простое геометрическое рассуждение.

Координаты произвольной точки нашей окружности — это ($\cos\varphi$; $\sin\varphi$), где φ — угол между положительным направлением оси OX и радиус-вектором нашей точки, отсчитываемый против часовой стрелки. Значит, мы хотим найти все углы φ такие, что $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ — конечные десятичные дроби. Назовем такие углы *десятичными.*

Лемма. *Если φ_1 и φ_2 — десятичные углы, то $\varphi_1+\varphi_2$ и $\varphi_1-\varphi_2$ — также десятичные углы.*

Доказательство. Это сразу видно из формул $\cos(\varphi_1\pm\varphi_2)=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\mp\sin\varphi_1\sin\varphi_2$, $\sin(\varphi_1\pm\varphi_2)=\sin\varphi_1\cos\varphi_2\pm\cos\varphi_1\sin\varphi_2$.

Следствие. *Если φ_1 и φ_2 — десятичные углы, то $k_1\varphi_1+k_2\varphi_2$ — десятичный угол при любых целых k_1 и k_2.*

Точке (0,6; 0,8) соответствует угол φ_0, для которого $\cos\varphi_0=0{,}6$, $\sin\varphi_0=0{,}8$. Угол φ_0 — десятичный. Но по доказанному $2\varphi_0$ — тоже десятичный угол. По известным формулам $\cos2\varphi_0=0{,}6^2-0{,}8^2=-0{,}28$, $\sin2\varphi_0=2\cdot0{,}6\cdot0{,}8=0{,}96$. Значит, вот еще одна подходящая точка окружности: (—0,28; 0,96). А можно взять и (0,28; 0,96), и вообще ($\pm0{,}28$; $\pm0{,}96$) или ($\pm0{,}96$; $\pm0{,}28$). А еще можно взять $3\varphi_0$, $4\varphi_0$, ... Потом не забудем о точках (±1; 0) и (0; ±1). Им соответствуют углы 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, т. е. углы $\frac{l\pi}{2}$ с $l=0, 1, 2, 3$. Значит, мы знаем массу десятичных углов: таковы все углы

$$k\varphi_0+\frac{l\pi}{2} \qquad (*)$$

с любым целым k и $l=0, 1, 2, 3$ (можно сказать «с любым целым l», но если l изменить на 4, угол изменится на 2π, т. е. задаст тот же поворот). Но, может быть, и это не все? Нет, это уже все. Мы рассмотрим такую теорему.

Теорема 1. *Все десятичные углы имеют вид (*), и все углы (*) (с $l=0, 1, 2, 3$) различны.*

Эту теорему мы докажем немного погодя. А сейчас заметим, что квадраты, которые может построить наш Чертежник, получаются из квадрата, описанного в начале статьи, поворотами на десятичные углы φ вокруг начала координат. На рисунке 2 изображены квадраты, образованные серединами сторон исходного и повернутого квадрата. Единичные векторы, идущие из начала координат в их вершины, являются десятичными. Кроме того, так как поворот вокруг центра на угол $\pi/2$ переводит всякий квадрат в себя, оказывается справедливой следующая теорема.

Теорема 2. *Квадраты со стороной 2 и центром в начале координат, которые можно построить при помощи Чертежника,— это квадраты, получающиеся из первоначального квадрата поворотами в ту или иную сторону на углы φ_0, $2\varphi_0$, $3\varphi_0$, ... Все эти квадраты различны.*

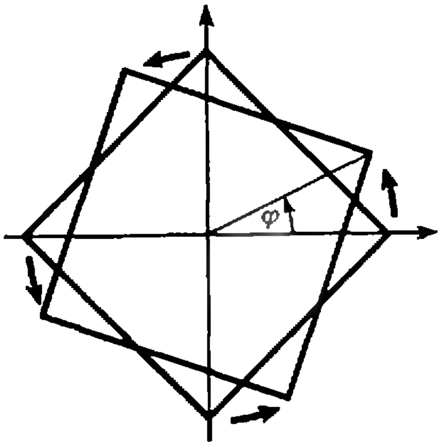


Рис. 2.

(Напомним, что поворот на угол $-\varphi$ есть поворот на угол φ в противоположную сторону.)

Теперь мы отвлечемся от наших чертежных проблем и обратимся к доказательству теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть α — десятичный угол, и пусть $\cos\alpha=A/10^n$, $\sin\alpha=B/10^n$, где A и B — целые числа. Тогда

$$\left(\frac{A}{10^n}\right)^2+\left(\frac{B}{10^n}\right)^2=1,\quad A^2+B^2=(10^n)^2=10^{2n}.$$

Обозначим через C наибольший общий делитель чисел A, B и 10^n и положим $a=A/C$, $b=B/C$; мы имеем:

$$a^2+b^2=(10^n/C)^2.$$

Число $10^n/C$ обязано быть нечетным, а значит — степенью пятерки. Действительно, если $10^n/C$ четно, то a и b не могут быть оба четны; но если одно из них четно, а другое нечетно, то сумма a^2+b^2 нечетна, а с ней нечетно и $10^n/C$, если же a и b были бы оба нечетны, то a^2 и b^2 имели бы остаток 1 от деления на 4 в противоречие с тем, что число $(10^n/C)^2$, будучи четным, должно делиться на 4.

Итак, мы должны решить в целых числах уравнение

$$a^2+b^2=5^{2m}.$$

Наша цель — показать, что эти решения исчерпываются следующими:

$$a=5^m\cos\alpha,\quad b=5^m\sin\alpha,$$

где $\alpha=k\varphi_0+\frac{l\pi}{2}$ (а m — такое целое число, что a и b — целые). Другими словами,

$$a=5^m\cos\left(k\varphi_0+\frac{l\pi}{2}\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{или }\ \pm5^m\cos(\pm k\varphi_0),\\ \text{или }\ \pm5^m\sin(\pm k\varphi_0)\end{array}\right.$$

и аналогично для b.

Предположим, что при $m<m_0$ все целочисленные решения нашего уравнения имеют указанный вид. Возьмем решение a, b уравнения

$$a^2+b^2=5^{2m}.$$

Мы можем считать, что a и b не делятся на 5 (если a делится на 5, то и b делится на 5, и тогда $a'=a/5$, $b'=b/5$ — решение аналогичного уравнения с $5^{2(m-1)}$ вместо 5^{2m} и оно имеет нужный вид по предположению). Запишем наше решение в виде $a=5^m\cdot\cos\alpha$, $b=5^m\cdot\sin\alpha$ и рассмотрим числа $3a+4b$, $3a-4b$. Их произведение $9a^2-16b^2=9(a^2+b^2)-25b^2=9\cdot5^{2m}-25b^2$ делится на 5^2 и не делится на 5^3; их сумма $6a$ не делится на 5. Значит, одно из этих чисел, пусть для определенности это $3a+4b$, делится на 5^2. Положим $a'=\frac{3a+4b}{5^2}$. Это — целое число, не делящееся на 5. Положим также $b'=a+b-7a'=\frac{4a-3b}{5^2}$. Тогда

$$(a')^2+(b')^2=$$

$$=\frac{9a^2+12ab+16b^2+16a^2-12ab+9b^2}{5^4}=$$

$$=\frac{25(a^2+b^2)}{5^4}=5^{2m+2-4}=5^{2(m-1)}.$$

Значит, a', b' — решение уравнения нашего вида с $5^{2(m-1)}$ вместо 5^{2m}, т. е.

$$a'=5^{m-1}\cos\beta,\quad b'=5^{m-1}\sin\beta,$$

где β имеет вид $q\varphi_0+\frac{r\pi}{2}$, $r=0, 1, 2, 3$. Но в то же время

$$a'=\frac{3a+4b}{5^2}=$$

$$=5^{m-1}\cdot\left(\frac{3}{5}\cos\alpha+\frac{4}{5}\sin\alpha\right)=$$

$$=5^{m-1}(\cos\varphi_0\cos\alpha+\sin\varphi_0\sin\alpha)=5^{m-1}\cos(\alpha-\varphi_0)$$

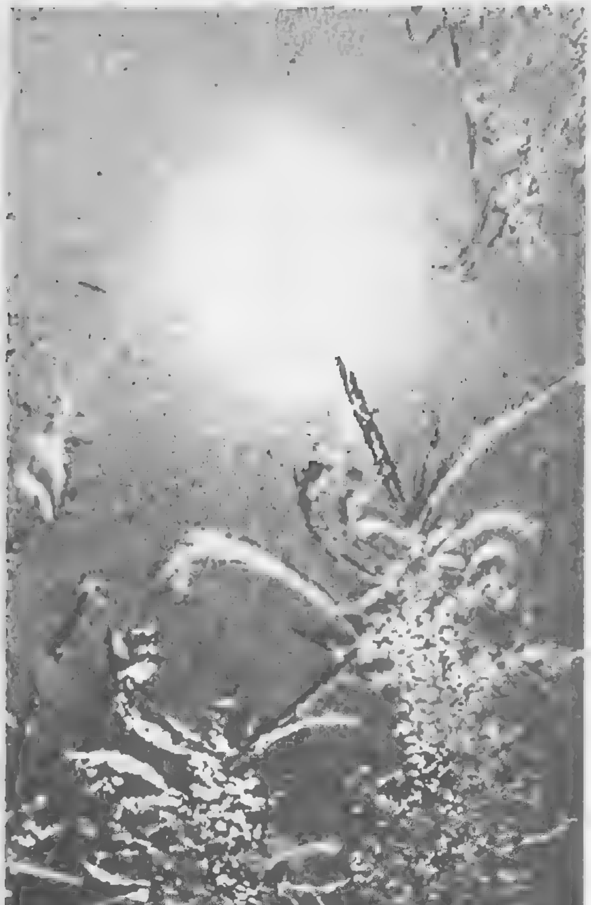
и, аналогично,

$$b'=5^{m-1}\sin(\alpha-\varphi_0).$$

Значит, $\beta=\alpha-\varphi_0$, $\alpha=\beta+\varphi_0$, и наше решение тоже имеет нужный вид. Теорема доказана.

Упражнение. Введем дополнительное ограничение на форму команд Чертежника: запись числа не должна содержать более пяти значащих цифр (подряд идущие нули слева и справа не считаются). Определите, сколько квадратов со стороной 2 и центром в начале координат может нарисовать Чертежник.

О МОРОЗНЫХ УЗОРАХ И ЦАРАПИНАХ НА СТЕКЛЕ



Кандидат физико-математических наук
А. МИТРОФАНОВ

Зимой в сильные морозы на окнах домов, в транспорте можно наблюдать красивые ледяные узоры. Удивительное творение зимы эта морозная «живопись»! Причудливые ветви и цветы, перья диковинных птиц, прозрачные радужные звезды-снежинки, тончайший геометрический орнамент...— морозные узоры разнообразны и неповторимы. А иногда пушистый снежный «мех» покрывает стекло — это слой мелких ледяных кристаллов, матовая поверхность которого служит примером идеально рассеивающего экрана.

Доводилось ли вам наблюдать, как зарождаются ледяные рисунки на оконных стеклах? Оказывается, очень часто самые первые кристаллы льда появляются на оконных стеклах не произвольно, не где попало, а вдоль царапин, микротрещин и других дефектов, которые всегда есть на стеклах. Такие ледяные кристаллы как бы визуализируют эти невидимые или почти невидимые дефекты.

Явление, о котором идет речь, наблюдается не только зимой при замерзании оконных стекол, но и во многих случаях при конденсации паров или при осаждении какого-либо вещества на поверхности аморфного или кристаллического твердого тела с нарушенной структурой поверхности. Это явление называется декорированием (от латинского слова decoro — украшаю).

Микродефекты, такие как микротрещины, точечные дефекты, дислокации (линии, вдоль которых нарушено правильное расположение атомных плоскостей в кристалле) и т. д., приводят к появлению локальных силовых полей, действующих на осаждаемые частицы вещества вблизи этих дефектов. Например, нескомпенсированный электрический заряд может возникнуть в местах излома поверхности и вблизи микротрещин диэлектрика. Атомам осаждаемого вещества оказывается энергетически выгодно выстраиваться на поверхности твердого тела около дефектов. Дефекты служат как бы «затравочными» центрами для роста кристаллов на поверхности. Размеры кристаллов в ходе их роста могут значительно превышать характерные размеры микродефектов, так что декорирование позволяет наблюдать (иногда даже невооруженным глазом) микродефекты, размеры которых могут быть соизмеримыми с атомными. Явление декорирования лежит в основе одного из методов исследования нарушений структуры твердых тел.

Если превращение твердое тело — пар не обходится без жидкой фазы, то рассматриваемое явление имеет некоторые особенности. Микротрещины и поры на поверхности тела способствуют конденсации паров вещества (если, конечно, образуется жидкость, которая смачивает стенки пор и трещин). Это явление называется капиллярной конденсацией, и суть его заключается в том, что давление насыщенных паров над искривленной (вогнутой) поверхностью жидкости меньше, чем над плоской. Поэтому жидкость конденсируется прежде всего в порах и трещинах. При дальнейшем охлаждении жидкости и ее замерзании вдоль трещин и вблизи пор появляются кристаллы конденсата, например льда. Вот о чем напомнили нам вереницы ледяных кристалликов на оконном стекле, возникшие при резком зимнем похолодании.

Так что красотой морозного узора мы обязаны несовершенству поверхности стекла.

Вариации на тему Эшера

(Начало см. на с. 2)

Не меньшее значение в современной математике и физике играет понятие квазипериодичности. Можно доказать, что не существует периодических замощений плоскости, имеющих симметрию пятого порядка. А квазипериодические замощения, т. е. такие, в которых каждый конечный фрагмент повторяется бесконечное число раз, существуют. В 1974 году их открыл упоминавшийся выше Р. Пенроуз, а через десять лет были получены квазикристаллы — материалы нового типа, имеющие такую симметрию (см. статью «Узоры Пенроуза и квазикристаллы», «Квант» № 6 за 1987 год). Кстати, последовательность Морса обладает свойством квазипериодичности. Не сомневаюсь, что если бы Эшер дожил до открытия квазипериодических замощений, он создал бы ряд ярких работ, использующих эту идею.

Закончу разговор о творчестве М. Эшера его словами:

«Если бы вы только знали, какие видения посещают меня в ночной тьме... Иногда моя неспособность сделать их зримыми буквально сводит меня с ума. По сравнению с этими мыслями каждая отдельная гравюра или рисунок — это полная неудача, только мельчайшая частица необъятного целого».

Задачник „Кванта"

Задачи

М1256 — М1260, Ф1263 — Ф1267

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 февраля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1256» или «Ф1263». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1259, М1260 предлагались в этом году на Международной математической олимпиаде.

М1256. Две равные окружности касаются друг друга. Постройте трапецию такую, что каждая из окружностей касается трех ее сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях трапеции.

В. Сендеров

М1257*. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него для любого целого n.

Д. Фомин

М1258*. С числами, расставленными по окружности, разрешается проделывать следующую операцию: заменить тройку идущих подряд чисел x, y, z на тройку $x+y$, $-y$, $z+y$ (именно в таком порядке).

а) Можно ли при помощи этих операций получить из набора 20 чисел 1, 2, 3,..., 9, 10, —1, —2,..., —9, —10 набор 10, 9, 8,..., 2, 1, —10, —9,..., —2, —1?

б) Докажите, что из любого набора n чисел на окружности можно получить один и только один набор из n неотрицательных чисел.

О. Ижболдин

М1259*. На окружности дано множество E из $(2n-1)$ различных точек $(n \geqslant 3)$, из которых k точек покрашены в черный цвет, а все остальные — в белый. Раскраска точек называется *хорошей*, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг окружности содержится ровно n точек из множества E. Найти наименьшее значение k, для которого каждая раскраска точек множества E является хорошей.

М1260*. Найдите все целые числа $n>1$ такие, что $(2^n+1)/n^2$ — целое число.

Ф1263. При разгоне ракеты масса ее уменьшается. При какой скорости ракеты будет максимальной ее кинетическая энергия, если расход топлива постоянен? Скорость газов относительно ракеты v_0, начальная скорость равна нулю. Разгон производят далеко от Земли, так что влиянием силы тяжести можно пренебречь.

Ф1264. Вычислите диаметр, массу и длину вольфрамовой нити накала лампочки 220 В, 100 Вт. Рабочая температура нити 2700 °С. При этой температуре удельное сопротивление вольфрама $\rho = 90 \cdot 10^{-6}$ Ом · см, а мощность излучения с единицы поверхности нити $W = 153$ Вт/см^2. Плотность вольфрама в 19 раз больше, чем плотность воды. Считайте, что нить свита из проволоки круглого сечения.

М. Цыпин

Ф1265*. В однородном магнитном поле вращается по круговой орбите электрон. Индукцию поля медленно (за время, во много раз превышающее период обращения) увеличивают в три раза. Во сколько раз изменится радиус орбиты электрона?

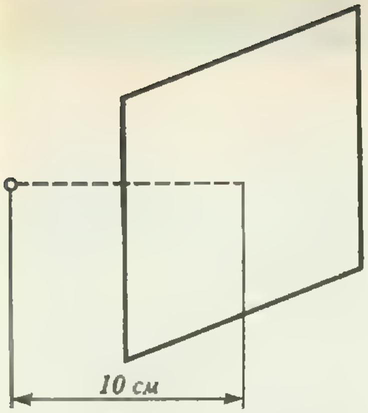
М. Цыпин

Ф1266. Две металлические сферы радиусом R каждая удалены друг от друга на большое расстояние и соединены друг с другом очень тонким проводником, в разрыв которого включена катушка индуктивностью L. На одну из сфер помещают электрический заряд. Через какое время заряд этой сферы уменьшится в два раза? Через какое время заряд снова станет таким же, как в первый момент?

А. Выцко

Ф1267. Точечный источник альфа-частиц испускает их во все стороны равномерно. На расстоянии 10 см от источника расположили фотопластинку размером 20×20 см (см. рис.), и за 10 секунд экспозиции на ней оказалось 200 следов от попавших частиц. Сколько всего частиц испускает источник за час?

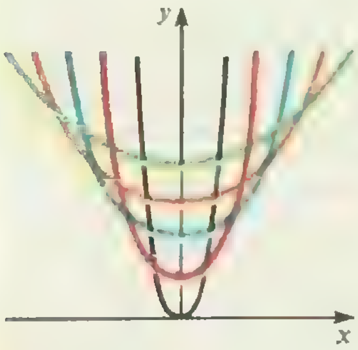
В. Волков



Решения задач

М1231 — М1235, Ф1243 — Ф1247

М1231. *На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость Oxy графики n квадратных трехчленов вида $y=ax^2+bx+c$ ($n=1, 2, 3, ...$)?*



Ответ: n^2+1.

Докажем по индукции, что число частей не превосходит n^2+1. Для $n=1$ это ясно: парабола делит плоскость на две части.

Пусть доказано, что $n-1$ графиков делят плоскость не более чем на $(n-1)^2+1$ частей. Проведем последний, n-й график. Он пересекается с каждым из $n-1$ предыдущих максимум в двух точках, т. е. он будет разбит не более чем на $2(n-1)+1=2n+1$ кусков (включая два крайних, уходящих в бесконечность). Каждый из этих кусков параболы делит одну из имеющихся частей плоскости на две. Таким образом, при проведении последней параболы число частей увеличится не более чем на $2n+1$, т. е. не превзойдет $(n-1)^2+1+2n+1=n^2+1$.

Легко строится пример, когда все графики попарно пересекаются в двух точках (см. рисунок) — при этом получится максимальное число частей, указанное в ответе.

Точно таким же образом можно подсчитать максимальное число частей, на которые делят плоскость n прямых, n окружностей и т. п.

Н. Васильев

М1232. *Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q. На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну? Рассмотрите следующие случаи:*

а) p и q — взаимно простые числа,

б) p и q имеют наибольший общий делитель d.

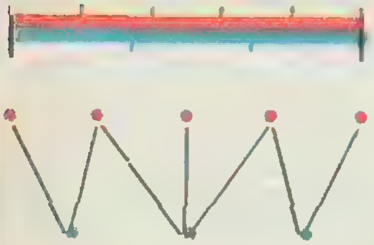


Рис. 1.

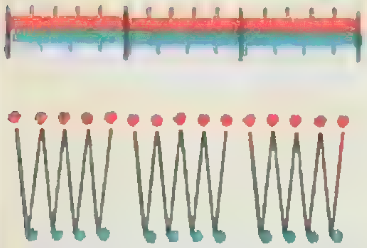


Рис. 2.

Ответ: а) $p+q-1$; б) $p+q-d$.

Чтобы привести пример нужного разрезания, представим пирог в виде отрезка, разбитого $p-1$ точками на p равных частей и $q-1$ точками на q равных частей. При взаимно простых p и q всего получится $p+q-2$ точек деления, а при НОД $(p, q)=d$ образуется всего $p+q-d-1$ различных точек деления ($d-1$ из точек деления совпадут), так что отрезок будет разбит как раз на указанное в ответе число частей. (Ясно, что таким же образом можно разрезать пирог: если он имеет форму прямоугольника, достаточно провести ряд разрезов параллельных стороне.)

Например, на рисунке 1, где $p=5$, $q=3$, все 6 точек деления различны, и отрезок разбит на 7 кусков, а на рисунке 2, где $p=15$, $q=12$ и $d=3$, различных точек деления 23 и отрезок разбит на 24 куска.

Приведем два различных доказательства, что указанное в ответе число кусков *минимально*.

Первое доказательство изложим сразу для обоих пунктов задачи.

Пусть пирог разрезан на несколько кусков так, что соблюдены условия задачи. Изобразим p гостей первой группы и q гостей второй группы точками на плоскости и соединим отрезками тех гостей, которым достается один и тот же кусок (см. примеры на рисунках). Мы получим систему *вершин* и *ребер* некоторого *графа*. Рассмотрим некоторую связную *компоненту* этого графа (множество всех вершин, в которые можно добраться из какой-то одной по ребрам графа). Соберем вместе куски, соответствующие ребрам этой компоненты. Из них можно собрать некоторое целое число k частей по $1/p$ пирога и некоторое целое число m частей по $1/q$ пирога. Но если $k/p=m/q$, то k должно делиться на p/d, а m — на q/d, тем самым, в этой компоненте собраны куски, составляющие не менее чем одну d-ю часть пирога. Если p и q взаимно просты, $d=1$ и компонента только одна, в общем случае их не более d. Но в каждой компоненте число вершин не более чем на 1 превышает число ребер. (Откинув некоторые ребра, можно получить из нее дерево — граф, в котором из каждой вершины в любую другую ведет один путь. Для него число вершин на 1 больше числа ребер.) Таким образом, общее число кусков не превосходит $p+q-d$.

Второе доказательство — более короткое — мы приведем лишь для пункта а), т. е. для случая когда p и q взаимно просты. Заметим здесь, что наша задача эквивалентна следующей: доказать, что наименьшее количество чисел, которые надо расставить в клетках таблицы $p\times q$ так, чтобы суммы по строкам равнялись $1/p$, а суммы по столбцам — $1/q$, равно $p+q-1$.

Докажем более общий факт. Пусть a_1, a_2,..., a_p и b_1, b_2,..., b_q — два набора положительных чисел с одинаковой суммой такие, что никакая подсумма чисел первого набора не равна никакой подсумме второго. Тогда количество чисел, которые можно вписать в клетки таблицы $p\times q$ так, чтобы суммы по строкам и столбцам соответственно равнялись числам этих двух наборов, не меньше $p+q-1$. Применяя этот факт к наборам из чисел

$1/p, \ldots, 1/p$ и $1/q, \ldots, 1/q$ (взаимная простота p и q гарантирует выполнение условия о подсуммах), получим нужный результат.

Проведем индукцию по $p+q$ (для $p=q=1$ все очевидно). Пусть $p>q$. Тогда в некоторой строке таблицы встречается лишь одно число из первой группы (иначе общее количество чисел в таблице не меньше $2p>p+q-1$) — пусть это будет число a_1, стоящее в первой строке и первом столбце, b_1 — сумма чисел в этом столбце. Вычеркнув первую строку, применим утверждение к наборам $a_2, a_3, \ldots, a_p$ и $b_1-a_1, b_2, \ldots, b_p$ — для него количество чисел на 1 меньше и условие о подсуммах очевидно выполнено. По предположению индукции в таблице $(p-1)\times q$ должно содержаться не менее чем $(p-1)+(q-1)=p+q-2$ чисел. Добавляя выброшенное число a_1, получим нужную оценку $p+q-1$ для таблицы $p\times q$.

А. Толпыго, Д. Фомин

М1233. *В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна боковой стороне BC. H — середина основания AB. Пусть l — прямая, проходящая через H, а P и Q — точки пересечения прямой l с прямыми AD и BD соответственно. Докажите, что углы ACP и QCB равны или составляют в сумме $180°$.*

Пусть K — точка пересечения прямых l и CD, M и N — точки пересечения прямых CP и CQ с прямой AB соответственно. Докажем равенство $AM=BN$. Отсюда будет следовать утверждение задачи: углы ACM и BCN равны, а нужные нам углы ACP и BCQ соответственно равны этим углам или дополняющим их до 180°. Из подобия треугольников находим

$$\frac{DC}{AM}=\frac{DP}{AP}=\frac{DK}{AH}, \quad \frac{DC}{BN}=\frac{DQ}{BQ}=\frac{DK}{BH}.$$

Поскольку $AH=BH$, отсюда следует нужное равенство $AM=BN$.

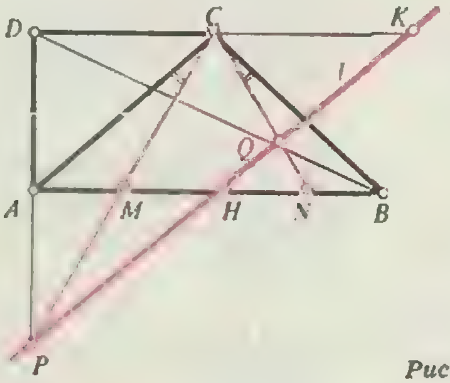


Рис. 1.

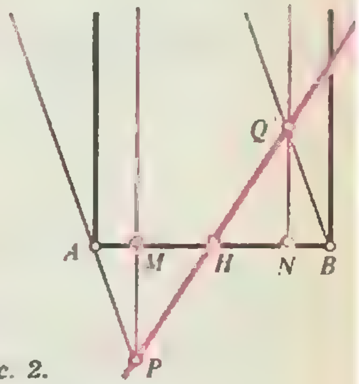


Рис. 2.

Можно доказать это равенство и без всяких вычислений, с помощью выхода в пространство. Рассмотрим центральную проекцию нашей плоскости на некоторую другую плоскость p, содержащую прямую AB, причем центр проекции O выберем так, чтобы плоскость OCD была параллельна p. При такой центральной проекции (образ рис. 1 — рис. 2) все прямые, проходящие через точку C, будут параллельны между собой и все прямые, проходящие через D,— тоже; поэтому образы P' и Q' точек P и Q будут симметричны относительно H, а значит точки M и N — тоже.

И. Шарыгин, В. Дубровский

М1234. *Можно ли любой треугольник разбить а) на 7, б)* на 5 подобных между собой треугольников?*

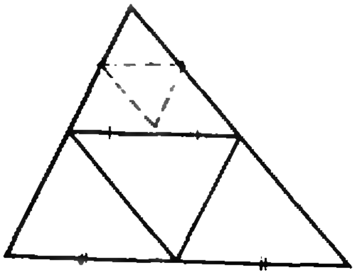


Рис. 1.

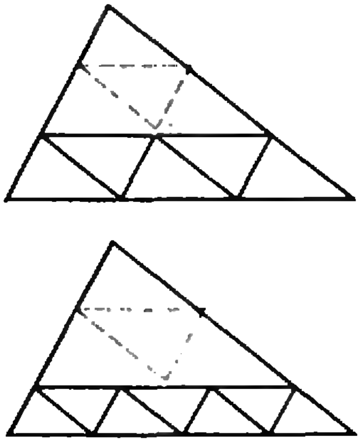


Рис. 2.

Разбиение на 7 треугольников получить легко — достаточно разрезать треугольник на 4 части средними линиями и один из полученных треугольников вновь разрезать на 4 средними линиями (рис. 1). Заметим, что так же легко получить разбиение на 6, 8 и любое большее число подобных (рис. 2) — добавлять 3 треугольника к уже имеющимся.

Докажем, что не любой треугольник можно разбить на 5 подобных. Мы приведем два доказательства, каждое — для некоторых треугольников с разными (и отличными от прямого) углами $\alpha > \beta > \gamma$. Оба приводят к тому, что треугольники разбиения должны быть подобны исходному — иметь те же углы α, β, γ. Дальнейшее рассуждение несложно. Если от треугольника отрезаны по углам подобные ему треугольники, оставшаяся часть может быть разрезана на два треугольника, только если она треугольник или четырехугольник (рис. 3). Но в обоих случаях при таком разрезании оказываются два угла, составляющие в сумме 180°, а среди углов α, β, γ таких нет.

Приведем два рассуждения. Первое — чисто алгебраическое (принадлежащее первому автору). Рассмотрим треугольник, величины углов α, β, γ которого рационально независимы, т. е. не существует ненулевых целых чисел k, l, m таких, что $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$. Пусть в его вершинах сходится по одному или несколько углов треугольников, величины которых — X, Y, Z. Тогда выполнены равенства, указанные на полях, где коэффициенты a_{ij} — неотрицательные целые числа. Если все коэффициенты при одном из углов X, Y или Z равны 0, то можно показать (выразив оставшиеся два угла из первых двух уравнений через α и β и подставив в третье уравнение), что α, β, γ рационально зависимы, так что этот случай невозможен. Но если после сложения трех уравнений мы найдем, что коэффициенты при X, Y, Z все положительны, то все они должны быть равны 1, поскольку

$$\alpha + \beta + \gamma = X + Y + Z = 180^\circ.$$

Отсюда ясно, что в каждом уравнении лишь один коэффициент 1, а другие два равны 0 — это и нужно было доказать.

$$\alpha = a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z,$$
$$\beta = a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z,$$
$$\gamma = a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z.$$

Второе — геометрическое доказательство (его идею предложил И. Аржанцев — участник американо-советского летнего математического лагеря, где обсуждалась эта задача), пожалуй, даже проще.

Пусть среди углов α, β, γ нашего треугольника α много (более чем в 5 раз) больше β, а β много больше γ. Предположим, что он разбит на 5 подобных между собой. Пусть некоторые его вершины разбиты и α_1, β_1, γ_1 —

наибольшие из частей, составляющих углы α, β и γ соответственно. Поскольку каждый угол разбит не более чем на 5 частей, $\alpha_1 > \beta_1 > \gamma_1$. Таким образом, это и есть углы треугольника разбиения, их сумма равна 180°, и, значит, они соответственно равны α, β, γ; таким образом, никаких выходящих из углов отрезков на самом деле нет.

А. Сойфер (США), Н. Васильев

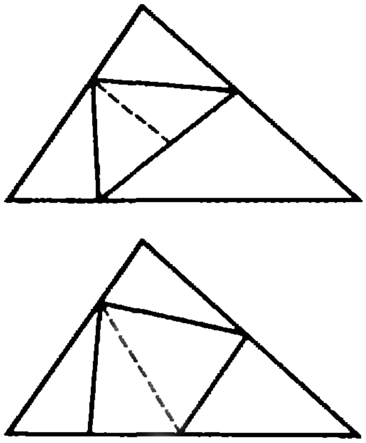


Рис. 3.

M1235*. *Пусть $p = 2 \cdot q + 1$ — простое число. Докажите, что число $2^{3q} q! - (-1)^q (2q-1)!!$ делится на а) p; б) p^2; в) p^3 (при $p > 3$). (Здесь $q! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot q$; $(2q-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2q-1)$.)*

Утверждение а) сравнительно нетрудно доказать, опираясь на простые свойства чисел C_n^k — коэффициентов разложения степени бинома

$$(1+x)^n = 1 + nx + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + x^n. \qquad (*)$$

Из формулы $C_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)/k!$ следует, что при простом n все коэффициенты C_n^k, кроме двух крайних, делятся на n, и тот факт, что в треугольнике Паскаля (где в n-й строке стоят числа $C_n^0 = 1$, C_n^1, $C_n^2, \ldots$, $C_n^n = 1$) каждое число равно сумме двух стоящих над ним: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Поскольку

$$2^q q!(2q-1)!! = (2q)! = C_{2q}^q (q!)^2,$$
$$2^q(2^{3q} q! - (-1)^q (2q-1)!!) = q!(2^{4q} - (-1)^q C_{2q}^q),$$

а числа 2^q и $q!$ взаимно просты с $p = 2q+1$, достаточно доказать, что число в последних круглых скобках делится на p.

Будем рассматривать числа «по модулю p», в частности, «остаток -1» будет означать то же, что и «остаток $p-1$». Докажем, что остаток от деления C_{2q}^q на p равен $(-1)^q$. Если в треугольнике Паскаля заменить числа их остатками при делении на p, то p-я строка будет иметь вид 1 0 0…0 1, а, стало быть, предыдущая $2q$-я (состоящая из $2q+1$ чисел) —

$$1 \;\; -1 \;\; 1 \;\; -1 \ldots 1 \;\; -1 \;\; 1,$$

так что среднее число в ней равно $C_{2q}^q = (-1)^q$ (примеры треугольников Паскаля по модулю p для $p=5$ и $p=7$ приведены на полях). Эта же строка пригодится нам и для отыскания остатка для степени 2.

Подставив в формулу (*) $x=1$, $n=2q$, мы увидим, что по модулю p число 2^{2q} равно 1 (это — частный случай Малой теоремы Ферма), следовательно, интересующая нас разность $2^{4q} - (-1)^q C_{2q}^q$ по модулю p равна $1 - (-1)^{2q} = 1 - 1 = 0$.

Доказательство утверждения б) получено как побочный результат в конце VIII главы замечательной книги G. Hardy, F. Wright «Introduction to the number theory» к сожалению, не переведенной до сих пор на русский язык. Мы приведем более короткое доказательство. (Конечно, для $p=3$ утверждение б) очевидно: $2^3 + 1 = 3^2$. Ниже мы считаем, что $p > 3$, т. е. $q > 1$.)

$p=5$:
1
11
121
1331
14141
100001

$p=7$:
1
11
121
1331
14641
153351
1616161
10000001

Треугольники Паскаля по модулю p.

Малая теорема Ферма. Если p — простое, a — натуральное число, не делящееся на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.

Представим произведение $2^{3q}q!(2q-1)!!$ как «многочлен от p^2»:

$$
\begin{aligned}
&2^{3q}q!(2q-1)!!=\\
&\quad=2^{2q}(2q)!=2\cdot\ 4\cdot\ \ldots\cdot\ (p-1)\,(p+1)\ldots(2p-2)=\\
&\quad=(p-(p-2))\ldots(p-1)(p+1)\ldots(p+(p-2))=\\
&\quad=(p^2-(p-2)^2)\ldots(p^2-(2k-1)^2)\ldots(p^2-1)^2=\\
&\quad=(p^2-(2q-1)^2)\ldots(p^2-(2k-1)^2)\ldots(p^2-1)^2=\\
&\quad=p^{2q}-S_1p^{2q-2}+\ldots+(-1)^kS_kp^{2q-2k}\ \ldots\\
&\qquad\ldots-(-1)^qS_{q-1}p^2+(-1)^qS_q. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Здесь S_k — суммы всех произведений по k чисел 1^2, 3^2, 5^2, ,..., $(2q-1)^2$, в частности,

$$
\begin{aligned}
&S_1=1^2+3^2+\ldots+(2q-1)^2,\\
&S_{q-1}=3^2\ldots(2q-1)^2+1^2\cdot\ 5^2\cdot\ \ldots\cdot\ (2q-1)^2+\ldots\\
&\qquad\ldots+1^2\cdot\ 3^2\cdot\ 5^2\cdot\ \ldots\cdot\ (2q-3)^2=\\
&\qquad\qquad=S_q(1+1/3^2+\ldots+1/(2q-1)^2),
\end{aligned}
$$

$S_q=(2q-1)!!^2$ — произведение всех q квадратов чисел 1, 3, ..., $(2q-1)$.

Очевидно, все слагаемые последней суммы (**), кроме последнего, делятся на p^2. Отсюда следует, что разность

$2^{2q}(2q)!-(-1)^q(2q-1)!!^2$

делится на p^2, а поскольку p простое, удалив лишние множители $(2q-1)!!$, не делящиеся на p, получим, что и нужная нам разность делится на p^2.

Приведем теперь доказательство последнего, самого сильного утверждения в), кажущегося поистине удивительным (примеры для $p=5$, 7, 11, 13 приведены на полях).

$p=5,\ q=2:$

$2^6\cdot 2-1\cdot 3=125=5^3.$

$p=7,\ q=3:$

$2^9\cdot 6+1\cdot 3\cdot 5=3\cdot 7^3.$

$p=11,\ q=5:$

$2^{15}\cdot 120-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9=$
$=3\cdot 5\cdot 197\cdot 11^3.$

$p=13,\ q=6:$

$2^{18}\cdot 720-1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11=$
$=3^2\cdot 5\cdot 1909\cdot 13^3.$

Все слагаемые суммы S_1 дают разные остатки при делении на p, поскольку разность $i^2-j^2=(i-j)(i+j)$ не делится на p при нечетных i, j, $1<i<j<p$. То же можно сказать и про сумму S_{q-1}. Но квадраты натуральных чисел, не кратных p, могут давать при делении на p только $(p-1)/2=q$ разных остатков (поскольку квадраты i и $p-i$ дают одинаковые остатки). Все эти остатки входят по разу в обе суммы S_1 и S_{q-1}, состоящие из одинакового числа $(p-1)/2=q$ слагаемых, поэтому обе суммы дают равные остатки при делении на p.

Первую сумму легко посчитать — она равна $p(p-1)(p-2)/6$ (можно действовать по индукции) и делится на p при $p>3$. Тем самым, и вторая сумма делится на p.

(Можно доказать, что и сумма S_k всех произведений по k квадратов чисел 1, 3, 5, ..., $2q-1$ при каждом $k<q$ делится на p, но нам это не потребуется.)

Поскольку S_{q-1} делится на p, разность

$$2^{2q}(2q)!-(-1)^q(2q-1)!!^2$$

делится на p^3. Удалив лишние множители, не делящиеся на p, получим, что и нужная нам разность делится на p^3.

И. Вайнштейн

Ф1243. *Таракан и два жука могут ползать по большому горизонтальному столу. Каждый из жуков может развивать скорость до $v=1$ см/с. В первый момент насекомые находятся в вершинах равностороннего треугольника. Какую скорость должен уметь развивать таракан, чтобы при любых перемещениях жуков треугольник оставался равносторонним?*

Рассмотрим маленький промежуток времени Δt, за который первый жук сместился на $\vec{s}_1=\vec{v}_1\Delta t$, а второй — на $\vec{s}_2=\vec{v}_2\Delta t$. Найдем, каким должно быть смещение таракана, чтобы соединяющий их треугольник остался равносторонним.

Будем рассуждать последовательно. Предположим сначала, что первый жук неподвижен, а второй совершил перемещение $\vec{s}_2$ (рис. 1). Чтобы треугольник Ж$_1$Ж$'_2$T$'$ был равносторонним, таракан должен сместиться на $\overrightarrow{TT'}$, причем

$$|\overrightarrow{TT'}|=|\vec{s}_2|=v_2\Delta t.$$

Пусть теперь неподвижен второй жук, а первый смещается на $\vec{s}_1$. Тогда таракан должен будет сместиться на $T'T''$, при этом

$$|\overrightarrow{T'T''}|=|\vec{s}_1|=v_1\Delta t.$$

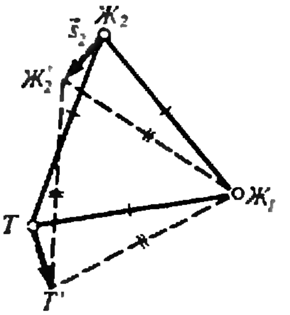


Рис. 1.

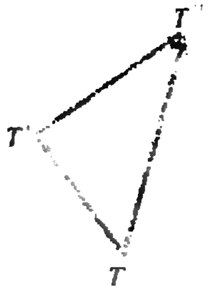


Рис. 2.

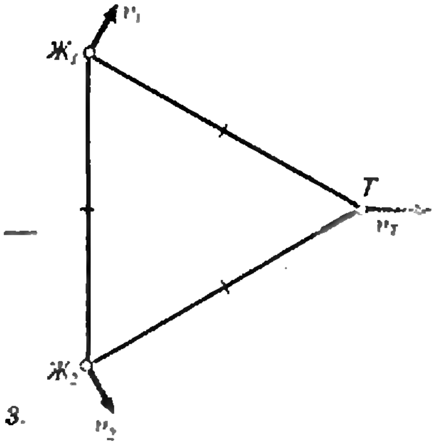


Рис. 3.

Итак, если один жук смещается на $\vec{s}_1$, второй — на $\vec{s}_2$, то таракан должен сместиться на

$$\overrightarrow{TT'}+\overrightarrow{T'T''}=\overrightarrow{TT''}.$$

Из треугольника $TT'T''$ (рис. 2) получаем

$$|\overrightarrow{TT''}|\leqslant|\overrightarrow{TT'}|+|\overrightarrow{T'T''}|=(v_1+v_2)\Delta t.$$

Значит, скорость, которую должен развить таракан, связана со скоростями жуков соотношением

$$v_т=\frac{|\overrightarrow{TT''}|}{\Delta t}\leqslant v_1+v_2\leqslant 2v.$$

Равенству соответствует случай, когда смещения таракана $\overrightarrow{TT'}$ и $\overrightarrow{T'T''}$ направлены в одну сторону. Для этого скорости жуков должны быть направлены, например, так, как показано на рисунке 3.

А. Коршков

Ф1244. *Бытовой холодильник поддерживает в камере постоянную температуру —12 °С. При темпера-*

Разность температур ΔT снаружи и внутри холодильника и длительность паузы τ_2 связаны соотношением

$$\tau_2\Delta T=\text{const}. \qquad (1)$$

туре в комнате +25 °С его мотор включается каждые 8 минут и, проработав 5 минут, выключается. Считая холодильник идеальной тепловой машиной, работающей по обращенному циклу, предскажите — как часто и на какое время он станет включаться, если в комнате температура понизится до +15 °С. При какой максимальной температуре в комнате он сможет поддерживать в камере заданную температуру?

Для идеальной холодильной машины справедливо равенство

$$\frac{A}{Q}=\frac{\Delta T}{T},$$

где A — работа двигателя, Q — количество теплоты, отнимаемое от содержимого холодильной камеры, T — температура камеры. Очевидно, что работа, совершаемая двигателем, пропорциональна времени τ_1 работы мотора —

$$A\sim\tau_1,$$

а отнимаемое количество теплоты пропорционально полному «периоду» $(\tau_1+\tau_2)$ и разности температур —

$$Q\sim(\tau_1+\tau_2)\Delta T,$$

поэтому можно записать

$$\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1}(\Delta T)^2=T=\text{const}. \qquad (2)$$

Подставляя в равенства (1) и (2) значения τ_1 и τ_2 для первого случая, а ΔT для обоих случаев, найдем новые значения τ_1' и τ_2' для второго случая:

$$\tau_1'=2\ \text{мин},\ \tau_2'=4{,}1\ \text{мин}.$$

Максимально возможную температуру в комнате находим из условия $\tau_2''=0$:

$$\Delta T_{\max}=\Delta T\sqrt{8/5}=46{,}8\ \text{К},$$
$$t_{\max}=34{,}8\ ^\circ\text{C}.$$

Р. Александров

Ф1245. *В схеме на рисунке амперметр показывает ток 10 мА, вольтметр — напряжение 2 В. После того как резистор отключили от вольтметра и подключили параллельно амперметру, показания амперметра уменьшились до 2,5 мА. Определите по этим данным сопротивление резистора. Чему равно сопротивление вольтметра? Можно ли определить по этим данным сопротивление амперметра и напряжение батареи? Батарею считать идеальной.*

В первом случае напряжение на резисторе R_x равно

$$U_1=U_{Rx1}=U\frac{RR_x/(R+R_x)}{r+RR_x/(R+R_x)}=U\frac{RR_x}{rR+R_x(R+r)},$$

где U — напряжение батареи, R — сопротивление вольтметра, r — сопротивление амперметра.

Во втором случае амперметр и вольтметр меняются местами, поэтому напряжение на резисторе будет равно

$$U_{Rx2}=U\frac{rR_x}{rR+R_x(R+r)}.$$

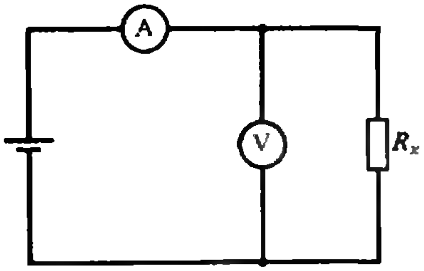
Но одновременно это и напряжение на амперметре; значит, ток через него равен

$$I_2=\frac{U_{Rx2}}{r}=\frac{UR_x}{rR+R_x(R+r)}=\frac{U_1}{R}.$$

Отсюда находим сопротивление вольтметра:

$$R=\frac{U_1}{I_2}=0{,}8\ \text{кОм}.$$

Тогда сопротивление резистора равно



$$R_x=\frac{U_1}{I_1-U_1/R}=\frac{U_1}{I_1-I_2}\approx 0{,}27\ \text{кОм}.$$

Сопротивление амперметра и напряжение батареи по данным задачи найти нельзя.

А. Зильберман

Ф1246. *Два одинаковых LC-контура находятся далеко друг от друга. В первом возбуждены колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе U_0. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе оказалось нулевым, подключают проводами второй контур (рис. 1). Опишите процессы в цепи после подключения. Что изменится, если подключение произвести в тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально?*

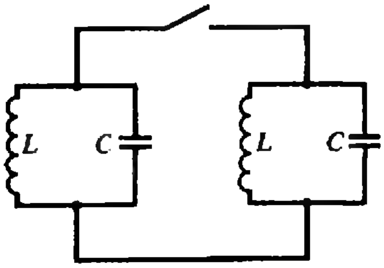


Рис. 1.

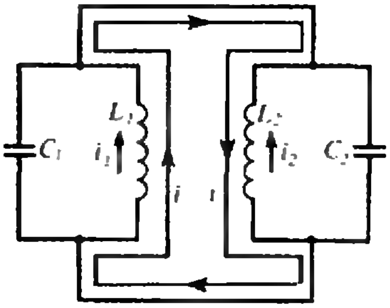


Рис. 2.

Начнем со второго случая, когда в момент замыкания ключа напряжение на первом конденсаторе максимально, т. е. весь заряд сосредоточен на конденсаторе C_1, а тока в катушке L_1 нет. Сразу после замыкания ключа напряжения на конденсаторах равны $U_1=U_0$ и $U_2=0$. К соединяющим проводам приложено напряжение U_0, и, поскольку их сопротивление очень мало, в системе происходит быстрый (по сравнению с периодом колебаний) процесс перераспределения заряда между конденсаторами. Так как емкости равны, заряд делится поровну, т. е.

$$U_1'=U_0/2 \text{ и } U_2'=U_0/2.$$

Катушки в процессе не участвуют.

После перераспределения заряда оба контура оказываются в одинаковом начальном состоянии — напряжение на конденсаторе равно $U_0/2$, тока в катушке нет, и начинаются их совместные синхронные колебания с частотой $\omega=1/\sqrt{LC}$ и амплитудой напряжения $U_0/2$:

$$u_1(t)=u_2(t)=U_0/2\cos\omega t.$$

На эти процессы не влияет перемычка между контурами, после обмена зарядами ее можно было бы и убрать.

Теперь обсудим первый случай, когда в начальный момент напряжение на первом конденсаторе равно нулю. Эта ситуация сложнее.

Итак, в момент замыкания ключа напряжение на конденсаторе C_1 равно нулю, а через катушку L_1 течет ток $I_0=\sqrt{C/L}\,U_0$ (это получается из равенства $LI_0^2/2=CU_0^2/2$). Чтобы описать дальнейшие процессы в цепи, заметим, что после замыкания ключа по контуру L_1-L_2 может циркулировать постоянный ток, не создающий никаких напряжений (активным сопротивлением катушек пренебрегаем). Представим распределение токов в катушках так, как показано на рисунке 2. В катушках L_1 и L_2 текут равные и одинаково направленные токи $i_1=i_2=I_0/2$, а по контуру L_1-L_2 циркулирует постоянный ток $i=I_0/2$. Тогда

$$I_1=i_1+i,\quad I_2=i_2-i.$$

Далее рассуждения аналогичны первому случаю. Действительно, если мы временно забудем о постоянном токе i, который не создает напряжений и, следовательно, не влияет на другие процессы в цепи, то контуры оказываются в одинаковом начальном состоянии — по катушке течет ток $I_0/2$, а конденсатор незаряжен. После замыкания ключа начнутся синхронные колебания с частотой ω и амплитудой тока $I_0/2$:

$$i_1(t)=i_2(t)=\frac{I_0}{2}\cos\omega t.$$

Чтобы найти полные токи в катушках, надо вспомнить о постоянном токе i и добавить его с нужным знаком:

$$I_1(t)=i_1(t)+i=\frac{I_0}{2}(\cos\omega t+1),$$

$$I_2(t)=i_2(t)-i=\frac{I_0}{2}(\cos\omega t-1).$$

А. Алексеев

Ф1247. *На противоположных стенах комнаты висят друг против друга два одинаковых круглых зеркала диаметром 1 м. Наблюдатель находится на оси симметрии оптической системы и смотрит на одно из зеркал. Сколько «вложенных» отражений он сможет насчитать, если угловое разрешение его глаза 1 минута? Зеркала находятся на расстоянии 5 м друг от друга. Размерами головы наблюдателя пренебречь.*

Все последовательные отражения отстоят друг от друга на $l=5$ м. Углы зрения на n-е и $(n+1)$-е изображения (при условии $n\gg 1$) равны приблизительно

$$\alpha_n\approx\frac{d}{nl}\ \text{ и }\ \alpha_{n+1}\approx\frac{d}{(n+1)l},$$

где $d=1$ м — диаметр зеркала. Эти два изображения различимы, если выполняется условие

$$\frac{1}{2}(\alpha_n-\alpha_{n+1})>\alpha_0,$$

где $\alpha_0=1'=\pi/(180\cdot 60)$ рад. Решая это неравенство (с учетом предыдущих выражений) относительно n, при дополнительном условии $n\gg 1$, находим

$$n<\sqrt{\frac{d}{2l\alpha_0}}=18.$$

К. Зуев

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» совместно с болгарским молодежным журналом «Математика» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 27 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в мае будущего года. Победители будут награждены призами журналов «Квант» и «Математика».

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 февраля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

10. Имеются 9 килограмм крупы и чашечные весы с двумя гирями в 50 г и 200 г. Попробуйте за три взвешивания отвесить 2 кг этой крупы. Можно ли это сделать, если имеется лишь одна гиря в 200 г?

В. Вьюн и А. Савин

11. Докажите, что высота треугольника, опущенная на его большую сторону, не больше суммы длин перпендикуляров, опущенных из произвольной точки этой стороны на две другие стороны этого треугольника.

Е. Чернышов

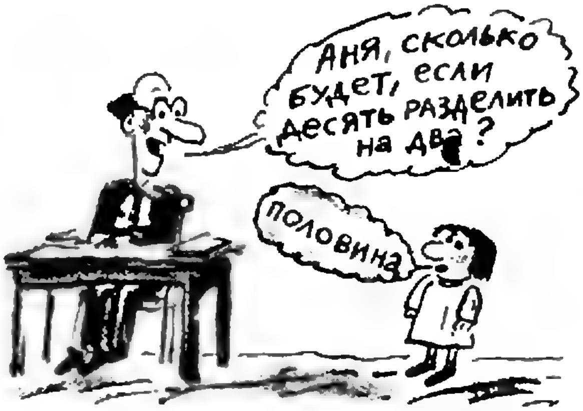
12. Найдите три девятизначных числа, в которых цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 встречались бы ровно по одному разу, и при этом сумма некоторых двух из них равнялась третьему числу.

Г. Гальперин

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Несколько учеников отвечали на уроке, и все получили отметки не ниже тройки. Аня получила отметку, на 10 меньшую суммы отметок остальных; Боря получил отметку, на 8 меньшую суммы остальных отметок; Вера — отметку, на 6 меньшую суммы отметок остальных. Сколько человек отвечало на уроке и какие отметки они получили?


Аня, сколько будет, если десять разделить на два?
Половина

2. Насколько вы сильны в арифметике? Замените в этом ребусе (см. рисунок) буквы цифрами так, чтобы выполнялись все равенства. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

$$А \cdot Р = И - Ф = М : Е = Т - И = К : А$$

3. Огромный военный оркестр демонстрировал свое искусство на площади. Сначала музыканты выстроились в квадрат, а затем перестроились в прямоугольник, причем количество шеренг увеличилось на 5. Сколько музыкантов было в оркестре?

4. Может ли число, являющееся полным квадратом, записываться лишь с помощью цифр 0 и 6?

5. Высота некоторой египетской пирамиды, выраженная в метрах, больше произведения двух нечетных двузначных чисел, но меньше квадрата их полусуммы. Для какого фараона она была построена?

Эти задачи нам предложили А. Тоом, Л. Мочалов, С. Дворянинов, С. Сефибеков и И. Акулич.

РИМСКИЕ, АРАБСКИЕ И ДРУГИЕ

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Не очень давно («Квант», 1988, № 4) в статье «Десять цифр» я рассказал историю записи чисел цифрами, главным образом, историю самих цифр, которые принято называть «арабскими». Мы часто пользуемся и другими цифрами. Записи «XX век», «Глава IV» не ставят нас в затруднительное положение. Здесь числа представлены римскими цифрами. Почему же мы до сих пор пользуемся этой очень неудобной системой записи чисел? Наверное потому, что с ее помощью можно выделять одни числа по сравнению с другими. Так, запись 25.XI.1990 сразу говорит о том, что это — дата: 25 ноября 1990 года.

Итак, римские цифры. Познакомимся с ними поближе:

I — один
V — пять
X — десять
L — пятьдесят
C — сто
D — пятьсот
M — тысяча

Теперь, увидев на фронтоне старого особняка запись MDCCLXXXIX, вы без труда прочтете дату его постройки — 1789 год. Следует отметить, что существует и второй способ записи чисел римскими цифрами, при котором меньшая цифра не ставится впереди большей, и поэтому число 4 записывается как IIII, число 9 как VIIII, а число 99 как LXXXXVIIII.

Но как быть с очень большими числами в десятки и сотни тысяч? Например, как записать число 275 748? Римляне поступали довольно просто, они записывали его так: CCLXXV_m D CCXLVIII. Буква *m* показывает, что число, стоящее впереди нее, выражает количество тысяч в данном числе.

Но вернемся к арабским цифрам. В статье «Десять цифр» я отмечал, что арабы, заимствовав десятичную позиционную систему записи чисел и цифры у индусов, несколько изменили цифры; дальнейшее их изменение происходило и в Европе. В результате получившиеся знаки стали совсем непохожи на те, которыми пользовались индусы. Но самое интересное состоит в том, что цифры, которыми пользуются сейчас арабы, также непохожи на «международные» арабские цифры. Взгляните на таблицу записи арабских чисел. Разница велика.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

Помимо «международной», свою собственную систему записи чисел используют не только арабы. Так, в Китае издавна существовала своеобразная система записи чисел с помощью иероглифов.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千

Числа в Китае традиционно записывались вертикально, сверху вниз. При этом числа 20, 30, 40, ... записывались столбиком из двух символов. Нижний символ означал, что речь идет о десятках, а верхний указывал их число. Такие числа, как, например, 47 записывались столбиком из трех символов: к числу 40 снизу добавлялся иероглиф, обозначающий цифру 7. Аналогичная система ис-

20: 二
十

60: 六
十

47: 四
十
七

пользовалась для обозначения сотен, тысяч и т. д. Вот, например, как выглядит число 503 в этой записи.

503: 五
百
三

Существовали и другие варианты вертикальной записи чисел, больших 20. Попробуйте сами «разгадать секреты» двух таких записей, рассматривая два представления числа 28.

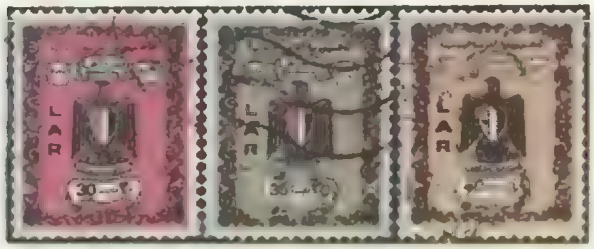
28: 28:

В начале XX столетия в Китае была введена обычная форма записи — слева направо. В этой записи число 47 выглядит так:

47: 四十七

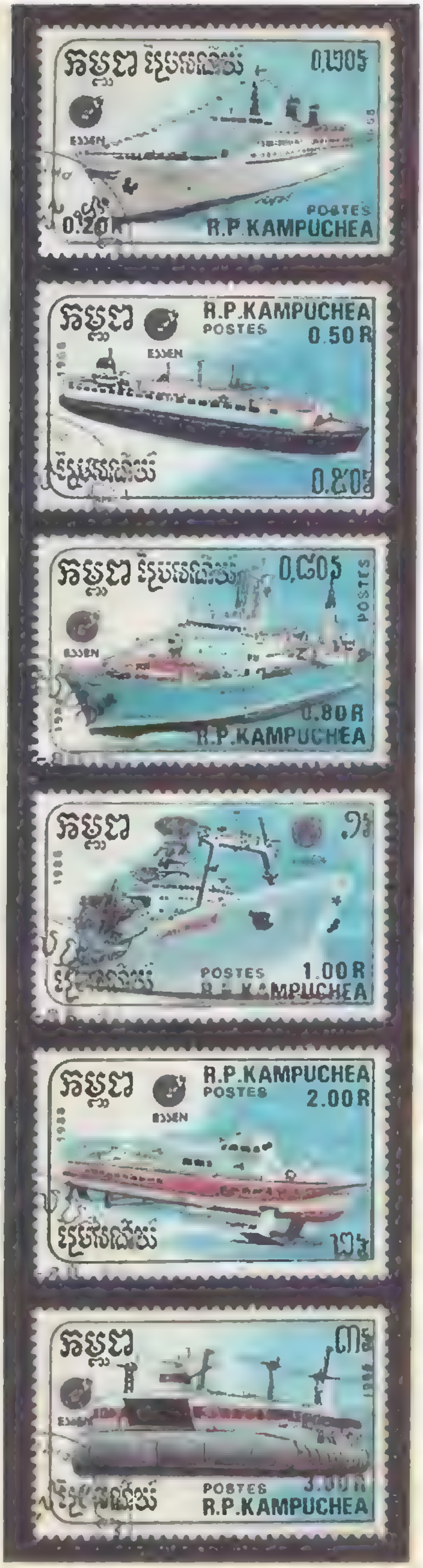
Иероглифы используются для записи цифр не только в Китае, но и в других странах таких, как Япония, Корея. Однако, традиционная вертикальная система записи сохранилась лишь на острове Тайвань.

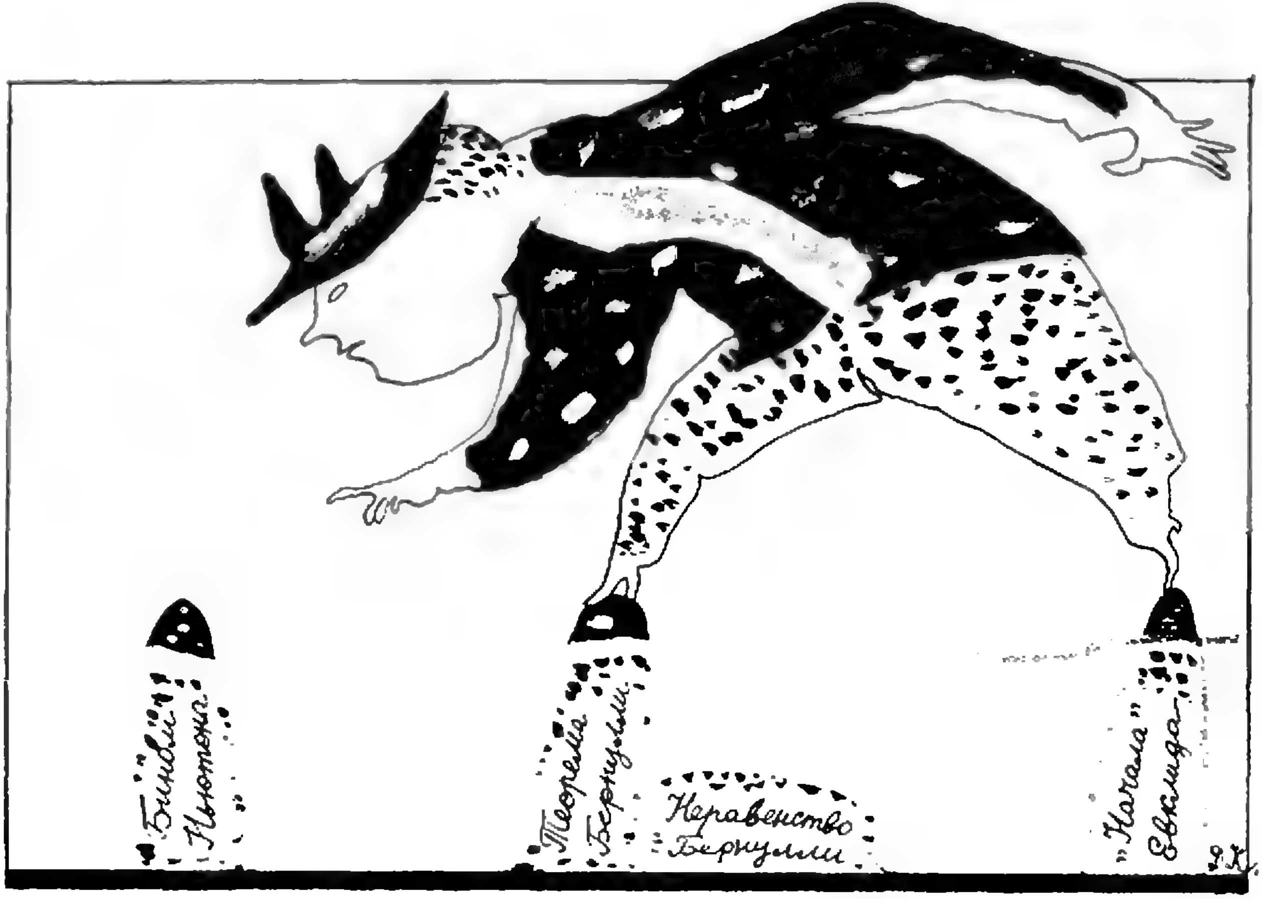
На марках, монетах, бумажных денежных знаках многих стран национальные цифры соседствуют с «международными». Такое соседство мож-


LAR
LAR
LAR
30
30

но увидеть на почтовых марках Ливии. Рядом на рисунке изображены две стороны японской монеты в 5 иен. Первый иероглиф означает цифру 5, а второй означает слово «иена».

Завершим наш рассказ красивой серией марок, изданных в Кампучии, где вы можете увидеть цифры, принятые в этой стране.


R.P.KAMPUCHEA
POSTES
0.20 R
ESSEN
R.P.KAMPUCHEA
POSTES
0.50 R
ESSEN
0.80 R
R.P.KAMPUCHEA
POSTES
1.00 R
R.P.KAMPUCHEA
R.P.KAMPUCHEA
POSTES
2.00 R
ESSEN
3.00 R
POSTES
R.P.KAMPUCHEA



Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Публикуемая статья предназначена для девятиклассников.

Начинаем с неравенства Евклида...

Двадцать пятое утверждение пятой книги знаменитых «Начал» Евклида*) гласит: если четыре величины пропорциональны, то наибольшая и наименьшая больше двух оставшихся (т. е. сумма наибольшей и наименьшей больше суммы двух оставшихся). Современному читателю это утверждение не покажется особенно сложным, но оно содержит в себе предпосылки многих важных результатов арифметики и анализа. Так, с его помощью можно легко доказать одну интересную теорему о прогрессиях, из которой вытекает известное неравенство Якоба Бернулли*). Но речь об этом — впереди.

Итак, обратимся к неравенству Евклида. Следует сказать, что евклидово доказательство этого неравенства — чисто геометрическое. Впрочем, это не удивительно — ведь автор «Начал» беседует со своими читателями исключительно на геометрическом языке! Не только геометрические, но и чисто арифметические утверждения (даже утверждение о бесконечности множества простых чисел — 20-е утверждение IX книги) доказаны в «Началах» геометрически.

Однако идеи, лежащие в основе доказательств утверждений названных типов, излагаются Евклидом настолько ясно, что «перевести» их с геометрического на арифметический или алгебраический язык не представляет никакого труда.

---

*) Евклид — великий математик древней Греции, живший в 3 веке до нашей эры. Его главная работа — шеститомный труд «Начала» — оказала огромное влияние на развитие всей математики.

*) Якоб Бернулли — родоначальник знаменитой семьи швейцарских математиков, живший во второй половине XVII века.

Мы должны доказать, что *если a, b, c, d — положительные числа и*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

то сумма наибольшего и наименьшего из этих чисел больше суммы двух остальных.

В самом деле, без ограничения общности мы можем предположить, что наибольшим является a. Из данной пропорции

$$d=b\frac{c}{a}=c\frac{b}{a},$$

и так как обе дроби c/a и b/a меньше единицы, то $d<b$, $d<c$. Следовательно, d — наименьшее число, и, значит, требуется доказать неравенство

$$a+d>b+c.$$

Имеем

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\Leftrightarrow\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}\Leftrightarrow a-b=$$

$$=\frac{b}{d}(c-d).$$

Так как $c-d>0$, а $b/d>1$, то

$$a-b>c-d,$$

или, что то же самое, $a+d>b+c$. А это мы и хотели доказать.

Теперь сформулируем и докажем теорему Бернулли о прогрессиях.

Теорема. *Если (a_n) — арифметическая прогрессия, а (b_n) — геометрическая прогрессия с положительными членами и $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_1\neq a_2$, то члены геометрической прогрессии, начиная с третьего, больше соответствующих членов арифметической прогрессии.*

Доказательство. Пусть $m>2$. Имеем

$$\frac{b_m}{b_{m-1}}=\frac{b_2}{b_1}.$$

Если (b_n) — возрастающая прогрессия, то из выписанных четырех чисел наибольшим будет b_m, а наименьшим — b_1. Если же прогрессия (b_n) убывает, то, наоборот, b_m — наименьшее, а b_1 — наибольшее из этих чисел. Таким образом, как в первом, так и во втором случае, согласно неравенству Евклида,

$$b_m+b_1>b_{m-1}+b_2.$$

Вспомнив, что $b_1=a_1$, $b_2=a_2$, и обозначив разность прогрессии (a_n) через d, мы получаем неравенство

$$b_m>b_{m-1}+d,$$

справедливое для любого натурального $m>2$.

Придавая m последовательно значения 3, 4, 5, ..., n, мы видим, что

$$\begin{gathered}b_3>b_2+d,\\ b_4>b_3+d,\\ \dots\dots\dots\dots\\ b_n>b_{n-1}+d.\end{gathered}$$

Складывая неравенства, получим

$$b_n>b_2+(n-2)d=a_2+(n-2)d=$$
$$=a_1+(n-1)d=a_n.$$

Итак, для любого $n>2$

$$b_n>a_n,$$

что и требовалось.

Следствие (неравенство Бернулли). *Если $h>-1$, $h\neq 0$, то для любого натурального $n>1$*

$$(1+h)^n>1+nh.$$

В самом деле, рассмотрим две последовательности

$$\begin{gathered}1,\ 1+h,\ (1+h)^2,\ \dots,\ (1+h)^n,\ \dots,\\ 1,\ 1+h,\ 1+2h,\ \dots,\ 1+nh,\ \dots\end{gathered}$$

Первая из них арифметическая прогрессия, вторая — геометрическая, причем они удовлетворяют условиям теоремы Бернулли. Поэтому

$$(1+h)^n>1+nh\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \dots),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при $h>0$ это неравенство вытекает из формулы для бинома Ньютона, однако при $-1<h<0$ оно не вполне очевидно даже для тех, кто знаком с биномом Ньютона.

А. Бендукидзе

Лаборатория „Кванта"

Дифракция в лазерном свете

Д. ПАНЕНКО

Лазеры представляют собой источники света, замечательные прежде всего своей высокой когерентностью. Поэтому, например, с их помощью можно получать устойчивые интерференционные картины или наблюдать тонкие дифракционные эффекты, не проявляющиеся в опытах с нелазерными источниками.

В этой статье будет рассказано о том, как провести наблюдения дифракции на цилиндре, шаре или других телах в лазерном свете. Но сначала — немного о технической стороне эксперимента.

На рисунке 1 изображена блок-схема для получения увеличенной картины дифракции Френеля на различного рода препятствиях. Установка состоит из лазера (*ЛГ-52*), микрообъектива (M), точечной диафрагмы (S), объекта (O), на котором наблюдается дифракция, и плоскости наблюдения (P_0P). В этой плоскости может быть установлен белый экран для непосредственного наблюдения, фотоаппарат без объектива для фотографирования или же фотоэлектронный умножитель (ФЭУ) для фотоэлектрической регистрации. Фотоэлектронный умножитель, закрытый со стороны света диафрагмой с узкой щелью или точечным круглым отверстием, устанавливается на каретке, которая может равномерно перемещать его вместе с диафрагмой в плоскости наблюдения по оси Y. Сигнал ФЭУ, пропорциональный интенсивности света, прошедшего через диафрагму, регистрируется двухкоординатным графопостроителем. Его каретка перемещается с постоянной скоростью по оси абсцисс, а по оси ординат отклоняется пропорционально сигналу ФЭУ. Таким образом прибор регистрирует (в вы-

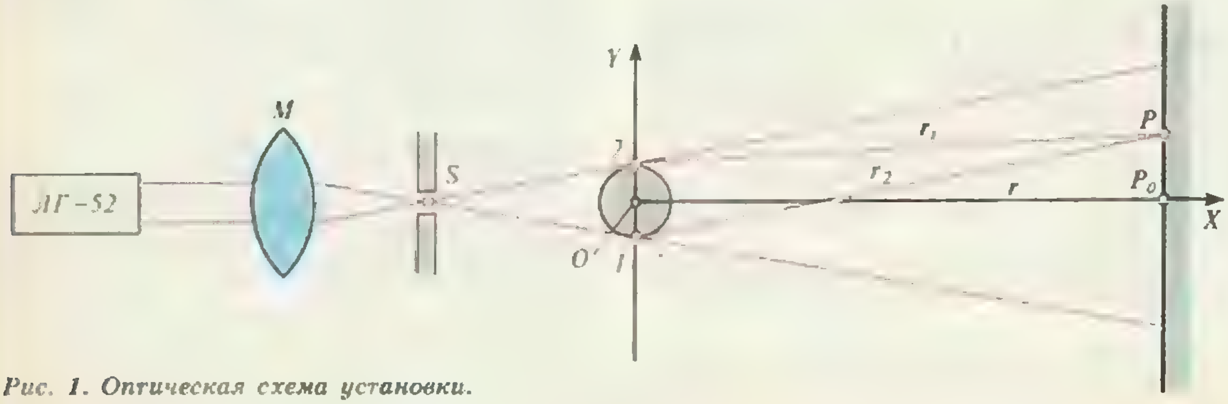


Рис. 1. Оптическая схема установки.

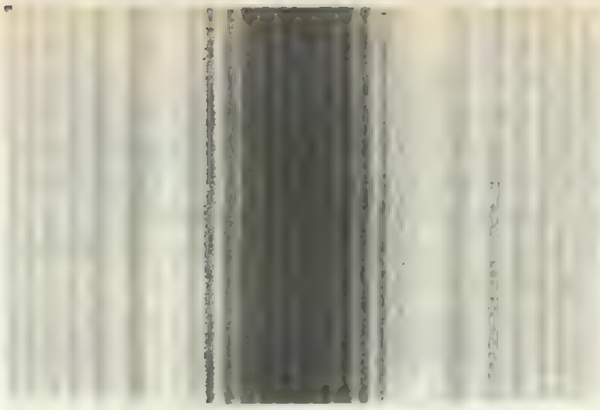


Рис. 2. Дифракция на цилиндрическом стержне.

бранном масштабе) распределение освещенности дифракционной картины в зависимости от расстояния P_0P. Длина регистрации при этом составляет 35 мм.

В первом опыте мы получили дифракционную картину на металлическом полированном цилиндре диаметром 2 мм. Ось цилиндра была направлена перпендикулярно плоскости XY, расстояние SO равнялось 1 м, OP_0 — 2,5 м, P_0P — 35 мм (см. рис. 1). Щель шириной 0,05 мм располагалась перед ФЭУ параллельно оси цилиндра.

На рисунках 2 и 3, *а* представлены результаты этого опыта. Как хорошо видно, в опыте наблюдаются две различные по происхождению картины дифракции. На краях тени цилиндра и во внешней области отчетливо наблюдается обычная краевая дифракция, т. е. чередующиеся темные и светлые области. Кроме того, в области геометрической тени и вне ее видны равноотстоящие друг от друга полосы, параллельные оси цилиндра. Оба вида дифракции можно получить и проанализировать по отдельности.

Если закрыть цилиндрический стерженек с одной стороны непрозрачным экраном, то свет будет дифрагировать только на одной стороне цилиндра. Получающаяся при этом дифракционная картина показана на ри-

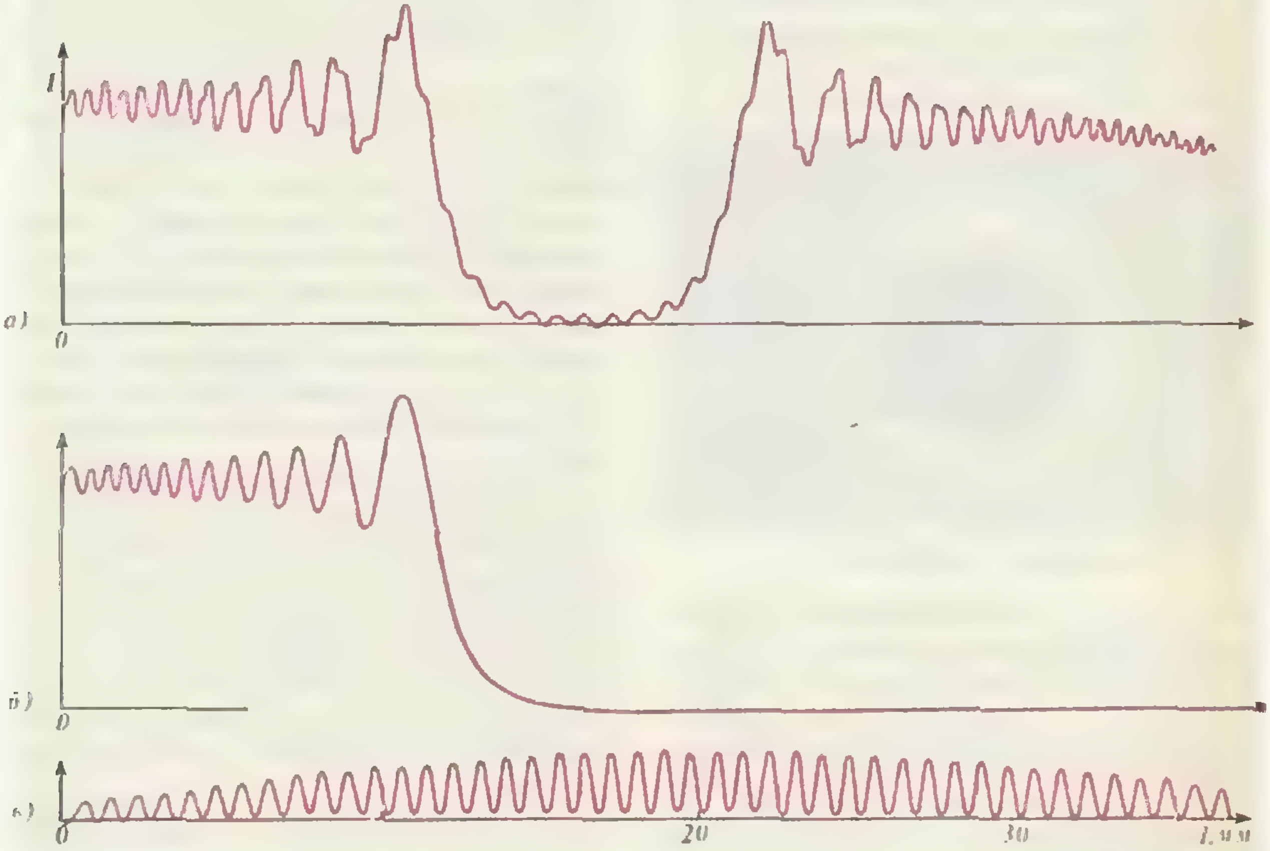


Рис. 3. Распределение освещенностей при дифракции от стержня (верхняя кривая), от края стержня (средняя кривая) и от двух щелей на краях стержня (нижняя кривая).

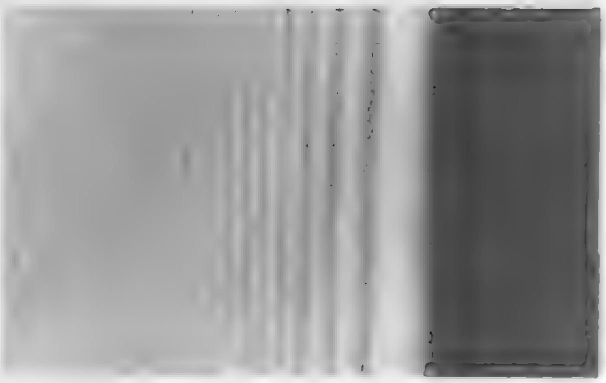


Рис. 4. Дифракция от одного края стержня.

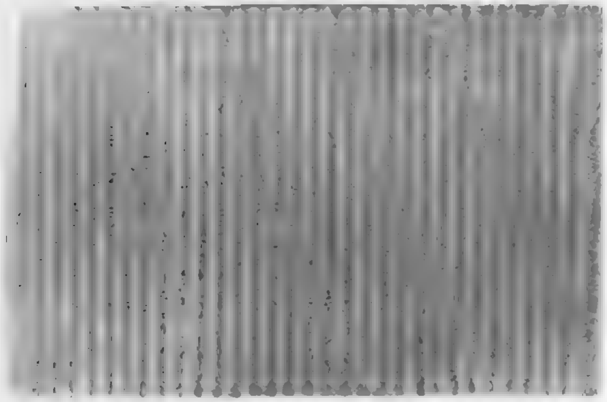


Рис. 5. Интерференционные полосы Юнга.

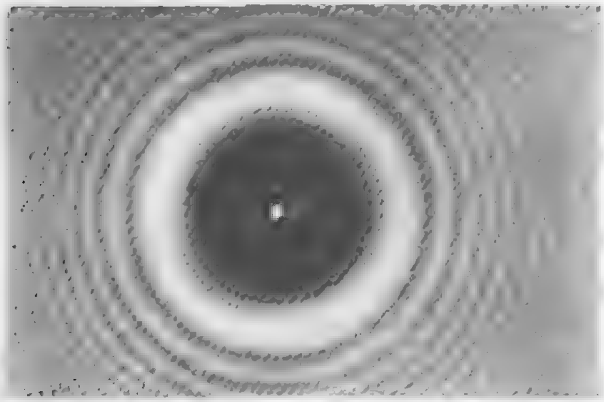


Рис. 6. Дифракция на шарике.

сунке 4, а соответствующая кривая распределения освещенности — на рисунке 3, *б*. Картина краевой дифракции в этом случае представляет собой систему полос, ширина и контраст которых уменьшаются по мере удаления от геометрической тени стержня.

Рассмотрим теперь второй вид дифракции на стержне, который дает равноотстоящие полосы, параллельные оси цилиндра. Происхождение этих полос может быть описано в представлениях известного вам интерференционного опыта Юнга. Области волнового фронта, прилегающие к поверхности цилиндра, являются источниками вторичных волн, а результат их сложения в плоскости наблюдения и дает интересующую нас дифракционную картину.

Для осуществления такого опыта (аналогичного опыту Юнга) стержень помещался посередине между ножами регулируемой щели S. Ширина щели подбиралась такой, чтобы между поверхностью цилиндра и ножами щели оставались зазоры шириной 0,1 мм. При освещении лазерным светом образовывались две светящиеся линии, которые и давали дифракцию Юнга. Из рисунка 5 видно, что картина дифракции действительно имеет вид равноотстоящих полос. Распределение освещенности в полосах показано соответствующей кривой на рисунке 3, *в*.

Итак, дифракцию на цилиндре можно рассматривать как сложение полей двух краевых дифракций и дифракционных полос Юнга. (При сравнении кривых на рисунке 3 следует иметь в виду, что верхняя и средняя кривые снимались при одинаковой чувствительности, а нижняя кривая — при большей чувствительности.) Обычно дифракция Френеля на проволочке связывается только со светлой полосой по оси геометрической тени. Опыты с лазерным светом дают более полное представление о дифракции в этом случае.

Второй опыт проводился с шариком диаметром 2,4 мм. Шарик аккуратно приклеивался пластилином к плоскопараллельной стеклянной пластинке и устанавливался в расходящийся пучок света, как показано на рисунке 1. При фоторегистрации перед фотоприемником устанавливался экран с круглым отверстием диаметром 0,1 мм.

Результаты этого опыта воспроизведены на рисунках 6 и 7, из которых хорошо видно, что и в случае с шариком наблюдаются также две картины дифракции.

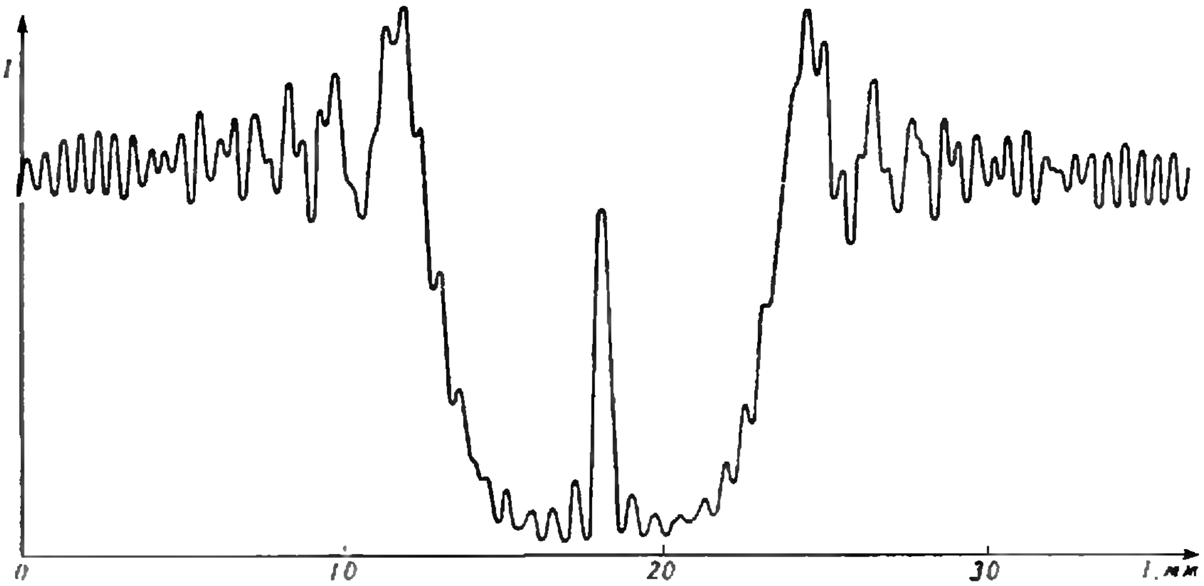


Рис. 7. Распределение освещенности при дифракции шарика.

Конечно же, вы не могли не обратить внимание на то, что в центре геометрической тени заметно яркое пятно, известное физикам как пятно Араго — Пуассона. История этого пятнышка довольно занимательна и поучительна.

Парижская Академия наук предложила дифракцию света в качестве темы на премию за 1818 год. Устроители конкурса в большинстве своем были сторонниками корпускулярной теории света и рассчитывали, что конкурсные работы принесут окончательную победу их теории. Однако Френелем была представлена работа, в которой все известные к тому времени оптические явления объяснялись с волновой точки зрения. Рассматривая эту работу, Пуассон, бывший членом конкурсной комиссии, обратил внимание на то, что из теории Френеля вытекает «нелепый» вывод: в центре тени, отбрасываемой небольшим круглым диском, должно находиться светлое пятно. Араго тут же произвел опыт и обнаружил, что такое пятно действительно имеется. Этот факт, безусловно, помог всеобщему признанию волновой теории света.*)

Опыты в лазерном свете позволяют наблюдать также кольца в области геометрической тени и вне ее. Происхождение этих колец тоже можно объяснить с точки зрения представлений интерференционного опыта Юнга (если считать, что интерференция света в области геометрической тени создается бесконечным числом диаметрально противоположных источников света волнового фронта, соприкасающегося с шаром).

Таким образом, наблюдения в лазерном свете дают более полные представления о дифракции Френеля на телах простой формы.

---

*) Мы советуем вам прочитать статью В. Вайнина и Г. Горелика «Пятно Пуассона и Шерлок Холмс» в «Кванте» № 4 за 1990 год. (*Примеч. ред.*)

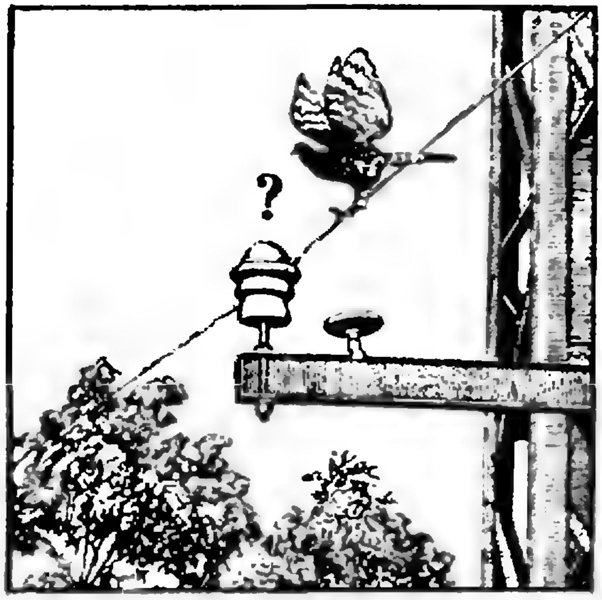
Калейдоскоп „Кванта"

Я брал куски цилиндрической проволоки произвольной длины из различных материалов и помещая их поочередно в цепь...

Георг Ом

А так ли хорошо знакомы вам

электрические цепи?



Нельзя представить себе современный мир без использования разнообразных электрических цепей, передающих энергию и информацию. Возможность же исследовать законы, которым подчиняется электрический ток, появилась лишь в начале прошлого века после изобретения Гальвани, Вольтой и Зеебеком источников тока. Первым физиком, попытавшимся выяснить эти закономерности, был скромный школьный учитель из Кельна Георг Симон Ом. Сегодня его эксперименты могут показаться тривиальными, однако в то время провести надежные опыты с постоянным током было исключительно трудно, и только упорные и кропотливые измерения позволили Ому установить его знаменитый закон.

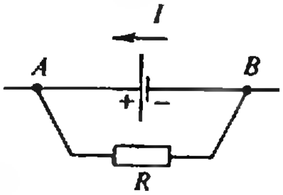
Чтобы почувствовать, как непросты «элементарные» вопросы, с которыми сталкивались исследователи, приближавшие «век электричества», поразмышляйте над задачами этого выпуска «Калейдоскопа».

Вопросы и задачи

1. Почему птицы могут безопасно усаживаться на провода, находящиеся под высоким напряжением?

2. Отчего величина пускового тока в лампе накаливания больше рабочего?

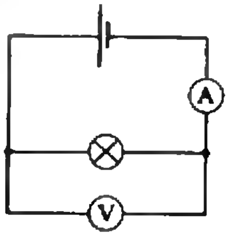
3. В каком направлении протекает ток через сопротивление R?



4. Верно ли утверждение, что вольтметр, подключенный к клеммам разомкнутого источника, показывает ЭДС?

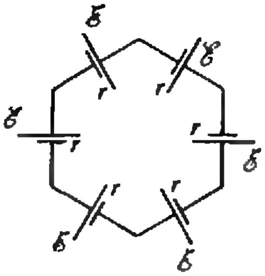
5. Как будет изменяться напряжение на зажимах источника при увеличении тока в цепи?

6. При сборке цепи, показанной на рисунке, амперметр и вольтметр поменяли по ошибке местами. Что произойдет при этом с измерительными приборами?



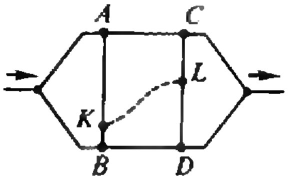
7. Можно ли включать конденсатор в цепь постоянного тока?

8. Какова будет разность потенциалов между любыми точками изображенной на рисунке цепи? Сопротивлением проводов пренебречь.



9. В электростатическом поле потенциал точки A выше потенциала точки B. Однако, если поместить в это поле проводник AB, ток по нему идти не будет. Почему?

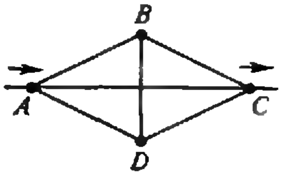
10. На участках AKB и CLD, изображенных на рисунке, ток отсутствует. Будет ли течь ток по проволоке, соединившей точки K и L?



-№2"

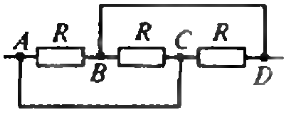
11. При включении в сеть елочной гирлянды, спаянной из лампочек для карманного фонаря, на каждую из лампочек приходится напряжение 3 В. Почему же опасно, выкрутив одну из лампочек, сунуть в патрон палец?

12. Какие из отрезков каркаса, изготовленного из однородной



проволоки, будут светиться ярче, если постепенно увеличивать подаваемое на каркас напряжение?

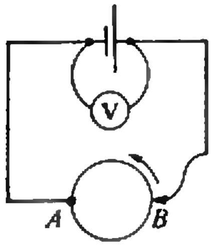
13. Чему равно сопротивление цепи, показанной на рисунке?



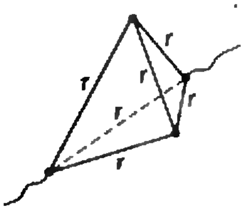
Сопротивлением проводов пренебречь.

14. На сколько равных частей надо разрезать кусок однородной проволоки, чтобы при параллельном соединении этих частей получить в n раз меньшее сопротивление?

15. Как будут меняться показания вольтметра при движении по однородному проволочному кольцу скользящего контакта?



16. Чему равно сопротивление каркаса из однородной проволоки в виде тетраэдра, включенного в цепь двумя вершинами?



Микроопыт

Имеются вольтметр, амперметр и источник ЭДС с неизвестными внутренними сопротивлениями. Как с их помощью измерить величину неизвестного сопротивления?

Любопытно, что...

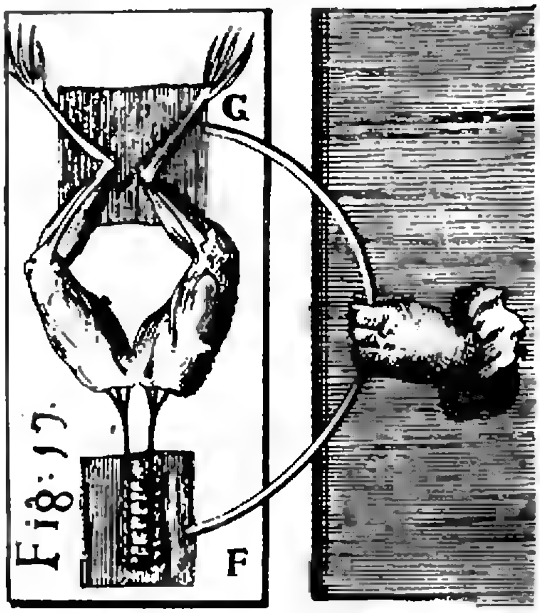
...Генри Кавендиш, работы которого по электричеству долгое время оставались неизвестными, установил экспериментально пропорциональность тока напряжению в 1770-е годы, но в свойственной для него манере не удосужился никому сообщить об этом.

...открытие Ома было скептически воспринято в научных кругах. Это отразилось и на развитии науки — скажем, законы распределения токов в разветвленных цепях были выведены Г. Кирхгофом лишь двадцать лет спустя,— и на научной карьере Ома — ему предложили кафедру в университете лишь в 1852 году, за два года до его смерти.

...Ом, пытаясь вывести свой закон уже из теоретических соображений, исходил из аналогии между распространением «электричества» и «теплоты», причем подтвердил правильность своего предположения.

...закон Ома, при всей его значимости, не является фундаментальным законом природы, а лишь следствием, которое, как теперь ясно, вытекает из квантовой теории твердого тела.

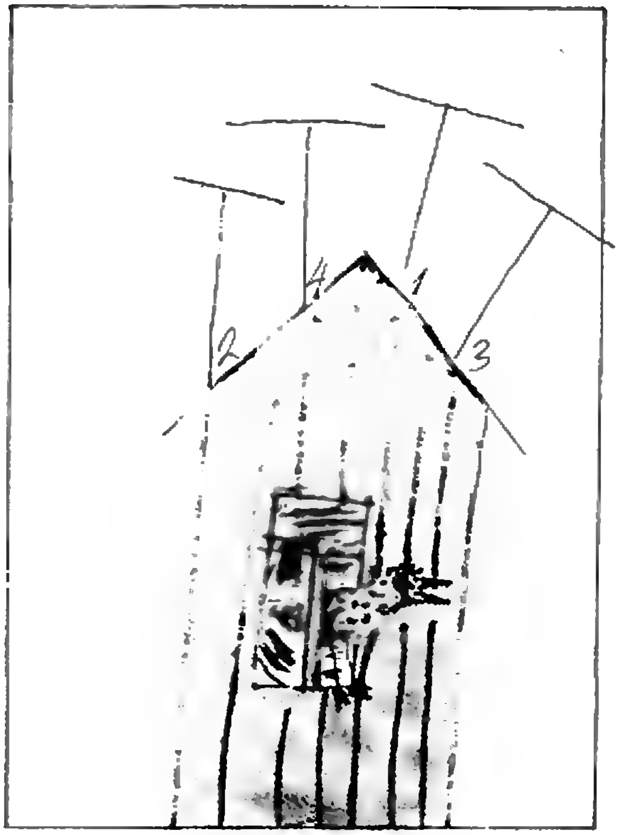
...еще в 1910 году известный физик П. Эренфест указал на возможность применения булевой алгебры, или алгебры логики, при составлении схем цепей телефонной станции. Впоследствии взаимосвязь булевой алгебры и ключевых электронных элементов легла в основу создания современных ЭВМ.



Что читать в «Кванте» об электрических цепях

(публикации последних лет)

1. «Правила Кирхгофа» — 1985, № 1, с. 26;
2. «Как в металле протекает электрический ток» — 1988, № 3, с. 41;
3. «Расчет электрических цепей» — 1988, № 8, с. 58;
4. «Калейдоскоп «Кванта» — 1989, № 12, с. 40;
5. «Электрические машины постоянного тока» — 1990, № 1, с. 63;
6. «Переходные процессы в электрических цепях» — 1990, № 4, с. 64;
7. «Об электрическом сопротивлении проводников» — 1990, № 5, с. 53.



Практикум абитуриента

Такие интересные ошибки...

Кандидат физико-математических наук
И. ГЕЛЬФГАТ

Поговорим об ошибках? Хотя этот разговор наверное надоел многим из вас на уроках в школе, попробуем показать, что и он может быть интересным. Завершить его придется по традиции моралью, но мы и мораль постараемся сделать не слишком длинной и скучной.

Начнем с задачи из заслуженно известного и неоднократно переиздававшегося сборника*):

На концах невесомого стержня длиной $d=1$ м укреплены два маленьких шарика массой $m=1$ г каждый. Стержень подвешен на шарнире так, что может вращаться без трения около вертикальной оси, проходящей через его середину. На одной прямой со стержнем укреплены два больших шара массой $M=20$ кг каждый. Расстояние между центрами большого и малого шаров $L=16$ см (рис. 1). Вычислите период малых колебаний описанного крутильного маятника.

В этом месте мы предлагаем вам прервать чтение и заняться самостоятельным решением задачи. Решили? А теперь познакомьтесь с предлагаемым авторами сборника решением:

Каждая половина стержня с шариком на конце представляет собой математический маятник длиной $d/2$, совершающий колебания в поле тяготения большого шара. Математический маятник в поле тяготения Земли имеет период малых колебаний $T_0=2\pi\sqrt{l/g}$. По закону всемирного тяготения, $mg=GmM_З/R^2$; следовательно,

$$T_0=2\pi\sqrt{lR^2/(GM_З)},$$

где G — гравитационная постоянная, $M_З$ — масса Земли, R — расстояние от маятника до центра Земли. Соответственно, в поле тяготения большого шара период малых колебаний математического маятника длиной $l=d/2$ будет равен

$$T=2\pi\sqrt{dL^2/(2GM)}\approx 5{,}4 \text{ ч}.$$

Казалось бы, лучшего решения быть не может. Использование аналогии делает его коротким и изящным. Обоснованность этой аналогии *на первый*

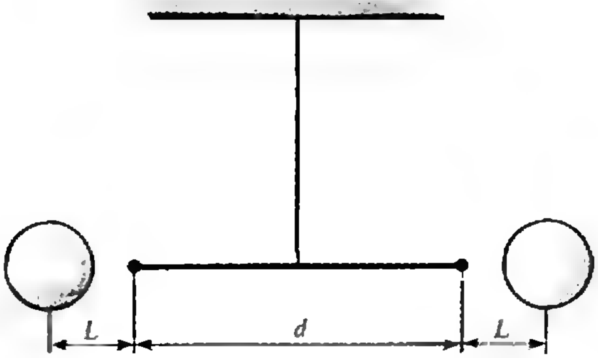


Рис. 1.

---

*) Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике. (М., Наука, 1987.) Задача № 650.

взгляд сомнений не вызывает. А вот *на второй*...

Согласно приведенному решению, «ускорение свободного падения» для маленького шарика не зависит от d. Но ведь при $d \to 0$ шарик попадает в середину стержня, где гравитационное поле обращается в ноль — силы притяжения к обоим большим шарам в точности компенсируют друг друга. Нетрудно понять причину этого противоречия: на половину стержня с шариком действует не только притяжение «Земли» — ближайшего из больших шаров, но и «Луны» — более далекого большого шара. При $d \gg L$ притяжением «Луны» можно было бы пренебречь, но в нашем случае отношение d/L не столь уж велико. А главное — мы ведь претендуем на решение задачи в общем виде, при любых d и L.

Можно предложить простое уточнение решения, учитывающее притяжение обоих шаров: полную «силу тяжести» mg, действующую на маленький шарик, запишем в виде

$$mg = GmM/L^2 - GmM/(d+L)^2.$$

А дальше опять воспользуемся аналогией:

$$T_2 = 2\pi L(d+L)/\sqrt{2GM(d+2L)}.$$

Мы обозначили полученный период T_2, поскольку это второй по счету (но еще не последний!) ответ. Первый ответ, приведенный выше, будем далее обозначать T_1. Нетрудно видеть, что

$$T_2/T_1 = (d+L)/\sqrt{d(d+2L)}.$$

При данных в условии задачи значениях ($d=6{,}25L$) поправка составляет всего около 1 %; при $d=L$ она превысила бы 15 %.

Ну что ж, наше решение теперь выглядит вполне солидно. (Как много, впрочем, солидных научных трудов оказались впоследствии совершенно неверными!) Чтобы исключить все сомнения, давайте все же попробуем решить задачу строго, исходя лишь из основных законов природы и свойств малых колебаний.

Напомним, что уравнение гармонических колебаний в общем случае имеет вид

$$\mu x'' = -kx, \tag{1}$$

а полная энергия колебаний равна

$$W = W_0 + W_k + W_p = \\ = W_0 + \mu(x')^2/2 + kx^2/2, \tag{2}$$

где μ и k — некоторые физические параметры колеблющейся системы, принимающие, вообще говоря, любые постоянные положительные значения, а W_0 — энергия системы в состоянии равновесия. Если хоты бы для малых отклонений x от положения равновесия справедлива одна из этих формул, то малые колебания являются гармоническими и их циклическая частота равна $\omega = \sqrt{k/\mu}$, а период —

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\mu/k}.$$

Величина x совсем не обязательно имеет смысл смещения от положения равновесия; в нашей задаче, например, это может быть и угол φ отклонения стержня от положения равновесия.

Попробуем получить выражение для полной энергии системы, состоящей из половины стержня с шариком. Скорость шарика равна $d\varphi'/2$, поэтому его кинетическая энергия равна

$$W_k = mv^2/2 = md^2(\varphi')^2/8.$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух шаров равна $W_p = -Gm_1m_2/r_{12}$ (r_{12} — расстояние между центрами шаров). Выводится эта формула аналогично формуле для электрической энергии взаимодействия двух точечных зарядов. Для нашей системы (см. рис. 2)

$$W_p = -GmM(1/R_1 + 1/R_2). \tag{3}$$

Воспользуемся теоремой косинусов

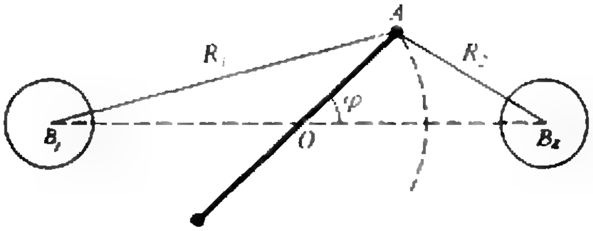


Рис. 2.

для треугольников OAB_1, OAB_2:

$$R_{1,2}^2=(d/2)^2+(d/2+L)^2\pm d(d/2+L)\times \times\cos\varphi.$$

Учитывая, что для малых φ $\cos\varphi=1-\varphi^2/2$, получаем

$$W_p=-GmM(1/(d+L)+1/L)+ +GmMd(d+2L)(1/L^3-1/(L+d)^3)\varphi^2/8.$$

Итак, в нашем случае

$$W_0=-GmM(1/(d+L)+1/L),$$
$$\mu=md^2/4,$$
$$k=GmMd(d+2L)(1/L^3-1/(L+d)^3)/4.$$

Отсюда получаем

$$T_3=2\pi\sqrt{\frac{L^3(d+L)^3}{GM(d+2L)(d^2+3dL+3L^2)}}.$$

Так какой же из ответов — T_2 или T_3 — является правильным?! А может, есть еще и четвертый, пятый? Ключ к разгадке дает сравнение двух решений. Каких? Сравнивать, скажем, ответы T_3 и T_1 не имеет смысла, поскольку в T_3 учтено притяжение обоих больших шаров, а в T_1 — лишь одного. А вот если в формуле (3) отбросить слагаемое с R_1, т. е. тоже ограничиться учетом притяжения ближайшего большого шара, тогда, казалось бы, мы опять должны прийти к ответу T_1. Советуем вам проделать этот расчет самостоятельно — и вы действительно получите ответ, но... четвертый, не совпадающий ни с одним из предыдущих:

$$T_4=2\pi L\sqrt{\frac{dL}{GM(d+2L)}}.$$

Что-то опять не увязалось. Почему? Сравним этот ответ с T_1:

$$T_4/T_1=\sqrt{2L/(d+2L)}.$$

Заметим, что это отношение стремится к единице при $L\gg d$. Может, в этом все дело? Ведь для обычного маятника у поверхности Земли условие $L\gg d$ выполняется с огромным запасом (под L следует тогда понимать радиус Земли). Поэтому (и только поэтому!) при колебаниях поле силы тяжести можно считать однородным. А вот при отклонении от положения равновесия маленького шарика в нашей задаче меняется и направление, и величина действующей на него силы тяготения (правда, вы можете сами проверить, что изменение модуля силы тяготения как раз несущественно — все дело в изменении ее направления).

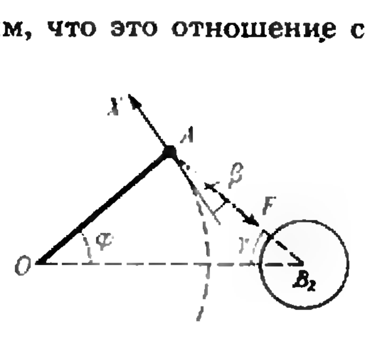


Рис. 3.

Мы столько раз уже ошибались, что для полной уверенности стоит проверить полученные результаты еще раз. Для этого можно решить задачу, опираясь на формулу (1), а не на выражение для энергии. Ограничимся при этом учетом притяжения ближайшего большого шара. Хорошо бы получить для периода колебаний выражение T_4...

Пусть стержень отклонился от положения равновесия на малый угол φ (рис. 3). Роль возвращающей силы играет проекция силы тяготения $\vec{F}$ на ось X, совпадающую с касательной к траектории. Уравнение движения имеет вид

$$ma_x=-F\cos\beta.$$

Учитывая, что $a_x=x''$, а $\beta=90°-\varphi-\gamma$, получаем

$$mx''=-F\sin(\varphi+\gamma)=-\frac{GmM}{L^2}(\varphi+\gamma).$$

Здесь мы использовали тот факт, что при малых отклонениях $R_2\approx L$ и $\sin(\varphi+\gamma)\approx\varphi+\gamma$. В однородном поле тяготения Земли слагаемое γ в правой части уравнения не появилось бы (сравните это с выводом формулы для периода колебаний математического маятника в школьном учебнике). Значит, действительно все дело в неоднородности поля тяготения!

Применяя к треугольнику OAB_2 теорему синусов (с учетом малости углов): $\gamma/\varphi=d/(2L)$, после подстановки γ в уравнение движения получаем

$$x''=-\frac{GM}{L^2}\left(1+\frac{d}{2L}\right)\varphi=-\frac{GM(d+2L)}{dL^3}\,x,$$

где $\varphi\approx 2x/d$. Из этого уравнения типа (1) находим период колебаний, полностью совпадающий с T_4. Теперь уже не вызывает сомнений, что правильным ответом для исходной задачи, с учетом притяжения обоих больших шаров, является T_3. При указанных в условии значениях d и L $T_3\approx 2{,}7$ ч. Правильный ответ отличается от T_1 вдвое!

Допущенная в первом предложенном решении ошибка оказалась, пожалуй, поинтереснее даже самой задачи. Напомним, что в нем не было учтено притяжение «дальнего» большого шара (что допустимо лишь при $d\gg L$) и неоднородность поля тяготения (что допустимо, наоборот, при $d\ll L$). В итоге полученный ответ T_1 для любых значений d и L оказался неверным!

Мораль. Во-первых, решение хорошей школьной задачи (как и задачи научной) не заканчивается получением итоговой формулы и подстановкой в нее численных значений. Результат нужно проверить «на прочность» как можно бо́льшим числом способов, отнестись к нему очень строго. От ошибок не застрахованы даже крупные ученые, да и задача может оказаться глубже, чем кажется даже ее автору.

Во-вторых, метод аналогий — прекрасный метод, но обращаться с ним нужно осторожно. Иногда принципиальное различие между задачами далеко не так сильно бросается в глаза, как сходство между ними.

Одним словом, если возникают малейшие сомнения в правильности решения или неясен смысл результата — попробуйте решить задачу другим способом и сравнить полученные результаты.

„Квант" улыбается

Математические переменки

1. Разгадайте короткий ребус: $?^2$.

2. Математик получил приглашение на званый обед. Он ответил запиской: С а: Что хотел сказать математик?

3. Сделав хитрое лицо, математик сказал девятилетнему мальчику: «Назови самое большое число». Лицо математика вытянулось, когда он услышал ответ — он сам не мог бы назвать большее число.

Какое число назвал мальчик?

4. Завершите числовую последовательность:

1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, ? .

5. Завершите другую числовую последовательность:

1, 3, 5, 10, 25, 50, ? .

6. Я не знал, какое существительное оканчивается на три е. Оказалось: «длинношеее»! В отместку я придумал свой вопрос для приятеля: «А вот ты скажи, какое существительное оканчивается на три ё»!

7. Наташа произнесла истинное утверждение. Леша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что сказала Наташа?

8. Теорема Пифагора, как утверждает один автор, имеет 114 различных доказательств. Что это означает?

9. Как известно, «пифагоровы штаны во все стороны равны». Следует ли отсюда, что Пифагор носил штаны?

10. Почему переплет книги, читанной 2—3 раза, имеет перекос вправо?

В. Произволов

(Ответы см. на с. 57)

* * *

Утверждение «В математическом лексиконе отсутствуют слова с пятью согласными подряд» неверное.

Контрпример: КОНТРПРИМЕР.

И. Брыскин

56 миллионов километров до Красной планеты

Е. НАРИМАНОВ

Проектный облик марсианского экспедиционного комплекса (МЭК)

В проекте НАСА (начало 70-х годов) предлагалось осуществлять маневры разгона у Земли, торможение у Марса и маневр отлета к Земле с помощью ядерного ракетного двигателя с твердофазной рабочей зоной, получившего в США обозначение «NERVA». (В советской специальной литературе этот тип ядерного ракетного двигателя носит название ЯРД схемы «А».) В состав экспедиционного комплекса разработчики из НАСА включили три унифицированных крупномасштабных ракетных блока с ЯРД «NERVA» и с жидким водородом в качестве топлива. Ракетные блоки размещались по пакетной схеме (см. рис. 1), причем два крайних срабатывали у Земли, а центральный — у Марса. По продольной оси центрального ракетного блока последовательно располагались межпланетный орбитальный корабль (МОК), марсианский посадочный комплекс (МПК) и автоматические аппараты для исследования планеты (капсулы).

Выполненные в те же годы в СССР (НПО «Энергия», ЦНИИМаш) проекты марсианского экспедиционного комплекса содержали в качестве двигательной установки электроядерную ракетную двигательную установку (ЭЯРДУ), т. е. ДУ «малой» тяги. Компоновочная схема предлагалась «лучевой» (рис. 2) и «Т-образной» (рис. 3). Последняя схема предусматривала создание на борту в отсеках жилого и приборного модулей искусственной тяжести (с уровнем 0,2—0,3 от уровня земной тяжести) за счет вращения всего комплекса вокруг продольной оси.

В дальнейших проектных проработках было предложено ввести в состав МЭК две электроядерные ракетные двигательные установки, а межпланетный орбитальный корабль и посадочный комплекс размещать между ними (см. рис. 4) в зоне тени, создаваемой специальной размещенной у реактора защитой.

С целью исключения возможного неблагоприятного воздействия ионизирующих излучений от реактора при выходе кораблей из зоны тени в 80-х годах в НПО «Энергия» прорабатывалась компоновочная схема с солнечной энергетической установкой большой мощности. В качестве движителей предполагалось использовать те же двигатели «малой» тяги. Общий вид экспедиционного комплекса приведен на рисунке 5. Там же показано в более крупном масштабе размещение межпланетного корабля, поса-

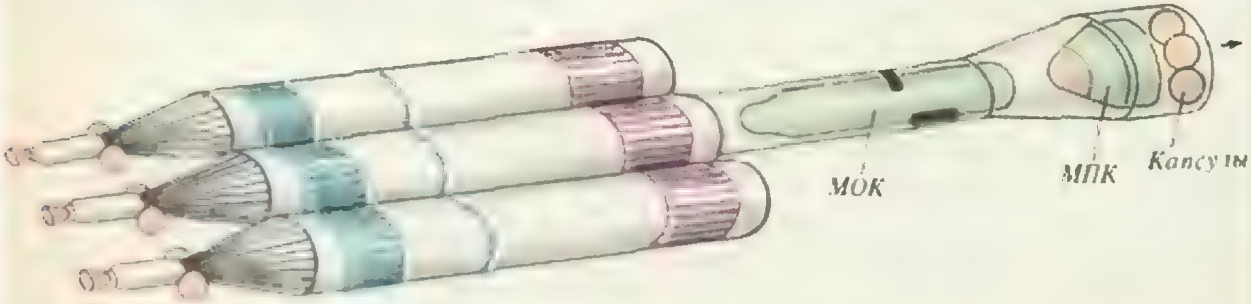


Рис. 1.

Мы продолжаем публикацию материалов, которые могут оказаться полезными для участников конкурса «Вместе к Марсу» (см. «Квант» № 7, с. 69; № 10, с. 65; № 11, с. 51).

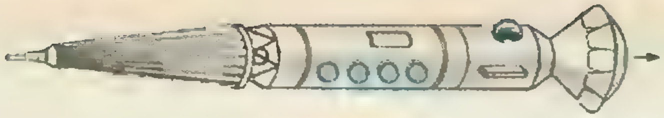


Рис. 2.

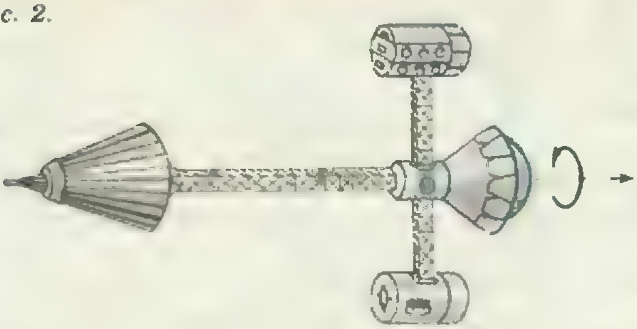


Рис. 3.

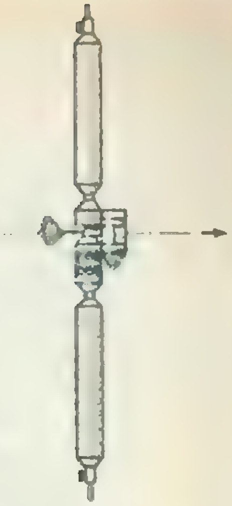


Рис. 4.

дочного комплекса и панелей с двигателями «малой» тяги. Посадочный комплекс в двух последних компоновочных схемах выполнен в форме цилиндра; это сделано с целью получения выигрыша по массе и упрощения процедуры выведения комплекса с Земли в космос за счет уменьшения поперечного размера. Размер каждого крыла солнечной энергоустановки 200×200 м, а масса одного квадратного метра солнечной батареи с учетом силового каркаса и распределительной сети оценивается в 500 грамм.

В настоящее время проводятся широкие проектные проработки марсианского экспедиционного комплекса других компоновочных схем.

Формирование МЭК на орбите ИСЗ

Приведем пример формирования МЭК на монтажной орбите искусственного спутника Земли для случая организации пилотируемой экспедиции по двухкорабельной схеме полета.

Дата начала транспортных операций по выведению грузов в космос — середина 2010 года. В это время по околоземной орбите обращаются две пилотируемые орбитальные станции — «Мир» нового поколения (СССР) и «Фридом» (США), которые в этом случае, дополнительно к традиционным научным и народнохозяйственным задачам, используются как сборочно-монтажные орбитальные комплексы.

Первым на околоземной орбите формируется автоматический межпланетный корабль, который доставит на орбиту искусственного спутника Марса (ИСМ) посадочный комплекс и ракетный блок с топливом для обратного полета экипажа или только бак с топливом. Пуском ракет-носителей «ALS» в космос выводятся посадочный комплекс (разработка США), ракетный блок возвращения и ЭЯРДУ (разработки СССР). Блоки полезного груза стыкуются со станцией «Фри-

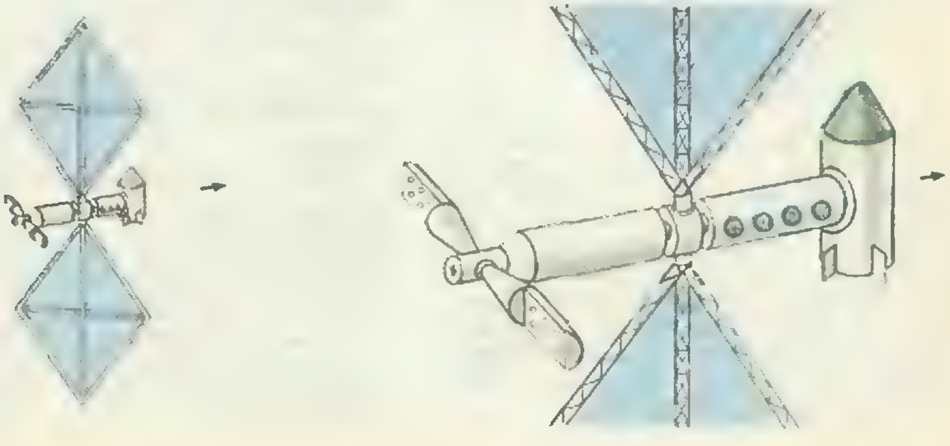
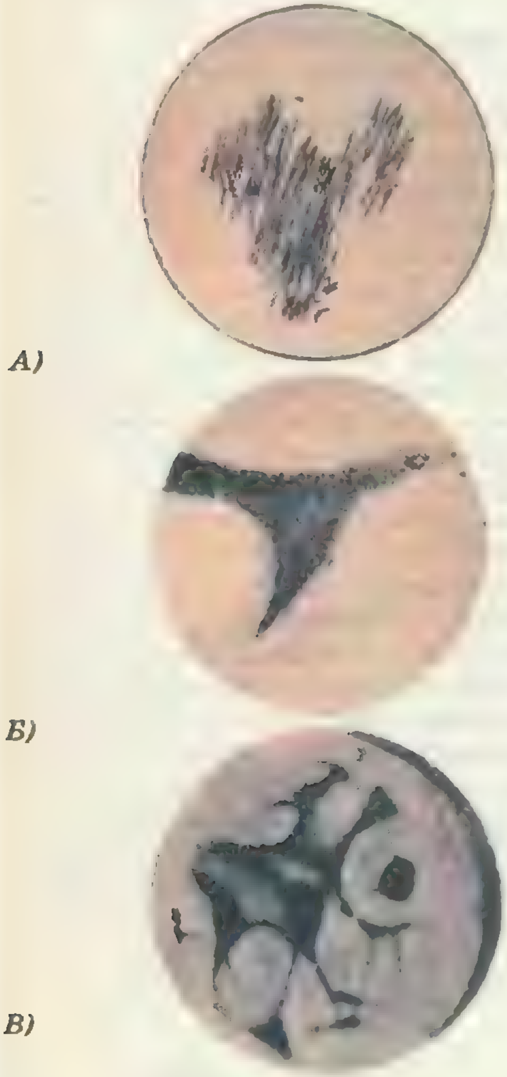


Рис. 5.

дом», затем в специальном ангаре с участием космонавтов-монтажников выполняется сборка грузового межпланетного корабля. Для вывода в космос отдельных модулей этого корабля всего потребуется 3—4 пуска РН «ALS», что займет с учетом этапа сборки и устранения неисправностей около полугода.

После проверки функционирования бортовых систем и устранения обнаруженных неисправностей грузовой межпланетный корабль отправляется к Марсу. 13 месяцев полета (90 суток — раскрутка у Земли, 270 суток — межпланетный полет, 30 суток — выведение на низкую ареоцентрическую орбиту) — и корабль выходит на рабочую орбиту ИСМ.



Эти рисунки отражают ранние этапы исследований Марса с помощью телескопа. Первый шаг (А) был сделан в 1659 году Х. Гюйгенсом, отметившим только V-образную область, называемую теперь равниной Большой Сирт. На рисунке (Б), сделанном в 1800 году наблюдателем И. Шретером, Большой Сирт показан уже достаточно точно. Знаменитая же сеть «каналов» (В) была обнаружена Дж. Скиапарелли во время великого противостояния 1877 года.

После получения данных об успешном выведении посадочного комплекса на орбиту ИСМ начинается формирование на орбите ИСЗ пилотируемого межпланетного корабля. Пусками РН «Энергия» на орбитальную станцию «Мир» последовательно доставляются ракетные блоки для разгона комплекса у Земли с ЯРД типа «NERVA», ракетный блок торможения у Марса (разработка СССР) и пилотируемый межпланетный корабль (разработка СССР с участием стран мирового сообщества). Отдельные модули собираются на специальном стапеле на станции «Мир». После этого на станцию с помощью ракеты-носителя «Зенит» в транспортных космических кораблях (типа «Союз») доставляется международный экипаж из 8 человек, представляющий разные континенты. Космонавты занимают рабочие места в межпланетном корабле. Марсианский экспедиционный комплекс отделяется от станции «Мир» и начинает самостоятельный полет по околоземной орбите. (Для формирования МЭК потребуется 3—4 пуска РН «Энергия» и один пуск РН «Зенит»; все операции займут около 5 месяцев.)

Но вот включаются маршевые ДУ, нарастает перегрузка, экспедиционный комплекс устремляется к Марсу. Впереди полет по трассе «Земля — Марс», торможение у Марса, стыковка с автоматическим кораблем, посадка на Марс, две недели работы на Красной планете, взлет с Марса, отлет к Земле...

Через полтора года после старта пилотируемого межпланетного корабля от Земли он возвращается к своему космическому дому. Спускаемый аппарат приземляется в казахстанской степи. На календаре — 2013 год.

Задача выполнена. Впереди — новые полеты!

III Заочная аэрокосмическая олимпиада

Всесоюзное молодежное аэрокосмическое общество (ВАКО) «Союз» и Московский физико-технический институт проводят III Заочную аэрокосмическую олимпиаду для учащихся 10 и 11 классов средних школ. Олимпиада предназначена для тех, кто интересуется исследованиями космического пространства и желает проверить свои знания школьного курса физики в решении задач из различных областей практической космонавтики.

Опыт проведения заочных аэрокосмических олимпиад показал, что успешное самостоятельное решение предложенных задач может явиться критерием готовности к поступлению в институт. Так, в частности, половина всех победителей олимпиады, которая проводилась весной 1990 года, успешно сдали вступительные экзамены в МФТИ.

Для участия в олимпиаде необходимо решить предложенные задачи и оформить их в тетради, по одной задаче на отдельном листе. На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество.
2. Подробный домашний адрес (с индексом).
3. Номер школы и класс, в котором вы учитесь.
4. Любые дополнительные сведения о себе.

Тетрадь с решениями задач олимпиады и конверт с вашим домашним адресом отправьте *до 1 апреля 1991 года* простой бандеролью по адресу:

141700, г. Долгопрудный, МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований (с пометкой «Олимпиада»).

Решение Оргкомитета олимпиады вам будет сообщено до 1 мая 1991 года.

Победители III Заочной аэрокосмической олимпиады будут награждены дипломами, которые вам могут пригодиться при поступлении в вузы аэрокосмического профиля.

Желаем успехов!

Ниже приводятся задачи III Заочной аэрокосмической олимпиады. Задачи 1—4 предназначены для учащихся 10 класса, 1—6 для 11 класса. Решение задач, отмеченных звездочкой, хотя и не обязательно, но будет учтено при подведении итогов олимпиады. При решении задач можно использовать любые справочные данные.

1. Для связи с космической станцией, вращающейся в экваториальной плоскости по круговой орбите, высота которой $H=300$ км, используется сеть наземных станций слежения. Сколько станций необходимо для обеспечения непрерывной связи, если сигнал устойчиво принимается при высоте станции над горизонтом $\alpha=30^\circ$?

2. Почему космические аппараты (КА) удобнее запускать с космодромов, расположенных вблизи экватора? Для чего тогда в СССР вблизи Полярного круга построен космодром Плесецк?

3. Возможности космической технологии в значительной мере определяются уровнем микрогравитации — величиной возмущающих ускорений на борту космических аппаратов. Оцените величину ускорений на комплексе «Мир», вызываемых перемещениями космонавтов. Масса комплекса $M\approx85$ т, масса космонавта $m=70$ кг.

4. Ракета-носитель «Энергия» способна вывести на низкую околоземную орбиту груз массой $m_0=100$ т. Какой массы груз может быть доставлен с ее помощью на Луну? Скорость истечения газов из ракетного двигателя принять равной $u=3$ км/с.

5. В рамках Международного года космоса в 1992 г. планируется осуществить гонки «космических парусников» к Луне. Определите размер отражающего солнечного паруса, который необходим для разгона КА массой $m=500$ кг с ускорением $a=10^{-4}\,g$. Форма паруса — квадратная, коэффициент отражения $\eta=100\,\%$. Значение солнечной постоянной принять равным $N=1{,}36$ кВт/м^2.

6. Для компенсации аэродинамического торможения спутника на низкой околоземной орбите предполагается использовать ионный реактивный двигатель (ИРД). В камеру ИРД со скоростью $u=1$ мм/с подается круглый стержень из натрия диаметром $d=1$ мм. С помощью дугового разряда металлический натрий испаряется и однократно ионизируется. Какое ускоряющее напряжение U необходимо создать в камере, чтобы тяга двигателя была равна $P=1$ Н? Плотность натрия $\rho=1$ г/см^3.

7*. Два брата-близнеца путешествуют во Вселенной на звездолетах, летящих со скоростью $v=0{,}9\,c$ (c — скорость света). Пролетая мимо Земли, один из них задержался на один год для исследования земной цивилизации, после чего отправился догонять своего брата с относительной скоростью $V=0{,}9\,c$. Какой из братьев и на сколько будет старше к моменту встречи?

8*. В современной астрономии все наблюдаемые звезды классифицируются по многим признакам: массе, блеску и т. д. Различают звезды и по «цвету»: есть, например, красные и желтые карлики, голубые гиганты... Но только у писателей-фантастов встречаются «зеленые» звезды. Почему мы не видим их в телескоп?

Нам пишут

Еще раз о кривизне поверхности и тепловом расширении

В № 11 «Кванта» за 1989 г. помещена статья С. Л. Табачникова «Дифференциальная геометрия вокруг нас». Меня особенно заинтересовала та ее часть, где говорится о связи между кривизной поверхности и расширением тел. В ней рассмотрено перемещение поверхности нагреваемого тела в направлении внешней нормали в каждой точке на одинаковое расстояние ε (рис. 1, *а*; такое перемещение фигурирует в определении кривизны; назовем его *нормальным*). При нормальном перемещении взаимно перпендикулярные отрезки на поверхности произвольного тела испытывают в общем случае разные относительные растяжения. Этим можно объяснить, например, продольный разрыв сосиски при варке.

Между тем при тепловом расширении однородных аморфных тел (и кубических кристаллов) перемещение точек тела описывается *гомотетией* — преобразованием подобия (центр которого для изолированного тела совпадает с его центром масс; рис. 1, *б*). При гомотетии перемещение поверхности не всегда совпадает с нормальным (в частности, если нагревать круглую шайбу, то ее отверстие увеличивается, т. е. перемещение границы отверстия противоположно нормальному). Тепловая деформация однородных тел (при равномерном нагреве и свободном расширении) не вызывает внутренних напряжений, т. к. в указанных условиях тело при каждой температуре находится в своем равновесном состоянии. А значит, и описанные продольные разрывы не могут быть связаны с чисто тепловым расширением.

Но сосиски при кипячении все-таки лопаются! И притом продольно. Чем же тогда это вызвано?

Трудно придумать лучший механизм продольного разрыва, чем рассмотренный в статье «Дифференциальная геометрия вокруг нас», нормальное перемещение поверхности. Надо только добавить, что такое перемещение связано не с тепловым расширением, а с дополнительным эффектом, который создает силы, действующие перпендикулярно поверхности тела. Таким эффектом является, например, внутреннее давление. В случае сосиски оно может возникать в результате появления внутри нее сжатого пара при закипании содержащейся в сосиске влаги. Здесь нагревание приводит одновременно к двум разным эффектам: тепловому расширению (гомотетии) и «напорному» расширению (нормальному преобразованию). Первый эффект меняет размеры, но не форму тела, второй меняет как размеры тела, так и его форму. Реальное расширение описывается наложением обоих эффектов, но разрыв поверхности может быть связан только со вторым эффектом. В этом и состоит уточнение, которое следует внести в обсуждаемый механизм.

Можно предложить опыт, где реализовалось бы только нормальное преобразование. Возьмем надувные шарики, но не сферические, а в виде «сосисок» (рис. 2). Станем надувать шарик. Если делать это достаточно медленно, температурные эффекты будут пренебрежимо малы, и расширение шарика будет всецело обусловлено вторым эффектом. Надуваем шарик, пока он не лопнет. Поскольку здесь реализована в чистом виде нормальная деформация поверхности, разрыв шарика должен проходить вдоль одного из меридианов OO'.

Может оказаться, что шарик разрывается не вдоль меридиана, а вблизи одного из «полюсов». Это не противоречит теории: она предсказывает разрыв поверхности в первую очередь в области наибольшей кривизны — а это как раз окрестности вершин O и O'. Кстати, сосиски часто расщепляются при варке именно в вершинах — в согласии с геометрией нормального расширения.

Однако возможны ситуации, когда никакие силы не в состоянии вызвать нормального перемещения поверхности. Попробуем представить нормальное расширение кристалла. Его начальное сечение вблизи какого-либо ребра образует угол AOB (рис. 3, *а*). Алгоритм нормального расширения требует сместить стороны AO и OB на расстояние ε в направлении внешних нормалей. Направление смещения вершины O неопределенно, и точка O трансформируется в дугу O_1O_2. Реальная поверхность при этом разорвется, и образуются два зубца $A_1O_1OO_2B_1$ (рис. 3, *б*). Иначе говоря, одно ребро

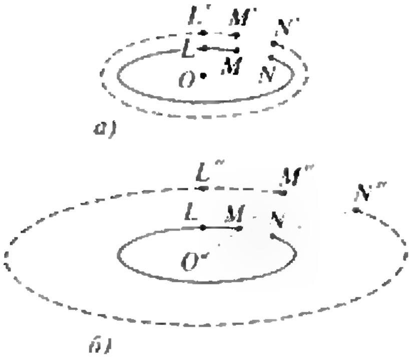


Рис. 1.

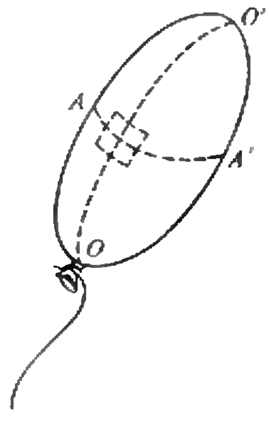


Рис. 2.

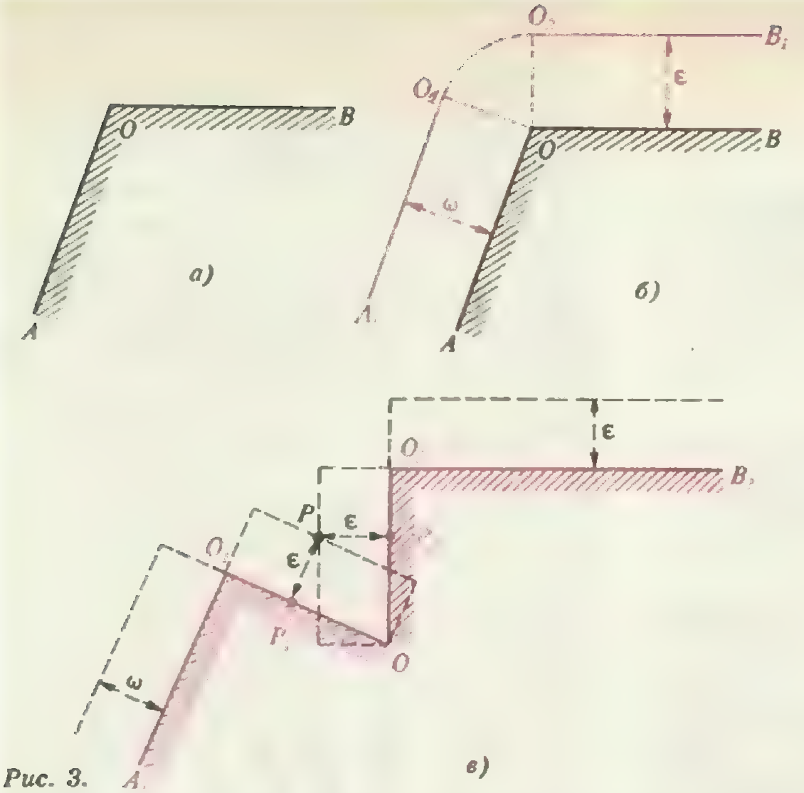


Рис. 3.

расщепится на два. Затем каждое из двух новых ребер снова должно расщепиться по указанному механизму. Однако теперь это невозможно, т. к. между ребрами имеется выемка O_1OO_2, участки которой OO_1 и OO_2 стали бы наползать друг на друга, что физически неосуществимо (рис. 3, *в*). Следовательно, дальнейшее перемещение поверхности кристалла либо прекратится, либо будет отличаться от нормального. К такому же выводу мы придем, рассматривая кристалл под давлением, например, под нагруженным поршнем в прозрачной цилиндрической капсуле с глицерином.

Итак, нормальное перемещение поверхности, используемое при определении ее кривизны, не всегда осуществимо. Но это никоим образом не порочит соответствующее определение кривизны. Ведь в математике речь идет о воображаемом, и притом бесконечно малом, перемещении. Здесь мы приходим к вопросу о взаимоотношении между физической реальностью и теми мысленными образами, которые мы используем для ее описания. Этот вопрос представляет самостоятельный интерес, выходящий далеко за рамки моего письма.

М. Файнгольд

Закон всемирного тяготения

(Начало см. на с. 8)

порядка $\frac{3\cdot10^{3}\text{ м}}{5\cdot10^{10}\text{ м}} = 0{,}6\cdot10^{-7}$. Хотя ошибка и очень мала, но она приводит к наблюдаемому эффекту.

Это связано с указанным Ньютоном свойством апсид «отзываться» своим движением на нарушение закона обратных квадратов. Из-за малой поправки эллиптическая орбита Меркурия медленно поворачивается в пространстве. Это движение (в сторону обращения Меркурия на орбите) накладывается на движение, связанное с возмущающим действием Юпитера, которое объясняется ньютоновской теорией. За 100 лет накапливается дополнительное смещение 43″, объяснение которого было дано лишь общей теорией относительности.

Не всегда поправки общей теории относительности столь малы. В глубинах космоса есть области, в которых эффекты общей теории относительности оказываются основными. Это — недра тяжелых звезд, ядра галактик. При описании Вселенной как физической системы основным «инструментом» является общая теория относительности. Но дорогу к таким исследованиям открыл Ньютон. Он был первым, кто создал методы теоретической физики, и первым применил эти методы к изучению Вселенной.

XXXI
Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. ВАВИЛОВ.
Кандидат физико-математических наук
А. СЛИНЬКО

Очередная XXXI Международная математическая олимпиада школьников проходила в Пекине с 7 по 19 июля 1990 года. В олимпиаде участвовали 308 школьников из 54 стран. Впервые в этом году в ней приняли участие команды Алжира, Бахрейна, Японии, Макао, КНДР.

Нашу страну представляли *Малинникова Евгения* (Ленинград, с. ш. № 239), *Стояновский Александр* (Москва, с. ш. № 57), *Перлин Александр* (Ленинград, с. ш. № 239), *Абрамов Георгий* (Ленинград, с. ш. № 239), *Соловьев Иван* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82), *Барановский Владимир* (Омск, с. ш. № 115). Научными руководителями команды на олимпиаде были авторы этой статьи — доцент МГУ Вавилов В. В. и научный сотрудник НИИ СИ АН СССР Слинько А. М.

Олимпиада, как всегда, проходила в два тура (по 3 задачи в каждом, на решение которых отводилось 4,5 часа в каждом туре). Решение каждой задачи оценивалось в 7 баллов.

Таблица 1

	Количество баллов	Сумма	Медаль
Малинникова Е.	7 7 7 7 7 7	42	Золотая
Стояновский А.	5 7 7 7 7 7	40	Золотая
Перлин А.	5 7 7 7 7 7	40	Золотая
Абрамов Г.	4 7 1 7 7 1	27	Серебряная
Соловьев И.	3 3 2 7 7 3	25	Серебряная
Барановский В.	2 7 2 0 5 3	19	Бронзовая

Итоги выступления нашей команды приведены в таблице 1, показывающей количество баллов, полученных за решение каждой задачи, общую сумму баллов каждого участника и полученную им награду.

Несмотря на то, что по своему регламенту Международная олимпиада является индивидуальным соревнованием, однако неофициально подводятся и итоги командных выступлений. В таблице 2 приведены результаты десяти лучших команд этого года. Золотой медалью были награждены школьники, набравшие в сумме 34—42 балла, серебряной медалью — 23—33 балла, бронзовой — 16—22 балла. Отметим особо успех команды Люксембурга, которая состояла только из двух участников, завоевавших серебряную и бронзовую медали.

Таблица 2

КИТАЙ	СССР	США	РУМЫНИЯ	ФРАНЦИЯ	ВЕНГРИЯ	ГДР	ЧСФР	БОЛГАРИЯ	ВЕЛИКОБРИТАНИЯ
42	42	39	36	42	34	33	33	38	40
42	40	35	34	36	33	30	30	29	39
41	40	33	32	34	29	27	26	23	19
36	27	32	29	28	24	25	24	23	18
36	25	23	22	15	22	22	24	23	13
33	19	12	18	13	20	21	16	16	12
230	193	174	171	168	162	158	153	152	141

Олимпиада давно стала настоящим международным праздником юных математиков, программа которого включает в себя не только научные соревнования, но и знакомство с культурными достопримечательностями страны проведения олимпиады, ее культурой, историей.

Следующие Международные математические олимпиады пройдут в 1991 году в Швеции, а в 1992 году — в СССР. Пользуясь случаем, обращаемся к отдельным читателям и организациям с просьбой направлять свои предложения по различным аспектам проведения XXXIII Международной математической олимпиады по адресу: 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, ректорат, комн. 906, Вавилову В. В.

Поздравляем наших ребят с успешным выступлением на олимпиаде.

А теперь приводим условия задач (в скобках указана страна, предложившая задачу).

Задачи

1 (Индия). Хорды AB и CD пересекаются в точке E внутри данной окружности. Пусть M — внутренняя точка отрезка BE. Касательная в точке E к окружности, проходящей через точки D, E и M, пересекает прямые BC и AC в точках F и G соответственно. Пусть $AM/AB=t$. Найдите EG/EF как функцию от t.

2 (ЧСФР). На окружности дано множество E из $(2n-1)$ различных точек ($n \geqslant 3$), из которых k точек покрашены в черный цвет, а все остальные — в белый. Раскраска точек называется *хорошей*, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг окружности содержится ровно n точек из множества E. Найдите наименьшее значение k, для которого каждая раскраска точек множества E является хорошей.

3 (Румыния). Найдите все целые числа $n>1$ такие, что $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ является целым числом.

4 (Турция). Пусть Q^+ — множество всех положительных рациональных чисел. Приведите пример функции $f:Q^+\to Q^+$ такой, что

$$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$$

для всех x, $y \in Q^+$.

5 (ФРГ). Дано натуральное число $n_0>1$. Игроки A и B выбирают по очереди натуральные числа n_1, n_2, ... по следующему индуктивному правилу. Игрок A, зная число n_{2k}, может выбрать любое число n_{2k+1} такое, что

$$n_{2k} \leqslant n_{2k-1} \leqslant n_{2k}^2.$$

Затем игрок B выбирает любое число n_{2k+2} такое, что n_{2k+1}/n_{2k+2} является положительной натуральной степенью простого числа. Игрок A побеждает тогда, когда выберет число 1990, а B — когда выберет 1.

Найдите все значения n_0, для которых

а) A имеет выигрышную стратегию;

б) B имеет выигрышную стратегию;

в) ни A, ни B не имеют выигрышных стратегий.

6 (Нидерланды). Докажите, что существует выпуклый многоугольник с 1990 сторонами такой, что

а) все его углы равны;

б) длины сторон многоугольника равны числам 1^2, 2^2, ..., 1989^2, 1990^2 в некотором порядке.

Пользователям классов УК НЦ

Молодежный Центр «Фактория» предлагает сетевое системное программное обеспечение:

— новая генерация ОС RT-11, корректно работающая с 8-битными кодами (символы квазиграфики, заливки фона, ESC-последовательности для управления атрибутами дисплея);

— программы межмашинной связи для быстрой (10—15 сек) загрузки и обслуживания новой генерации ОС RT-11 на локальных ЭВМ;

— новые варианты локального и дискового Бейсика (реализована возможность одновременного вывода символов и графики на дисплей, включены программы межмашинной связи для поддержки всех файловых операций).

Программное обеспечение одобрено Государственным комитетом СССР по народному образованию и рекомендовано для внедрения.

Более подробную информацию можно получить по адресу:
103482, Москва, К-482, Зеленоград, корп. 06, МЦ «Фактория»; тел. (095) 532-98-78; 534-65-06.

XXI Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
С. КРОТОВ,
А. ЗИЛЬБЕРМАН

В этом году Международная физическая олимпиада (МФО) школьников проходила с 5 по 13 июля в Нидерландах — в небольшом городе Гронингене (хорошо известном любителям шахмат). Олимпиада собрала школьников из 32 стран — каждый год число стран-участниц понемногу увеличивается.

Наша команда, как обычно, включала пять человек — все они окончили школу в этом году. Это

Василий Иванов (г. Тула, с. ш. № 73),

Вадим Кузьменко (г. Ивано-Франковск, с. ш. № 1),

Диар Чокин (г. Алма-Ата, РФМШ),

Сергей Шинкевич (г. Березники, с. ш. № 3),

Михаил Энтин (г. Тула, с. ш. № 73).

Кроме них в летних сборах принимали участие еще трое — Вадим Шеянов из г. Ленинграда, Ивар Мартин из г. Таллинна и Николай Заркевич из г. Канева. Окончательный отбор в команду был проведен по результатам двух олимпиад на сборах, приближенных, по возможности, к стилю МФО. Нужно сказать, что этот отбор проводить очень нелегко — все участники сборов люди серьезные, неоднократно побеждавшие на всевозможных олимпиадах — от районных до Всесоюзных. В общем, очень жаль, что в команду можно включить только пять человек, но таковы правила.

Церемония открытия олимпиады, которая проходила 6 июля, была очень торжественной и хорошо гармонировала с атмосферой старинного зала известного в Европе университета. В тот же день состоялось заседание жюри, где были рассмотрены и утверждены условия задач теоретического тура, после чего руководители команд переводили и печатали тексты заданий для участников. Вот эти задачи.

Теоретический тур

Задача 1. Дифракция рентгеновских лучей на кристалле. Мы хотим изучить дифракцию рентгеновских лучей на прямоугольной кристаллической решетке. С этой целью исследуем дифракцию плоской монохроматической волны, падающей перпендикулярно на двумерную решетку, которая представляет собой систему взаимно перпендикулярных щелей, отстоящих друг от друга на расстояниях d_1 и d_2 соответственно. Общее число щелей одного направления N_1, другого N_2. Дифракционная картина наблюдается на экране, который располагается параллельно решетке на расстоянии L от нее ($L \gg N_1 d_1,\ N_2 d_2$).

а) Вычислите положение и ширину главных максимумов на экране. (Шириной максимума называется расстояние между ближайшими минимумами с обеих сторон максимума.)

Рассмотрим теперь тонкую пластину кубического кристалла с постоянной решетки a и размерами $N_0 a \times N_0 a \times N_1 a$, причем N_1 гораздо меньше, чем N_0. Кристалл размещается под малым углом θ к направлению падения рентгеновского излучения вдоль оси Z (рис. 1). Дифракционная картина наблюдается на экране, который находится на большом расстоянии L от кристалла.

б) Вычислите положение и ширину максимумов как функцию угла θ (θ мало́). В чем проявляется тот факт, что $N_1 \ll N_0$?

Дифракционная картина также может быть объяснена, исходя из теории Брэгга. При этом предполагается, что рентгеновское излучение отражается от атомных плоскостей решетки. Интерференцией этих отраженных пучков и создается дифракционная картина.

в) Докажите, что это отражение (называемое отражением Брэгга) дает такие же соотношения для максимумов, как и в части б).

В так называемом порошковом методе пучок рентгеновских лучей рассеивается на очень

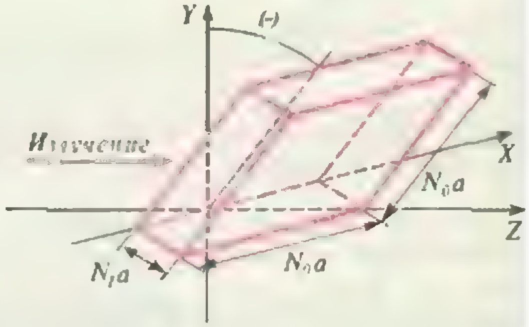


Рис. 1.

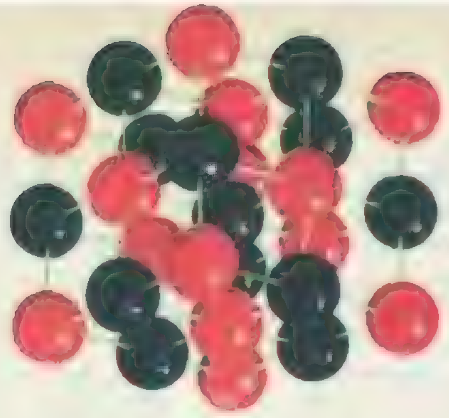


Рис. 2.

большом числе маленьких кристалликов, образующих порошок. (Конечно, размеры отдельного кристаллика больше, чем постоянная решетки *a*.) Рассеяние рентгеновского излучения с длиной волны 0,15 нм на порошке калийной соли KCl (имеющей кубическую решетку; см. рис. 2) дает на фотопластинке, расположенной на расстоянии $L=0{,}10$ м, систему концентрических темных колец (рис. 3). Радиус наименьшего кольца равен 0,053 м. Ионы калия и хлора имеют практически одинаковые размеры и могут рассматриваться как одинаковые рассеивающие центры.

г) Вычислите расстояние между соседними ионами K в кристалле.

Задача 2. Электрические эксперименты в магнитосфере Земли. В мае 1991 года космический корабль «Атлантис» будет выведен на орбиту вокруг Земли. Известно, что орбита круговая и расположена в плоскости экватора. В некоторый момент космический корабль выпустит сателлит S на направляющей изолированной штанге длиной L. Штанга жесткая, с пренебрежимо малой массой. Трение будем считать малым.

Пусть α — угол, который составляет штанга с *линией «Атлантис» — центр Земли* (рис. 4). S также расположен в плоскости экватора. Можно считать, что масса сателлита гораздо меньше массы Атлантиса, а L гораздо меньше радиуса орбиты.

а$_1$) Рассчитайте, при каком (каких) α система сохраняет свое положение относительно Земли. Другими словами, при каких значениях α этот угол не изменяется со временем.

а$_2$) Проанализируйте устойчивость системы в этом положении для каждого равновесного состояния.

Пусть в некоторый момент времени штанга получает небольшое *отклонение* от *равновесного* положения, оставаясь в плоскости экватора. При этом в системе возникают колебания.

б) Выразите период этих колебаний через время *одного* оборота вокруг Земли.

На рисунке 4 магнитное поле Земли (B) перпендикулярно плоскости рисунка и направлено на читателя. Вследствие орбитального движения штанги между ее концами появляется разность потенциалов. Окружающая среда (магнитосфера) представляет собой разреженный ионизированный газ с очень высокой электрической проводимостью. С помощью контактных пластин в A и S штанга электрически соединяется с ионизированным газом, в результате чего по ней начинает течь ток.

в$_1$) Определите направление этого тока.

Известно, что период обращения вокруг Земли $T=5{,}4\cdot10^3$ с, длина штанги $L=2{,}0\cdot10^4$ м, магнитная индукция поля Земли на высоте сателлита $B=5{,}0\cdot10^{-5}$ Тл, масса Атлантиса $M=100$ т.

Затем к штанге подключается источник тока (расположенный внутри корабля), поддерживающий ток, текущий в направлении, противоположном первоначальному.

в$_2$) Как долго нужно поддерживать этот ток для того, чтобы высота орбиты изменилась на 10 метров? Считать угол α равным нулю. Влиянием токов, протекающих в проводящей магнитосфере, пренебречь. Увеличится или уменьшится высота спутника?

Задача 3. Вращающаяся нейтронная звезда. Миллисекундный пульсар — источник излучения во Вселенной, который излучает очень короткие импульсы с периодом от одной до нескольких миллисекунд. Испускаемое излучение находится в радиодиапазоне, и хорошим *радиоприемником можно принимать отдельные* импульсы и очень точно определять этот период.

Радиоимпульсы возникают от поверхности особого типа звезды — так называемой нейтронной звезды. Это очень плотная звезда, которая быстро вращается вокруг своей оси. Мас-

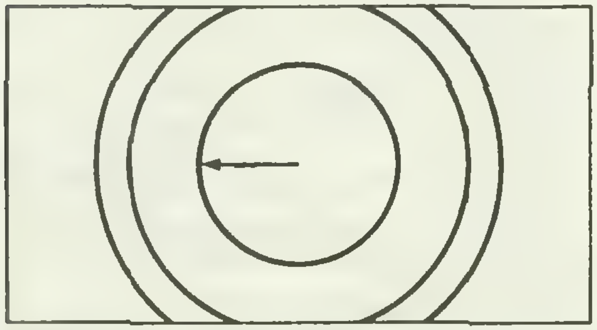


Рис. 3.

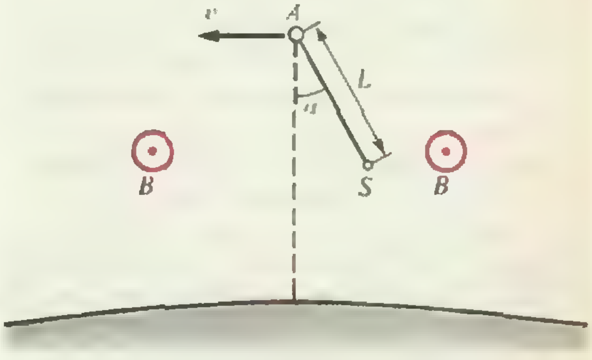


Рис. 4.

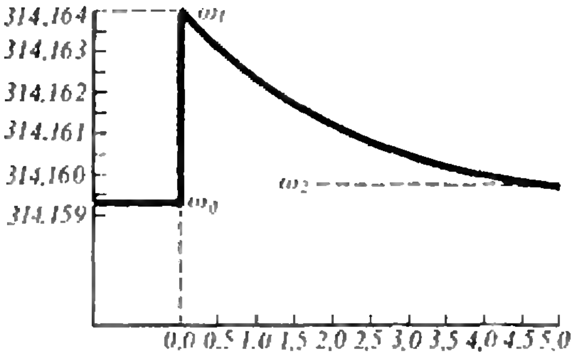


Рис. 5.

са ее приблизительно той же величины, что и масса Солнца, но радиус ее составляет только несколько десятков километров. Из-за быстрого вращения звезда немножко расплющивается. Предположим, что r_p — расстояние от центра до поверхности звезды у полюса вращения и r_e — расстояние от центра до поверхности у экватора. Тогда мы определим коэффициент сплющивания следующим образом: $\varepsilon = (r_e - r_p)/r_p$.

Рассмотрите нейтронную звезду с массой $2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг, средним радиусом $1{,}0 \cdot 10^4$ м и периодом вращения $2{,}0 \cdot 10^{-2}$ с.

а) Вычислите коэффициент сплющивания, если гравитационная постоянная равна $6{,}67 \times 10^{-11}$ Н · м^2 · кг$^{-2}$.

Из-за потерь энергии вращение звезды постепенно замедляется, поэтому сплющивание уменьшается. Однако звезда имеет твердую кору, которая плавает на жидкой сердцевине (ядре). Время от времени в коре происходят сотрясения, что приводит к скачкообразному изменению ее формы. Обнаружено, что во время и после такого сотрясения угловая скорость коры изменяется. Это изображено на рисунке 5, где по горизонтальной оси отложено время (в сутках), а по вертикальной оси — угловая скорость коры (в радианах в секунду).

б) Вычислите радиус жидкого ядра на основе данных рисунка 5. Считайте, что плотности коры и ядра одинаковые. Изменением формы ядра можно пренебречь.

Нужно отметить, что уровень трудности теоретических задач был несколько выше, чем обычно на МФО. Это поставило наших ребят в более выгодное положение по сравнению с большинством участников (исключая, правда, те команды, с которыми в течение длительного времени проводится целенаправленная подготовка — например, команду Китая). Наши ребята плохо справились с первой задачей (к сожалению, этот раздел на сборах был обсужден недостаточно подробно, а в школьную программу он не входит), зато прекрасно решили вторую и третью задачи. В общем, перед экспериментальным туром у каждого из наших участников были неплохие шансы на успех.

Однако именно с экспериментом в последние годы у нашей команды не все ладилось (участники из ФРГ или Великобритании, например, были подготовлены лучше). Причин тут много, главная из них — у наших ребят мало возможностей поработать на современном лабораторном оборудовании у себя в школах, а за короткое время на сборах нелегко все успеть. В этом году мы постарались уделить больше внимания именно этой части работы. По этой ли причине или потому, что нашим ребятам просто повезло, но на экспериментальном туре они выступили превосходно. Лучший результат на эксперименте получил В. Кузьменко (кстати, у него был лучший результат в экспериментальном туре и на Всесоюзной олимпиаде), результат команды также оказался первым среди всех.

Расскажем немного о задачах экспериментального тура — официальный текст вряд ли может вам пригодиться, ведь он рассчитан на выданные участникам приборы и оборудование.

Задач было две, и каждая была рассчитана на 2,5 часа. Первая задача посвящена определению эффективности преобразования электрической мощности в световой поток кремниевым светодиодом. Светодиод (излучающий красный свет) подключался к источнику через переменный резистор, при помощи которого можно было регулировать ток. В закрытой коробочке с маленьким отверстием был помещен фотоприемник — фотодиод. Напряжение и ток светодиода и ток фотодиода можно было измерять при помощи точного цифрового тестера. Предполагалось, что участники смогут отградуировать фотоприемник при помощи закона «обратных квадратов» (изменяя расстояние между излучателем и приемником можно было убедиться, что ток фотодиода пропорционален его освещенности), а также непосредственно измерить распределение излучаемой энергии по углу. Длина волны излучаемого света, а также вероятность выбивания электрона проводимости при поглощении фотона были даны в условии задачи. В общем, задача хорошая — нужно придумать способ градуировки, провести множество измерений, сообразить, как употребить для расчетов измеренную зависимость силы света от угла, да и провести сами расчеты. И все это — за два с половиной часа.

Если вы захотите поставить эту работу в школьной лаборатории, можно использовать светодиод АЛ307, фотодиод — любой, какой удастся достать (его нужно включить последовательно с батарейкой на 4,5—9 вольт и измерять «обратный» ток). Коэффициент полезного действия в этом случае получается порядка 1—10 %.

Во второй задаче нужно было измерить отношение магнитных полей (точнее — индукций магнитных полей) в зазорах двух магнитов одинаковой формы. В качестве измерительных приборов были предложены алюминиевый диск на оси, нитка, два груза разных масс, секундомер и линейка. Метод измерений был ясен — намотать нитку на ось, подвесить к ней груз и дать диску раскручиваться. При этом магнит нужно расположить так, чтобы край диска попал в зазор — тогда в диске возникнут вихревые токи (токи Фуко) и появится тормозящий момент. Участник должен был догадаться (и обязательно доказать), что тормозящий момент пропорционален квадрату магнитной индукции. Комбинируя разные грузы и измеряя скорость установившегося движения, можно было найти отношение магнитных полей. Эксперимент этот требовал большой аккуратности — при этом результат получался весьма точным. Наличие двух грузов позволяло учесть силу трения в оси. Этот способ оценки отношения магнитных полей довольно прост, и такую установку вполне можно повторить.

После долгого и довольно эмоционального обсуждения результатов проверки (особенно по экспериментальным задачам) членами жюри определились окончательные оценки.

Дипломами I степени были награждены участники из Великобритании (лучший результат в олимпиаде) и ГДР (второй результат), затем наш В. Кузьменко (третий результат), участник из Польши и двое из Китая. С. Шинкевич, В. Иванов и Д. Чокин награждены дипломами II степени (всего их 12), а М. Энтин — дипломом III степени (всего их 25).

По уставу МФО соревнования — личные, командных итогов не подводится, однако все их, конечно, считают. Наша команда в этом году оказалась впереди всех. Лишь на 0,35 балла отстала команда Китая. Третьими стали ребята из ФРГ, четвертыми — из ГДР. Довольно неудачно выступила команда Румынии — обычно она выглядела намного сильнее. Во многих командах оказалось по одному или по два сильных участника, а остальные выступили слабо (это относится, например, к команде Великобритании).

Олимпиада была превосходно организована, хозяева олимпиады позаботились буквально обо всем (включая небольшую — по их меркам — сумму на карманные расходы и бесплатный проезд по городу для участников). Великолепная культурная программа состояла из концертов и интереснейших экскурсий, а также торжественных приемов. К сожалению, из-за недостатка места мы не можем здесь рассказать о них подробнее. На закрытии олимпиады участники имели возможность блеснуть своими побочными талантами — мы имеем в виду пение и танцы. У некоторых это получилось очень неплохо, особенно запомнилась одна команда (не наша, к сожалению), которая с большим энтузиазмом, размахивая флагом, исполнила национальный гимн — впрочем, может быть, и не гимн, но все равно было очень здорово.

Следующая — XXII МФО — будет проходить в будущем году на Кубе. Подготовка нашей команды уже началась, осталось пожелать нашим ребятам успехов во всем.

Математические переменки
(Ответы. Вопросы см. на с. 45)

1. Второстепенный вопрос.

2. «С большим аппетитом!» (С — большим, а — петитом.)

3. «Тридцать первое»,— ответил мальчик, имея в виду число месяца.

4. 50 (написаны последовательные достоинства монет в копейках).

5. 100 (а это — рубли).

6. Остриё.

7. Например, «Меня зовут Наташа».

8. Это означает, что теорема Пифагора верна.

9. Пифагор никогда не носил штанов. Он носил короткий плащ философа трибои.

10. Я не знаю ответа на этот вопрос.

JULY 15-21
THE SECOND
INTERNATIONAL
OLYMPIAD
IN INFORMATICS
MINSK-90

II Международная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

Быстро пролетел год, и вот уже столица Белоруссии, г. Минск, гостеприимно распахнула двери участникам II Международной олимпиады по информатике (МОИ). Здесь с 15 по 21 июля 1990 года школьники различных стран мира собрались, чтобы помериться силами в области информатики.

Интерес к этой олимпиаде был проявлен необычайный. Если в прошлом году в МОИ принимали участие 13 стран, то в этом году их уже было 24: Аргентина, Болгария, Великобритания, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Греция, Испания, Италия, Китай, КНДР, Куба, Кувейт, Марокко, Монголия, Нидерланды, Норвегия, Польша, Румыния, СССР, ФРГ, ЧСФР, Швеция и Югославия. Кроме того, присутствовали наблюдатели из Таиланда. В каждую команду входило не более 4 участников, хотя не все команды выступали полным составом.

На правах страны-организатора Советский Союз был представлен двумя командами: сборной командой СССР и командой Белоруссии. В команду СССР по итогам выступлений на последней Всесоюзной олимпиаде по информатике и по результатам участия в зимних и летних сборах были включены: *Рейн Варбланe*, выпускник с. ш. № 1 п. Ныо Тартуского р-на; *Георгий Датуашвили*, выпускник с. ш. № 25 г. Тбилиси; *Юрий Зайцев*, выпускник с. ш. № 57 г. Киева; *Дмитрий Козлов*, выпускник с. ш. № 566 г. Ленинграда.

В команду Белоруссии вошли: *Сергей Линев*, выпускник с. ш. № 35 г. Минска; *Александр Наумов*, учащийся 10-го класса с. ш. № 36 г. Минска; *Олег Таборовец*, выпускник с. ш. № 1 г. Пинска; *Валерий Хаменя*, учащийся 10-го класса с. ш. № 1 г. Гродно.

Руководителем сборной СССР был автор этой статьи, руководителем команды Белоруссии — доцент БГУ В. М. Котов.

Организаторы олимпиады, особенно Министерство народного образования БССР, сделали все возможное, чтобы это событие осталось надолго в памяти всех участников. Запоминающимся было открытие олимпиады. На нем выступили первый заместитель председателя Государственного комитета СССР по народному образованию В. Д. Шадриков, председатель международного жюри олимпиады академик АН СССР Н. Н. Красовский, академик АН БССР В. А. Лабунов. Открыл II Международную олимпиаду по информатике министр народного образования БССР М. И. Демчук.

Олимпиада по информатике отличается от других олимпиад необычайной сложностью ее проведения. Подбор задач для соревнований и их проверка, обеспечение участников персональными компьютерами, поддержание средств вычислительной техники в работоспособном состоянии, а с учетом того, что участники могли пользоваться своим программным обеспечением, защита от вирусов — все это потребовало напряженной работы всех служб олимпиады. По сравнению с I МОИ объем этой работы удвоился, так как нынешняя олимпиада проводилась в два тура.

Перед каждым туром международное жюри осуществляло выбор одной задачи из пакета задач, подготовленного научным комитетом олимпиады.

В результате голосования, в котором участвовали только члены жюри — руководители команд, были выбраны следующие задачи.

Задача I тура

Задана таблица размером 4×4, в каждой клетке которой, кроме двух, содержится одно из чисел от 1 до 14 (все числа разные). Оставшиеся две клетки — пустые. (Пример — таблица 1.)

Таблица 1

7	3	5	14
	4	9	13
1		2	10
11	8	12	6

Таблица 2

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14		

Правила перемещения. Число из любой клетки может быть перемещено в любую незанятую соседнюю клетку по горизонтали или по вертикали. Клетка, в которой ранее размещалось число, становится пустой.

Цель. Необходимо с помощью указанного правила выполнить по шагам преобразование произвольной исходной таблицы в конечную таблицу 2.

Задание. Написать программу, которая

1) осуществляет ввод с клавиатуры исходной таблицы и вывод ее на экран (пустые клетки могут быть закодированы нулями);

2) выполняет преобразование введенной таблицы в таблицу 2;

3) на каждом шаге выдает на экран слева матрицу до хода, справа — матрицу после хода и указывает номер хода (1, 2, 3 и т. д.) так, что в конце работы программы будет показано полное число сделанных ходов;

4) минимизирует число ходов, требуемых для решения задачи.

Задача II тура

В картинной галерее каждый сторож работает в течение некоторого непрерывного отрезка времени. *Расписанием стражи* называется множество пар $[T1(i), T2(i)]$ — моментов начала и конца дежурства i-го сторожа из интервала [0; EndTime].

Для заданного расписания стражи требуется

а) проверить, в любой ли момент в галерее находится не менее двух сторожей.

Если условие а) не выполняется, то:

б) перечислить все интервалы времени с недостаточной охраной (менее 2-х сторожей);

в) добавить наименьшее число сторожей с заданной, одинаковой для всех длительностью дежурства, чтобы получить правильное расписание (удовлетворяющее условию а));

г) проверить, можно ли обойтись без добавления новых сторожей, если разрешается сдвигать время дежурства каждого сторожа с сохранением длительности его дежурства;

д) при положительном ответе на пункт г) составить расписание с наименьшим числом сдвигов.

Входные данные (все моменты времени задаются в целых минутах):

EndTime — момент окончания стражи (момент начала — 0);

N — число сторожей.

$T1(i)$, $T2(i)$, $i=1, ..., N$ — моменты начала и окончания дежурства i-го сторожа.

Length — длительность дежурства каждого дополнительного сторожа.

Выходные данные:

1) ответ на пункт а) в форме да/нет;

2) при ответе «нет» на пункт а) — список пар (k, l) — начал и концов всех малоохраняемых интервалов с указанием числа сторожей в каждом (0 или 1);

3) число дополнительных сторожей и моменты начала и окончания дежурства каждого дополнительного сторожа;

4) ответ на пункт г) в форме да/нет; если «да», то номера сторожей, смена которых сдвигается, и значения сдвигов;

5) ответ на пункт д) — наименьшее число сторожей, смена которых сдвигается, их номера и значения сдвигов.

Примечание. Программа должна допускать независимое тестирование пунктов в), г), д).

Проведение II МОИ в два тура, с одной стороны, позволило избавить участников от возможных случайностей, а с другой — потребовало бóльших усилий для достижения поставленных целей. Кроме того, задачи были составлены так, чтобы каждый школьник выполнил хотя бы один или два пункта задания, а самые сильные участники смогли продемонстрировать все, на что они способны.

Решение задачи каждого тура оценивалось исходя из 100 баллов. В основу проверки были положены тесты, которые по мнению научного комитета и координационной комиссии олимпиады обеспечивали в значительной степени полноту проверки программ участников.

Наибольшие трудности у всех вызвала задача первого тура. Международное жюри выбрало ее из шести задач, предложенных научным комитетом олимпиады, скорее из соображений простоты и понятности формулировки условия, так как в отсутствие авторского решения очень трудно было оценить конкретный объем работы, требуемый для получения работоспособной программы. А этот объем работы оказался достаточно большим. У ребят, отличившихся в этом туре, листинг программы на Паскале составлял 7—10 страниц. По результатам первого тура наши участники Д. Козлов и Г. Датуашвили заняли соответственно 4 и 5 места. В целом оценки за решение первой задачи были невысокие. Лишь около 20 % участников набрали 35 баллов и выше.

Задача второго тура оказалась более доступной для участников, но вызвала много споров у членов международного жюри как при ответах на вопросы участников в процессе ее решения, так и при оценке результатов. Отрадным является тот факт, что среди трех победителей этого тура оказался и представитель сборной СССР Д. Козлов, получивший максимальное количество баллов — 95 (пять премиальных баллов жюри победителям не присудило).

По результатам официального личного зачета участникам II МОИ было вручено 8 дипломов первой степени, 10 дипломов второй степени и 12 дипломов третьей степени. Советские школьники получили: Г. Датуашвили и Д. Козлов (сборная СССР) — дипломы I степени, О. Таборовец (команда БССР) — диплом II степени, Ю. Зайцев (сборная СССР) и С. Линев (команда БССР) — дипломы III степени. Р. Варблане, четвертому участнику сборной СССР, не хватило всего лишь одного балла, чтобы получить диплом III степени.

Международные олимпиады — индивидуальные соревнования, тем не менее неофициально подводятся итоги выступления команд. В этом году результаты пяти лучших команд таковы: Болгария — 427 баллов, Китай — 423 балла, СССР — 420 баллов, ФРГ — 331 балл, Венгрия — 307 баллов.

Команда БССР набрала 234 балла.

Программа олимпиады была очень насыщенной. Напряжение у участников не спадало вплоть до подведения итогов. И тем не менее, II МОИ вылилась в прекрасный праздник. Красочно организованное закрытие олимпиады состоялось в городском Дворце пионеров. И никто не чувствовал себя там проигравшим, так как всех объединяла любовь к информатике и стремление к общению со сверстниками из других стран.

Много теплых слов было сказано на закрытии МОИ как участниками, так и организаторами и гостями олимпиады, в частности официальным представителем ЮНЕСКО Э. Джекобсоном. Подвела итоги олимпиады и объявила победителей первый заместитель министра народного образования БССР Л. К. Сухнат.

Было очень много призов. Помимо прекрасных картин, которые получили победители олимпиады, вручались оригинальные призы победителям отдельных туров, приз за лучший результат среди девушек, призы самым юным участнице и участнику и другие. Приз лучшему белорусскому школьнику (учрежденный Белорусским филиалом Международного компьютерного клуба — ежемесячную стипендию в 200 рублей) получил О. Таборовец. В заключение церемонии закрытия II МОИ представитель Греции пригласил все страны принять участие в следующей международной олимпиаде по информатике, которая состоится в сентябре 1991 года в Афинах.

Советские школьники сделали существенный шаг вперед по сравнению с предыдущей олимпиадой. Конечно, «дома и стены помогают», однако нельзя не заметить, что олимпиадное движение по информатике в нашей стране набирает силу. Поздравляем советских участников олимпиады и их учителей с успешным выступлением, а будущим олимпийцам желаем успехов на следующих олимпиадах.

Информация

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 9, 10 и 11 классы на 1991/92 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружка или факультатива набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса в 1991/92 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив» *до 25 мая 1991 года.* (Тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются.) Работа руководителей заочных физико-технических кружков и факультативов может оплачиваться школой по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и матемвтике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, которые хотят выработать навыки систематической и продуктивной самостоятельной работы. Работы учащихся-заочников проверяют преподаватели, аспиранты и студенты МФТИ, ЛГУ и КрГУ (часто — выпускники ЗФТШ). Работу членов физико-технического кружка и факультатива оценивают их руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону 408-51-45.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраните тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательно печатными буквами, по образцу:

1. Область (край или АССР)	Ростовская обл.
2. Фамилия, имя, отчество	Рудаков Геннадий Всеволодович
3. Класс, в котором Вы учитесь	восьмой
4. Номер, адрес и телефон школы (обычная, спецшкола, с каким уклоном)	№ 10, ул. Фрунзе, 7, г. Таганрог, тел.: 6-45-80 (класс с математическим уклоном)
5. Фамилия, имя, отчество Вашего преподавателя	
по физике	Николаева Ольга Романовна
по математике	Дмитриев Игорь Семенович
6. Место работы и должность родителей	
отец	металлургический завод, инженер
мать	ателье № 8, швея
7. Подробный домашний адрес	347930, г. Таганрог Ростовской обл., ул. Зеленая, д. 72, кв. 23, тел.: 6-50-25
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения	
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ	

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п													
Ф.													
М.													

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в театрадь конверт с написанным на нем вашим адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1991 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1991 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской, Пермской, Тверской, Ярославской областей, Карельской, Удмуртской, Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Камчатской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской, Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует обратиться по адресу: 252680, г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 444-95-24.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов, 2—8 — для девятых классов, 7—13 — для десятых классов. В задании по математике задачи 1—6 — для учащихся восьмых классов, 3—9 — для девятых классов, 6—12 — для десятых классов. (Номера классов указаны для текущего, 1990/91 учебного года.)

Вступительное задание

Физика

1. Путь, состоящий из двух участков, тело проходит со средней скоростью 60 км/ч, при этом длины участков и скорости тела на них относятся соответственно как 1:2. С какой средней скоростью тело пройдет весь путь, если скорость на одном участке увеличить, а на другом уменьшить в два раза?

2. При испытаниях двигатель в течение первых 20 секунд развил половину проектной мощности, а в последние 10 секунд — полную мощность в 5,52 МВт. Сколько было израсходовано топлива с теплотворной способностью 46 МДж/кг при коэффициенте полезного действия 12 %?

3. В термосе имеется некоторое количество воды при температуре 24 °С. На ее поверхность высыпают 10 г «сухого льда» в размельченном виде при начальной температуре —79,2 °С. При каком количестве воды она охладится до 4 °С? «Сухой лед» — это твердая углекислота, которая при температуре —79,2 °С возгоняется, т. е. переходит непосредственно в газообразное состояние. Удельную теплоту возгонки «сухого льда» принять равной 340 кДж/кг; удельная теплоемкость углекислого газа равна 660 Дж/(кг · °С). Теплоемкостью стенок термоса пренебречь.

4. В калориметр теплоемкостью 1254 Дж/°С бросили 30 г мокрого снега, т. е. смеси снега с водой. Сколько было там самого снега, если температура в калориметре понизилась от 24 °С до 16 °С?

5. На горизонтальном столе находятся два одинаковых стакана, соединенных внизу тонкой резиновой трубкой. Сечение каждого стакана 18,2 см^2, высота 20 см. Стаканы заполняются до половины жидкостью плотностью 1,63 г/см^3. Затем в один стакан кладут диск из льда массой 62,3 г, диаметр которого практически совпадает с внутренним диаметром стакана. На какой высоте установятся уровни жидкости в стаканах? Как изменятся уровни в стаканах после таяния льда? Считать, что вода и жидкость в стаканах не смешиваются и не растворяются друг в друге.

6. Участок цепи включает резистор сопротивлением $R=1$ Ом, который соединен последовательно с параллельным соединением двух резисторов сопротивлениями R и $2R$ соответственно. Сопротивление одного из параллельно соединенных резисторов возросло в два раза, а сопротивление другого резистора упало в два раза. Как следует изменить напряжение на участке цепи, чтобы выделяемая в нем мощность не изменилась?

7. Электрический нагреватель сделан из двух последовательно соединенных резисторов сопротивлениями 1 Ом и 6 Ом. К концам резистора с большим сопротивлением подключают еще одно такое же звено из последовательно включенных резисторов (1 Ом и 6 Ом). Какими

будут силы токов в резисторах сопротивлением 5 Ом в цепи с двумя звеньями? Напряжение в цепи 110 В.

8. С какого расстояния человек двухметрового роста увидит носки своей обуви в маленьком плоском зеркале, установленном на горизонтальном полу под углом 30° к вертикали? Рекомендуется дать решение этой задачи, по крайней мере, двумя способами: а) экспериментально; б) графически. Опишите подробно и способы, и результаты решения.

9. Три пункта расположены на плоской местности на одной прямой, причем один из них — посередине. Из этих пунктов отправились вездеходы, которые могли двигаться в любом направлении с постоянной скоростью, и встретились одновременно в некотором месте. В каком отношении находились их скорости? Скорости вездеходов, вышедших из крайних пунктов, относились как 3:4 и в течение всего движения оставались взаимно перпендикулярными. Найдите скорости вездеходов, если расстояние между крайними пунктами 120 км, а время в пути вездеходов 45 мин.

10. Некоторый летательный объект (НЛО), разогнанный до своей максимальной скорости, влетает в плотную среду, сила сопротивления которой пропорциональна скорости тела. Путь торможения оказался равным 102 м. Каким будет путь торможения другого НЛО, топливо которого обладает теплотворной способностью в 2 раза большей, а КПД двигателя на 28 % больше, чем первого? Массы самих НЛО и топлива одинаковы.

11. В двух сосудах находится по одному молю идеального одноатомного газа. Начальные объемы одинаковы, начальные давления различаются в три раза. С ростом объема давление в одном сосуде линейно увеличивается, а в другом линейно уменьшается. Во сколько раз отличаются работы, совершаемые газами, и количества теплоты, получаемые ими в этих процессах, если объем каждого сосуда увеличился в три раза?

12. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, если его из области над тропическим океаном переместить в область над пустыней Сахара? Считать, что температура воздуха в обоих случаях 35 °С, а шар наполнен гелием и его объем не меняется.

13. Воздушный конденсатор, заряженный до напряжения 120 В, подключается к незаряженному конденсатору таких же геометрических размеров, но заполненному непроводящей жидкостью. Относительная диэлектрическая проницаемость жидкости пропорциональна напряжению на конденсаторе. При каком коэффициенте пропорциональности этой зависимости напряжение на соединенных конденсаторах станет равным 40 В?

Математика

1. Из города N решения вступительного задания ЗФТШ прислали n школьников. Первую задачу по математике решили не все, но доля решивших превышает 85 %. Найдите наименьшее возможное значение n.

2. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b из вершины прямого угла проведена высота. Докажите, что ее длина не превосходит $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

3. Докажите, что число $19^{91}-91^{19}$ делится на 3.

4. Корни уравнения $x^2+px+q=0$, у которого $p^2-2q=5$, являются натуральными числами. Найдите эти корни.

5. Можно ли так расположить шесть точек на плоскости, чтобы любые три из них были вершинами равнобедренного треугольника?

6. На сторонах прямоугольного треугольника, вне его, построены квадраты. Известно, что шесть вершин квадратов, не принадлежащих треугольнику, лежат на окружности радиусом 1. Найдите стороны треугольника.

7. Решите неравенство $|x^3-x|-|x|\geqslant x$.

8. Какое наибольшее значение может принимать параметр a, если известно, что $|ax^2-ax+1|\leqslant 1$ при $0\leqslant x\leqslant 1$?

9. В треугольнике со сторонами a, b и c проведены биссектрисы, точки пересечения которых с противолежащими сторонами являются вершинами второго треугольника. Докажите, что отношение площадей треугольников равно $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

10. Решите уравнение $\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0$.

11. Можно ли так расположить семь точек в пространстве, чтобы любые три из них были вершинами равнобедренного треугольника?

12. Пункты A и B расположены на берегу озера, имеющего форму круга радиусом 6 км, и диаметрально противоположны. Турист вышел из A и сначала двигался вдоль берега со скоростью 6 км/ч, а затем сел в лодку и поплыл к B со скоростью 3 км/ч. Какое наименьшее и какое наибольшее время может занять такой маршрут?

Игры и головоломки

Кубики Мак-Магона и таблица Конвея

В начале нашего века английский майор Александр Мак-Магон, преподаватель математики Королевской военной академии, придумал несколько задач с разноцветными кубиками. До него наборы кубиков как игра использовались, пожалуй, только для сооружения зыбких построек да для складывания картинок из кусочков, наклеенных на их грани. (Кстати, и «кубики с картинками» имеют не столь уж долгую историю — они были изобретены в Германии в середине прошлого века.) С тех пор число игр с кубиками неизмеримо возросло, почетное место среди них занял и непревзойденный кубик Рубика... Однако первым был все-таки Мак-Магон и его друг полковник Джоселин, доказавший разрешимость его основной задачи. Но обо всем по порядку.

Представьте, что вам нужно раскрасить кубик в 6 цветов, каждую грань — в свой цвет. Для нижней грани можно выбрать любой из цветов, для передней — любой из 5 оставшихся, для правой — любой из 4 оставшихся и т. д. Получается, что всего имеется $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=6! = 720$ способов раскраски. Но если вы заготовите 720 таких кубиков, то обнаружите, что многие из них неразличимы, как только возьмете их в руки,— ведь на кубике не написано, какая грань у него нижняя, и какая — передняя. Неразличимые раскраски получаются друг из друга вращениями куба, переводящими его в себя. Имеется 24 таких вращения: 9 поворотов на углы $\pm90^\circ$ и 180° вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней, 8 поворотов на $\pm120^\circ$ вокруг диагоналей куба, 6 осевых симметрий относительно прямых, соединяющих середины противоположных ребер, и тождественное преобразование. Поэтому для каждой из 720 учтенных выше раскрасок имеется еще 23 ей эквивалентных, а число существенно различных раскрасок равно $720:24=30$. Именно столько кубиков в наборе Мак-Магона. Все они показаны в таблице, приведенной на последней странице обложки. Там же объясняется, как с помощью этой таблицы, которую придумал американский математик Джон Конвей, быстро и красиво решить основную задачу Мак-Магона: выложив из набора один кубик — образец, найти среди остальных 29 такие 8, из которых можно сложить увеличенную вдвое копию образца, соблюдая «правило домино»: маленькие кубики должны соприкасаться гранями одинакового цвета.

Если мы посмотрим на кубик-образец вдоль диагонали, то увидим три грани, сходящиеся в одном из ее концов. Обозначим их цвета цифрами 1, 2, 3, а цвета противоположных граней, соответственно, 4, 5, 6. В искомую восьмерку надо включить хотя бы один кубик с трехгранным углом, раскрашенным теми же цветами 1, 2, 3, причем в том же порядке. Всего таких кубиков вместе с образцом шесть (это число перестановок цифр 4, 5, 6). Однако нетрудно понять, что «правило домино» оставляет из этих шести только два варианта цветов, соответственно противоположных 1, 2, 3: 5, 6, 4 и 6, 4, 5. Из соображений симметрии ясно, что любой из этих двух кубиков можно поместить в угол (1, 2, 3) большого куба, тогда второй кубик нужно будет поместить в противоположный угол (4, 5, 6). (Интересно, что в таблице Конвея эти два кубика и образец всегда расположены на местах вида Xy, Yx и Zx). Аналогично находятся еще три пары кубиков для трех других диагоналей. Таким образом, восьмерка кубиков, решающих задачу Мак-Магона для заданного образца, определена однозначно, хотя сложить большой куб из нее можно двумя способами — чтобы получить один способ из другого, надо перенести каждый кубик в противоположный угол. В таблице Конвея кубики, отвечающие образцу Xy, расположены в строке Y и столбце x, кубик Yx из них надо исключить. Можно проверить, что четыре кубика одного ряда при сборке большого куба займут места в концах диагонали его нижнего основания и скрещивающейся с ней диагонали верхнего основания.

Задача Мак-Магона имеет продолжение: составив копию по данному образцу, надо среди оставшихся кубиков найти новый образец и 8 кубиков, образующих его копию с соблюдением «правила домино». С помощью таблицы эта задача решается почти автоматически — искомые кубики определены однозначно и являются зеркальными отражениями кубиков первого набора.

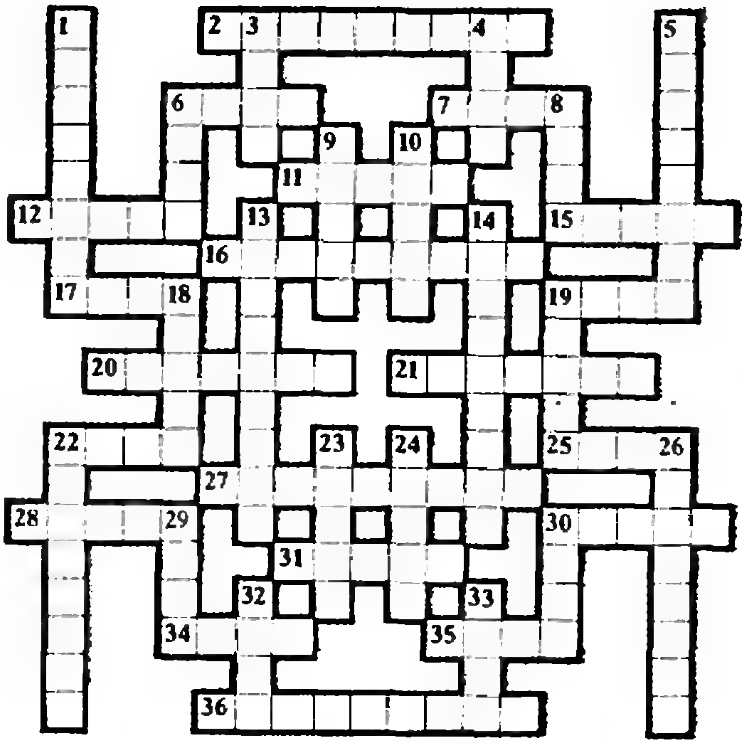
Возможно, таблица Конвея поможет вам решить и следующие задачи.

1. Соблюдая «правило домино», сложить куб $2\times2\times2$, каждая грань которого была бы раскрашена одним из а) пяти, б) четырех, в) трех цветов (в каждом случае должны быть использованы все заданные цвета). Все ли эти задачи разрешимы?

2. Откажемся от «правила домино». Сколькими способами тогда можно сложить куб $2\times2\times2$ по заданному образцу? Сколько существует наборов по 8 кубиков, позволяющих это сделать? Покажите, что сложить куб-копию из такого набора можно 2, 4, 8 или 16 способами. Можно ли сложить куб-копию $3\times3\times3$?

В. Дубровский

Кроссворд



По горизонтали:

2. Советский физик, совместно с Л. И. Мандельштамом поставивший опыт по доказательству электронной проводимости металлов. 6. Полупроводниковый прибор с p—n-переходом. 7. Российский физик, экспериментально установивший закон теплового действия тока. 11. Примесный атом в полупроводнике. 12. Российский физик и электротехник, создатель гальванопластики. 15. Отрицательный электрод. 16. Верхние слои атмосферы со значительным содержанием ионов и электронов. 17. Знак заряда атомного ядра. 19. Совокупность электрических цепей. 20. Бытовой источник постоянного тока. 21. Прибор для регулирования силы тока. 22. Центральная область биполярного транзистора. 25. Мельчайшая частица химического элемента. 27. Образование ионов и электронов из нейтральных молекул. 28. Направленное движение носителей заряда под действием внешних полей. 30. Самый большой шаровой проводник, имеющийся в распоряжении электриков. 31. Французский физик, основатель электростатики. 34. След заряженной частицы. 35. «Прибор», помогающий определить направление силы Лоренца. 36. Электроизмерительный прибор.

По вертикали:

1. Электронно-лучевой прибор. 3. Положительный электрод. 4. Излучение, необходимое для работы фоторезистора. 5. Тонкие листы из сплава свинца и олова, применяющиеся для изготовления конденсаторов. 6. Английский химик и физик; установил зависимость сопротивления проводника от его длины и поперечного сечения. 8. Металл, используемый в элементе Вольта. 9. Переносчик электромагнитного взаимодействия между заряженными частицами. 10. Советский физик, один из первых исследователей свойств полупроводников. 13. Одна из областей биполярного транзистора. 14. Вещество, обладающее свободными зарядами. 18. Эквипотенциальная поверхность поля точечного заряда. 19. Управляющий электрод в электронной лампе. 22. Простейший прибор, помогающий определить направление вектора магнитной индукции. 23. Знак заряда электрона. 24. Устойчивая взаимосвязь материальных явлений. 26. Американский физик; с высокой точностью измерил заряд электрона. 29. Действительное событие. 30. Область значений энергии, которой могут обладать электроны в твердом теле. 32. Время года, благоприятное для работы гелиостанций. 33. Резистор, присоединяемый параллельно амперметру для изменения цены деления шкалы.

М. Красин

Вниманию наших читателей

Магазин «Академкнига» г. Киева высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Балк М. Б., Болтянский В. Г. *Геометрия масс.* (Библиотечка «Квант»).— 1987.— 30 к.

Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика в примерах и задачах.* Учебное пособие. Изд. 3-е, перераб. и доп.— 1989.— 1 р.

Гашков С. Б., Олехник С. Н., Сергеев И. Н. *Примени математику.*— 1989.— 55 к.

Гурский И. П. *Элементарная физика с примерами решения задач.* Учебное руководство.— 1989.— 1 р. 10 к.

Фейнман Р. *Характер физических законов.* Пер. с англ. Изд. 2-е, испр. (Библиотечка «Квант»).— 1987.— 25 к.

Чернин А. Д. *Физика времени.* (Библиотечка «Квант»).— 1987.— 40 к.

Заказы отправляйте по адресу: 252208, Киев, пр. «Правды», д. 80-а, магазин «Книга — почтой» «Академкнига».

Конкурс программных разработок «Борланд-Контест»

Программисты - профессионалы и любители программирования! Ассоциация Групп Пользователей Борланд в СССР (БорАГ) приглашает вас принять участие в первом в нашей стране конкурсе на лучшую разработку программных продуктов, выполненную средствами Борланд.

Конкурс проходит под девизом «Интеллект + программирование = успех» и имеет своей целью популяризацию разработок фирмы, поиск новых идей и подходов в программировании с использованием программного обеспечения Борланд, стимулирование программистов, пользующихся продукцией Борланд.

Конкурс проводится в трех категориях программных средств:

а) системы и средства для работы с базами данных;

б) служебные программы: утилиты, антивирусные средства, драйверы устройств, программы для распознавания, кодирования, программы для автоматизации работы в MS DOS и OS/2 и пр.;

в) обучающие и демонстрационные программы, компьютерные игры.

Итоги конкурса подводятся раздельно в трех возрастных категориях: «Борланд-Юниор» (школьники и студенты техникумов до 18 лет); «Борланд-Кадет» (студенты высших учебных заведений и молодежь до 23 лет); «Борланд-Про» (профессионалы без ограничений по возрасту).

Жюри конкурса составлено из представителей крупнейших отечественных и зарубежных фирм по производству программного обеспечения. Тестирование программ будет проводиться в Тестовой лаборатории Международного компьютерного клуба. Сохранение авторских прав разработчика гарантируется.

Итоги конкурса будут подведены в апреле 1991 года и объявлены на Втором международном компьютерном форуме (июнь 1991 г.) представителями фирмы Борланд.

Для участников конкурса в каждой категории программных средств и для каждой возрастной категории спонсорами конкурса учреждены специальные призы (фирменные программно-технические средства, товары народного потребления). Спонсорами конкурса являются Международный компьютерный клуб, корпорация Борланд, СП «Интерквадро», крупнейшие фирмы по производству вычислительной техники.

Главный приз и звание Лауреата конкурса присуждается представителями фирмы Борланд. Авторы программы-лауреата в каждой возрастной категории (для коллективов — 1 представитель), приглашаются для знакомства с работой фирмы в ее штаб-квартиру (Калифорния, США). Призеры конкурса награждаются почетными дипломами фирмы Борланд.

В качестве поощрительных призов вручаются комплекты поставки любого программного средства Борланд по выбору и коробка дискет. Кроме того, все программы-призеры будут аннотированы с указанием авторов в обзорно-рекламных разделах ведущих отечественных и зарубежных журналов по информатике. Фирмы-спонсоры конкурса «Борланд-Контест» имеют право самостоятельно присуждать специальные призы по различным категориям программных продуктов.

Авторы лучших разработок, вошедшие в число призеров, могут быть приглашены на работу в ведущие совместные предприятия СССР в области компьютеризации и программирования.

Условия участия в конкурсе «Борланд-Контест»

Любой участник может предложить свою программу в более «старшую» категорию, но не наоборот. Любой участник может предложить на конкурс не более одного продукта в каждой категории.

Программные средства представляются на конкурс на дискетах 5.25″ или 3.5″ со стандартной разметкой MS DOS. Распаковка файлов, обработанных программами уплотнения, осуществляться не будет. Работы представляются на конкурс под девизами. Первая дискета должна содержать файл README с девизом программного продукта, его аннотацией и указаниями по запуску и использованию (не более 2500 байт). После завершения конкурса дискеты могут быть получены авторами в Ассоциации.

В почтовую бандероль с дискетами должна быть вложена сопроводительная открытка (не конверт!), распечатка текста файла README на русском или английском языках, а также запечатанный конверт, на котором пишется девиз работы, а внутрь вкладывается лист бумаги с координатами автора (адрес, фамилия, имя и отчество полностью, рабочий и домашний телефон).

В сопроводительной открытке и в файле README указывается: девиз представленного продукта; категория программных средств; возраст участника (число полных лет на 31 декабря 1990 г.); возрастная категория, в которой предлагается рассматривать представленный продукт; аннотация программного продукта (не более 256 символов); дата отправки.

На бандероли должна стоять заметная надпись: «Борланд-Контест».

Работы на конкурс надо отправлять до 31 января 1991 года по адресу: Москва, 125130, 2-й Новоподмосковный пер., д. 4, «Борланд-Контест». Телефоны рабочей группы «Борланд-Контест»: (095) 921-09-02, 150-92-01.

Ассоциация Групп Пользователей Борланд в СССР

Ответы, указания, решения

ант» для младших школьников

1. Из условия ясно, что Аня получила самую низкую отметку из троих, Боря бо́льшую, чем Аня, и Вера — бо́льшую, чем Боря. Так как все получили не меньше тройки, то Аня получила 3, Боря — 4 и Вера — 5. Но оценка Ани — 3 — по условию на 10 меньше суммы остальных отметок, поэтому сумма остальных отметок равняется 13, а общая сумма — 16. Аня, Боря и Вера в сумме получили 12. Остается еще 4, а так как каждый отвечающий получил не меньше тройки, то отвечал еще только один ученик, получивший 4.

2. $2\cdot 1=7-5=6:3=9-7=4:2$.

3. Пусть сторона квадрата равняется a, и пусть количество музыкантов в шеренге после перестроения уменьшилось на x. Тогда $a^2=(a-x)(a+5)$. Отсюда $a=\frac{5x}{5-x}$. При целых положительных значениях x это выражение будет целым и положительным только при $x=4$; значит, $a=20$. Количество музыкантов равняется $20^2=400$.

4. Не может. Число, являющееся полным квадратом и записывающееся цифрами 0 и 6, должно оканчиваться на четное число нулей и после их отбрасывания оставаться квадратом. Оставшееся же число оканчивается либо на 06, либо на 66. А такие числа — четные, но не делящиеся на 4, и поэтому не могут быть квадратами.

5. Из условия следует, что произведение двух упомянутых нечетных чисел меньше квадрата их полусуммы. Отсюда можно сделать вывод, что эти числа различны (иначе произведение равнялось бы квадрату полусуммы). Наименьшее значение произведения двух различных нечетных двузначных чисел равно, очевидно, $11\cdot 13=143$; следующее по величине — это $11\cdot 15=165$.

Пирамид выше 165 м не существует, следовательно, те два нечетных числа, о которых говорится в условии,— это 11 и 13. Квадрат их полусуммы равен 144. Поэтому высота пирамиды больше 143 м, но меньше 144 м.

В Египте имеется всего две пирамиды выше 143 м. Это пирамида Хеопса (146,6 м) и пирамида Хефрена (143,5 м). Из них лишь последняя ниже 144 м.

Ответ: фараона звали Хефрен.

ейдоскоп «Кванта»

росы и задачи

1. Сопротивление тела птицы много больше сопротивления участка провода между ее ногами, поэтому сила тока в теле птицы мала и безвредна.

2. Сопротивление нити накала в холодном состоянии меньше, и, следовательно, пусковой ток в лампе больше рабочего.

3. В цепи, показанной на рис. 1, *а*, ток идет в направлении *ARB*, на рис. 1, *б* — в направлении *BRA*, если ЭДС $\mathscr{E}_1$ мала.

4. Да, если вольтметр электростатический. Вольтметры, через которые идет ток, показывают напряжение на самом себе, но если сопротивление такого вольтметра много больше внутреннего сопротивления источника, то показание вольтметра практически равно ЭДС источника.

5. Станет уменьшаться.

6. Приборы не испортятся, так как амперметр будет включен последовательно с вольтметром, имеющим большое сопротивление.

7. Да, параллельно какому-нибудь сопротивлению.

8. Будет равна нулю.

9. После внесения проводника в поле в нем начинается перемещение зарядов, пока в проводнике не образуется поле, направленное противоположно первоначальному. Складываясь, эти поля уничтожают друг друга.

10. Будет, так как потенциалы проводников *AB* и *CD* станут различными. Направления возникающих токов указаны на рис. 2.

11. На палец, если его сунуть в патрон, придется практически все напряжение цепи, так как сопротивление пальца много больше сопротивления гирлянды.

12. Ярче всего должен светиться участок *AC* — его сопротивление меньше, чем участков *ABC* и *ADC*. Через участок *BD* ток не пойдет вообще.

13. Точки *A* и *C*, как и точки *B* и *D*, имеют соответственно одинаковые потенциалы. Поэтому эквивалентная начальной схема будет выглядеть, как показано на рис. 3. Полное сопротивление равно $R/3$.

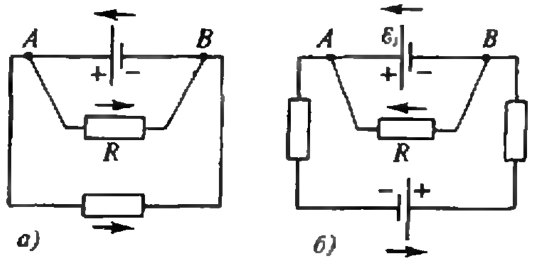


Рис. 1.

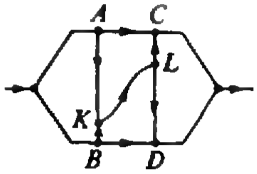


Рис. 2.

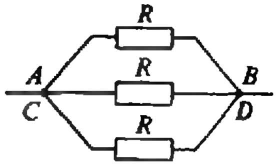


Рис. 3.

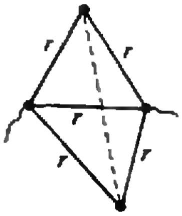


Рис. 4.

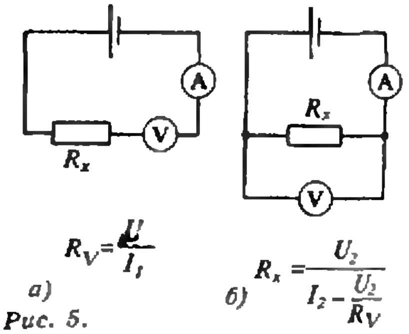


Рис. 5.

14. На $\sqrt{n}$ частей.

15. Кольцо в цепи — параллельное соединение двух проводников. Сопротивление при движении ползунка уменьшается, поэтому падает и напряжение на зажимах источника.

16. $r/2$. См. рис. 4.

Микроопыт

Необходимо сделать два измерения. См. рис. 5, *а* и *б*.

[redacted]ссворд

[redacted] горизонтали: 2. Папалекси. 6. Диод. 7. Ленц. 11. Донор. 12. Якоби. 15. Катод. 16. Ионосфера. 17. Плюс. 19. Сеть. 20. Элемент. 21. Реостат. 22. База. 25. Атом. 27. Ионизация. 28. Дрейф. 30. Земля. 31. Кулон. 34. Трек. 35. Рука. 36. Вольтметр.

По вертикали: 1. Кинескоп. 3. Анод. 4. Свет. 5. Станиоль. 6. Дзви. 8. Цинк. 9. Фотон. 10. Иоффе. 13. Коллектор. 14. Проводник. 18. Сфера. 19. Сетка. 22. Буравчик. 23. Минус. 24. Закон. 26. Милликен. 29. Факт. 30. Зона. 32. Лето. 33. Шунт.

[redacted]XI Международная матическая олимпиада

1. $\dfrac{EG}{EF}=\dfrac{t}{1-t}$. Сначала нужно обосновать чертеж (рис. 6), т. е. показать (а это просто), что точка E лежит между точками G и F. Соединим точку D с точками A, M и B. Так как $\angle CEF=\angle DEG=\angle EMD$ и $\angle ECF=\angle MAD$, то треугольники CEF и AMD подобны; поэтому $CE\cdot MD=AM\cdot EF$. С другой стороны, так как $\angle ECG=\angle MBD$ и $\angle CGE=\angle CEF-\angle GCE=\angle EMD-\angle MBD=\angle BDM$, то треугольники CGE и BDM также подобны; следовательно, $EG\cdot MB=CE\cdot MD$. Из полученных двух пропорций получаем $EG\cdot MB=AM\cdot EF$, т. е.

$$\frac{EG}{EF}=\frac{AM}{MB}=\frac{t\cdot AB}{(1-t)\cdot AB}=\frac{t}{1-t}.$$

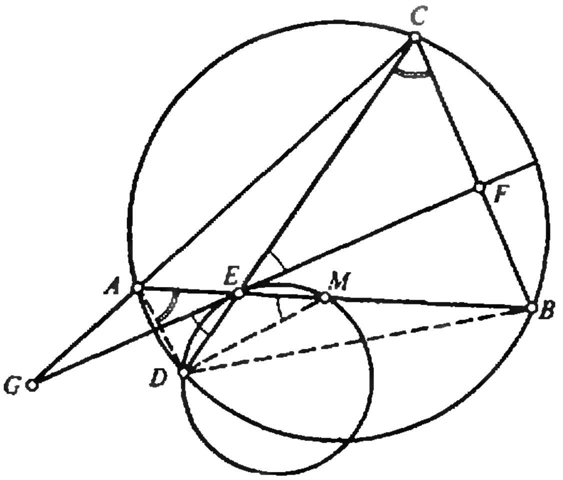


Рис. 6.

Замечание. Если точка M лежит между точками A и E (как показано на рис. 7), то можно изменить роль точек A и B, F и G, полагая $t'=1-t$. Тогда аналогично имеем

$$\frac{EF}{EG}=\frac{MB}{AM}=\frac{t'}{1-t'}=\frac{1-t}{t},$$

и, тем самым,

$$\frac{EG}{EF}=\frac{t}{1-t}.$$

2. Решение этой задачи — см. задачу М1259 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

3. Решение этой задачи — см. задачу М1260 из «Задачника «Кванта» — будет опубликовано позже.

4. Пример можно построить следующим образом. Пусть $p_1, p_2, \ldots$ — все простые числа, занумерованные в порядке возрастания. Тогда любое число $x\in Q^+$ однозначно представляется в виде $x=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$, где $n_1, \ldots, n_k$ — целые числа, $n_k>0$. Для этого x положим

$$f(x)=f(p_1)^{n_1}f(p_2)^{n_2}\ldots f(p_k)^{n_k}, \qquad (1)$$

где $f(p_j)$ определяется равенством

$$f(p_j)=\begin{cases} p_{j+1}, \text{ если } j \text{ нечетно,}\\ 1/p_{j-1}, \text{ если } j \text{ четно.}\end{cases} \qquad (2)$$

Легко проверить, что так определенная функция при всех x, $t\in Q^+$, удовлетворяет условиям

а) $f(xt)=f(x)f(t)$ (в силу (1)),

б) $f(f(x))=1/x$ (в силу (2)).

Отсюда сразу следует, что f является решением заданного функционального уравнения. Отметим, что из уравнения можно вывести условия а) и б) (подставьте поочередно $x=1$ и $y=1$ и покажите, что если $f(y_1)=f(y_2)$, то $y_1=y_2$), однако эти условия не определяют функцию f однозначно.

5. Ответ: а) $n_0\geqslant 8$; б) $2\leqslant n_0\leqslant 5$; в) $n_0=6$, $n_0=7$. Обозначим через W множество всех натуральных чисел n_0, начиная с которых игрок A имеет выигрышную стратегию.

Лемма. Пусть $\{m, m+1, \ldots, 1990\}\subset W$, $s\leqslant 1990$ и $s/p^r\geqslant m$, где p^r — наибольшая степень простого числа p, делящая s. Тогда все натуральные числа n_0 такие, что

$$\sqrt{s}\leqslant n_0<m,$$

также содержатся в W.

Доказательство. Если $\sqrt{s}\leqslant n_0<m$, то игрок A может выбрать число $n_1=s$. Тогда игрок B, по условию, должен выбрать одно из чисел n_2 таких, что

$$m\leqslant\frac{s}{p^r}\leqslant n_2<s\leqslant 1990.$$

Поэтому $n_2\in W$, и, конечно, игрок A может выиграть. Лемма доказана.

Так как $45^2=2025>1990$, то все n_0 такие, что $45\leqslant n_0\leqslant 1990$, очевидно, принадлежат W.

Числа $m=45$ и $s=420=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ удовлетво-

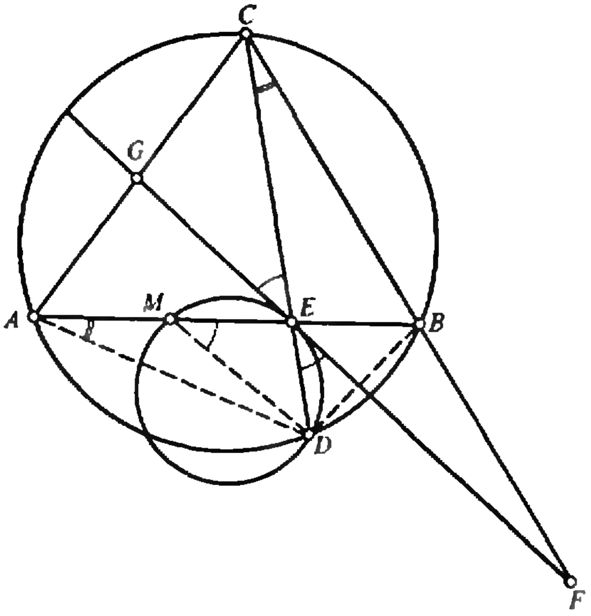


Рис. 7.

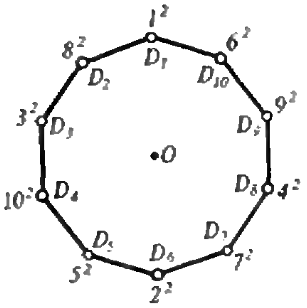


Рис. 8.

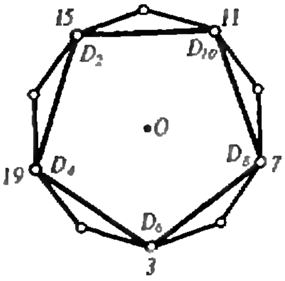


Рис. 9.

ряют предположению леммы, так как $\sqrt{420} < 21 < 45$, и, следовательно, $\{21, 22, \ldots, 44\} \subset W$.

Используя снова лемму для $m = 21$ и $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, видим, что $\{13, 14, \ldots, 20\} \subset W$.

Для $m = 13$ и $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ получаем, что $\{11, 12\} \subset W$.

Полагая $m = 11$ и $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, аналогично предыдущему, имеем: $\{8, 9, 10\} \subset W$. Итак,

$$\{8, 9, \ldots, 1990\} \subset W.$$

Если $n_0 > 1990$, то игрок A может подобрать натуральное число r такое, что

$$2^r \cdot 3^2 < n_0 \leqslant 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2,$$

и, тем самым, выбрать $n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2$. Теперь безразлично, какое число выберет игрок B, важно только, что $8 \leqslant n_2 < n_0$. После нескольких шагов игры ситуация будет такова, что $8 \leqslant n_{2k} \leqslant 1990$. А это показывает, вместе с доказанным выше, что все значения $n_0 \geqslant 8$ таковы, что игрок A имеет выигрышную стратегию.

Пусть $n_0 \leqslant 5$. Так как наименьшее произведение трех различных простых чисел равно $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2$, то игрок A должен выбрать число вида $n_1 = p^r q^s$, где p — простое, а q — или простое число или равно 1, $p^r > q^s$ и $r, s \geqslant 1$. Тогда игрок B может выбрать

$$n_2 = q^s = \frac{n_1}{p^r} < \sqrt{n_1} \leqslant n_0.$$

После конечного числа шагов игрок B получит $n_{2k} = 1$ и выигрывает.

Для $n_0 = 6$ или $n_0 = 7$ игрок A может выбрать $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, или $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, и тогда игрок B выбирает $n_2 = 6$. После этого игроки A и B должны поочередно выбирать числа последовательности 30, 6, 30, 6, ..., так как в противном случае кто-то из них обязательно получит выигрышную стратегию.

6. Пусть $\bar{e}_1 = \overline{OE_1}$, $\bar{e}_2 = \overline{OE_2}$, ..., $\bar{e}_{1990} = \overline{OE_{1990}}$ — векторы, соединяющие центр O правильного 1990-угольника $E_1 \ldots E_{1990}$ с вершинами. Если мы найдем такую перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_{1990}$ чисел $1^2, 2^2, \ldots, 1990^2$, что

$$a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \ldots + a_{1990}\bar{e}_{1990} = \bar{0}, \qquad (*)$$

то, полагая $\overline{A_1A_2} = a_1\bar{e}_1$, $\overline{A_2A_3} = a_2\bar{e}_2$, ..., $\overline{A_{1990}A_{1990}} = a_{1990}\bar{e}_{1990}$, получим замкнутую ломаную $A_1 \ldots A_{1990}A_1$, ограничивающую многоугольник, который удовлетворяет условиям задачи (в частности, в силу $(*)$, $\overline{A_{1990}A_1} = a_{1990}\bar{e}_{1990}$). Другими словами, нужно расставить «веса» $1^2, \ldots, 1990^2$ в вершинах правильного 1990-угольника так, чтобы выполнялось равенство $(*)$.

Разобьем точки $E_1, \ldots, E_{1990}$ на 199 десяток — наборов вершин правильных 10-угольников. Первый из этих наборов, $E_1, E_{200}, E_{2 \cdot 199+1}, \ldots, E_{9 \cdot 199+1}$, для удобства переобозначим: $D_1 = E_1$, $D_2 = E_{200}$, ..., $D_{10} = E_{9 \cdot 199+1}$; следующие наборы получаются из него поворотами на углы $2\pi k/199$, $k = 1, 2, \ldots, 198$. Веса также разобьем на десятки: $(1^2, \ldots, 10^2)$, $(11^2, \ldots, 20^2)$, ... Расставим числа первой десятки в вершинах $D_1 \ldots D_{10}$, как показано на рисунке 8 (в противоположных вершинах D_1 и D_6 — 1^2 и 2^2, в D_3 и D_8 — 3^2 и 4^2, в D_5 и D_{10} — 5^2 и 6^2, в D_7 и D_2 — 7^2 и 8^2, в D_9 и D_4 — 9^2 и 10^2). Тогда, поскольку $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, результирующий вектор для этого десятиугольника будет равен

$$\bar{v} = (1^2 \cdot \overline{OD_1} + 2^2 \cdot \overline{OD_6}) + \ldots + (9^2 \cdot \overline{OD_9} + 10^2 \cdot \overline{OD_4}) = 3 \cdot \overline{OD_6} + 7 \cdot \overline{OD_8} + 11 \cdot \overline{OD_{10}} + 15 \cdot \overline{OD_2} + 19 \cdot \overline{OD_4}$$

(рис. 9). Заметим, что точно такая же сумма получится, если заменить числа $1^2, \ldots, 10^2$ на $(10k+1)^2, \ldots, (10k+10)^2$. Действительно,

$$(10k + n + 1)^2 - (10k + n)^2 = 20k + 2n + 1 = 20k + (n+1)^2 - n^2,$$

поэтому результирующий вектор для нового набора чисел будет отличаться от $\bar{v}$ на вектор $20k \cdot (\overline{OD_2} + \overline{OD_4} + \ldots + \overline{OD_{10}})$; но этот вектор нулевой, поскольку сумма векторов в скобках должна переходить сама в себя при повороте на угол $2\pi/5$. (Аналогичное утверждение верно для векторов, соединяющих центр правильного m-угольника с вершинами, при любом m.)

Итак, расставим числа 1^2, ..., 10^2 в точках D_1, ..., D_{10}, как было указано. Затем точно так же разместим в этих точках числа второй десятки 11^2, ..., 20^2 и повернем все это размещение на угол $2\pi/199$; мы заполним второй 10-угольник. Продолжая этот процесс, на k-м шаге разместим по той же схеме $(10k+1)^2$, ..., $(10k+10)^2$ в точках D_1, ..., D_{10} и перенесем их на $(k+1)$-й 10-угольник поворотом на $2\pi k/199$ и т. д. Суммарный вектор $\bar{v}_k$ для k-го 10-угольника в силу этого построения будет равен вектору $\bar{v}_1=\bar{v}$, повернутому на угол $2\pi(k-1)/199$. Следовательно, общая сумма векторов $\bar{e}_i$ с «весами», расставленными по нашему правилу, будет равна $\bar{v}_1+\bar{v}_2+ ... +\bar{v}_{199}=\bar{0}$, т. е. это векторы, проведенные из центра правильного 199-угольника к его вершинам.

Международная олимпиада по информатике

Для проверки задачи I тура использовались следующие семь тестов, задающих начальные значения клеток в исходной таблице (перечислены числа в исходной таблице по строкам слева направо, тест 5 — требуемое расположение; в пустую клетку ставится ноль).

Тест 1: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 33, 9, 10, 11, 12, 13, 0, 0.

Тест 2: 1, 2, 3, 4, 0, 5, 6, 0, 8, 9, 10, 0, 11, 12, 13, 14.

Тест 3: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 3, 11, 12, 14, 0, 0.

Тест 4: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 11, 13, 14, 0, 0.

Тест 5: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 0, 0.

Тест 6: 7, 3, 5, 14, 0, 4, 9, 13, 1, 0, 2, 10, 11, 8, 12, 6.

Тест 7: 14, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 1, 0, 0.

Первые три теста (дающие 5 баллов каждый) испытывали программу на наличие проверки корректности исходных данных. Правильность преобразования исходной таблицы в конечную оценивалась тестами 4—7 (дающими по 10 баллов каждый). Эффективность алгоритма оценивалась с помощью тестов 6 и 7, за успешное прохождение каждого из них начислялось $20\ N_{\min}/N_{\text{уч}}$ баллов, здесь $N_{\min}$ — минимальное число шагов среди программ всех участников, $N_{\text{уч}}$ — число шагов программы данного участника. Еще 5 баллов жюри оставило в качестве премиальных.

Решение задачи II тура оценивалось с помощью следующих тестов.

Тест 1: EndTime=5; $N=3$; (0, 1), (3, 6), (2, 4); Length=2.

Тест 2: EndTime=5; $N=3$; (0, 1), (3, 5), (4, 2); Length=2.

Тест 3: EndTime=5; $N=3$; (0, 1), (—5, 5), (1, 2).

Тест 4: EndTime=5; $N=6$; (1, 4); (1, 4), (0, 1), (0, 1), (0, 1), (1, 4); Length=2.

Тест 5: EndTime=10; $N=5$; (1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 8), (7, 9); Length=3.

Тест 6: EndTime=20; $N=7$; (0, 5), (1, 2), (4, 5), (6, 8), (7, 9), (9, 14), (16, 17); Length=3.

Тест 7: EndTime=20; $N=10$; (0, 3), (2, 5), (5, 7), (6, 9), (8, 11), (10, 13), (12, 15), (14, 17), (16, 19), (18, 20); Length=4.

Тест 8: EndTime=20; $N=6$; (2, 3), (5, 7), (8, 9), (11, 13), (15, 17), (19, 20); Length=3.

Тест 9: EndTime=20; $N=11$; (2, 5), (16, 19), (4, 7), (18, 20), (10, 13), (12, 15), (8, 11), (6, 9), (14, 17), (11, 12), (8, 9); Length=3.

Тест 10: EndTime=9; $N=6$; (0, 5), (2, 5), (6, 9), (3, 6), (1, 3), (5, 7).

Тест 11: EndTime=59; $N=20$; (0, 2), (0, 2), (0, 2), (0, 4), (0, 4), (0, 4), (0, 4), (0, 4), (0, 6), (0, 6), (0, 6), (0, 6), (0, 8), (0, 8), (0, 8), (0, 8), (0, 8), (0, 8), (40, 50), (40, 50).

Тест 12: EndTime=12; $N=5$; (0, 8), (0, 7), (1, 4), (1, 5), (1, 4).

Тест 13: EndTime=9; $N=4$; (0, 8), (0, 3), (0, 5), (1, 6).

Тесты 1—3 — испытание программы на наличие проверки корректности исходных данных, они давали по 1 баллу каждый.

Правильность выполнения пунктов а)—в) проверялась с помощью тестов 4—9, каждый из них давал по 1 баллу за пункт а), 2 — за пункт б) и 3 — за пункт в).

Выполнение пунктов г) и д) оценивалось тестами 10—13. Тесты 10, 12 и 13 давали по 4 балла за пункт г) и по 5 баллов за пункт д); тест 11 давал 9 баллов за пункт г). Если некоторый пункт задания проходил все тесты, то это премировалось еще 4 баллами.

И опять 5 баллов жюри оставило в качестве премиальных.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 11)

1. Обозначим массу проволоки через x, тогда масса звена первой цепи равна $x:80$, а второй — $x:100$. Следовательно, $5=\frac{x}{80}$ —

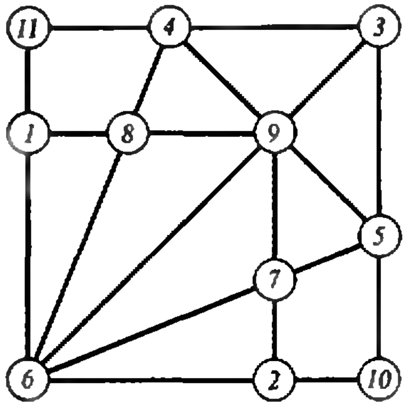


Рис. 10.

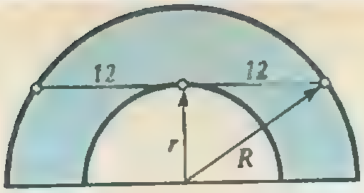


Рис. 11.

$-\dfrac{x}{100}=\dfrac{x}{400}$, откуда $x=2000$ г $=2$ кг.

2. Умножим второе выражение на 4 и затем вычтем первое. Получим $11(3a+c)$, т. е. величину, делящуюся на 11. Следовательно, если первая величина делилась на 11, то и вторая тоже должна делиться на 11.

3. См. рис. 10.

4. Площадь искомой фигуры равняется площади синей фигуры на рисунке 11. Эта площадь равна

$$S=\frac{1}{2}\pi R^2-\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{\pi}{2}(R^2-r^2)=$$
$$=\frac{\pi}{2}(12)^2=72\pi.$$

5. Количество вариантов покупки кота в мешке равняется $20\cdot 20=400$, а количество вариантов стоимости — 371, а именно, от 12 р. 30 коп. до 16 р. Значит, найдутся две покупки, имеющие одинаковую стоимость. Осталось заметить, что эти покупки не могут включать в себя одного и того же кота или один и тот же мешок.

Можно ли из тетраэдра сделать куб?

(см. «Квант» № 11)

1. Центральным моментом доказательства является лемма, по которой *произвольная треугольная пирамида равносоставлена с треугольной призмой такой же высоты и с основанием втрое меньшей площади.* Действительно, известная конструкция (рис. 12) разделяет призму на три пирамиды, из которых первая со второй и вторая с третьей имеют одинаковые основания и равные высоты. Значит, в силу нашей (неверной) посылки все эти пирамиды равносоставлены, т. е. наша призма равносоставлена с суммой трех одинаковых пирамид с таким же основанием и такой же высотой, как она сама. Основание треугольной пирамиды равносоставлено с объединением трех (пусть равных) треугольников втрое меньшей площади, а значит, опять-таки в силу нашей (неверной) посылки, треугольная пирамида тоже равносоставлена с объединением трех равных пирамид (см. рис. 12). Лемма доказана. Из нее следует, что произвольный многогранник равносоставлен с объединением призм. А призма объема a равносоставлена с брусом $1\times1\times a$: всякая призма равносоставлена с призмой с прямоугольным основанием (это следует из доказанной равносоставленности многоугольников равных площадей), выпрямление же призм производится при помощи конструкций, изображенных на рисунке 13. Заметим, что равносоставленность призмы с брусом верна независимо от посылки.

2. Набор Дена n-угольной призмы есть $(l,\varphi_1),\dots,(l,\varphi_n)$, (l_1,φ_1'), (l_1,φ_1''), $\dots$, (l_n,φ_n'), (l_n,φ_n'') (рис. 14). Но $\varphi_1+\dots+\varphi_n=\pi(n-2)$, $\varphi_1'+\varphi_1''=\pi,\dots,\varphi_n'+\varphi_n''=\pi$. Значит, наш набор Дена подобен набору $(l,\pi(n-2))$, $(l_1+\dots+l_n,\pi)$, который подобен пустому набору.

3. Это мы доказали в процессе решения упражнения 1.

4. $k\pi$ и $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$. Первое доказательство. Так как $\cos 2\varphi=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$, из рациональности $\operatorname{tg}\varphi$ следует рациональность $\cos 2\varphi$. Теорема 4 позволяет назвать все φ, соизмеримые с π, у которых $\cos 2\varphi$ рационален $\left(\text{это } \dfrac{k\pi}{4} \text{ и } \pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in Z\right)$. Остается посмотреть, у каких из этих углов тангенс

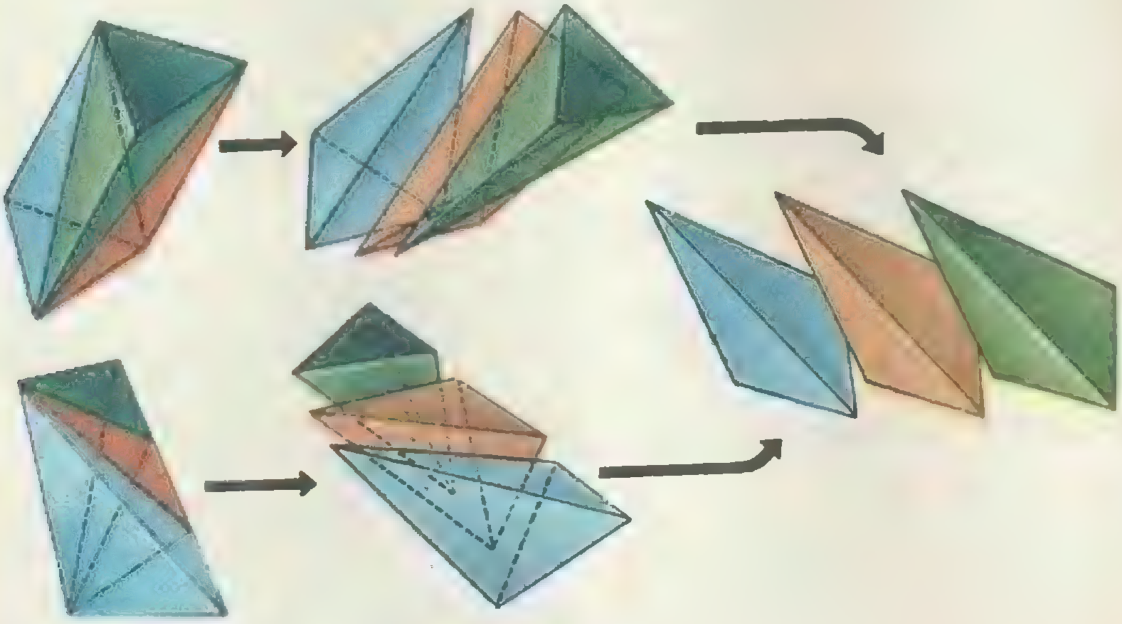


Рис. 12.

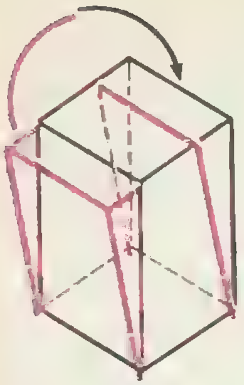


Рис. 13.

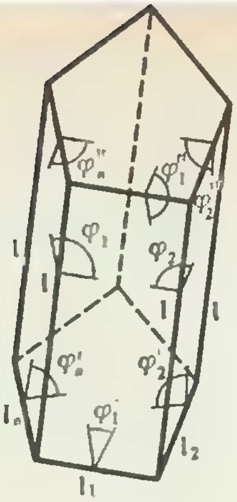


Рис. 14.

(определен и) рационален. Второе доказательство аналогично доказательству теоремы 4. Рассмотрим последовательность $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}2\varphi$, $\operatorname{tg}4\varphi, \ldots$ Если угол φ соизмерим с π, то в этой последовательности должны быть повторяющиеся члены. Но $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{p}{q}$, то $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2pq}{q^2-p^2}$, откуда видно, что знаменатель дроби $\operatorname{tg}2\alpha$ не превосходит знаменателя q дроби $\operatorname{tg}\alpha$, только если $q=1$.

5. Если $\cos^2\varphi$ рационален или $\operatorname{tg}^2\varphi$ рационален, то $\cos 2\varphi=2\cos^2\varphi-1=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ рационален, откуда $\varphi=\dfrac{k\pi}{4}$ или $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{2}$ (см. решение упражнения 4). Другими словами, $\varphi=0$, $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{\pi}{3}$ и далее с периодом $\dfrac{\pi}{2}$. Как это хорошо известно, $\cos^2\varphi$ действительно рационален для всех этих углов, а $\operatorname{tg}^2\varphi$ — для всех, кроме углов $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, для которых он не определен.

6. Если аддитивная функция непрерывна в точке $\alpha\in R$, то она непрерывна в любой точке $\beta\in R$. Действительно,

$$f(x-\alpha+\beta)=f(x)+f(-\alpha+\beta);$$

правая часть непрерывна при $x=\alpha$, значит, и левая часть непрерывна при $x=\alpha$, т. е. при $x-\alpha+\beta=\beta$.

[illegible]V Всесоюзная олимпиада по математике [illegible]«Квант» № 11)

9 класс

1. Воспользуйтесь тождеством $t^4-t+\dfrac{1}{2}=\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

2. Пусть E, F и S — середины сторон AB, CD и AD, M и N — точки, в которых прямая EF пересекает диагонали AC и BD (рис. 15). Так как SF — средняя линия треугольника ACD, то $SF \parallel AC$, и поэтому $\angle CMF=\angle EFS$. Аналогично, $\angle BNE=\angle FES$. По условию, $\angle CMF=\angle BNE$, значит, $\angle EFS=\angle FES$ и $SF=SE$. Следовательно, $AC=DB$.

3. См. решение задачи М1244.

4. а) Существует, см. рис. 16.

б) Существует. «Растянем» рис. 16, увеличив все горизонтальные размеры в 5 раз, а все вертикальные — в 9 раз. Тогда прямоугольник преобразуется в квадрат, а «уголки» — в равные многоугольники: «несимметричные уголки» (рис. 17).

5. Очевидно, что треугольники, заштрихованные на рисунке 18, попарно подобны. Из подобия треугольников следует, что $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_3}{b_2}$ и $\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{c_2}{c_1}$. Следовательно, $a_1b_1c_1=\dfrac{a_2b_3}{b_1}b_1c_1=a_2b_3c_1=a_2\dfrac{b_2c_2}{c_1}\cdot c_1=a_2b_2c_2$, и первое из требуемых равенств доказано. Второе равенство доказывается аналогично.

6. См. решение задачи М1243.

7. Ответ: 1989. Если x, y, z — неотрицательны, то $|x-y|\leqslant\max(x, y)$, $\max(\max(x, y), z)=\max(x, y, z)$, поэтому данное выражение не превосходит $\max(x_1, x_2, \ldots, x_{1990})=1990$. Так как четность значения данного выражения совпадает с четностью суммы $x_1+x_2+\ldots+x_{1990}=1+2+\ldots+1990=995\cdot1991$, то такое выражение не превосходит 1989. Пример постройте самостоятельно.

8. Всего имеется $1+2+\ldots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ вершин треугольников разбиения, и поэтому ломаная состоит из $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\dfrac{n^2+3n}{2}$ звеньев. Раскрасим в черный и белый цвета треугольники разбиения так, как показано на рис. 19 (на рис. 19 $n=5$). Черных треугольников всего $1+2+\ldots+n=\dfrac{n^2+n}{2}$. Но каждое звено ломаной проходит по некоторой стороне черного треугольника, а разность между числом звеньев ломаной и числом черных треугольников равна $\dfrac{n^2+3n}{2}-\dfrac{n^2+n}{2}=n$. Следовательно, не менее n черных треугольников содержат по два звена ломаной, угол между которыми равен 60°.

10 класс

1. Ответ: нельзя. Рассмотрим произвольную раскраску таблицы 1990×1990, при которой симметричные относительно центра таблицы клетки окрашены в разные цвета. Запишем в черных клетках таблицы числа $+1$, в белых — числа -1. Разделим таблицу на 4 квадрата 995×995 вертикальной и горизонтальной осями симметрии (на рис. 20 квадраты обозначены A_1, A_2, A_3, A_4). Каждый из этих квадратов содержит нечетное число клеток, поэтому сумма чисел в любом из них отлична от нуля. Так как симметричные относительно центра таблицы клетки окрашены в разные цвета, то сумма чисел в квадратах A_1 и A_4, а также в квадратах A_2 и A_3, равна

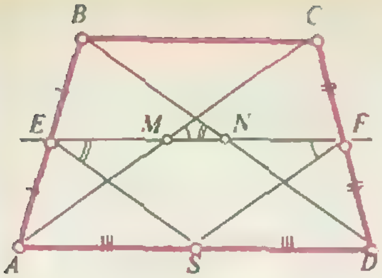


Рис. 15.

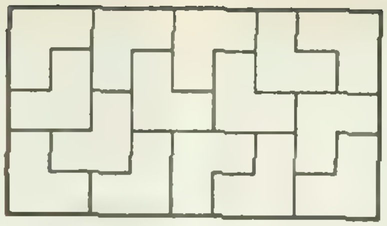


Рис. 16.

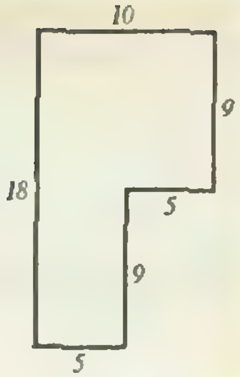


Рис. 17.

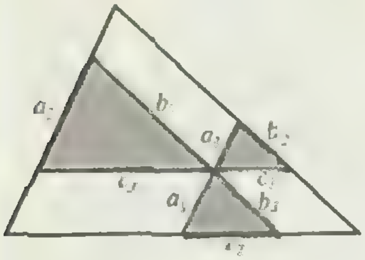


Рис. 18.

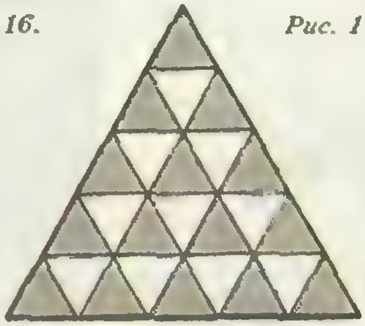


Рис. 19.

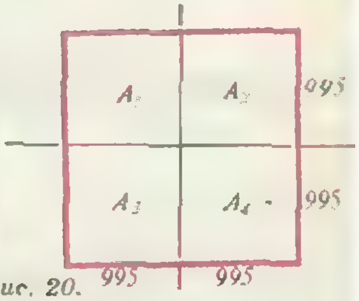


Рис. 20.

нулю. Поэтому сумма чисел в одном из квадратов A_1 или A_4, а также в одном из квадратов A_2 или A_3, положительна. Если это квадраты A_1 и A_3 или квадраты A_2 и A_4, то в одном из столбцов таблицы чисел $+1$ больше, чем чисел -1, т. е. черных клеток больше, чем белых. Если же это квадраты A_1 и A_2 или A_3 и A_4, то в одной из строк таблицы черных клеток больше, чем белых. Следовательно, раскраски, удовлетворяющей одновременно обоим условиям задачи, нет.

2. Для положительных чисел b и c справедливо неравенство $\frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3b-c}{4}$, причем равенство имеет место при $b=c$. Осталось подставить в это неравенство $b=a_i$, $c=a_{i+1}$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $a_{n+1}=a_1$) и сложить n полученных неравенств. Равенство имеет место при $a_1=a_2=\ldots=a_n=1/n$.

3. Обозначим через $(\widehat{l,l'})$ наименьший угол, на который нужно повернуть прямую l по часовой стрелке, чтобы она стала параллельной прямой l'.

Лемма. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой. Точка D, отличная от точек A и C, тогда и только тогда лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, когда $(\widehat{AB,BC})=(\widehat{AD,DC})$.

Доказательство леммы следует из теоремы о вписанном угле (рис. 21 *а*, *б*).

Возможны 2 случая.

1. *Окружности*, описанные около треугольников ABC и CDF, пересекаются, кроме точки C, еще и в точке K (рис. 22). Докажите, что точки B, D, E и K лежат на одной окружности, и, следовательно, K — общая точка окружностей, описанных около треугольников, указанных в условии задачи.

2. Окружности, описанные около треугольников ABC и CDF, касаются внутренним образом в точке C (рис. 23). Докажите, что точки

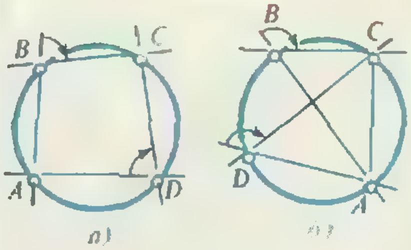


Рис. 21.

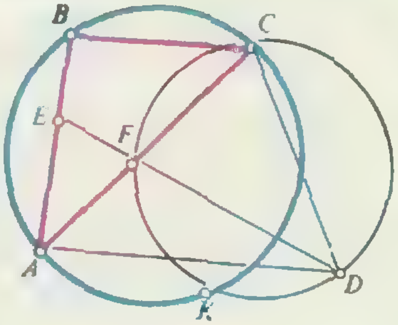


Рис. 22.

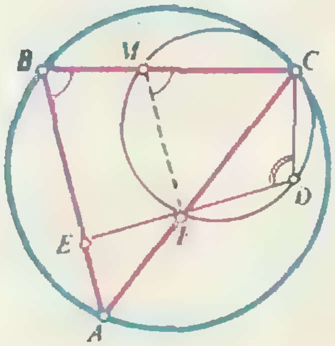


Рис. 23.

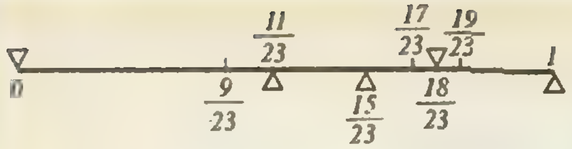


Рис. 24.

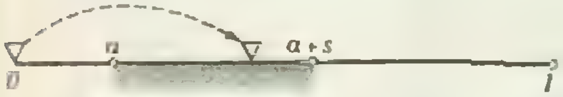


Рис. 25.

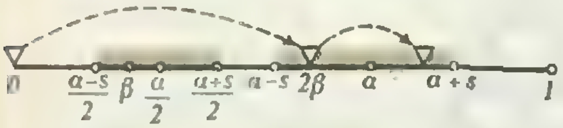


Рис. 26.

B, C, D и F лежат на одной окружности, и, следовательно, C — общая точка окружностей, описанных около треугольников из условия задачи.

4. Назовем ячейками отрезки, на которые разбивают отрезок $[0;1]$ отмеченные точки. Легко проверить, что если отметить точки 9/23, 17/23 и 19/23, то за один ход кузнечики не смогут попасть в одну ячейку (рис. 24). При любом количестве и при любом расположении отмеченных точек за два хода кузнечики смогут попасть в одну ячейку. Точнее, за два хода каждый из кузнечиков сможет попасть в ячейку наибольшей длины. Достаточно доказать это утверждение для кузнечика, находящегося в точке O. Пусть s — длина, α — левый конец ячейки наибольшей длины (если ячеек длины s несколько, то рассмотрим любую из них).

Если левый конец рассматриваемой ячейки расположен ближе к точке O, чем к правому концу, т. е. если $\alpha < s$ (рис. 25), то кузнечик, прыгнув через точку α, попадет в ячейку $[\alpha;\ \alpha+s]$ за один ход (если $\alpha=0$, т. е. кузнечик уже находится в рассматриваемой ячейке, то не потребуется ни одного прыжка). В противном случае, когда $\alpha \geqslant s$, рассмотрим отрезок $\left[\frac{\alpha-s}{2};\ \frac{\alpha+s}{2}\right]$ длиной s (рис. 26). Этот отрезок содержит по крайней мере одну отмеченную точку β, так как иначе ячейка, содержащая этот отрезок, имела бы длину, большую s. Прыгнув через точку β, кузнечик попадет в точку $2\beta \in [\alpha-s;\ \alpha+s]$. Если эта точка не лежит в ячейке $[\alpha;\ \alpha+s]$, то второй прыжок, на этот раз через точку α, приведет кузнечика в ячейку $[\alpha;\ \alpha+s]$.

5. *Ответ: $x=584$. Ясно, что x — натуральное* число, не превосходящее 1001, и что решение единственно (левая часть уравнения — строго возрастающая функция на множестве натуральных чисел).

6. См. решение задачи М1242.

7. Ответ: $2k$. Если число вершин многоугольника равно n, а раскраска удовлетворяет условию задачи, то число отрезков каждого цвета не превосходит $n-1$. Это утверждение следует из леммы.

Лемма. Если какие-то n сторон и диагоналей выпуклого n-угольника окрашены, то существует замкнутая ломаная, все звенья которой окрашены.

Доказательство. Будем последовательно стирать вершины, из которых выходит ровно один окрашенный отрезок, причем вместе с вершиной будем стирать и выходящий из нее окрашенный отрезок. Если при этом будут появляться новые вершины указанного типа, то с ними и с выходящими из них отрезками будем поступать аналогично. Первоначально число вершин равно числу окрашенных отрезков, на каждом шаге оба эти числа уменьшаются на 1, поэтому в любой момент число нестертых вершин равно числу нестертых окрашенных отрезков. Будем продолжать процесс стирания до тех пор, пока это возможно. Тогда либо среди оставшихся вершин найдутся вершины, из которых выходят по крайней мере два окрашенных отрезка, либо все вершины и все окрашенные отрезки стерты. Докажите, что последнее невозможно. В итоге останется несколько вершин, из каждой из которых выходят по крайней мере два окрашенных отрезка. Возьмем любую такую вершину A_1. По окрашенному отрезку мы попадем из нее в вершину A_2, из вершины A_2 — в вершину A_3, и так далее. Самое большее через n шагов такой путь замкнется. Лемма доказана.

Всего у n-угольника $\frac{n(n-1)}{2}$ сторон и диагоналей, а отрезков каждого цвета не более $n-1$. Поэтому $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant k(n-1)$, откуда $n \leqslant 2k$. При $n=2k$ требуемая раскраска существует. Возьмем правильный $2k$-угольник $A_1A_2\ldots A_{2k}$ и покрасим первым цветом ломаную $A_1A_{2k}A_2A_{2k-1}\ldots A_kA_{k+1}$. Вторым цветом покрасим ломаную, получающуюся из нее поворотом на угол π/k, и так далее. Тогда каждый отрезок будет покрашен ровно одним из k цветов, и при этом не будет замкнутых одноцветных ломаных.

8. См. решение задачи М1245.

11 класс

1. Данные окружности гомотетичны друг другу относительно точки A. Так как углы CBE и CDB измеряются половинами гомотетичных дуг CE и DB (рис. 27), то они равны. Следовательно, угол CBE измеряется половиной дуги BC окружности, проходящей через точки B, C и D, и, значит, прямая BE — касательная к этой окружности.

2. См. решение задачи М1241.

3. Покажем, что $f(x)\cdot f(y) \geqslant (f(\sqrt{xy}))^2$ для любых $x,\ y>0$. Действительно, обозначив $z=\sqrt{xy}$, *получаем*

$$f(x)\cdot f(y)-(f(z))^2=ab(x^2y+xy^2-2z^3)+$$
$$+ac(x^2+y^2-2z^2)+bc(x+y-2z)=$$
$$=ab(\sqrt{x^2y}-\sqrt{xy^2})^2+ac(x-y)^2+$$
$$+bc(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqslant 0.$$

BeatriceGloria_personal library

Пополнив, если необходимо, набор чисел x_i некоторым количеством единиц, добьемся, чтобы количество чисел в наборе n стало степенью двойки (при этом условия $x_1x_2\ldots x_n=1$ и $f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)\geqslant 1$ по-прежнему будут выполняться, ибо $f(1)=1$). Объединяя теперь числа в пары, затем — еще раз в пары и так далее и используя каждый раз доказанное неравенство, получаем

$$f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)\geqslant (f(\sqrt{x_1x_2}))^2\cdot(f(\sqrt{x_3x_4}))^2\cdot\ldots\geqslant$$

$$\geqslant (f(\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}))^4\cdot\ldots\geqslant (f(\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}))^n=(f(1))^n=1.$$

4. Ответ: можно. Введем в пространстве декартовы координаты так, чтобы у любой вершины большого куба каждая координата была либо 0, либо 100. Отметим некоторые вершины единичных кубиков с таким расчетом, чтобы на любом ребре каркаса длиной 100 находилась ровно одна отмеченная вершина (например, можно отметить каждую вершину с суммой координат, кратной 101). Для каждой неотмеченной вершины A построим репер $P(A)$ с вершиной в точке A так, чтобы ребро репера $P(A)$, лежащее на ребре каркаса длиной 100 (а таких ребер проходит через точку A ровно три), было направлено в сторону отмеченной вершины, лежащей на этом ребре каркаса. Таким образом, весь каркас разобьется на реперы.

5. *Ответ:* $n>1$. Число $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=$ $=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$ при $n>1$ — составное, *поскольку* $3^n-2^n>1$, *а при* $n=1$ *оно равно* простому числу 13.

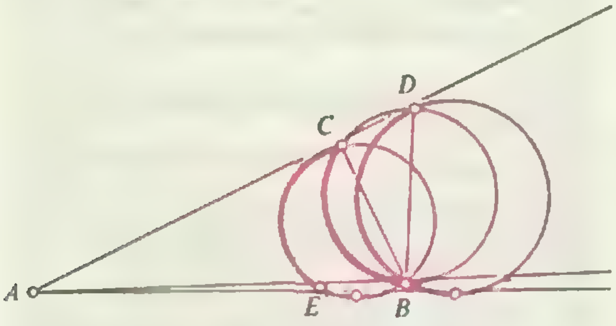


Рис. 27.

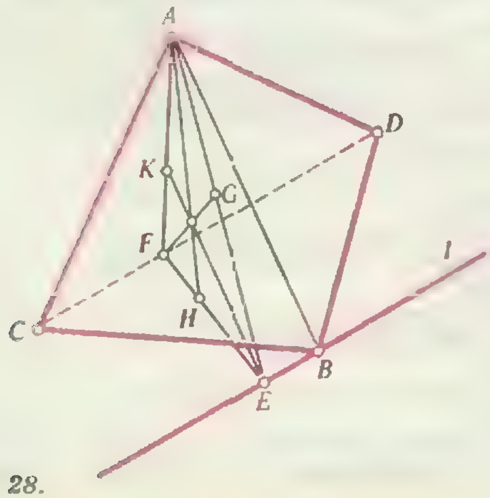


Рис. 28.

6. Пусть, для определенности, h — высота тетраэдра $ABCD$, проведенная из вершины A, d — расстояние между ребрами AB и CD. Проведем через вершину B прямую l, параллельную ребру CD, а через точку A — плоскость, перпендикулярную ребру CD и пересекающую прямые l и CD в точках E и F (рис. 28). Тогда высоты AH и FG треугольника AEF равны h и d соответственно. Третья высота EK треугольника AEF равна одной из высот тетраэдра $ABCD$ и, значит, не меньше h. Так как $AF\cdot EK=FE\cdot AH$, то $AF\leqslant FE$, и, следовательно,

$$\frac{h}{d}=\frac{AH}{FG}=\frac{AE}{FE}<\frac{AF+FE}{FE}\leqslant 2.$$

7. См. решение задачи М1243.

8. Докажем индукцией по четным n, что если даны n монет и известно, сколько среди них фальшивых, то за $\left[\frac{3n}{4}\right]$ взвешиваний можно определить все фальшивые монеты. При $n=0$ и $n=2$ утверждение верно. Пусть $n\geqslant 4$.

Сравним какие-нибудь две монеты. Если они различаются по массе, то обе сразу определяются, и задача сводится к $(n-2)$ монетам, поскольку $\left[\frac{3(n-2)}{4}\right]+1\leqslant\left[\frac{3n}{4}\right]$, а количество фальшивых монет среди оставшихся известно.

Пусть монеты весят одинаково. Сравним эту пару монет с другой парой. Если пары различаются по весу, то, сравнивая друг с другом монеты второй пары, определяем все четыре монеты, и задача сводится к $(n-4)$ монетам, поскольку $\left[\frac{3(n-4)}{4}\right]+3=\left[\frac{3n}{4}\right]$. Если пары весят одинаково, то сравним всю четверку монет с другой четверкой. Если четверки различаются по весу, то первая из них целиком определяется, и задача сводится к $(n-4)$ монетам. Если же четверки весят одинаково, то сравним всю восьмерку монет с другой восьмеркой, и так далее. Вообще, если на некотором шаге группа из 2^m одинаковых монет отличается по весу от другой группы из 2^m монет, то все 2^m монет первой группы целиком *определяются, и задача сводится к* $(n-2^m)$ монетам, поскольку $\left[\frac{3(n-2^m)}{4}\right]+(m+1)\leqslant$ $\leqslant\left[\frac{3n}{4}\right]$, $m\geqslant 2$. Если, наконец, оказалось, что $2^m>\frac{n}{2}$, то все 2^m монет полностью определяются.

Напечатано в 1990 году

№ с.
«Кванту» — двадцать лет 1 2
Памяти А. Д. Сахарова 2 2
Письма о физике 4 2
Золотая медаль Филдса 6 52
Интервью с В. И. Арнольдом 7 2

Статьи по математике

Абакумов Е., Ижболдин О., Курляндчик Л., Нецветаев Н. Кратчайшие сети 3 17
Барг А., Лицын С. Что есть Фортуна 9 8
Белов А., Сапир М. «И возвращается ветер...», или Периодичность в математике 4 6
Беркинблит М., Глаголева Е. Математика в живых организмах 2 18
Васильев Н. Метрические пространства 1 16
Гашков С. Задача Чебышева и тригонометрические многочлены 6 25
Гисин В. Чертежник рисует квадрат 12 14
Кельберт М., Питербарг Л. Медианная фильтрация 10 8
Котий О., Майоров А. Семейство прямых, делящих площадь пополам 8 20
Котов Ю., Табачников С. Сети Чебышева 7 24
Лев В. Поглядим на диаграмму... 3 11
Панов А. Прыгающий мячик и теория удара 8 2
Соловьев Ю. Инверсоры 4 23
Табачников С. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля 6 23
Табачников С. Текстильная геометрия 7 16
Табачников С. Математика и нацизм 10 14
Табачников С. Вариации на тему Эшера 12 2
Тоом А. Дама с собачкой 2 10
Фукс Д. Лента Мёбиуса 1 30
Фукс Д. Рогатая Сфера Александера 6 2
Фукс Д., Табачников С. Сегменты постоянной площади 8 26
Фукс Д. Можно ли из тетраэдра сделать куб? 11 2
Шапиро Б. О ньютоновском притяжении эллипсоидов 5 18
Шевелев В. Латинские прямоугольники 5 6

Статьи по физике

Абрикосов А. О чем не думает горнолыжник 3 2
Асламазов Л. Снежные заносы 1 15
Блиох П. Со стороны виднее 9 2
Богданов К. Большие и маленькие на прогулке 6 16
Вайнин В., Горелик Г. Пятно Пуассона и Шерлок Холмс 4 19
Варламов А., Камерлинго К. Случай в поезде 5 2
Веденов А., Иванов О. С какой скоростью растет зеленый лист? 4 11
Винокур Р. Кинематика баскетбольного броска 2 4
Винокур Р. Защита от шума и дедуктивный метод 11 18
Воробьев И. Охлаждение светом 5 10
Гуревич Ю. Холодное горение 6 8
Капица П. О сверхтекучести жидкого гелия II 1 7
Кикоин А. Температура, теплота, термометр 8 10
Кузин А. Антропный принцип — что это такое? 7 8
Левин Б. Моретрясение 10 2
Митрофанов А. О морозных узорах и царапинах на стекле 12 18
Морин Р., Хобби Р. Ультразвук в медицине 9 17
Сигаловский Д. Почему человек не стал великаном 7 26
Смородинский Я. Размышления о массе 2 27
Смородинский Я. Закон всемирного тяготения 12 8
Стасенко А. Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха 1 24
Стасенко А. От границ Вселенной до Тартара 11 12
Томсон Дж. Дж. О динамике мяча для игры в гольф 8 32

Новости науки

Распределение Планка и реликтовое излучение 8 25

Задачник «Кванта»

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 3 26
Задачи М1201 — М1260, Ф1208 — Ф1267 1—12
Решения задач М1176 — М1235, Ф1188—Ф1247 1—12
Список читателей, приславших правильные решения 1,4,7, 10

«Квант» для младших школьников

Задачи 1—12
Акулич И. Вычислять или угадывать — выбирайте сами! 8 54
Бронштэн В. Кто придумал «почезрительную трубу»? 9 36
Льюис Кэрролл и его задачи 10 36
Перельман Я. Искуснее Колумба 7 46
Савин А. Камушки и шахматная доска 1 50
Савин А. Проволока, магнитофон, пишущая машинка и математика 4 44
Савин А. Римские, арабские и другие 12 32
Табачников С. Чего больше? 10 34
Тихомирова В. Электризация через влияние 3 38
Тихомирова С. Световые явления 11 34
«Ты — мне, я — тебе» 6 44
Штейнберг А. Еще раз о законе Паскаля 2 52
Штейнберг А. В роли магдебургского бургомистра 5 38

Калейдоскоп «Кванта»

Спектры 2 40
Геометрическая прогрессия 3 •
Как движутся заряженные частицы 4 •
Эллипс 5 •
Выталкивающая сила 6 •
Медианы треугольника 7 •
Масса 8 •
Парабола 9 •
Пары 10 •
Среднее гармоническое 11 •
Электрические цепи 12 •

Р — значит ракета

Берет старт новый конкурс! 5 66
Вместе к Марсу! 7 69
Заочная аэрокосмическая школа 11 55
III Заочная аэрокосмическая олимпиада 12 49
Советско-американский конкурс юных любителей астрономии и космонавтики 10 64
Горшков Л. Полет на Марс 6 57
Ксанфомалити Л. Перспективы поиска обитаемых планет 7 65
— • — 8 58
Нариманов Е. 56 миллионов километров до Красной планеты 10 65
— • — 11 51
— • — 12 46
Николаев В. Человек за бортом 3 25
Николаев В. Космический полет — это так просто!?.. 4 52
Феоктистов К. Полет к звездам 9 50

Есть идея?!

Идея есть, и не одна 7 58

Ракурс

Муравей и... электронный микроскоп 10 63
Падающая капля и воздушный пузырек 11 57

Школа в «Кванте»

Указатель опубликованных статей 7 48

Физика 9—11:

Как зависит g от глубины? 3 49
Силовые линии и теорема Гаусса 3 52
Что произойдет, если исчезнет трение? 5 50
Об электрическом сопротивлении проводников 5 53
Компьютер — в холодильнике?! 5 55
Кинематика плоскопараллельного движения 9 42
Генератор незатухающих колебаний 9 44
Сила трения покоя 11 37
За какое время сливаются капли? 11 42
Избранные школьные задачи по физике 9 47
— • — 11 44

Математика 9—11:

Шесть доказательств теоремы о медианах 1 54
Уравнения, которые удается решить 2 55
Задачи в стиле Заочной школы 2 57
Несколько эпизодов из жизни вписанных и описанных окружностей 8 66
Некоторые полезные показательные и логарифмические соотношения 10 42
Начинаем с неравенства Евклида... 12 34

* * *

Конкурс «Математика 6—8» 9 48
— • — 10 43
— • — 11 36
— • — 12 30

Лаборатория «Кванта»

Драчев В., Мазур А. Фотокамера «Рыбий глаз» 1 57
Креймер В. Как увидеть... несуществующее 6 55
Майер В. Зеленый туман 4 47
Майер В., Майер С. Экспериментируем с ИК лучами 10 44
Михеев П. Вращающаяся жидкость 7 51
Паненко Д. Дифракция в лазерном свете 12 36
Уокер Дж. «Электрический злодей и волшебное колечко» 8 70
Цыпин М. Опыты с высокочастотным генератором 2 59

Математический кружок

Башмаков М. О постулате Бертрана 1 59
Генкин С., Курляндчик Л. Числовые конструкции 9 58
Гирич А. Несколько задач о треугольниках и окружностях 11 46
Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Иенсена 4 57
Сидоров Ю. Об одном замечательном уравнении 5 58
Тихомиров В. Геометрия или анализ 10 48
Хонсбергер Р. Старая японская теорема 7 54
Эрдниев Б., Манцаев Н. Теоремы Чевы и Менелая 3 56

Информатика и программирование

Всесоюзный конкурс «Юный программист» 10 32

Практикум абитуриента

Указатель опубликованных статей 7 50
Александров Д. Газовые законы и механическое равновесие 8 73
Гельфгат И. Такие интересные ошибки... 12 42
Гольдман А., Звавич Л. Числовые средние и геометрия 9 62
Затакавай В. Решение неравенств методом интервалов 5 63
Зильберман А. Явление самоиндукции 6 63
Можаев В. Переходные процессы в электрических цепях 4 64
Слободецкий И. Электрические машины постоянного тока 1 63
Черноуцан А. Системы отсчета в задачах механики 2 62
Черноуцан А. Проводящие сферы в электростатике 10 52
Шарыгин И. Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене 3 60
Шуликовская В. Неравенство Коши и объемы 9 65

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт 1 68
Московский институт электронного машиностроения 1 69
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 1 71
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 67
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 3 65
Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе 3 67
Московский инженерно-физический институт 3 68
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики 3 69
Московский институт стали и сплавов 3 70
Ленинградский государственный университет 4 71

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 4 72
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина 4 72
Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) 4 73
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана 5 67
Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского 5 68
Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина 5 69
Московский институт электронной техники 5 71
Московский энергетический институт 5 72
Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1989 году 6 67

Олимпиады

Избранные задачи Ленинградской городской математической олимпиады 1989 года 1 74
Компьютерный турнир XXIII Всесоюзной олимпиады по математике 1 75
Задачи LIII Московской математической олимпиады 9 70
Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 9 71
Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана 9 73
XVI Всероссийская олимпиада школьников 10 69
Несколько задач Бакинской физической олимпиады 10 72
XXIV Всесоюзная олимпиада по математике 11 58
XXIV Всесоюзная олимпиада по физике 11 60
III Всесоюзная олимпиада по информатике 11 65
Задачи Ленинградской городской олимпиады по математике 11 70
XXXI Международная олимпиада по математике 12 52
XXI Международная олимпиада по физике 12 54
II Международная олимпиада по информатике 12 58

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 1 72
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата 2 71
Прием на экспериментальное отделение ВЗМШ «Языки и литература» 2 72
Заочная физическая школа при МГУ 4 62
Заочная школа при НГУ 7 76
Вечерняя физическая школа при МГУ 8 77
Школа будущих инженеров 8 77
Памяти академика Колмогорова 9 66
V Научно-техническая конференция школьников 10 68
«Городок открытий и творчества» 11 71
Заочная физико-техническая школа при МФТИ 12 61
Конкурс программных разработок «Борланд-Контест» 12 66

Игры и головоломки

Небольшой переполох в аптеке 2 50
Превращения головоломки адмирала Макарова 7 70
Движущиеся игрушки из картона и бумаги 9 67
Головоломка «цветной треугольник» 9 69
Четыре головоломки с одной идеей 11 72
Кубики Мак-Магона и таблица Конвея 12 64
Кроссворд 12 65

Фантастика

Гаррисон Г. Магазин игрушек 10 58
Киз Д. Цветы для Элджернона 5 44
—•— 6 46
—•— 7 60
Сайкс С. Цифертон 2 44
—•— 3 44

«Квант» улыбается

Из «Математической смеси» Дж. Литлвуда 4 42
Движенья — нет? 5 36
Задача о встречных поездах 5 43
Об обратимости времени 5 43
Сказки 6 42
Комбинация из двух пальцев 8 65
Кто во что горазд 9 20
Теорема о крокодиле 11 30
Магнитный мех 11 49
Математические перемешки 12 45
Нам пишут 2,7,9,11,12
Реклама 2,3,5,7,9,11,12

Смесь

Слово, буква, число 3 43
О трисекции угла и удвоении куба 5 62
Вниманию наших читателей 5 80
—•— 7 44
—•— 11 17
—•— 12 65
Механическая модель лазера 8 9
Заказы принимаются 8 19
—•— 9 39

Шахматная страничка

10 ходов 1 3-я с. обл.
Максиммумер 2 •
Исторический матч 3 •
Компьютер угрожает человеку 4 •
Шестой чемпионат мира 5 •
Неподвижный король 6 •
Изменения в кодексе 7 •
«Опровержение» шутки 8 •
Люди и машины 9 •
Самая длинная партия 10 •
Экс-чемпион — против компьютеров 11 •
Экс-чемпион против микрочемпиона 12 •
Наша анкета 3,6,9,12
Журнал — читатель — журнал 3 72

Высший Колледж наук о материалах

при Московском государственном университете и Академии наук СССР объявляет первый набор студентов

Колледж создан на правах факультета при МГУ и готовит специалистов высокой квалификации мирового уровня для выполнения материаловедческих программ в институтах АН СССР, в научно-исследовательских группах зарубежных фирм и совместных предприятий.

Обучение в Колледже позволит Вам получить фундаментальную подготовку по естественно-научным дисциплинам, приобрести знания и навыки в области менеджмента и маркетинга, обеспечит свободное владение иностранными языками и универсальное гуманитарное образование.

В течение одиннадцати семестров, один из которых отводится на зарубежную стажировку, ведущие специалисты, с учетом Ваших индивидуальных способностей и интересов, приобщат Вас к последним достижениям современной науки и технологии в области направленного синтеза и диагностики материалов будущего — керамики, высокотемпературных сверхпроводников, композитов, полимеров. Участие в научных исследованиях, работа на новейшем зарубежном оборудовании и компьютерных системах даст Вам возможность специализироваться в выбранной Вами области материаловедения.

Студенты Колледжа получают повышенную стипендию, а выпускники Колледжа — диплом об окончании МГУ.

Иногородним на время обучения предоставляется общежитие.

Решив проверить свои силы у нас, вы ничем не рискуете — отбор на первый курс проводится по результатам заочного зимнего конкурса и очной весенней сессии. Заявки на участие в конкурсе, с указанием кратких сведений о себе, просим выслать не позднее 31 декабря 1990 года по адресу:

119899, Москва В-234, ГСП-3, Ленинские горы, МГУ, Химический факультет, Высший Колледж наук о материалах; тел. 939-34-90 (звонить с 11^{00} до 17^{00}).

Анкета 12 — 90

Помещая последний раз в этом году нашу ежеквартальную анкету, мы благодарим всех читателей, откликнувшихся на предыдущие анкеты.

Мы собрали «пакет» вопросов, касающихся проблем развития науки и образования, и передали главному редактору журнала академику Ю. Осипьяну. Его ответы, а также обзор читательских мнений мы планируем опубликовать в начале будущего года.

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 12 — 90».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______________________

Ваша профессия (если Вы работаете): ______________________

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______________________

____

Анкета 12 — 90

3. Какие статьи и задачи из номеров 10—12 (номер укажите) Вам понравились?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 10—12 Вам больше всего понравилась?

6. Ваши общие замечания, пожелания, вопросы к редакции, главному редактору:

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Зильберман, С. Иванов,
С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов, Т. Петрова,
А. Сосинский, А. Стасенко, С. Табачников,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:

А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, А. Мигдал,
В. Можаев, И. Новиков, В. Разумовский,
Н. Розов, А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
В. Фабрикант, Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
А. Виленкин, М. Денисова, А. Егоров,
Л. Кардасевич, И. Клумова, В. Овсиенко, Т. Петрова,
С. Табачников, В. Тихомирова

Номер оформили:
Е. Барк, С. Иванов, Д. Крымов, Н. Кузьмина,
С. Лухин, Э. Назаров, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 23.09.90. Подписано к печати 15.11.90.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1. Гарнитура
школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45.
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 8,85. Тираж 155 300 экз.
Заказ 1825. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ЭКС-ЧЕМПИОН ПРОТИВ МИКРОЧЕМПИОНА

Пройдет некоторое время, и, возможно, встречи машин и гроссмейстеров, победы электронных чемпионов над известными шахматистами станут обычным делом. Но пока что каждый поединок компьютера с гроссмейстером, особенно успешный для компьютера, вызывает повышенный интерес.

Дело происходило в Мюнхене в день открытия крупного международного турнира, проводимого, кстати, фирмой «Мефисто». В большом шахматном шоу участвовали гроссмейстеры А. Карпов и Р. Хюбнер. Каждый из них провел сеанс одновременной игры, причем соперниками были многие известные общественные, культурные и политические деятели Баварии, а также шахматный автомат «Мефисто-Порторож», победитель последнего, девятого микрокомпьютерного первенства.

И Карпов, и Хюбнер потерпели всего по одному поражению, и, как читатель, наверное, уже догадался, в обоих случаях победу одержал компьютерный чемпион. Этот успех машины в поединке с двумя гроссмейстерами, особенно — с 12-м шахматным королем, стал настоящей сенсацией. Небывалое достижение компьютера было подробно освещено популярными газетами «Die Zeit» и «The Times». Вот эта партия.

А. Карпов — «Мефисто»
Славянская защита

1. d4 d5 2. c4 c6 3. Кf3 Кf6 4. Кc3 dc 5. a4 Сg4 6. Кe5 Сh5 7. f3 Кfd7 8. К:c4 e5 9. Кe4 Сb4+ 10. Сd2 Фh4+ 11. g3 Фe7.

Карпову «по рангу» положено знать все варианты этого дебюта, а «Мефисто» опирается на свою обширную библиотеку, учитывающую современное состояние славянской защиты. Так или иначе, оба соперника до сих пор действовали по последнему слову теории, правда, обычно черные играют сразу 10...Фe7.

12. С:b4 Ф:b4+ 13. Фd2 Ф:d2+ 14. Кр:d2 ed 15. Кed6+ Крe7 16. К:b7 Кa6. Как ни странно, и эта позиция содержится в дебютных справочниках, правда, с пешкой на g2 (отсутствовал промежуточный шах с поля h4). В этом случае после 13. e3 белые получали минимальный перевес в эндшпиле. Сейчас же этот ход невозможен из-за беззащитности пешки f3. С другой стороны, продвижение g2—g3 позволяет слону белых f1 выбраться на свободу. Так что можно считать, что лишь следующий ход белых придает игре новое направление. Наверное, именно здесь Карпов понял, что перед ним нешуточный соперник. Тем интереснее, что, несмотря на особое внимание к шахматному роботу, экс-чемпион не сумел его одолеть.

17. Сh3 Лab8 18. Кba5 Лhc8 19. f4 f6 20. e3. Из дебюта белые вышли с определенным перевесом, но в условиях сеанса не смогли его увеличить. Сейчас, например, неплохо было 20. Лhe1 и лишь затем e2—e3, не теряя времени на перемещение короля.

20...de+ 21. Кр:e3 Кb4 22. Крf2 Кd3+ 23. Крg2 К:b2 24. Лhe1+ Крd8 25. Кd6 Лc7 26. g4 Сg6 27. f5 Кe5 28. fg hg.

В результате бурной схватки белые выиграли фигуру за две пешки, что в нормальной обстановке было бы весьма серьезным достижением. Но в сеансе одновременной игры в возникшей абстрактной позиции легко ошибиться.

29. Лab1. Точнее сразу 29. g5 — в случае 29...Крe7 очень сильно 30. Кdc4, а на 30...Лb4 следует, как и в партии, 31. Лe4, и пешка a4 защищена.

29...Лb4 30. g5 Крe7 31. Лe4 Л:e4 32. К:e4 К:a4. Материальное равновесие можно считать восстановленным, и теперь «Мефисто» шаг за шагом улучшает свое положение.

33 Лa1 Кb6 34. Кc5 Крe8 35. Кab7 Кf7 36. gf gf 37. Л:a7. Соотношение сил опять изменилось в пользу белых, но их легкие фигуры разбросаны по всей доске, и шансов на успех почти нет. **37...Крe7 38. Лa6 Кd5 39. Крg3 Кe5 40. Сg2 Кe3 41. Сh1 g5 42. Кa5 Крd6 43. Кe4+ Крe7 44. Кc5 Крd6 45. Кcb7+ Крd7 46. Лa8.** Повторение ходов — 46. Кc5+ Крd6 47. Кb7+ явилось бы логичным завершением увлекательного сражения. Но Карпов отказывается от ничьей, видимо, недооценивая мастерство электронного партнера. «Мефисто» бросает вперед пешку «c», и чаша весов склоняется в его пользу.

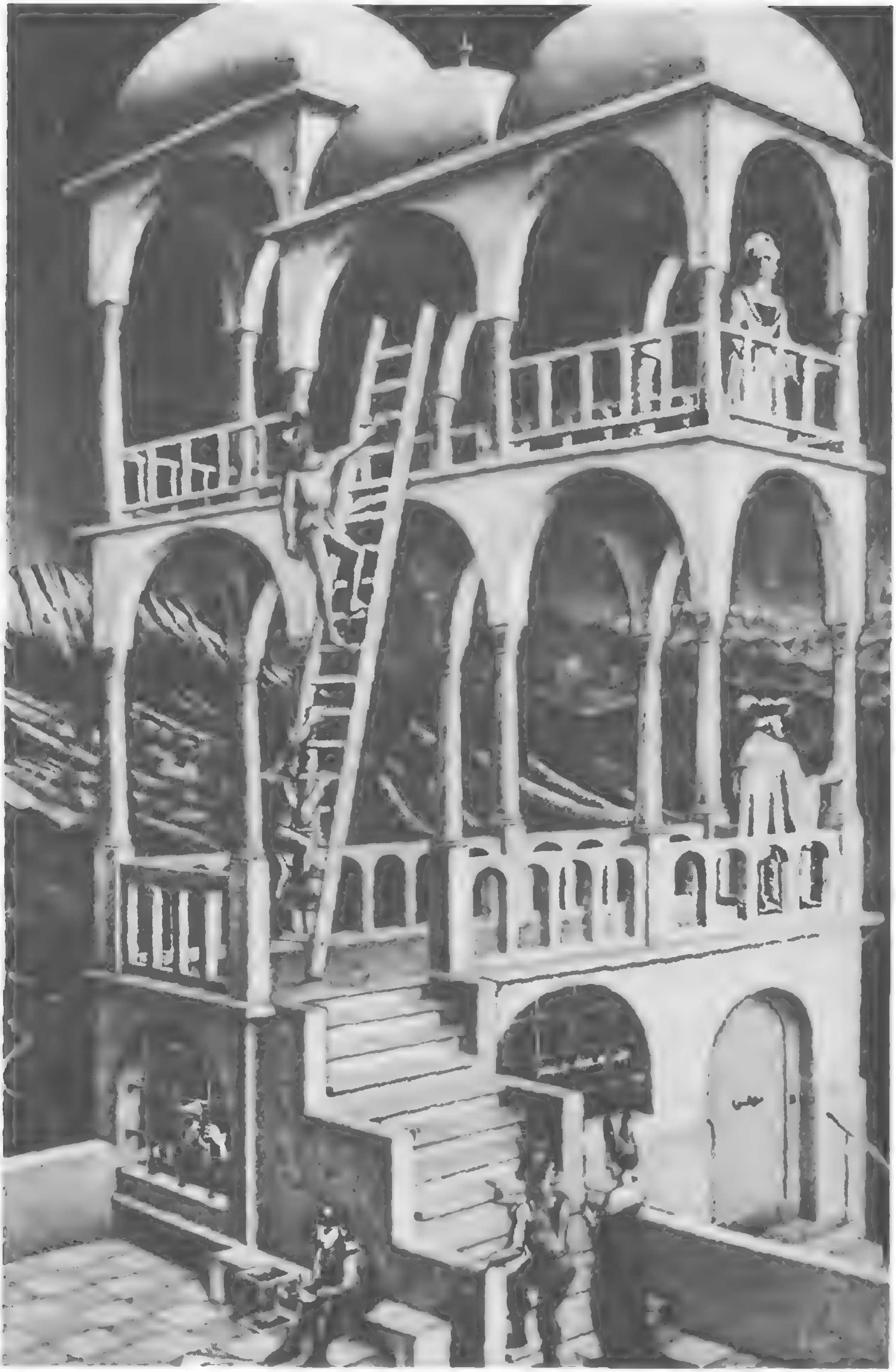
46...c5 47. Лh8 Крe6 48. Кb3 Кf5+ 49. Крf2 Кd3+ 50. Крe2 c4 51. Кa1 Кf4+ 52. Крe1 c3 53. Кc2 Лc4 54. Крd1 Лc7 55. Лe8+ Крf7 56. Лd8 Крe7. Грозит 57...Л:b7, а уступать линию «d» белые не могут.

57. Кb4. С надеждой вызвать осложнения, например 57...Л:b7 58. Кc6+ Крf7 59. Кe5+ fe 60. С:b7 Кe3+ 61. Крe1 (но не 61. Крc1 Кe2+ 62. Крb1 c2+) 61...c2 62. Крd2.

57...Кe3+ 58. Крe1 c2 59. К:c2 Л:c2 60. Лd2 Лc1+ 61. Крf2 Кc4. Точнее, чем 61...Кg4+ 62. Крg3 Лg1+ 63. Сg2 Кe3 64. Крf2! с неясной игрой.

62. Лd4 Кe6 63. Лe4 Л:h1 64. Л:c4 Л:h2+. Здесь можно поставить точку: у черных две лишние пешки, к тому же связанные и проходные, и через несколько ходов белковый гроссмейстер поздравил электронного с достойной победой.

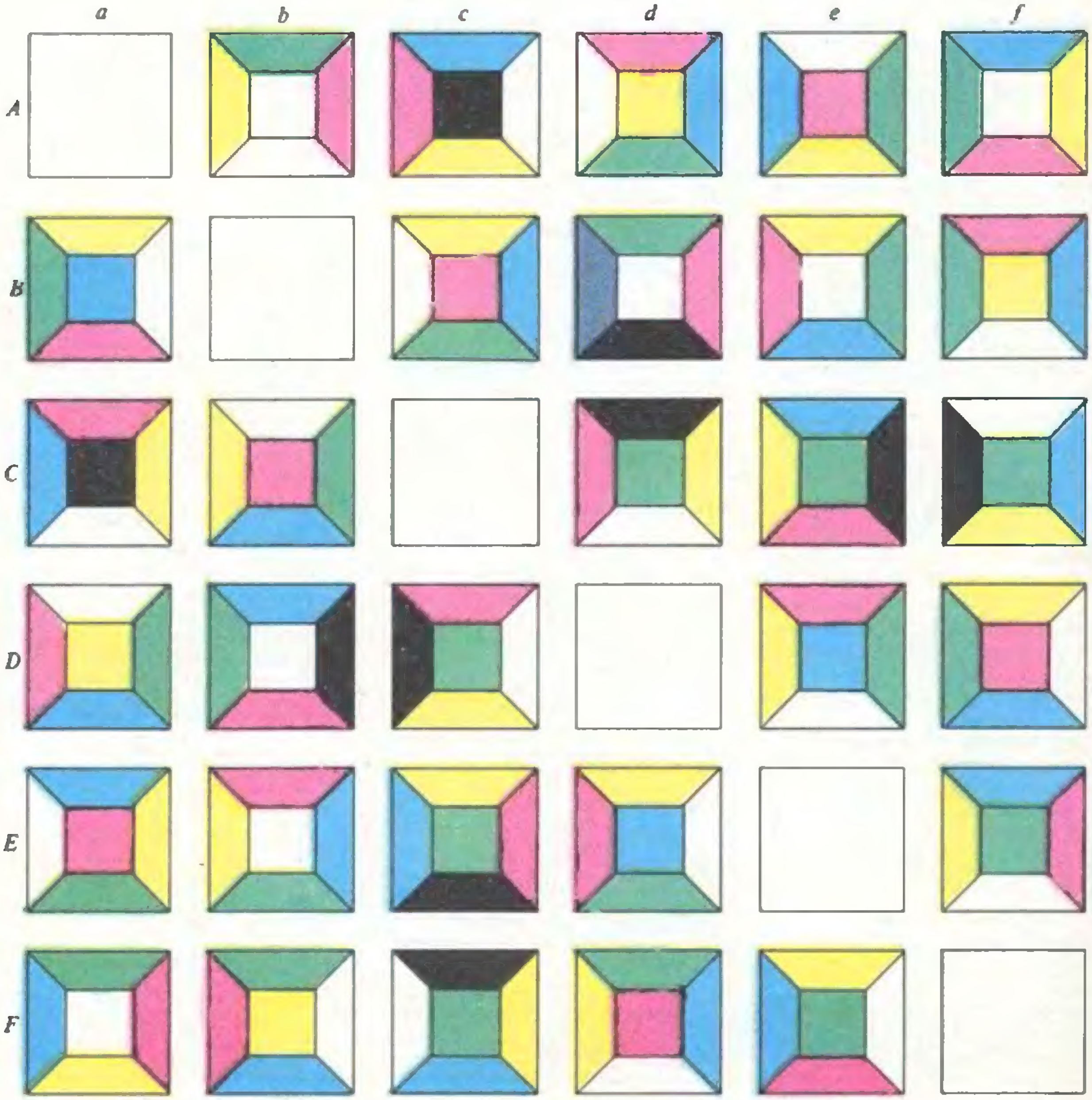
Е. Гик



45 коп.
Индекс 70465

1036-15-Т

Эта таблица составлена известным американским специалистом по «серьезной» и занимательной математике Дж. Конвеем. Здесь показаны 30 шестицветных раскрасок граней куба (видны цвета верхней и четырех боковых граней, цвет нижней грани — тот, которого не хватает) — все «геометрически различные» раскраски, т. е. не совместимые друг с другом вращениями куба. Таблица Конвея обладает замечательным свойством: если взять все кубики из строки Y и столбца x (за исключением кубика Yx, стоящего на пересечении этих рядов), то из них можно сложить куб $2\times2\times2$, который снаружи будет окрашен точно, как кубик Xy, причем любые две «внутренние» грани кубиков, прилегающие друг к другу, будут окрашены одинаково. Тем самым моментально решается задача Мак-Магона, приведенная на обложке прошлого номера «Кванта» (подробнее о кубиках Мак-Магона рассказывается в этом номере журнала в заметке на с. 00). В таблице можно найти и более простые, но тоже интересные закономерности: раскраски Xy и Yx являются зеркальными отражениями друг друга, в любом ряду — строке или столбце — встречается ровно по разу каждая из 15 возможных расцветок пар противоположных граней и каждая из 40 «геометрически различных» расцветок трехгранных углов куба и др. Попробуйте понять общий принцип составления таблицы и доказать, не перебирая все варианты, что она действительно дает решение задачи Мак-Магона для любого кубика-образца.

Д. К.